Druhý výlet do moderní matematiky

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

DRUHÝ VÝLET DO MODERNÍ MATEMATIKY

32

Vydal ÚV Matematické olympiády a ÚV SSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAN VYŠÍN — JITKA KUČEROVÁ

druhý výlet do moderní matematiky

PRAHA 1973
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali František Macháň a Vlastimil Macháček

PŘEDMLUVA

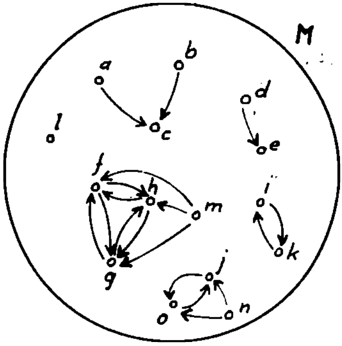
První výlet do moderní matematiky (ŠMM svazek 30) začal a skončil v zemi množin. Při zpáteční cestě jste se setkali s množinovými operacemi, tj. poznali jste, jak lze manipulovat s celými množinami — tvořit jejich průniky, sjednocení apod. To vám jistě vnuklo myšlenku, podívat se i na „život uvnitř množin". Je to nepochybně nápad dobrý, protože množiny, v kterých se něco děje, jsou všude kolem nás. Matematikové, kteří mají rádi učené názvy, říkají množinám, v nichž bují vnitřní život,

STRUKTURY

Tato učenost se dá vysvětlit snadno i člověku, který toho mnoho z matematiky neumí. Představte si, že na dvoře stojí skupina 15 dětí z několika rodin: to je „mrtvá množina ***M***". Ale děti začnou hrát hru: „ukaž svou sestru", při níž každé dítě má ukázat na všechny své sestry. Cizí návštěvník, který nezná děti ani jejich jména, si nakreslí takový obrázek, jako je obr. I.

Z tohoto nakresleného záznamu vyčte např., že a, b jsou dva bratři, c je jejich sestra; e je dívka, d je její bratr; f, g, h jsou tři sestry, m je jejich bratr; i, k jsou dvě sestry, l je buď dívka, která tu nemá sourozence, nebo chlapec, který tu nemá sestru. Hra „ukaž svou sestru" odkryla jisté vztahy mezi dětmi skupiny ***M*** — matematikové říkají, že v množině ***M*** je definována *relace*: „množina ***M*** ožila"!

Množiny mohou ovšem „ožít" pomocí složitějších relací: tak např. v rovině sestrojíme ke každým dvěma bodům X, Y bod Z, který je středem dvojice X, Y, a studujeme vlastnosti této operace „střed". Ukáže se, že toto „oživení" roviny je velmi důmyslné: získáme tak nové východisko pro zkoumání geometrických vlastností.



Obr. I.

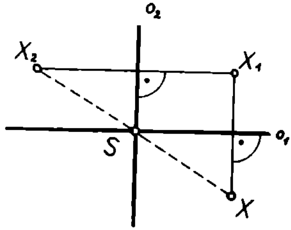
Tak tedy při novém výletě si budete všímat dvojího druhu „oživení" množin: jednak tzv. *binárními**) *relacemi*, jednak tzv. *binárními operacemi*. Však jste ve škole poznali mnoho jejich příkladů, ovšem jen v množinách číselných a bodových: třeba $x = y$, $x < y$, x je dělitel čísla y, x je zbytek při dělení čísla y pěti, X je obraz bodu Y v dané středové souměrnosti — to jsou příklady (binárních) relací. Sčítání dvou čísel, násobení dvou čísel, výpočet aritmetického nebo geometrického průměru

---

*) Slovo „binární" (latinsky bis — dvakrát) znamená, že jde buď o vztah mezi dvěma prvky nebo operaci s dvěma prvky. Slovo „binární" budeme zpravidla vynechávat.

dvou čísel, operace „střed" — to jsou příklady (binárních) operací.

Zejména nás budou zajímat zvláštní případy relací — zobrazení, permutace, shodná zobrazení a pak ještě něco mnohem složitějšího: operace s prvky, které nejsou ani čísla, ani body, ale zobrazení. Také to není svět vám zcela



Obr. II.

neznámý: v geometrii jste skládali např. dvě souměrnosti podle os o_1, o_2 navzájem kolmých a dostali jste souměrnost podle středu S — průsečíku přímek o_1, o_2. Na obr. II. vidíte názorně, co „skládání souměrností" znamená: sestrojíme obraz X_1 bodu X v souměrnosti podle osy o_1, pak obraz X_2 bodu X_1 v souměrnosti podle osy o_2 a výsledek? Pro každý bod X je X_2 jeho obraz v souměrnosti podle středu S. Jednoduchým důsledkem tohoto „oživení" roviny je např. geometrická věta: Je-li rovinný obrazec souměrný podle dvou os navzájem kolmých, je souměrný i podle jejich průsečíku.

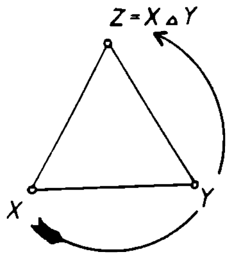
Jiné „oživení" roviny způsobí např. tato operace:

K dvěma daným různým bodům X, Y roviny ϱ sestrojíme bod $Z = X \triangle Y$ tak,

(a) aby vznikl rovnostranný trojúhelník XYZ;

(b) aby smysl obíhání XYZ byl proti pohybu hodinových ručiček (obr. III).

Definici operace $X \triangle Y$ doplníme pro $X = Y$ takto: $X \triangle X = X$. Tato geometrická operace má zajímavé vlastnosti a dává podnět k řešení řady úloh; můžeme se např. ptát, které body roviny jsou „sestrojitelné“ operací $\triangle$, vyjdeme-li ze dvou pevných bodů $A \neq B$. Zde je otevřené pole pro experimentování a zobecňování.



Obr. III.

Doufáme, že se na výletě přesvědčíte sami, že takovéto operace s geometrickými zobrazeními a operacemi k něčemu jsou a že se neleknete ani nového „učeného“ názvu „grupa“, s kterým se setkáte.

Na druhý výlet se vypravíte s podobnou výbavou jako na první. V tomto svazečku jsme vybrali řadu úloh z učebních textů, podle kterých se učí žáci pokusných základních škol. K úlohám je připojeno v mnoha případech řešení a samozřejmě i srozumitelný výklad: máte tedy na výlet dobrého průvodce. Neujedete podle vzoru různých autokarových zájezdů stovky kilometrů, neuvidíte desítky atrakcí, ale navštívíte několik pěkných matematických zákoutí a vrátíte se snad chytřejší, osvěženější a zvědavější, než jste vyjeli.

Šťastnou cestu!

1. kapitola

RELACE

1.1. Binární relace

Abychom si mohli vysvětlit, co znamená „relace v množině $\boldsymbol{M}$“, musíme si připomenout, co je kartézský součin množin $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$. Definujeme si ho jako množinu všech uspořádaných dvojic $[x; y]$; jejich první složka x je prvkem množiny $\boldsymbol{M}_1$ a druhá složka y je prvkem množiny $\boldsymbol{M}_2$. Je-li na příklad množina $\boldsymbol{M}_1 = \{a, b, c, d\}$ a množina $\boldsymbol{M}_2 = \{A, B, C\}$, pak kartézský součin $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 = \{aA, aB, aC, bA, bB, bC, cA, cB, cC\}$. Dvojice bychom měli zapisovat správně např. $[a; B]$, smíme však psát pouze aB, jestliže vynecháním závorek a středníku nemůže dojít k nedorozumění.

Kartézský součin znázorníme nejlépe tabulkou:

$\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2$	$\boldsymbol{M}_1$ \ $\boldsymbol{M}_2$	A	B	C
	a	aA	aB	aC
	b	bA	bB	bC
	c	cA	cB	cC
	d	dA	dB	dC

$M_2 \times M_1$	M_2 \ M_1	a	b	c	d
	A	Aa	Ab	Ac	Ad
	B	Ba	Bb	Bc	Bd
	C	Ca	Cb	Cc	Cd

Srovnáním tabulky č. 1 a č. 2 zjistíme, že v našem případě množiny $M_1 \times M_2$ a $M_2 \times M_1$ nemají stejné prvky. Pokud totiž $a \neq A$, jsou uspořádané dvojice $[aA]$ a $[Aa]$ různé.

Je tedy $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$ a říkáme, že kartézské násobení není komutativní. Předpokládáme-li, že množiny M_1 a M_2 nemají žádný společný prvek (jsou disjunktní), pak jsou disjunktní i množiny $M_1 \times M_2$ a $M_2 \times M_1$. Společné prvky v množinách, které kartézsky násobíme, utvoří i stejné dvojice v množinách $M_1 \times M_2$ a $M_2 \times M_1$.

Jestliže $M_1 = M_2$, pak také $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$ a v tomto případě je kartézské násobení komutativní. $M_1 = \{Michal, Petr, Rudolf\}$. $M_2 = \{M, P, R\}$. Vytvoříme množinu $M_1 \times M_2$ dvojic [*křestní jméno; příjmení*]: *Michal M.*, *Petr M.*, *Rudolf M.*, *Michal P.*, atd. Množina $M_2 \times M_1$ má dvojice *M. Michal*, *M. Petr* ... atd.

Jestliže prvky M, P, R množiny M_1 považujeme za zkratky jmen *Michal*, *Petr* a *Rudolf*, je skutečně $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$.

Následující tabulka dává přehled o pěti přátelích (*Jiří*, *Pavel*, *Eva*, *Marta*, *Vít*), kteří znají různé světové jazyky (*angličtinu*, *francouzštinu*, *němčinu* a *ruštinu*).

Osoba \ Jazyk	*angličtina*	*francouz.*	*němčina*	*ruština*
Jiří	○		○	
Pavel		○		○
Eva	○		○	○
Marta		○		
Vít	○		○	○

Kroužek v poli znamená, že osoba „v řádku“ zná jazyk „ve sloupci“.

Množinu pěti přátel označíme $\boldsymbol{M}_1 = \{J, P, E, M, V\}$,

množinu jazyků označíme $\boldsymbol{M}_2 = \{a, f, n, r\}$.

Z tabulky můžeme vypsat množinu

$\boldsymbol{R} = \{Ja, Jn, Pf, Pr, Ea, En, Er, Mf, Va, Vn, Vr\}$.

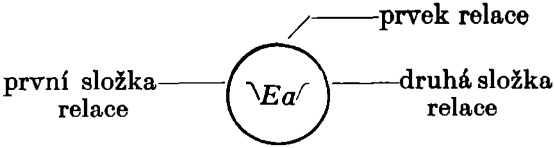
Dvojice *Ja* znamená, že *Jiří* zná *anglicky*. Množina $\boldsymbol{R}$ se skládá ze všech dvojic (jméno a jazyk), mezi kterými byl určitý vztah (cizím slovem relace), který jsme popsali slovem „zná“.

Máme dvě základní množiny $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$. **Binární relace $\boldsymbol{R}$ z množiny $\boldsymbol{M}_1$ do množiny $\boldsymbol{M}_2$** *je tvořena jistými dvojicemi z kartézského součinu $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2$, je to tedy*

podmnožina kartézského součinu $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2$.

Slovo binární (česky dvojčlenná) budeme vynechávat, protože o jiných relacích nebudeme hovořit. Také českého slova „vztah“ nebudeme užívat.

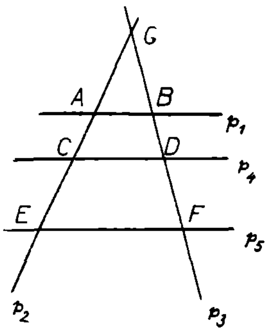
Názvy (podle předchozího přehledu):



Je-li $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2$, říkáme stručně:

relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}_1$

Místo zápisu $[x, y] \in \boldsymbol{R}$ píšeme někdy $x\,\boldsymbol{R}\,y$.



Obr. 1

PŘÍKLAD 1,1

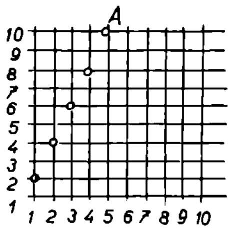
Na obr. 1 je zakresleno 5 přímek ($p_1 \parallel p_4 \parallel p_5$). Množina $\boldsymbol{Z} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{Z}$ se skládá ze všech dvojic přímek, které se protínají; přesněji

$$\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \mid \text{přímka } x \text{ protíná přímku } y\}.$$

Je tedy $\boldsymbol{R} = \{p_1p_2, p_1p_3, p_2p_1, p_2p_3, p_2p_4, p_2p_5, p_5p_2,$

$p_3p_1, p_3p_2, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_3, p_4p_2, p_5p_3\}.$

Množina $\boldsymbol{R}$ (relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{Z}$) má 14 prvků; skurečně na obr. 1 najdeme 7 průsečíků; v množině $\boldsymbol{R}$ je každý průsečík zapsán dvakrát — přímka p_1 protíná přímku p_2 v bodě A (dvojice $[p_1p_2]$) a přímka p_2 protíná přímku p_1 rovněž v bodě A (dvojice $[p_2p_1]$).



Obr. 2

PŘÍKLAD 1,2

Množina $\boldsymbol{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Relace $\boldsymbol{Q}$ v množině $\boldsymbol{M}$ je množina všech takových dvojic z $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, kde druhá složka je dvojnásobkem první:

$$\boldsymbol{Q} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid y = 2x\}\,,$$

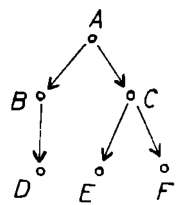
$$\boldsymbol{Q} = \{[1; 2], [2; 4], [3; 6], [4; 8], [5; 10]\}\,.$$

Kartézský graf relace $\boldsymbol{Q}$ je na obr. 2 (prvky jsou označeny kroužky). Bod A je obrazem dvojice $[5; 10]$.

PŘÍKLAD 1,3

Děd A má syny B a C. B je otcem syna D, C je otcem dvou dětí E, F. V množině $\boldsymbol{M} = \{A, B, C, D, E, F\}$. Sestrojíme relaci $\boldsymbol{R}$, která je složena ze všech takových dvojic $[x, y]$, pro něž platí „x je přímým předkem y". (Přímý předek znamená otec nebo děd.)

$$\boldsymbol{R} = \{AB, AC, AD, AE, AF, BD, CE, CF\}.$$



Obr. 3

Tuto relaci znázorníme tzv. stromem (obr. 3).

„x je přímým předkem y", právě když x a y jsou spojeny neklesající čarou a zároveň x je „výše" než y, např. A je přímý předek B, C, D, E, F; B je přímý předek D.

PŘÍKLAD 1,4

$\boldsymbol{N}$ je množina všech přirozených čísel (bez nuly). Relace $\boldsymbol{R}_1$ v množině $\boldsymbol{N}$ se skládá z takových dvojic $[x; y]$, kde x a y dávají po dělení dvěma týž zbytek.

Množina $\boldsymbol{N}$ je nekonečná množina a rovněž relace $\boldsymbol{R}_1$ má nekonečně mnoho prvků; patří do ní např. dvojice $[1, 3]$, $[2, 6]$, $[6, 18]$, $[8, 14]$, $[19, 25]$, $[31, 19]$, $[19, 19]$ atd.

(obě složky jsou buď liché nebo sudé — říkáme, že mají stejnou paritu).

Do relace $\boldsymbol{R}_2$ v množině $\boldsymbol{N}$ patří všechny dvojice $[x;\ y]$ takové, že x a y dávají stejný zbytek při dělení třemi. Do $\boldsymbol{R}_2$ patří např. $[1,\ 4]$, $[2,\ 14]$, $[6,\ 18]$, $[5,\ 26]$, $[31,\ 19]$, $[19,\ 19]$, $[6,\ 18]$, $[8,\ 14]$, $[9,\ 30]$ atd.

Utvoříme průnik $\boldsymbol{R}_1 \cap \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_3$. Do množiny $\boldsymbol{R}_3$, která je rovněž relací v množině $\boldsymbol{N}$, patří všechny dvojice, které dávají stejný zbytek při dělení šesti, např. $[6,\ 18]$, $[8,\ 14]$, $[31,\ 19]$, $[19,\ 49]$ atd.

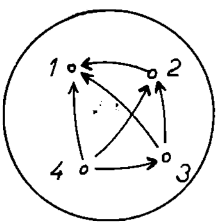
Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ je podmnožina kartézského součinu $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ a můžeme při jejím zobrazení použít Vennova diagramu.

PŘÍKLAD 1,5

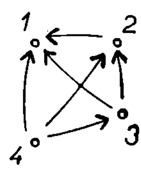
V množině $\boldsymbol{M} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ utvořme relaci $\boldsymbol{R} = \{[x,\ y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid x > y\}$ (první složka je větší číslo než číslo ve složce druhé).

$$\boldsymbol{R} = \{[2,\ 1],\ [3,\ 2],\ [3,\ 1],\ [4,\ 3],\ [4,\ 2],\ [4,\ 1] \ .$$

Vennův diagram relace $\boldsymbol{R}$ je na obr. 4.



Obr. 4



Obr. 5

Šipka jde vždy od bodu, který znázorňuje první složku dvojice k bodu, který znázorňuje druhou složku dvojice.

Hranici množiny $\boldsymbol{M}$ někdy vynecháváme a dostaneme tzv. uzlový graf relace $\boldsymbol{R}$ jako na obr. 5.

Patří-li do nějaké relace na příklad dvojice $[a; b]$ a $[b; a]$, znázorníme to jako na obr. 6a nebo 6b.

Obr. 6a, b

Obr. 7

Patří-li do relace dvojice $[a; a]$, znázorníme to jako na obr. 7.

Je dána relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$. *Jestliže vyměníme pořadí složek ve všech dvojicích, které patřily relaci* $\boldsymbol{R}$, *vznikne relace* $\overline{\boldsymbol{R}}$ *(*$\boldsymbol{R}$ *s pruhem), která se nazývá* **inverzní k dané relaci** $\boldsymbol{R}$. (Místo $\overline{\boldsymbol{R}}$ se někdy píše $\boldsymbol{R}^{-1}$.)

PŘÍKLAD 1,6

Množina $\boldsymbol{M} = \{2, 3, 4, 5\}$.

Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$:

$\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid x \geqq y\}$.

$\boldsymbol{R} = \{[2, 2], [3, 2], [3, 3], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5]\}$.

$\overline{\boldsymbol{R}} = \{[2, 2], [2, 3], [3, 3], [2, 4], [3, 4], [4, 4], [2, 5], [3, 5], [4, 5], [5, 5]\}$.

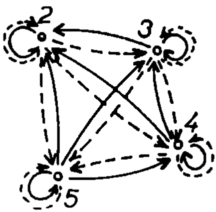
Můžeme zapsat $\overline{\boldsymbol{R}} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid x \leqq y\}$.

Uzlový graf relací $\boldsymbol{R}$ a $\overline{\boldsymbol{R}}$ je na obr. 8.

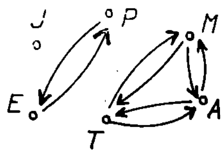
Dvojice patřící relaci $\boldsymbol{R}$ jsou vytaženy plně, dvojice patřící relaci $\overline{\boldsymbol{R}}$ čárkovaně.

Obsahuje-li relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ dvojici $[x, x]$, pak $\overline{\boldsymbol{R}}$ obsahuje rovněž dvojici $[x, x]$.

Jestliže platí $\boldsymbol{R} = \overline{\boldsymbol{R}}$, *pak říkáme, že* **relace** $\boldsymbol{R}$ *v množině* $\boldsymbol{M}$ je **symetrická.**



Obr. 8



Obr. 9

PŘÍKLAD 1,7

Na výlet jelo 6 dětí: Jan, Petr, Michal, Tomáš, Alena a Eva.

$\boldsymbol{M} = \{J, P, M, T, A, E\}$. Tomáš a Alena jsou dvojčata a Michal jejich starší bratr. Eva je Petrovou sestrou. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ je množinou těch dvojic $[x, y]$, kde „y je sourozencem x“.

$\boldsymbol{R} = \{TA, AT, TM, MT, AM, MA, EP, PE\}$.

Relace $\overline{\boldsymbol{R}}$ obsahuje stejné dvojice jako relace $\boldsymbol{R}$.

Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ je symetrická (viz obr. 9).

V uzlovém grafu symetrické relace jsou všechny dvojice spojeny šipkami v obou směrech. (Může tam být i symbol ↺ — viz obr. 7.)

Tabulkový graf symetrické relace (viz obr. 10) je souměrný podle osy o.

	J	P	M	T	A	E
J						
P						o
M				o	o	
T			o		o	
A			o	o		
E		o				

Obr. 10

Pamatujte si:

Relace z množiny M_1 do množiny M_2
Relace v množině M

Relaci znázorňujeme: a) tabulkou
b) kartézským grafem
c) stromem
d) uzlovým grafem

Relace inverzní k dané relaci
Relace symetrické

Cvičení:

1. Množina M se skládá z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Víme, že kartézský součin $M \times M$ se skládá ze 100 dvojic 11, 12, 13, ... Zapište všechny tyto dvojice x, y z množiny $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ mezi jejichž složkami x, y je tento vztah:

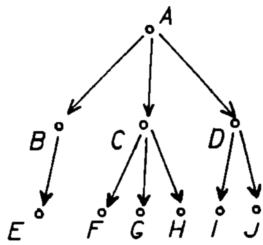
a) obě čísla x, y dávají při dělení třemi týž zbytek (mezi vypsanými dvojicemi budou např. 58, 69);

b) obě čísla x, y dávají při dělení sedmi týž zbytek;

c) pro čísla x, y platí $x . y = 8$;

d) pro čísla x, y platí $y = 2x - 1$.

2. $\boldsymbol{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ se skládá ze všech takových dvojic xy, kde x je násobkem téhož přirozeného



Obr. 11

čísla z $\boldsymbol{M}$ (různého od *1*) jako číslo y. Např. $[6, 4] \in \boldsymbol{R}$, protože číslo *6* je násobkem čísla *2* a číslo *4* je rovněž násobkem čísla *2*. Zapište všechny dvojice kartézského součinu $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, z nichž se skládá relace $\boldsymbol{R}$. Znázorněte relaci $\boldsymbol{R}$ pomocí šachovnice o 36 polích.

3. Množina $\boldsymbol{M}$ je táž jako v předcházející úloze. Relace $\boldsymbol{S}$ v množině $\boldsymbol{M}$ se skládá ze všech takových dvojic xy, kde čísla x, y jsou nesoudělná (tj. jejich největší společný dělitel je 1). Např. $[5, 6] \in \boldsymbol{S}$, neboť číslo 5 je násobkem čísla 1 a 5 a číslo 6 je násobkem čísel 1, 2, 3 a 6, takže největší společný dělitel čísel 5 a 6 je 1.

a) Zapište všechny dvojice kartézského součinu $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, z nichž se skládá relace $\boldsymbol{S}$.

b) Jaký je vztah mezi relací $\boldsymbol{S}$ a relací $\boldsymbol{R}$ z předcházející úlohy?

4. Strom na obr. 11 znázorňuje rodokmen. Osoby jsou označeny písmeny; dvě „osoby“ spojené úsečkou jsou otec — syn (resp. syn — otec).

a) V množině $\boldsymbol{M}$ všech osob z obr. 11 zavedeme relaci $x \boldsymbol{R} y$: „x je blízký příbuzný y“, právě když lze spojit osoby x, y jednou nebo dvěma úsečkami. Vypište tuto relaci.

b) Opakujte úlohu a) pro ten případ, kdy je relace $x \boldsymbol{R} y$ dána tím, že osobu x lze spojit s osobou y jednou až třemi úsečkami.

	A	B	C	D
A		o	o	
B				
C				
D	o	o		

	A	B	C	D
A	o			
B		o		
C			o	
D				o

	A	B	C	D
A				
B		o		
C		o		o
D				o

	A	B	C	D
A				o
B			o	
C		o		
D	o			

Obr. 12a, b, c, d

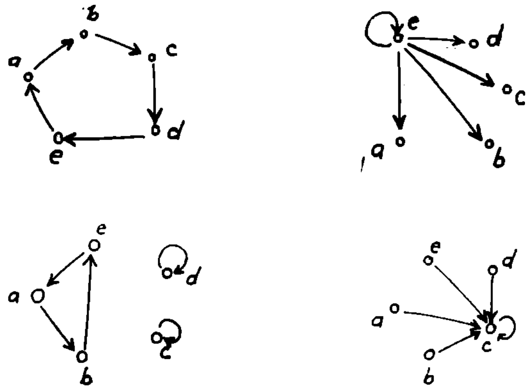
5. $\boldsymbol{M} = \{ČSSR, Maďarsko, NDR, NSR, Polsko, Rakousko, SSSR\}$. Z kartézského součinu $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ utvořte relaci $\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} ; x \text{ sousedí s } y\}$.

6. $\boldsymbol{M}$ je množina dětí, které stojí v kruhu a hází si míčem; jsou to děti Pavel, Olga, Marcela, Radek a Láďa; $\boldsymbol{M} = \{P, O, M, R, L\}$. Pavel hází jen Marcele a Radkovi. Olga nikdy nehází Pavlovi a Radkovi, Láďa hází všem čtyřem zbývajícím. Marcela i Radek hází všem mimo Láďu a Olgu. V množině $\boldsymbol{M}$ zavedeme relaci „hráč x hází hráči y“.

a) Sestavte tabulku, tj. kartézský graf.
b) Znázorněte danou relaci Vennovým diagramem.

7. Znázorněte pomocí uzlového i kartézského grafu relace z obr. 12a, b, c, d.

8. Relace znázorněné pomocí uzlového grafu znázorněte kartézským grafem! (Obr. 13a, b, c, d)



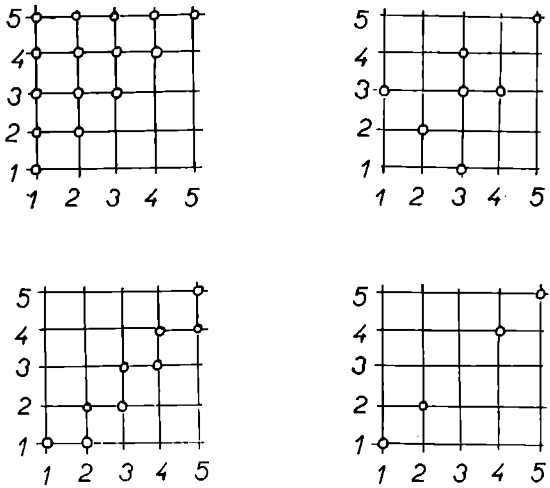
Obr. 13a, b, c, d

9. Relace znázorněné pomocí kartézského grafu znázorněte uzlovým grafem! (Obr. 14a, b, c, d)

10. Znázorněte kartézským grafem relaci $x\, \boldsymbol{R}\, y$ v množině $\boldsymbol{M}$, kde $y = x + 1$ nebo $y = x - 1$. Množina $\boldsymbol{M}$ je množina všech desetinných čísel. Odhadněte, co bude kartézský graf relace $\boldsymbol{R}$!

11. Relace $x\, \boldsymbol{R}\, y$ v množině $\boldsymbol{M}$ všech přirozených čísel se skládá ze všech dvojic $[x, y]$, pro něž platí, že $1 + \frac{4}{x - 2}$ je přirozené číslo. Vypište relaci $\boldsymbol{R}$ a znázorněte ji Vennovým diagramem i kartézským grafem!

12. Pan Novák měl syny Jana, Karla a Emila. Jan měl pouze syna Martina a vnuka Václava. Karel měl dva syny — Bedřicha a Petra. Emil neměl děti. Zapište relaci $\boldsymbol{R}$ „A je otcem B“ a utvořte relaci inverzní k $\boldsymbol{R}$. Zakreslete obě relace stromem!



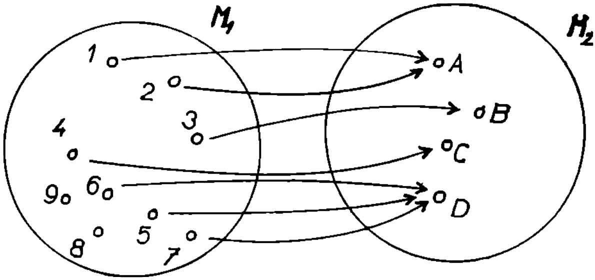
Obr. 14a, b, c, d

1.2. Zobrazení

Zobrazení $\boldsymbol{Z}$ v množině $\boldsymbol{M}$ *je každá taková relace* $\boldsymbol{R}$ *v množině* $\boldsymbol{M}$, *že každý prvek z* $\boldsymbol{M}$ *je první složkou nejvýše jedné dvojice z* $\boldsymbol{R}$.

PŘÍKLAD 1,8

Na hřišti si hrají děti (množina $\boldsymbol{M}_1$) a na lavičkách sedí maminky a dávají na ně pozor (množina $\boldsymbol{M}_2$). Domů odcházejí některé děti se svou maminkou (množina $\boldsymbol{R}$), jiné děti jdou domů samy.



Obr. 15

Situaci zakreslíme pomocí Vennova diagramu a šipkou naznačíme, které děti odcházely domů s maminkami (obr. 15).

Množina $\boldsymbol{R} = \{1A, 2A, 3B, 4C, 5D, 6D, 7D\}$. V každé dvojici je prvek množiny $\boldsymbol{M}_1$ nejvýš jednou (každé dítě má na hřišti nejvýš jednu maminku) a relace $\boldsymbol{R}$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2$.

PŘÍKLAD 1,9

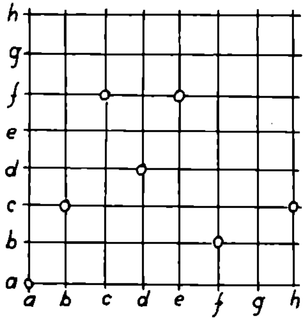
Množina $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.
Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M} : \boldsymbol{R} = \{aa, bc, cf, dd, ef, fb, hc\}$.
Relace $\boldsymbol{R}$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$, protože žádné dvě dvojice z $\boldsymbol{R}$ nemají stejnou první složku.

Kartézský graf relace $\boldsymbol{R}$ (obr. 16).

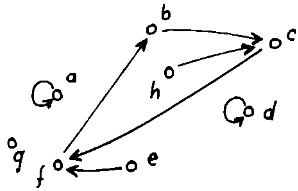
Dvojice jsou označeny kroužky a žádné dva kroužky neleží na téže svislé přímce (na vodorovné přímce může ležet libovolný počet kroužků).

Uzlový graf relace $\boldsymbol{R}$ (obr. 17).

Z každého kroužku vychází nejvýš jedna šipka.



Obr. 16



Obr. 17

Relaci v množině $\boldsymbol{M}$, která je zobrazením, označujeme zpravidla písmenem $\boldsymbol{Z}$ (nemůže zde dojít k záměně se základní množinou — tu totiž představuje množina $\boldsymbol{M}$).

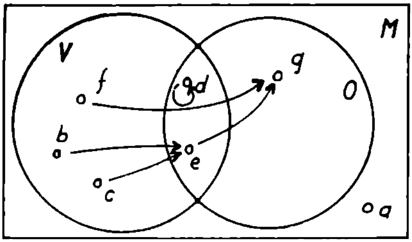
První složce ve dvojici říkáme **vzor**, druhé složce říkáme **obraz.**

Množinu všech vzorů zobrazení $\boldsymbol{Z}$ v množině $\boldsymbol{M}$ označíme $\boldsymbol{V}$, množinu všech obrazů $\boldsymbol{O}$. $(\boldsymbol{V} \cup \boldsymbol{O}) \subset \boldsymbol{M}$.

PŘÍKLAD 1,10

Vennův diagram na obr. 18 znázorňuje zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$. Zapište množiny $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{O}$.

$\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.
$\boldsymbol{Z} = \{be, ce, dd, eg, fg\}$.
$\boldsymbol{V} = \{b, c, d, e, f\}$.
$\boldsymbol{O} = \{d, e, g\}$.



Obr. 18

PŘÍKLAD 1,11

$\boldsymbol{N}$ je množina všech přirozených čísel. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \mid y = x^2\}$. (Druhá složka dvojice je druhou mocninou první složky.)

$\boldsymbol{R}$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{N}$. Do množiny vzorů patří všechna přirozená čísla, tj. $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{N}$.

Do množiny obrazů patří pouze dvojmoci přirozených čísel: 1, 4, 9, 16, 25 ...

$$\boldsymbol{O} \subset \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{O}.$$

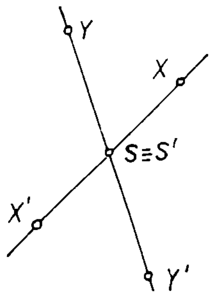
PŘÍKLAD 1,12

$\boldsymbol{M}$ je množina všech bodů v rovině ϱ. Je dán pevný bod S v rovině ϱ. Ke každému bodu $X \neq S$ sestrojíme bod X' tak, že X' leží na polopřímce opačné k SX

a $SX' = SX$. Pro bod S platí, že $S' = S$ (obr. 19). Všechny dvojice bodů XX' v rovině ϱ tvoří relaci v množině $\boldsymbol{M}$, která je zobrazením.

Platí $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{O} = \boldsymbol{V}$.

Ke každému bodu X (vzoru) přísluší právě jeden bod X' (obraz). Toto zobrazení, známé ze školské geometrie, se nazývá **středová souměrnost.**



Obr. 19

K relaci $\boldsymbol{R}$ v rovině $\boldsymbol{M}$ utvoříme inverzní relaci $\overline{\boldsymbol{R}}$. Jestliže v relaci $\boldsymbol{R}$ bylo y druhou složkou právě jedné dvojice, je $\overline{\boldsymbol{R}}$ zobrazení.

PŘÍKLAD 1,13

Množina $\boldsymbol{M} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) Relace $\boldsymbol{R}_1 = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid y = x^2\}$

$\boldsymbol{R}_1 = \{[-1, 1], [0, 0], [1, 1], [2, 4]\}$.

$\boldsymbol{R}_1$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

$$\overline{\boldsymbol{R}}_1 = \{[1, -1], [0, 0], [1, 1], [4, 2]\}.$$

$\overline{\boldsymbol{R}}_1$ není zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

b) Relace $\boldsymbol{R}_2 = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid x = |y|\}$. (První složka je absolutní hodnota složky druhé.)

$\boldsymbol{R}_2 = \{[1, -1], [0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]\}$. $\boldsymbol{R}_2$ není zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

$\overline{\boldsymbol{R}_2} = \{[-1, 1], [0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]\}$. $\overline{\boldsymbol{R}_2}$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

c) Relace $\boldsymbol{R}_3 = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid y = x + 1\}$.

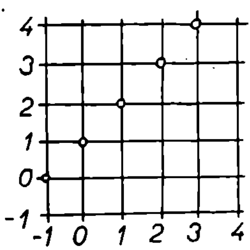
$\boldsymbol{R}_3 = \{[-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]\}$. $\boldsymbol{R}_3$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

$\overline{\boldsymbol{R}_3} = \{[0, -1], [1, 0], [2, 1], [3, 2], [4, 3]\}$. $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

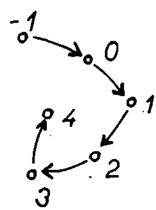
Jestliže v relaci $\boldsymbol{R}$ *v množině* $\boldsymbol{M}$ *je každý prvek* x *první složkou právě jedné dvojice z* $\boldsymbol{R}$ *a prvek* y *druhou složkou právě jedné dvojice z* $\boldsymbol{R}$*, pak relace* $\boldsymbol{R}$ *se nazývá* **prosté zobrazení v množině** $\boldsymbol{M}$. Prostým zobrazením je např. relace $\boldsymbol{R}_3$ z příkladu 1,13.

Kartézský graf prostého zobrazení $\boldsymbol{R}_3$ v množině $\boldsymbol{M}$ je na obr. 20.

Na každé svislé i vodorovné lince grafu leží nejvýše jeden kroužek.



Obr. 20



Obr. 21

Uzlový graf prostého zobrazení $\boldsymbol{R}_3$ v množině $\boldsymbol{M}$ je na obr. 21.

Z každého kroužku vychází nejvýš jedna šipka a do každého kroužku směřuje nejvýš jedna šipka.

Pamatujte si:

Zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$ je zvláštní případ relace v množině $\boldsymbol{M}$.

Prosté zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

Cvičení

1. Osm žáků z různých obcí si dopisuje. Relace $\boldsymbol{R}$ je tvořena všemi dvojicemi žáků, z nichž první psal druhému v lednu 1971. V tomto měsíci mají odeslat tito žáci celkem 7 dopisů. Sestavte plán dopisování tak, aby relace $\boldsymbol{R}$ byla zobrazení a znázorněte ji

a) uzlovým grafem,
b) kartézským grafem,
c) opakujte úlohu pro 8 a 9 dopisů.

2. Na výlet šla šestičlenná společnost: babička z otcovy strany (b), otec (o), matka (m), jejich syn (s), matčina sestra — teta (t) a její dcera (d).

a) Relace $\boldsymbol{R}_1$ je tvořena dvojicemi xy, z nichž x je osoba starší generace, y mladší generace. Vypište relaci $\boldsymbol{R}_1$ a znázorněte ji kartézským grafem.

b) Relace $\boldsymbol{R}_2$ je tvořena všemi dvojicemi xy, kde osoba x je některý z rodičů osoby y. Rozhodněte, která z relací $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ je zobrazení.

Vypište relaci $\boldsymbol{R}_2$ a znázorněte ji kartézským grafem.

3. $\boldsymbol{M}$ je množina všech přirozených čísel. Ke každému číslu $x \in \boldsymbol{M}$ vypočtěte číslo y takto: číslo $6x$ dělte sedmi; k podílu p najděte nejbližší přirozené číslo $y \geqq p$.

Příklad: $x = 3$, $6x = 18$; $18 : 7 = 2{,}55\ldots$, $y = 3$.

a) Doplňte tabulku:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
y												

b) Všechny dvojice $[xy|]$ tvoří relaci $\boldsymbol{R}$ v $\boldsymbol{M}$. Ověřte, že relace $\boldsymbol{R}$ je zobrazení a určete množinu jeho vzorů i množinu jeho obrazů.

c) Znázorněte relaci $\boldsymbol{R}$ kartézským grafem.

4. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M, který nenáleží žádné z nich. Bod $X \in p$ spojíme s bodem M přímkou $\overleftrightarrow{MX}$ a určíme průsečík $Y = q \cap \overleftrightarrow{MX}$. Relace $\boldsymbol{R}$ se skládá ze všech takových dvojic $[X, Y]$.

a) Sestrojte několik dvojic $[XY] \in \boldsymbol{R}$.

b) Ověřte, že relace $\boldsymbol{R}$ je zobrazení v množině $p \cup q$. Určete množinu $\boldsymbol{V}$ jeho vzorů a množinu $\boldsymbol{O}$ jeho obrazů. Je zobrazení $\boldsymbol{R}$ prosté?

5. Množina $\boldsymbol{M}$ je rovina bodů, v ní je vyznačen pevný bod S. Relace je zavedena takto: obsahuje dvojici SS a dále všechny dvojice XX', pro které platí $X' \in \overrightarrow{SX}$, $SX' = 2.SX$.

a) Nakreslete náčrtek (bod S, body X, Y, Z a X', Y', Z').

b) Popište, jak k danému bodu X' sestrojíme bod X. Rozhodněte, zda tato relace je zobrazení, případně prosté zobrazení!

6. V množině $\boldsymbol{N}_0$ všech přirozených čísel definujeme zobrazení $\boldsymbol{Z} = \{[x, y]\}$, kde je y zbytek, který dostaneme, dělíme-li číslo x^2 číslem $x + 2$. Vyplňte tabulku:

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	...
$x + 2$											
x^2											
zbytek											

Vyslovte domněnku o zbytku. Určete množinu vzorů $\boldsymbol{V}$ a množinu obrazů $\boldsymbol{O}$.

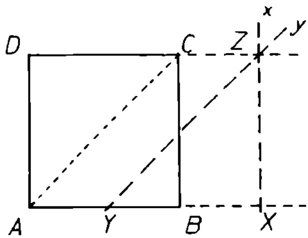
7. Znak $\langle x \rangle$, čteme: „celá část z x“ a rozumíme tím největší přirozené číslo y, pro které platí $y \leqq x$.

a) Vyplňte tabulku:

x	0	$\frac{1}{2}$	$0,69$	1	$\frac{3}{2}$	$1,999$	$\frac{6}{3}$	$7,1$	$20,001$
$\langle x \rangle$	0			1					

b) Nakreslete kartézský graf zobrazení $\{[x; \langle x \rangle]\}$.

c) Udejte množinu vzorů i množinu obrazů. Je zobrazení prosté?



Obr. 22

8. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině všech přirozených čísel je množina všech dvojic $[x; y]$, kde y je zbytek po dělení čísla x číslem 7.

a) Doplňte tabulku:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13	20	21	24	37	95
y																	

b) Sestrojte graf relace (pro $x = 0$ až $x = 10$), rozhodněte, zda je to zobrazení, zda je prosté či nikoli.

9. Je dána úsečka PM, která má délku 6 cm, $\boldsymbol{M} = \overrightarrow{PM}$. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\overrightarrow{PM}$ se skládá ze všech dvojic XY, které splňují podmínku $PX + PY = 6$ cm.

a) Doplňte tabulku:

PX	0	1	3	$4{,}5$	5	6	7	8
PY								

b) Narýsujte polopřímku $\overrightarrow{PM}$ a vyznačte všecky dvojice XY, které splňují podmínku a pro něž jsou vzdálenosti PX, PY uvedeny v tabulce.

c) Určete množinu vzorů $\boldsymbol{V}$ a množinu obrazů $\boldsymbol{O}$. Zjistěte, zda je zobrazení $\boldsymbol{Z}$ prosté.

10. Množina $\boldsymbol{M}$ je přímka $p = \overleftrightarrow{AB}$ (jako množina bodů), $ABCD$ je čtverec. Relace $\boldsymbol{R}$ v přímce p se skládá ze všech dvojic bodů XY vytvořených takto:

$X \in x, \quad x \parallel \overleftrightarrow{BC}, \quad Z = x \cap \overleftrightarrow{CD}$

$Z \in y, \quad y \parallel \overleftrightarrow{AC}, \quad Y = y \cap p$ (obr. 22)

Odůvodněte, že $\boldsymbol{R}$ je zobrazení prosté v p. Určete množinu vzorů $\boldsymbol{V}$ a množinu obrazů $\boldsymbol{O}$ zobrazení $\boldsymbol{R}$.

1.3. Permutace

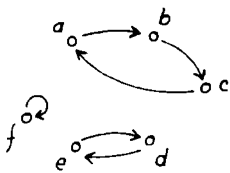
Permutace množiny $\boldsymbol{M}$ *je takové prosté zobrazení v množině* $\boldsymbol{M}$, *při kterém množina* $\boldsymbol{M}$ *je zároveň množinou všech vzorů* $\boldsymbol{V}$ *i množinou všech obrazů* $\boldsymbol{O}$, tj. $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{O} = \boldsymbol{M}$. *V permutaci* $\boldsymbol{P}$ *je každý prvek z* $\boldsymbol{M}$ *první složkou jediné dvojice z* $\boldsymbol{P}$ *a druhou složkou jediné dvojice z* $\boldsymbol{P}$.

PŘÍKLAD 1,14

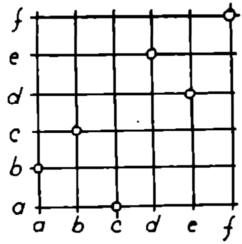
$\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\boldsymbol{P} = \{ab, bc, ca, de, ed, ff\}$

Uzlový graf permutace ***P***



Kartézský graf permutace ***P***



Obr. 23a, b

Z každého kroužku právě jedna šipka vychází a právě jedna k němu směřuje.

V každé vodorovné i svislé lince grafu je právě jeden kroužek.

Permutaci ***P*** konečné množiny ***M*** zapisujeme také tabulkou upravenou do dvouřádkového schematu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{Bmatrix} a\ b\ c\ d\ e\ f \\ b\ c\ a\ e\ d\ f \end{Bmatrix}$$

Permutace ***P*** v množině ***M*** je prosté zobrazení.

PŘÍKLAD 1,15

Zjistěte všechny možné permutace množiny $\boldsymbol{M} = \{a, b, c\}$.

Abychom žádnou permutaci nevynechali, postupujeme nejlépe takto:

a) Prvku a je přiřazen prvek a a pak jsou dvě možnosti

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{Bmatrix} a\ b\ c \\ a\ b\ c \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{Bmatrix} a\ b\ c \\ a\ c\ b \end{Bmatrix}$$

b) Prvku a je přiřazen prvek b a pak jsou dvě možnosti

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_4 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{Bmatrix}$$

c) Prvku a je přiřazen prvek c a pak jsou dvě možnosti

$$\boldsymbol{P}_5 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_6 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{Bmatrix}$$

Celkem jsme dostali šest permutací. Všimněte si, že druhé řádky ve schematech jsou všechna možná pořadí tří prvků a počet permutací je roven 3! (tři faktoriál): $3! = 3 . 2 = 6$.

Prvek, který splyne se svým obrazem v permutaci, se nazývá samodružným prvkem této permutace. Např. a je samodružný prvek $\boldsymbol{P}_1$, b je samodružný prvek permutace $\boldsymbol{P}_6$. Permutace $\boldsymbol{P}_1$ má všechny prvky samodružné a jmenuje se **identita.**

Ukázali jsme si dva příklady permutací konečných množin. S permutacemi nekonečných množin se setkáme v dalším článku.

Pamatujte si:

Permutace je zvláštní případ prostého zobrazení.

Počet všech permutací v množině, která má n prvků, je $n!$ (n faktoriál).

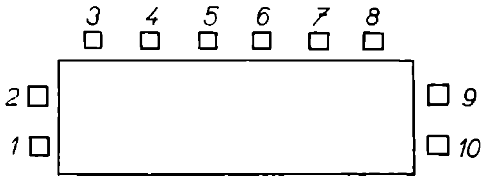
Cvičení

1. Vypište všecka čtyřciferná čísla, která můžete napsat pomocí cifer *3, 4, 7, 9.*

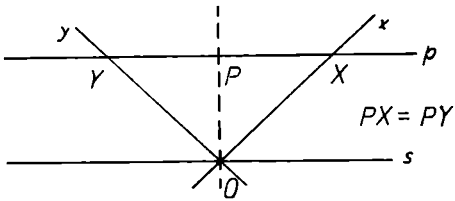
2. Stará známá historka: Deset lupičů odsouzených k smrti vysloví před popravou své poslední přání: aby mohli před smrtí zasednout ke stolu a vystřídat všechna možná rozsazení (obr. 24).

a) Vypočtěte kolik je možných rozsazení.

Uvažujte: na židli 1 zasedne kterýkoli z 10 lupičů, na židli 2 kterýkoli z 9 zbývajících, na židli 3 kterýkoli z 8 zbývajících atd.



Obr. 24



Obr. 25

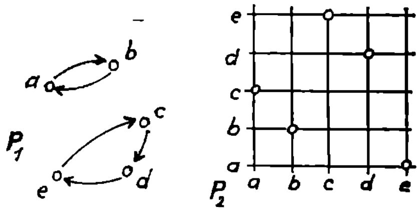
b) Vypočtěte, jak dlouho trvalo vyplnění „posledního přání", když na jedno rozsazení potřebovali lupiči jen 2 minuty.

3. ***M*** je množina všech přímek, které obsahují bod O (obr. 25). Relace v množině ***M*** se skládá ze všech dvojic přímek yx, vytvořených tak, že $PX = PY$ a z dvojice $[s, s]$. Odůvodněte, že ***R*** je permutací množiny ***M*** a najděte její samodružné prvky.

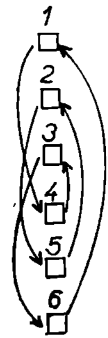
4. Permutace $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ množiny $\{a, b, c, d, e\}$ jsou znázorněny uzlovým a kartézským grafem (obr. 26a, b).

Zapište P_1, P_2 dvojřádkovými schematy a znázorněte P_1 kartézským grafem, P_2 uzlovým grafem.

5. Kolik čtyřciferných čísel s různými ciframi lze utvořit z číslic *2, 4, 6, 8, 9*? (Návod: Utvořte nejprve všecky čtyřprvkové podmnožiny množiny {*2, 4, 6, 8, 9*}.)



Obr. 26a, b



Obr. 27

6. **Hra.** Šest žáků stojí v zástupu. Na dané znamení se přemístí podle obrázku 27. Po kolika přemístěních budou všichni na svých původních místech?

1.4 Zobrazení v rovině

V příkladu 1,12 jsme pomocí konstrukčního předpisu popsali zobrazení v rovině ϱ, kterému říkáme středová souměrnost. Toto zobrazení je permutací v rovině ϱ: ke každému bodu X roviny ϱ (vzoru) najdeme jediný bod X'

roviny ϱ (obraz) a každý bod Y' roviny ϱ je obrazem právě jednoho bodu Y roviny ϱ.

Rovina ϱ má nekonečně mnoho bodů a existuje v ní i nekonečně mnoho permutací — některé známe ze školy (osová souměrnost, stejnolehlost) a víme, jak pomocí konstrukce sestrojit k danému vzoru obraz.

Budeme věnovat pozornost jen určité skupině permutací v rovině ϱ, které nazveme **přemístění roviny** ϱ. Všechny tyto permutace tvoříme podobně tímto způsobem: Označíme si body roviny ϱ ($A, B, C, \ldots$) a okopírujeme je na průsvitku. Průsvitkou pak posouváme, otáčíme, překlápíme nebo libovolně tyto pohyby kombinujeme. Obrazem bodů A, B, C, ... v přemístění budou body A', B', C', ..., které dostaneme, když po skončení pohybu (přemístění) okopírujeme body $A, B, C, \ldots$ z průsvitky zpět do roviny ϱ. Matematika však zajímá pouze vzájemná poloha vzoru a obrazu v rovině a nestará se o fyzikální stránku — to je o pohyb, který bod na průsvitce vykonal. Snaží se najít pokud možno jednoduchý konstrukční předpis, který by pohyb nahradil a umožnil by nalézt obraz libovolného bodu roviny v daném přemístění bez použití průsvitky.

Středová souměrnost

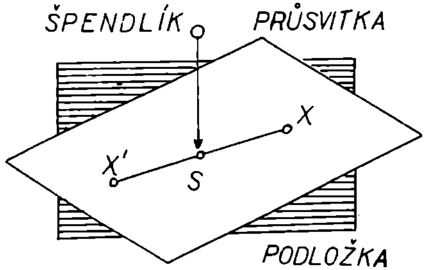
Středovou souměrnost v příkladu 1,12, lze popsat i jako přemístění, jak ukazuje obrázek 28 a návod.

1. Na podložce vyznačíme bod S a libovolný bod $X \neq S$.
2. Narýsujeme přímku $\overleftrightarrow{SX}$.
3. Položíme průsvitku na podložku a zabodneme špendlík do bodu S.
4. Okopírujeme polopřímku $\overrightarrow{SX}$ s bodem X.

5. Otočíme průsvitku kolem špendlíku tak, aby polopřímka $\overrightarrow{SX}$ přešla v polopřímku opačnou.

6. Okopírujeme přemístěný bod X na podložku, tak dostaneme bod X'.

V přemístění přejde úsečka XY v úsečku $X'Y'$ a platí $XY = X'Y'$ (úsečky jsou shodné).



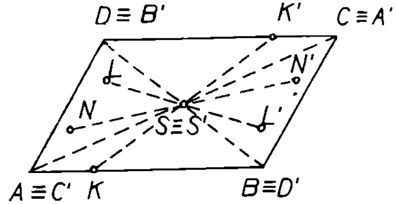
Obr. 28

Středová souměrnost je *přemístění*, tedy permutace v rovině ϱ, která *zachovává shodnost úseček*. Ve škole jsme říkali, že je to **shodné zobrazení.**

Oba názvy — přemístění i shodné zobrazení jsou správné, ale matematik mezi nimi přece jen cítí určitý rozdíl. Představa přemístění roviny, pomocí kterého najdeme k danému bodu roviny obraz, je zcela názorná, intuitivní, ale není přesně definována. Pomocí této představy jsme se však dostali k pojmu „shodné úsečky". Matematik si přesně definuje všechny vlastnosti tohoto pojmu. Nevšímá si už intuitivní představy „přemístění" a hledá, jak zkonstruovat všechna taková zobrazení roviny ϱ na rovinu ϱ, která by zachovala shodnost úseček. Tato zobrazení nazýváme **shodná zobrazení.**

Jestliže si pak upřesníme i představu „přemístění" a vyslovíme všechny vlastnosti této permutace, je možné dokázat, že každému přemístění odpovídá určitý druh shodného zobrazení a naopak.

Vraťme se ještě ke shodnému zobrazení (přemístění), které jsme nazvali středová souměrnost.



Obr. 29

Sestrojme rovnoběžník a označme průsečík jeho úhlopříček S. K několika bodům, které leží uvnitř nebo na obvodu rovnoběžníka sestrojme body souměrné podle středu S (obr. 29).

Můžeme vyslovit domněnku, že každý bod rovnoběžníka $ABCD$ přejde ve středové souměrnosti podle průsečíku úhlopříček opět v bod rovnoběžníka $ABCD$. Tato domněnka je správná a vyjadřuje jedno ze základních vlastností rovnoběžníka. Říkáme, že

„rovnoběžník je útvar souměrný podle průsečíků úhlopříček",

nebo

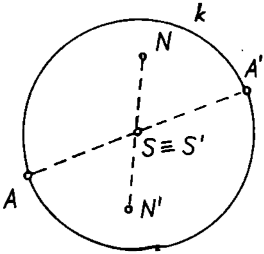
„rovnoběžník je samodružný útvar v souměrnosti podle průsečíku úhlopříček",

nebo

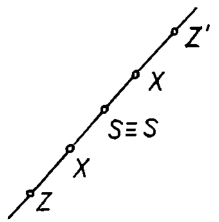
„rovnoběžník se reprodukuje v souměrnosti podle průsečíku úhlopříček“.

Podobnou vlastnost mají i jiné útvary:

Kružnice $k = (S; r)$ se reprodukuje v souměrnosti podle středu S (obr. 30).



Obr. 30



Obr. 31

Přímka p se reprodukuje (je samodružná) v souměrnosti podle každého bodu, který na ní leží (obr. 31).

Cvičení

1. Je dán trojúhelník $\triangle XYZ$. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem Z tak, aby přímka $\overleftrightarrow{AB}$ procházela bodem X a přímka $\overleftrightarrow{CD}$ procházela bodem Y!

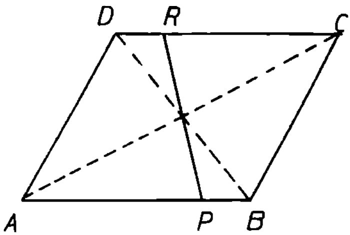
Návod: Uvažte, že čtverec je zvláštní případ rovnoběžníka. Přímka $\overleftrightarrow{AB}$ s bodem X přejde v souměrnosti podle středu Z v přímku $\overleftrightarrow{A'B'}$ s bodem X' a $\overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{X'Y}$.

2. Je dán trojúhelník OPR. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby přímka $\overleftrightarrow{AB}$ procházela bodem P, přímka $\overleftrightarrow{CD}$ bodem R

a bod O byl středem kosočtverce. Přesvědčte se, že daným podmínkám vyhovuje nekonečně mnoho kosočtverců!

Návod: Podobně jako ve cvičení č. 1 sestrojíme přímku PQ'. Na ní můžeme libovolně zvolit jeden vrchol kosočtverce. Použijeme věty, že každý rovnoběžník, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, je kosočtverec.

3. Úloha je zadána jako ve cvičení 2; požadujeme však ještě, aby kosočtverec měl předepsanou velikost strany.



Obr. 32

Zvolte body OPR tak, že platí $OP = 3\ cm$, $OR = 4\ cm$, $PR = 6\ cm$.

Strana kosočtverce a) $AB = BC = 8\ cm$

b) $AB = BC = 3\ cm$

Přesvědčte se, že v případě a) lze sestrojit kosočtverce dva, v případě b) žádný.

Víte jak volit délku strany kosočtverce tak, aby úloha

a) měla právě dvě řešení?
b) neměla žádné řešení?

4. Důkazová úloha:

Na obr. 32 je rovnoběžník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = 7\ cm$, $BC = 5\ cm$. Úsečka PR má tu vlastnost, že $AP + PR + RD + DA = PB + BC + CR + RP$.

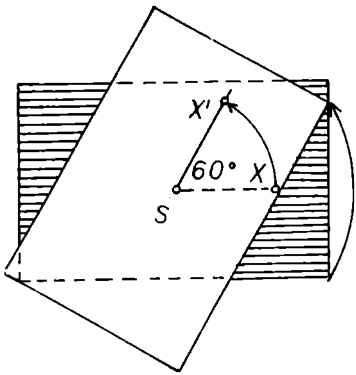
a) Odůvodněte, že $AP = CR$, $BP = DR$.

b) Odůvodněte, že přímka $\overleftrightarrow{PR}$ obsahuje bod $AC \cap BD$.

5. Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M, který neleží na žádné z nich. Bodem M veďte přímku p, aby protínala přímku v bodě A a přímka b v bodě B a aby platilo $AM = BM$.
Návod: Použijte souměrnosti rovnoběžníka se středem v M.

Otočení (rotace) kolem daného středu

Obrazy bodů roviny ϱ najdeme pomocí průsvitky tak, že průsvitku upevníme v jednom bodě a otočíme ji



Obr. 33

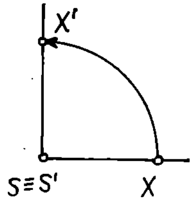
o úhel ω dané velikosti ve zvoleném smyslu (například o úhel 60° proti pohybu hodinových ručiček; viz obr. 33).

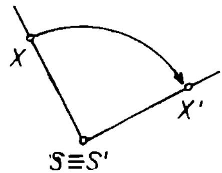
Toto přemístění (shodné zobrazení) nazýváme **otočení (rotace) se středem S o daný úhel ω.**

Dohodneme se, že při otáčení proti pohybu hodinových ručiček napíšeme před údaj velikost úhlu otočení znaménko +, při otáčení v opačném smyslu znaménko —.

a) Otočení se středem S o $+\ 90°$ (obr. 34a)

b) Otočení se středem S o $-\ 90°$ (obr. 34b)



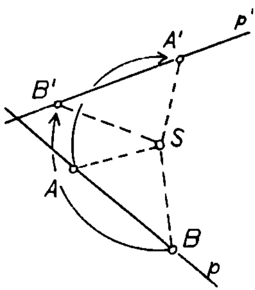


Obr. 34a, b

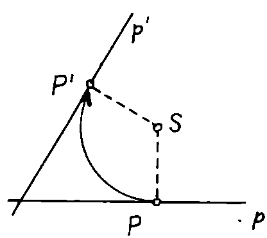
PŘÍKLAD 1,16

Je dán bod S a přímka p, která bodem S neprochází. Sestrojte přímku p', která je obrazem přímky p v otočení se středem S o úhel $\alpha = -\ 120°$.

Na přímce p zvolíme dva různé body $A \neq B$ a každý z nich otočíme o úhel $\alpha = -\ 120°$. Bod A přejde do bodu A', bod B do bodu B'. Přímka $p' = A'B'$. (Obr. 35a)



Obr. 35a

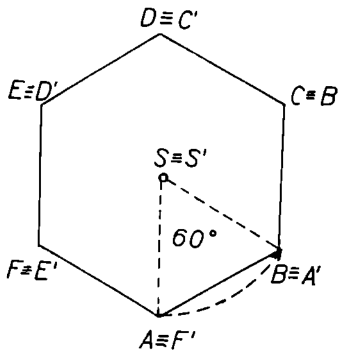


Obr. 35b

Přímku p můžeme otočit také pomocí bodu P, který je patou kolmice spuštěné ze středu S k dané přímce p. Otočíme bod P do bodu P' a přímka p' prochází bodem P' a je kolmá k $\overleftrightarrow{SP'}$ (obr. 35b).

PŘÍKLAD 1,17

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S. Sestrojte obraz šestiúhelníka $ABCDEF$ v otočení se středem v S o úhel $\alpha = +60°$.

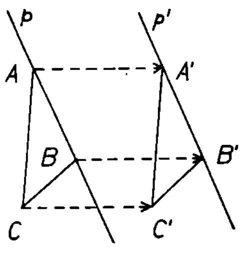


Obr. 36

Šestiúhelník se v daném otáčení reprodukuje (je samodružný). Přesvědčte se, že se šestiúhelník reprodukuje i při otáčení kolem bodu O o úhel $-60°$, $+120°$, $-120°$ a v souměrnosti se středem v O, kterou můžeme považovat také za otáčení kolem středu O, o úhel $+180°$ nebo $-180°$ (obr. 36).

Cvičeni

1. Jsou dány dvě rovnoběžky $p \parallel q$ a bod A, který neleží na žádné z nich. Sestrojte přímku p' jako obraz přímky p v otočení se středem v A o úhel $\beta = +60°$. Průsečík přímek p' a q označte B. Nad úsečkou AB sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABC_1 a ABC_2. Jestliže jste rýsovali přesně, pak jeden z vrcholů C_1 nebo C_2 leží na přímce p. Umíte to vysvětlit?



Obr. 37

2. Zjistěte všechna otočení (určete střed a orientovaný úhel), kterými se reprodukuje daný
a) čtverec, b) rovnostranný trojúhelník, c) pravidelný osmiúhelník, d) kružnice.

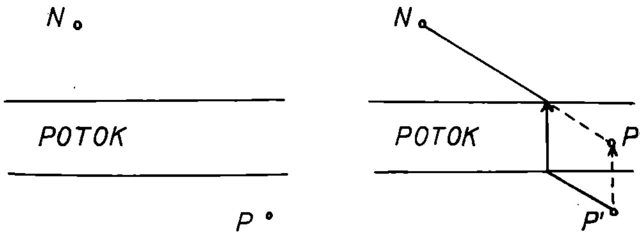
Posunutí (translace)

Velmi jednoduchý způsob přemístění roviny ϱ je permutace v rovině ϱ, zvaná **posunutí (translace)** (obr. 37). Můžeme si je popsat třeba tak, že všechny úsečky, které spojují vzor a obraz mají v daném posunutí stejnou velikost a od vzoru k obrazu se pohybují stejným směrem. Je-li dána jediná dvojice AA' roviny ϱ, které patří posunutí $\boldsymbol{T}$, dovedeme určit obraz libovolného bodu roviny ϱ

v posunutí T. V posunutí je obrazem každé přímky p přímka $p' \parallel p$. Náleží-li přímka p směru posunutí, je $p' \equiv p$.

Cvičení

1. Posunutí je dáno dvojicí bodů $A \neq A'$. Které přímky jsou v tomto posunutí samodružné? Má posunutí samodružné body?



Obr. 38a, b

2. Existuje posunutí, které reprodukuje daný čtverec? Jestliže existuje, přesně je popište, jestli neexistuje, pokuste se o odůvodnění. Nedovedete-li rozhodnout, použijte průsvitky!

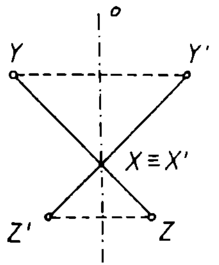
3. Zvolte posunutí dvojicí bodů $A \neq A'$. Vyjmenujte některé útvary, které jsou v daném posunutí samodružné.

4. Obce N a P, které byly na opačných březích potoka, se rozhodly postavit přes potok lávku (obr. 38a).
Určete na plánku co nejvýhodnější místo tak, aby cesta z N do P byla co nejkratší (lávka musí být kolmá k břehům potoka).
Dokažte, že uvedené řešení je správné (obr. 38b).

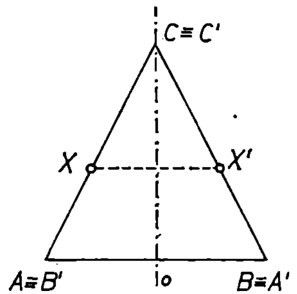
5. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho stran. Základny lichoběžníka jsou AB, CD.
a) $AB = 3$ *cm*, $BC = 5$ *cm*, $CD = 6$ *cm*, $DA = 4$ *cm*.
b) $AB = 7$ *cm*, $BC = 3$ *cm*, $CD = 4$ *cm*, $DA = 6$ *cm*.

Osová souměrnost

Jestliže na papír nakreslíme inkoustem několik bodů a papír přeložíme (podle zvolené přímky o), dokud kresba neuschla, získáme ke každému bodu (vzoru) právě jeden otisk (obraz) v zobrazení, kterému říkáme **souměrnost podle osy o.** Otevřeme-li přeložený papír, najdeme snadno



Obr. 39



Obr. 40

předpis, jak ke každému bodu roviny ϱ sestrojit kružítkem a pravítkem obraz v osové souměrnosti.

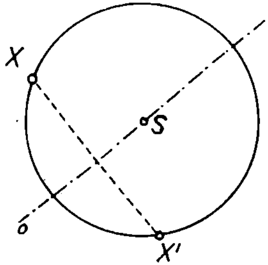
V rovině ϱ je dána přímka o (osa souměrnosti). Pro všechny body X, které leží na přímce o, platí $X' = X$.

Obraz bodu Y, který neleží na přímce o, dostaneme takto: Patu kolmice vedené z bodu Y k přímce o označíme Y_0. Bod Y' leží na polopřímce opačné k $Y_0 Y$ tak, že $Y'Y_0 = YY_0$. (Obr. 39)

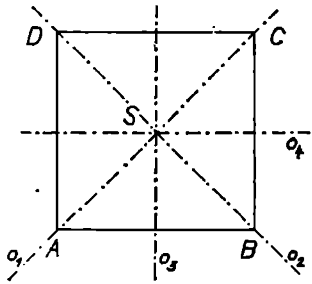
Osová souměrnost je rovněž přemístění a pro každou úsečku platí $A'B' = AB$. Pro vymodelování osové souměrnosti můžeme také použít průsvitky. Snadno si ověříte, že v tomto případě musíme při přemístění otočit průsvitku na rub, abychom k daným bodům získali obrazy. Takovému přemístění říkáme **nepřímé.**

V osové souměrnosti je obrazem přímky p přímka p'. Je-li $p \perp o$, pak $p' \equiv p$. Je-li p různoběžná s osou o a není k ní kolmá, protínají se přímky p a p' na ose o. Je-li $p \parallel o$, je $p' \parallel o \parallel p$. Obrazem úsečky XY je úsečka $X'Y'$ a $XY = X'Y'$.

Útvary, o kterých říkáme, že jsou souměrné podle osy



Obr. 41



Obr. 42

o, se v osové souměrnosti podle o **reprodukují.** Např. rovnoramenný trojúhelník je souměrný podle kolmice spuštěné z hlavního vrcholu na základnu (obr. 40).

Kružnice je souměrná podle každé přímky, která prochází jejím středem (obr. 41).

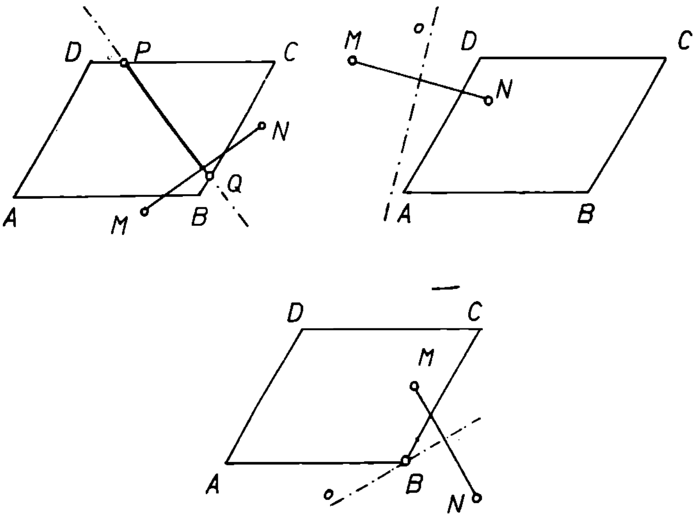
PŘÍKLAD 1,18

Najděte všechny osové souměrnosti, které reprodukují čtverec $ABCD$!

Takové osové souměrnosti jsou čtyři. Jejich osy jsou přímky, v nichž leží obě úhlopříčky a obě střední příčky (obr. 42).

PŘÍKLAD 1,19

Je dán kosočtverec $ABCD$ a dva různé body $M \neq N$. Najděte všechny body kosočtverce $ABCD$, které mají od bodů M a N stejnou vzdálenost.



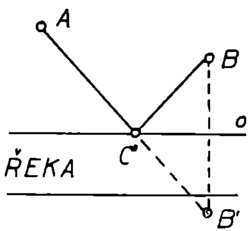
Obr. 43a, b, c

Všechny body, které leží v rovině ϱ a mají od bodů M, N stejnou vzdálenost, vyplňují přímku o, která prochází středem úsečky MN a je k přímce $\overleftrightarrow{MN}$ kolmá. Je to tzv. osa úsečky MN. V souměrnosti podle o se úsečka MN reprodukuje.

Body, které vyhovují úloze, musí tedy ležet na ose úsečky MN a současně v kosočtverci $ABCD$. Na obr. 43a je hledanou množinou bodů úsečka PQ. Podle polohy bodů MN vzhledem ke kosočtverci může být také množina prázdná (obr. 43b) nebo jednobodová (obr. 43c).

PŘÍKLAD 1,20

V obci A vypukl požár a z obce B jeli požárníci se stříkačkou a cestou se museli stavit u řeky, kde nabrali



Obr. 44

vodu. (Viz obr. 44.) Kde bylo nejvýhodnější nabrat vodu, aby cesta z A do B byla co nejkratší?

Bod B' je obraz bodu B v souměrnosti podle osy o. Nejkratší spojení z A do B' je úsečka AB', která protíná osu o v bodě C. Platí, že $B'C = BC$. Je proto nejvýhodnější nabrat vodu v místě C.

Kdyby nabírali vodu v místě $X \neq C$, platilo by:

$$AX + XB' > AC + CB',$$

(z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle AB'X$)

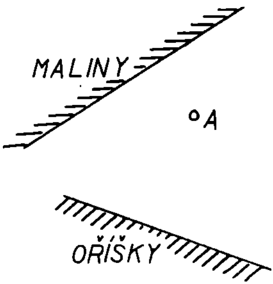
$$CB' = CB;\ XB' = XB$$

a také $\qquad AX + XB > AC + BC$

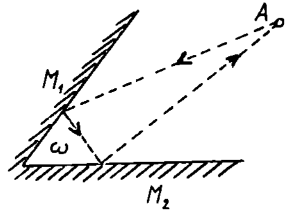
Cvičení

1. Na obr. 45 je dána řada znaků.
Najděte svislou osu souměrnosti každého znaku a všimněte si obrázku v pravé polovině. Zakreslete další znaky!

Obr. 45



Obr. 46



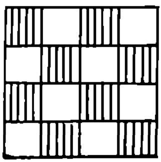
Obr. 47

2. Čtyři kamarádi tábořili na palouku v lese (v místě A) a měli přesně zakreslený plánek okolí (obr. 46). Hledali nejkratší cestu z tábora A pro maliny, pak pro oříšky a zpět do tábora. Našel ji Mirek.
Jakou cestu zvolil? Jak přesvědčil kamarády, že volil správně?

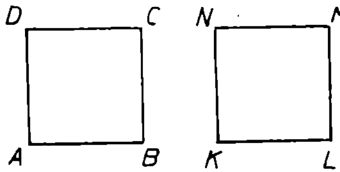
3. Dutý úhel ω na obr. 47 znázorňuje jeden roh kulečníku. V bodě A stojí koule. Koule má být uvedena v pohyb tak, aby po prvním odrazu na mantinelu M_1 a po druhém odrazu na mantinelu M_2 prošla polohou A. Pokuste se sestrojit body odrazu X_1 a X_2. Zkuste řešit tutéž úlohu pro úhel $\omega = \mathrm{R}$!

4. Najděte všechny osové souměrnosti, které reprodukují:
a) rovnostranný trojúhelník,
b) pravidelný šestiúhelník.

Popsali jsme čtyři různá přemístění roviny ϱ. Každé z nich je prosté zobrazení, a protože množinou vzorů i množinou obrazů jsou všechny body roviny ϱ, jsou všechna přemístění permutace v rovině ϱ.



Obr. 48



Obr. 49

Otočení kolem středu S — jeho zvláštním případem je středová souměrnost podle S — má jediný samodružný bod $S = S'$ (bod X je samodružný, právě když relaci náleží dvojice $[X, X]$). Posunutí nemá žádný samodružný bod — pro každý vzor a obraz platí, že jsou navzájem různé.

Osová souměrnost má nekonečně mnoho samodružných bodů a všechny vyplní přímku, které říkáme osa.

Víme ještě o jedné permutaci, která je přemístěním roviny (shodným zobrazením) a to je identická permutace (identita). Průsvitku necháme ležet na podložce v původní poloze a všechny obrazy a vzory splývají. Jestliže se průsvitka nemá pohnout z místa ani překlopit, musíme ji upevnit aspoň ve třech bodech, které tvoří vrcholy trojúhelníka. Máme-li tedy dány v rovině tři různé samodružné body, které neleží v přímce, jsou samodružné všechny body roviny.

Cvičení

1. Na obr. 48 je šachovnice o 16 polích. Popište shodnosti, které reprodukují tuto šachovnici i co do barvy polí.

2. Na obr. 49 jsou dva čtverce $ABCD$, $KLMN$, jejichž strany AB, KL mají tutéž délku a jsou rovnoběžné. Najděme (zkusmo) všechny shodnosti, které převádějí čtverec $ABCD$ (jako množinu bodů) ve čtverec $KLMN$ (jako množinu bodů). Popište tyto shodnosti a nakreslete náčrtky.

2. kapitola

OPERACE A GRUPY

Pojem operace a grupy je pro matematiky velmi důležitý; umožní nám najít v různých matematických disciplínách společné vlastnosti. Pomůže nám pochopit na příklad to, že se aritmetika, algebra a geometrie, které probíráme ve škole, neliší od sebe tak, jak se nám dosud zdálo. V článcích 2,1 a 2,2 se budeme zabývat převážně číselnými množinami a početními výkony (operacemi) s čísly. Nebude nás však zajímat numerické počítání, ale společné a odlišné vlastnosti různých početních výkonů (operací) v různých číselných množinách. Články 1,3 a 1,4 jsou věnovány spíše geometrii. Ukážeme si, že práce s množinami bodů v rovině se příliš neliší od práce s číselnými množinami.

V následujících článcích budeme často pracovat v různých číselných množinách; dohodneme se předem o jejich označení.

$\boldsymbol{N}$ ... množina všech **přirozených** čísel bez nuly

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

$\boldsymbol{N}_0$ ... množina všech přirozených čísel s nulou

$$\boldsymbol{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\boldsymbol{C}$ ... množina všech **celých** čísel

$$\boldsymbol{C} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\boldsymbol{Q}$ ... množina všech **racionálních** čísel; patří do ní všechna čísla, která lze napsat pomocí zlomků v jejichž čitateli i jmenovateli jsou celá čísla

$\boldsymbol{Q}^+$ ... množina všech kladných racionálních čísel (bez nuly!)

$\boldsymbol{R}$ ... množina všech **reálných** čísel. Reálná čísla jsou nejen všechna čísla racionální, ale i další čísla, (říkáme jim čísla **iracionální**), např. π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, atd.

Můžeme psát $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{N}_0 \subset \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$,

$$\boldsymbol{Q}^+ \subset \boldsymbol{Q}.$$

2.1. Operace v množině

Budeme definovat *zobrazení, které uspořádané dvojici* $[a, b]$ *kartézského součinu* $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ *přiřadí nejvýše jeden prvek* $c \in \boldsymbol{M}$. Platí: množina vzorů $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, množina obrazů $\boldsymbol{O} \subset \boldsymbol{M}$.

Tento druh zobrazení nazýváme **operace v množině** $\boldsymbol{M}$ a zapisujeme vzorcem

$$a \bigcirc b = c\,.$$

Písmena a, b se nazývají nezávisle proměnné, c je závisle proměnná; znak $\bigcirc$ (někdy $*$, $+$, $-$, $\triangle$, ., atd.) je symbol operace a naznačuje nám způsob, jak k dvojici a, b vybíráme závisle proměnnou c. S některými druhy operací se setkáváme tak často, že jsme pro ně vyhradili zvláštní symboly:

např. znak $+$ je vyhrazen pro operaci sčítání (vzorem je dvojice sčítanců, obrazem je jejich součet)

$-$ znamená operaci odečítání

. znamená operaci násobení

: znamená operaci dělení

Ve škole se učíme například „násobit“. To znamená, že se učíme k dvojici čísel $[a, b]$ přiřadit právě jedno celé číslo c (součin).

Operaci násobení můžeme znázornit tabulkou např. takto:

$a . b$	$a \setminus b$	1	2	3	4	5	.	.	.
	1	1	2	3	4	5	.	.	.
	2	2	4	6	8	10	.	.	.
	3	3	6		12				
	4	4	8						
	5	5	10						
	.	.	.						
	.	.	.						
	.	.	.						

V příslušném políčku, které patří dvojici např. $[3, 4]$, zapíšeme obraz dvojice (součin), tj. *12*.

PŘÍKLAD 2,1

$\boldsymbol{N}$ je množina všech přirozených čísel (bez nuly), $a, b \in \boldsymbol{N}$. Je-li $a > b$, pak přiřadíme uspořádané dvojici $[a, b]$ prvek $c \in \boldsymbol{N}$ (rozdíl). Je-li $a \leqq b$, nepřiřazujeme dvojici $[a, b]$ žádný prvek c. Rozdíl je přiřazen jen některým dvojicím $[a, b] \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$.

Operace odečítání je definována v množině všech přirozených čísel $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$.

Tabulka:

$a - b$ $\quad a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
1										
2	1									
3	2	1								
4	3	2	1							
5	4	3	2	1						
6	5	4	3	2	1					
7	6	5	4	3	2	1				
.										
.										
.										

PŘÍKLAD 2,2

Je dána množina všech kladných racionálních čísel $\boldsymbol{Q}^+$ Operace : (dělení) přiřadí každé uspořádané dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{Q}^+ \times \boldsymbol{Q}^+$ jediný prvek $c \in \boldsymbol{Q}^+$ (podíl). Operace dělení je definována v množině $\boldsymbol{Q}^+$ a $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q}^+ \times \boldsymbol{Q}^+$.

Operace dělení je definována pro každou dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{Q}^+ \times \boldsymbol{Q}^+$ [někdy říkáme, že je definována na množině $\boldsymbol{Q}^+$].

PŘÍKLAD 2,3

$\boldsymbol{M}$ je množina všech bodů v rovině. Operace $\bigcirc$ je definována takto: Je-li $A \neq B$, je dvojici bodů $[A, B]$ přiřazen bod C, který je středem úsečky AB. Je-li $A = B$, je dvojici $[A, B]$ přiřazen bod A. Definovali jsme si „operaci střed" pro každou dvojici bodů $[X, Y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$.

PŘÍKLAD 2,4

Při cvičení používáme čtyř povelů „vlevo v bok" (L), „vpravo v bok" (P), „čelem vzad" (Z) a tak zvaný neutrální povel (N — „zůstat ve stejné poloze"). Množina povelů $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{N}\}$. Operaci $*$ definujeme takto:

Uspořádané dvojici prvků $[a, b] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ přiřadíme ten prvek c, kterým se dají oba prvky a, b nahradit. Sestrojíme tabulku pro kartézský součin $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ konečné množiny $\boldsymbol{M}$ a doplníme obrazem c příslušné uspořádané dvojice.

Tabulka operace $*$:

$a * b$	$a \backslash b$	L	P	Z	N
	L	Z	N	P	L
	P	N	Z	L	P
	Z	P	L	N	Z
	N	L	P	Z	N

Z tabulky přečteme:

$P * Z = L$

Povel „vpravo v bok a čelem vzad" můžeme nahradit povelem „vlevo v bok".

Operace $*$ je definována pro každou dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$.

Často slýcháme, že např. „sčítání je komutativní" a rozumíme tím, že $a + b = b + a$ (při sčítání nezáleží na pořadí sčítanců). Tento výrok není přesný a musíme se nad pojmem **„komutativní operace"** zamyslet.

Operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$ přiřazuje každé dvojici $[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ nejvýš jeden prvek $z \in \boldsymbol{M}$.

Mohou nastat tyto možnosti (a, b, c, d patří množině $\boldsymbol{M}$):

1) $a \bigcirc b = c, \quad b \bigcirc a = c$
2) $a \bigcirc b = c, \quad b \bigcirc a = d; \quad c \neq d$
3) $a \bigcirc b = c, \quad b \bigcirc a$ není v množině $\boldsymbol{M}$ definována
4) $a \bigcirc b$ není v množině $\boldsymbol{M}$ definována, $b \bigcirc a = c$
5) $a \bigcirc b$ ani $b \bigcirc a$ není v množině $\boldsymbol{M}$ definována

Říkáme, že operace $\bigcirc$ je komutativní v množině $\boldsymbol{M}$, právě když pro každou dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ nastane případ 1) nebo 5).

Jestliže najdeme aspoň jednu dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, pro něž nastal případ 2), 3) nebo 4), pak operace v množině $\boldsymbol{M}$ komutativní není.

PŘÍKLAD 2,5

Operace z příkladu 2,1 (odčítání v množině $\boldsymbol{N}$) není komutativní: Jestliže $a - b = c$ ($a \in \boldsymbol{N}$, $b \in \boldsymbol{N}$, $c \in \boldsymbol{N}$), pak $a > b$; dvojici $[b, a]$ není přiřazen žádný prvek z množiny $\boldsymbol{M}$, protože $b \leqq a$.

Operace z příkladu 2,2 (dělení v množině $\boldsymbol{Q}^+$) není komutativní, protože dvojicím $[a, b]$ a $[b, a]$ jsou sice přiřazeny prvky množiny $\boldsymbol{Q}^+$ (podíly), ale je-li $a \neq b$, pak $a : b \neq b : a$.

Operace z příkladu 2,3 (střed dvojice $[A, B]$) je komutativní, protože každé dvojici $[A, B]$ je přiřazen střed a pro každou dvojici platí, že střed dvojice $[A, B]$ je týž bod jako střed dvojice $[B, A]$.

Operace z příkladu 2,4 je komutativní — ověříme si přímo z tabulky.

Operace $x \bigcirc y = z$, kde $z = \dfrac{2xy}{x + y}$ v množině všech reálných čísel $\boldsymbol{R}$ je komutativní:

a) Je-li $x \neq -y$, pak $x \bigcirc y = \dfrac{2xy}{x + y}$,

$$y \bigcirc x = \frac{2yx}{y + x},$$

a protože sčítání a násobení reálných čísel je komutativní, je

$$\frac{2xy}{x + y} = \frac{2yx}{y + x}$$

b) Je-li $x = -y$, pak $x + y = y + x = 0$ a dvojici $x \bigcirc y$ ani dvojici $y \bigcirc x$ není přiřazeno žádné reálné číslo.

Podobně zkoumáme, je-li operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$ **asociativní.**

Jsou-li prvky $a \in \boldsymbol{M}$, $b \in \boldsymbol{M}$, $c \in \boldsymbol{M}$, pak zkoumáme výsledek operace $(a \bigcirc b) \bigcirc c$ a $a \bigcirc (b \bigcirc c)$.

Operace $\bigcirc$ je asociativní v množině $\boldsymbol{M}$, právě když platí:

a) Je-li $(a \bigcirc b) \bigcirc c \in \boldsymbol{M}$ a současně $a \bigcirc (b \bigcirc c) \in \boldsymbol{M}$, pak $(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c)$.

b) $(a \bigcirc b) \bigcirc c \notin \boldsymbol{M}$ právě když $a \bigcirc (b \bigcirc c) \notin \boldsymbol{M}$. (Výsledek není definován v množině $\boldsymbol{M}$ pro žádný z obou případů.)

PŘÍKLAD 2,6

Operace z příkladu 2,1 (odečítání v množině $\boldsymbol{N}$) není asociativní. Může se stát, že $(a - b) - c \in \boldsymbol{N}$ a také $a - (b - c) \in \boldsymbol{N}$, ale výsledky se sobě nerovnají. Stačí najít jeden takový případ a už nelze o operaci odečítání v množině $\boldsymbol{N}$ říci, že je asociativní:

např.: $a = 6, \quad b = 3, \quad c = 1$

$$(6 - 3) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$6 - (3 - 1) = 6 - 2 = 4$$

Operace z příkladu 2,2 (dělení v množině $\boldsymbol{Q}^+$ není asociativní. Je sice $(a : b) : c \in \mathbf{Q}^+$ i $a : (b : c) \in \mathbf{Q}^+$, ale stačí dosadit např. $a = 48$, $b = 12$, $c = 2$:

$$(48 : 12) : 2 = 4 : 2 = 2$$

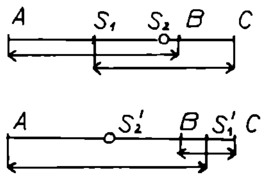
$$48 : (12 : 2) = 48 : 6 = 8$$

Aspoň v jednom případě tedy je

$$(a : b) : c \neq a : (b : c)$$

a operace není asociativní.

Operace „střed" z příkladu 2,3 není asociativní (viz obr. 50).



Obr. 50

Operace z příkladů 2,4 je asociativní. Ověříme si z tabulky všechny možnosti např.:

$$(L * P) * Z = N * Z = Z$$

$$L * (P * Z) = L * L = Z$$

Operace sčítání a násobení v množině $\boldsymbol{N}$ jsou asociativní. Tuto vlastnost obou operací nebudeme dokazovat.

Existuje-li takový prvek $n \in \boldsymbol{M}$, že pro každé $a \in \boldsymbol{M}$ platí $a \bigcirc n = n \bigcirc a = a$, nazývá se n **neutrálním prvkem operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$**.

PŘÍKLAD 2,7

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{N}$ všech přirozených čísel bez nuly nemá neutrální prvek.

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{N}_0$ všech přirozených čísel s nulou má neutrální prvek 0 (nulu). Pro každé $a \in \boldsymbol{N}_0$ platí

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Operace „střed" z příkladu 2,3 na množině všech bodů v rovině nemá neutrální prvek. Neexistuje takový bod N, aby pro každý bod A platilo $A \bigcirc N = N \bigcirc A = A$.

Neutrálním prvkem v množině povelů z příkladu 2,4 je prvek N (zůstat v původní poloze), jak si ověříme z tabulky.

Existuje-li k prvku $a \in \boldsymbol{M}$ takový prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{M}$, že $a \bigcirc \bar{a} = \bar{a} \bigcirc a = n$, kde n je neutrální prvek operace $\bigcirc$, nazývá se prvek $\bar{a}$ **inverzním prvkem operace** $\bigcirc$ **v množině** $\boldsymbol{M}$. Můžeme také říci, že prvky a a $\bar{a}$ jsou navzájem inverzní prvky operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$. Jestliže totiž $a \bigcirc \bar{a} = \bar{a} \bigcirc a$, pak můžeme také psát $\bar{a} \bigcirc a = a \bigcirc \bar{a}$ (vyměnili jsme obě strany rovnosti), a to znamená podle definice, že prvek a je inverzní k prvku $\bar{a}$, v operaci $\bigcirc$.

Povrchní pohled na definici inverzního prvku by nás mohl svést k úsudku, že z komutativnosti operace vyplývá existence inverzního prvku a naopak; jak uvidíme v příkladech, je tento úsudek nesprávný.

PŘÍKLAD 2,8

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{N}_0$ (všech přirozených čísel s nulou) je komutativní a má neutrální prvek. Inverzní prvek existuje pouze k prvku nula. Ostatní přirozená čísla nemají prvky k sobě inverzní.

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{N}$ (přirozená čísla bez nuly) je komutativní a nemá neutrální ani inverzní prvek.

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{C}$ (všech celých čísel) je komutativní, má neutrální prvek (nula) a ke každému prvku existuje prvek inverzní (t. zv. číslo opačné). Např.
k číslu $+5$ je inverzní číslo -5
k číslu -2 je inverzní číslo $+2$
k číslu 0 je inverzní číslo 0

PŘÍKLAD 2,9

Operace $\odot$, v množině $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e, f\}$ je definována pomocí tabulky

$x \odot y$	$x \backslash y$	a	b	c	d	e	f
	a	a	b	c	d	e	f
	b	b	c	a	f	d	e
	c	c	a	b	e	f	d
	d	d	e	f	a	b	c
	e	e	f	d	e	a	b
	f	f	d	e	b	c	a

Operace $\odot$ která je definována pro všechny dvojice $[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$:

a) není komutativní: např. $b \odot d = f$
$d \odot b = e$

b) je asociativní; přesvědčíme se, přezkoušíme-li všechny možné případy např. $(b \odot d) \odot c = f \odot c = e$
$b \odot (d \odot c) = b \odot f = e$

c) má neutrální prvek a:
pro každý prvek $x \in \boldsymbol{M}$ platí $x \odot a = a \odot x = x$

d) ke každému prvku $x \in \boldsymbol{M}$ existuje prvek inverzní $\bar{x} \in \boldsymbol{M}$

$$\bar{a} = a$$
$$\bar{b} = c$$
$$\bar{c} = b$$
$$\bar{d} = d$$
$$\bar{e} = e$$
$$\bar{f} = f$$

U této operace jsme si ukázali, že operace nemusí být komutativní a přece má neutrální prvek a ke každému prvku má prvek inverzní.

Pamatujte si:

Operace v množině
Operace komutativní
Operace asociativní
Neutrální prvek operace
Inverzní prvek operace k prvku a

Cvičení

1. V množině $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d\}$ je dána operace $\bigcirc$ takto:

$x \bigcirc y = z$	$x \backslash y$	a	b	c	a
	a	a	a	a	a
	b	a	b	c	d
	c	a	c	d	b
	d	a	d	b	c

a) Zjistěte, existuje-li takový prvek $n \in \boldsymbol{M}$, že pro každé $x \in \boldsymbol{M}$ je

$$x \bigcirc n = n \bigcirc x = x\,.$$

b) Najděte všecky prvky $x \in \boldsymbol{M}$, k nimž existuje takový prvek $\bar{x} \in \boldsymbol{M}$, že

$$x \bigcirc \bar{x} = \bar{x} \bigcirc x = n\,,$$

kde n je prvek z úlohy a).

2. V množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel je definována operace takto:

$$a \bigcirc b = a + 2b\,.$$

Zjistěte, existuje-li takový prvek $n \in \boldsymbol{R}$, že pro každé $a \in \boldsymbol{R}$ je

$$a \bigcirc n = n \bigcirc a = a\,.$$

3. V rovině ϱ je dána přímka p. Ke každé dvojici bodů A, B roviny ϱ přiřadíme bod $C = A \bigcirc B$ tak, aby $AC \parallel p$, $BC \perp p$. Vyšetřte, je-li $\bigcirc$ operace v množině všech bodů roviny ϱ, a je-li to operace, rozhodněte, je-li komutativní nebo asociativní!

4. $\boldsymbol{Z}$ je neprázdná množina a $\boldsymbol{M}$ je množina všech podmnožin množiny $\boldsymbol{Z}$. Je-li $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}$ (tj. $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{Z}$), označme $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$. Ukažte, že $\cap$ je operace v množině $\boldsymbol{M}$ a že tato operace je komutativní a asociativní. Vyšetřte dále, má-li operace $\cap$ v množině $\boldsymbol{M}$ neutrální prvek a který!

5. $\boldsymbol{Z}$ je neprázdná množina a $\boldsymbol{M}$ je množina všech podmnožin množiny $\boldsymbol{Z}$ jako v úloze 4. Je-li $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{M}$ označme $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}$. Ukažte, že $\cup$ je operace v množině $\boldsymbol{M}$ a že tato operace je komutativní a asociativní. Vyšetřte, má-li operace $\cup$ v množině $\boldsymbol{M}$ neutrální prvek a který!

6. V množině $\boldsymbol{M} = \{0, 1, 2\}$ je dána operace $\oplus$ takto: je-li $a \in \boldsymbol{M}$, $b \in \boldsymbol{M}$, je $a \oplus b$ zbytek, který dostaneme, dělíme-li součet $a + b$ třemi (např. $1 \oplus 1 = 2$, $1 \oplus 2 = 0$, $2 \oplus 2 = 1$). Sestavte tabulku této operace a ukažte, že je to operace komutativní a asociativní. Ze sestavené tabulky pro operaci $\oplus$ zjistěte, má-li tato operace neutrální prvek a který. Z téže tabulky vyčtěte, ke kterým prvkům množiny $\boldsymbol{M}$ existuje inverzní prvek operace $\oplus$ a udejte, který je to prvek!

7. V množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel je dána operace $\triangle$ vzorcem

$$a \triangle b = a + b + ab\,.$$

Vyšetřte, je-li tato operace komutativní a asociativní, najděte její neutrální prvek a ke každému prvku $a \in \boldsymbol{R}$ najděte inverzní prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{R}$ operace $\triangle$ (pokud takový prvek existuje). Existují v množině $\boldsymbol{R}$ prvky, které jsou samy k sobě inverzní vzhledem k operaci $\triangle$? Najděte je všechny!

2.2. Grupa

Množinu $\boldsymbol{M}$, v níž je definována operace $\bigcirc$ nazýváme **grupou** *vzhledem k operaci $\bigcirc$ (nebo vůči operaci $\bigcirc$), právě když:*

a) *Operace $\bigcirc$ je definována pro každou dvojici $[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$;*

b) *Operace $\bigcirc$ je asociativní v množině $\boldsymbol{M}$;*

c) *Operace $\bigcirc$ má neutrální prvek $n \in \boldsymbol{M}$;*

d) *Ke každému prvku $a \in \boldsymbol{M}$ existuje inverzní prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{M}$ operace $\bigcirc$.*

Je-li kromě toho operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$ komutativní, nazývá se množina $\boldsymbol{M}$ **komutativní grupou vůči operaci** $\bigcirc$.

V číselných množinách máme často definovány operace, které splňují pouze první dvě vlastnosti (např. sčítání nebo násobení v množině $\boldsymbol{N}$ všech přirozených čísel). Takovou množinu nazýváme pak **pologrupou vzhledem k operaci** $\bigcirc$.

Vyšetřujeme na příklad, zda množina $\boldsymbol{N}$ je grupou vůči operaci dělení. Dělíme-li dvě nesoudělná přirozená čísla, nedostaneme jako podíl číslo přirozené. Vlastnost a) není splněna a množina $\boldsymbol{N}$ není grupou (ani pologrupou) vzhledem k operaci dělení.

PŘÍKLAD 2,10

V číselných množinách je definována operace + (sčítání). Zjistěme, které číselné množiny tvoří grupu vůči operaci sčítání. Ověříme, zda jsou splněny podmínky z definice grupy pro množinu $\boldsymbol{C}$ (celých čísel).

1. Součet každých dvou celých čísel je číslo celé.
2. Sčítání celých čísel je asociativní.
3. Operace + má neutrální prvek — nulu.
4. Ke každému celému číslu existuje v $\boldsymbol{C}$ inverzní prvek (číslo opačné).
5. Operace sčítání $\boldsymbol{C}$ je komutativní.

Množina všech celých čísel je komutativní grupou vůči operaci sčítání.

Stejně si můžeme ověřit, že i *množina všech racionálních čísel* $\boldsymbol{Q}$ a *množina všech reálných čísel* $\boldsymbol{R}$ *jsou komutativní grupy vůči sčítání.*

Množina $\boldsymbol{N}_0$ není grupou vůči sčítání. Podmínky *a, b, c* jsou splněny, ale k žádnému přirozenému číslu kromě nuly neexistuje inverzní prvek z množiny $\boldsymbol{N}_0$. Rovněž množiny $\boldsymbol{Q}^+$ a $\boldsymbol{N}$ nejsou grupami vůči operaci sečítání.

PŘÍKLAD 2,11

Vyšetříme, které číselné množiny jsou grupou vzhledem k operaci (násobení).

Množina $\boldsymbol{Q}^+$ *je komutativní grupou vůči operaci násobení*, neboť:

1. Součin každých dvou kladných racionálních čísel je kladné racionální číslo.
2. Násobení kladných racionálních čísel je asociativní.

3. Operace násobení má neutrální prvek. Je jím kladné racionální číslo *1*.

4. Ke každému kladnému racionálnímu číslu a existuje inverzní prvek $\bar{a}$ (číslo převrácené: $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$).

5. Operace násobení je komutativní.

Množina $\boldsymbol{N}$ je pouze pologrupou, ale nikoliv grupou vůči operaci násobení. Jedině prvek *1* má inverzní prvek vzhledem k násobení ($\bar{1} = 1$).

K žádnému jinému přirozenému číslu neexistuje v $\boldsymbol{N}$ prvek inverzní (převrácená čísla k číslům přirozeným nejsou čísla přirozená).

Množiny $\boldsymbol{N}_0$, $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ nejsou rovněž grupami vůči násobení. Všechny tři uvedené množiny obsahují nulu a k ní neexistuje inverzní (převrácený) prvek pro operaci násobení.

Pro nulu by totiž muselo platit

$$0.\bar{0} = 1$$

Neexistuje však žádné reálné číslo, které násobeno nulou, by dalo číslo jedna.

Pamatujte si!

Grupa vzhledem k operaci $\bigcirc$
Komutativní grupa

Cvičení

1. Budiž $*$ operace v množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel definována vzorcem

$$a * b = a + b + 1,\ a \in \boldsymbol{R},\ b \in \boldsymbol{R}\,.$$

a) Vyšetřete, je-li tato operace komutativní a asociativní.

b) Zjistěte, existuje-li takový prvek $n \in \boldsymbol{R}$, aby pro každé $a \in \boldsymbol{R}$ bylo

$$a \ast n = a\,, \quad n \ast a = a\,.$$

c) Zvolte libovolný prvek $a \in \boldsymbol{R}$. Zjistěte, existuje-li k němu takový prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{R}$, aby

$$a \ast \bar{a} = n\,, \quad \bar{a} \ast a = n\,,$$

kde n je prvek, který vyhovuje úloze b.

d) Vypočtěte $\overline{2}$, $\overline{1}$, $\overline{0}$, $\overline{-1}$, $\overline{-2}$.

2. $\boldsymbol{M}$ je množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. V množině $\boldsymbol{M}$ je dána operace $x \square y = z$, kde

$$z = \max(x, y) = \begin{cases} x, \text{ je-li } x \geqq y\,, \\ y, \text{ je-li } x < y\,. \end{cases}$$

[Např. $\max(2, 3) = 3$, $\max(4, 1) = 4$, $\max(2, 2) = 2$; $\max(x, y)$ čteme: největší (maximum) z čísel x, y.]

Sestavte tabulku pro tuto operaci. Vyšetřete, je-li tato operace komutativní nebo asociativní a zda je $\boldsymbol{M}$ grupou vůči této operaci.

Návod: Je třeba buď vyšetřit všecky možné uspořádané dvojice, popř. trojice prvků množiny $\boldsymbol{M}$, nebo můžeme vzít libovolné prvky x, y, popř. x, y, z množiny $\boldsymbol{M}$ a odlišit případy $x \geqq y$, $y > x$ (při komutativnosti), popř. případy $x \geqq y \geqq z$, $x \geqq z \geqq y$, $y \geqq x \geqq z$, $y \geqq z \geqq x$, $z \geqq x \geqq y$, $z \geqq y \geqq x$ (při asociativnosti).

3. V množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel je dána operace $\square$ vzorcem

$$a \square b = a + b - 10\,.$$

Vyšetřte, je-li tato operace komutativní a asociativní, najděte její neutrální prvek a k libovolnému prvku $a \in \boldsymbol{R}$ najděte inverzní prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{R}$ operace $\square$ (pokud takový prvek existuje). Existují v množině $\boldsymbol{R}$ prvky, které jsou samy k sobě inverzní vzhledem k operaci $\square$? Najděte je všechny.

4. V množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel je dána operace $\square$ tak jako ve cvičení 3. Najděte všecka reálná čísla x, která splňují rovnice

a) $10 \square x = 10\,,$ b) $10 \square x = 0\,,$ c) $x \square 0 = 10\,.$

5. Znáte „cikánskou násobilku"? Máte-li znásobit dvě celá čísla a, b, pro která platí $5 < a < 10$, $5 < b < 10$, natáhněte na jedné ruce tolik prstů, oč a je větší než 5 a na druhé ruce tolik prstů, oč je b větší než 5 a ostatní prsty skrčte. Součet natažených prstů udává počet desítek a součin skrčených prstů počet jednotek výsledku. Odůvodněte správnost tohoto postupu. (Návod: natažených prstů je $a - 5$, popř. $b - 5$ a skrčených $10 - a$, popř. $10 - b$.)

6. ***M*** je množina čtvercových schemat. (Tato schemata se nazývají obyčejně *matice*.)

$$S_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad S_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad S_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$S_4 = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline\end{array} \quad S_5 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad S_6 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline\end{array}$$

Operace $\odot$ je zavedena vzorcem

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \odot \begin{array}{|c|c|}\hline e & f \\ \hline g & h \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline ae + bg & af + bh \\ \hline ce + dg & cf + dh \\ \hline\end{array}$$

a) Popište, jak se operace $\odot$ provádí.

b) Sestavte její tabulku.

c) Zjistěte, zda operace $\odot$ je komutativní, zda je asociativní a zda má neutrální prvek.

d) Zjistěte, zda množina $\boldsymbol{G} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ je grupa vzhledem k operaci $\odot$.

7. V moderním sídlišti je 9 křižovatek, které jsou spojeny osmi přímými komunikacemi (obr. 51a) a čtyřmi okružními komunikacemi (obr. 51b, c). Křižovatky označte písmeny A, B, C, D, E, F, G, H, I.

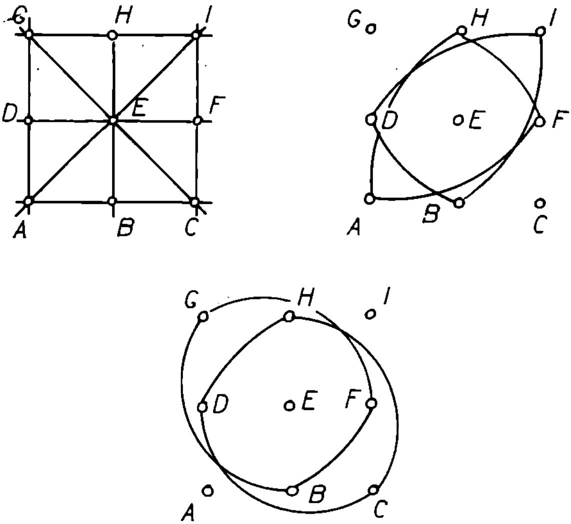
Komunikace tvoří křižovatku jen v kroužkovaných bodech; jinak se křižují v různých úrovních.

a) Každými dvěma křižovatkami prochází jediná z 12 komunikací; dokažte.

b) Neleží-li křižovatka X na komunikaci p, prochází křižovatkou jediná komunikace q, která nemá s komunikací p žádnou společnou křižovatku; dokažte.

c) Kolik komunikací prochází každou křižovatkou? Udejte komunikace, které procházejí křižovatkou A (ABC, ...).

d) Čisticí podnik umyje během noci právě 3 křižovatky.



Obr. 51a, b, c

Umyje-li křižovatky X, Y, umyje také křižovatku Z, která leží na téže komunikaci jako X, Y. Tím je v množině $\boldsymbol{M}$ všech křižovatek zavedena operace $Z = X \ast Y$; přitom $X \ast X = X$; Sestavte její tabulku.

e) Je množina $\boldsymbol{M}$ grupou vzhledem k operaci $\ast$?

f) Čisticí podnik umyje během noci právě tři křižovatky. Umyje-li křižovatky X, Y, umyje ještě křižovatku T určenou takto: T je třetí křižovatka ležící na téže komunikaci jako A a $Z = X \ast Y$. Tím je v množině $\boldsymbol{M}$ zavedena operace $T = X \vartriangle Y$. Sestrojte její tabulku.

g) Je množina M grupou vzhledem k operaci $\triangle$?

8. V množině R všech reálných čísel je dána operace $\square$: $a \square b = a + b - 10$. Najděte všechna reálná čísla, která splňují rovnice

$$10 \square x = 10$$
$$10 \square x = 0$$
$$x \square 0 = 10$$

2.3. Skládání permutací

Ve článku 2,2 jsme se zabývali většinou operacemi v množinách, jejichž prvky byly čísla, body, písmena apod. Některé operace jsme znali ze školy (sečítání, násobení, operace „střed úsečky"), u jiných jsme si celkem jednoduše popsali, jak najdeme k daným dvěma prvkům (číslům, bodům) prvek třetí jako výsledek operace.

V tomto článku si zavedeme novou operaci **„skládání permutací"** a budeme zkoumat její vlastnosti v množinách shodných zobrazení — tedy na objektech geometrických. Možná, že vás zaujmou výsledky, které dostaneme při skládání různých druhů přemístění — to však není to hlavní. Měli bychom si uvědomit, že novou operací se nám probudily k životu množiny jiného druhu, složitější stavby, než byly ty, které obsahovaly jako prvky čísla nebo body. Operace „skládání permutací" je definována v množině permutací — to znamená, že uspořádané dvojici permutací přiřadíme permutaci třetí.

Zavedeme si operaci **„skládání permutací"** takto:

Je dána množina M (konečná nebo nekonečná) a dvě její permutace P_1 a P_2. Vzoru $x \in M$ je permutací P_1

přiřazen obraz $y \in \boldsymbol{M}$ ($x \xrightarrow{P_1} y$). Vzoru $y \in \boldsymbol{M}$ je permutací $\boldsymbol{P}_2$ přiřazen obraz $z \in \boldsymbol{M}$, $y \xrightarrow{P_2} z$. Zobrazení $\boldsymbol{P}_3$, které vzoru $x \in \boldsymbol{M}$ přiřadí obraz $z \in \boldsymbol{M}$, je rovněž permutace a říkáme, že vznikla složením permutace $\boldsymbol{P}_1$ s permutací $\boldsymbol{P}_2$ v tomto pořadí.

V množině všech permutací $\boldsymbol{G}$ množiny $\boldsymbol{M}$ jsme zavedli operaci $*$, která je definována pro každou dvojici $[\boldsymbol{P}_1; \boldsymbol{P}_2] \in \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$ a která se nazývá „skládání permutací".

Píšeme $\boldsymbol{P}_1 * \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_3$.

Skládání permutací je operace, která není vždy komutativní.

PŘÍKLAD 2,12

Množina $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d\}$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{Bmatrix}$$

Složíme permutaci $\boldsymbol{P}_1$ s permutací $\boldsymbol{P}_2$

$$a \xrightarrow{P_1} c \xrightarrow{P_2} a$$
$$b \xrightarrow{P_1} d \xrightarrow{P_2} d \quad \text{atd.}$$

$$\boldsymbol{P}_1 * \boldsymbol{P}_2 = \begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{Bmatrix}$$

Složíme permutaci $\boldsymbol{P}_2$ s permutací $\boldsymbol{P}_1$

$$a \xrightarrow{P_2} b \xrightarrow{P_1} d$$
$$b \xrightarrow{P_2} c \xrightarrow{P_1} a$$

$$\boldsymbol{P}_2 * \boldsymbol{P}_1 = \begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{Bmatrix}$$

Je tedy $\boldsymbol{P}_1 * \boldsymbol{P}_2 \neq \boldsymbol{P}_2 * \boldsymbol{P}_1$

PŘÍKLAD 2,13

Rozhodněte, zda množina $\boldsymbol{G}$ všech permutací tříprvkové množiny $\boldsymbol{M} = \{A, B, C\}$ je grupou vůči operaci skládání permutací.

Vypíšeme si všechny permutace množiny $\boldsymbol{M} = \{A, B, C\}$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_4 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_5 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_6 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{Bmatrix}$$

Do tabulky zapíšeme výsledky operace skládání permutací

$x \ast y$	$x \backslash y$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_6$
	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_6$
	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_5$
	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_4$
	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_3$
	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_2$
	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_1$

1. Z tabulky je vidět, že složením každých dvou permutací z $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_5, \boldsymbol{P}_6\}$ vznikne permutace $\boldsymbol{P}_i \in \boldsymbol{G}$

2. Skládání permutací je asociativní — přesvědčíme se z tabulky, např.

$$(\boldsymbol{P}_2 * \boldsymbol{P}_3) * \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{P}_4 * \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{P}_5$$

$$\boldsymbol{P}_2 * (\boldsymbol{P}_3 * \boldsymbol{P}_4) = \boldsymbol{P}_2 * \boldsymbol{P}_6 = \boldsymbol{P}_5$$

3. Neutrálním prvkem skládání permutací je $\boldsymbol{P}_1$ (identita). Např.

$$\boldsymbol{P}_3 * \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1 * \boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_3$$

4. Inverzní prvek ke každé permutaci najdeme rovněž z tabulky

$$\overline{\boldsymbol{P}_1} = \boldsymbol{P}_1 \qquad \overline{\boldsymbol{P}_4} = \boldsymbol{P}_5$$

$$\overline{\boldsymbol{P}_2} = \boldsymbol{P}_2 \qquad \overline{\boldsymbol{P}_5} = \boldsymbol{P}_4$$

$$\overline{\boldsymbol{P}_3} = \boldsymbol{P}_3 \qquad \overline{\boldsymbol{P}_6} = \boldsymbol{P}_6$$

5. Skládání permutací není komutativní v $\boldsymbol{G}$. Např.

$$\boldsymbol{P}_6 * \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{P}_2$$

$$\boldsymbol{P}_4 * \boldsymbol{P}_6 = \boldsymbol{P}_3$$

Můžeme tedy říci, že *množina **G** všech permutací množiny **M** tvoří nekomutativní grupu vzhledem k operaci „skládání“*.

PŘÍKLAD 2,14

V rovině jsou dány dvě osové souměrnosti $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ s osami $o_1 \parallel o_2$. Vyšetřete, jaká permutace $\boldsymbol{P}$ roviny vznikne složením $\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2$! (Obr. 52)

Permutace $\boldsymbol{P}$ přiřazuje vzoru X obraz X_2.

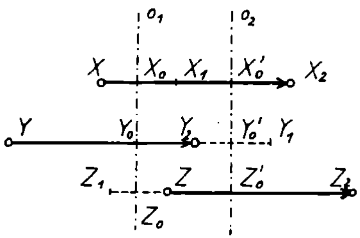
Přímky, které spojují každý vzor s jeho obrazem jsou navzájem rovnoběžné a kolmé k osám o_1 a o_2. Vzdálenost os označíme d. Platí:

$$X_0X = X_0X_1; \quad X_1X'_0 = X'_0X_2$$

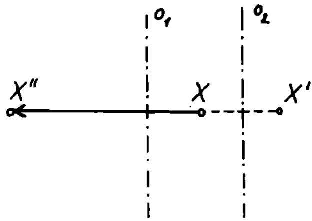
$$XX_2 = 2X_1X_0 + 2X_1X'_0 = 2(X_1X_0 + X_1X'_0) = 2d$$

$$ZZ_2 = 2Z'_0Z_1 - 2Z_0Z_1 = 2(Z'_0Z_1 - Z_0Z_1) = 2d$$

$$YY_2 = 2Y_1Y_0 - 2Y_1Y'_0 = 2(Y_1Y_0 - Y_1Y'_0) = 2d$$



Obr. 52



Obr. 53

Permutace, která vznikla, je posunutí (translace) *v rovině.* Velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti os a směr je kolmý ke směru os, orientovaný od o_1 k o_2.

Složíme $\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_1$ (obr. 53). Vznikne posunutí velikosti $2d$, ale opačného směru.

PŘÍKLAD 2,15

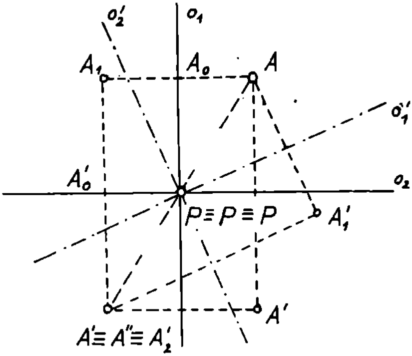
Složte dvě osové souměrnosti $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ s osami o_1, o_2, které jsou k sobě kolmé (obr. 54)!

Ve složené permutaci průsečík P os o_1 a o_2 je samodružný; spojnice AA_2 prochází bodem P a $AP = A_2P$. (Dokážeme ze shodnosti trojúhelníků $\triangle PAA_0 \cong \cong \triangle PA_1A_0 \cong \triangle PA_1A_0$, které jsou pravoúhlé a mají shodné odvěsny.)

Výsledná permutace je souměrnost podle středu P.

Souměrnost podle středu P vznikne i tehdy, zvolíme-li jinou dvojici $o_1' \perp o_2'$ tak, aby se o_1' a o_2' protínaly v bodě P.

Sestrojíme ještě obraz bodu A v permutaci $\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_1$ ($A \xrightarrow{\boldsymbol{O}_2} A' \xrightarrow{\boldsymbol{O}_1} A''$). Snadno ověříme, že pro každý bod A



Obr. 54

platí $A_2 = A''$. To znamená, že *skládání osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem kolmé, je komutativní*:

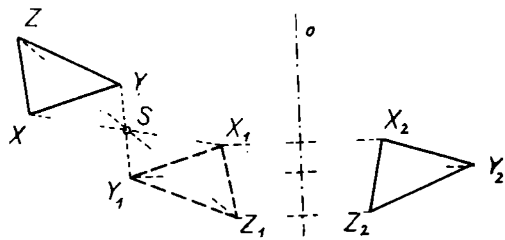
$$\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_1 \,.$$

Z příkladů 2,14 a 2,15 je vidět, že výsledkem operace skládání dvou osových souměrností bylo jednou posunutí a po druhé středová souměrnost. Množina všech osových souměrností není tedy grupou vůči operaci skládání.

PŘÍKLAD 2,16

Jaká permutace vznikne, složíme-li souměrnost **S** podle středu S se souměrností **O** podle osy o, která neprochází bodem S (obr. 55)?

Permutace, která vznikne, není ani identita, ani osová nebo středová souměrnost, ani posunutí nebo otočení.



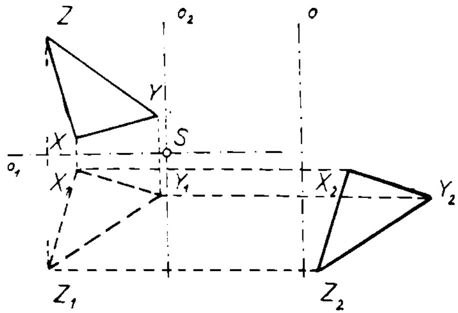
Obr. 55

Permutace $\boldsymbol{S} * \boldsymbol{O}$ je shodné zobrazení protože pro každou dvojici bodů X, Y platí $XY = X'Y'$ a $X'Y' = X''Y''$ (ve středové i osové souměrnosti se zachovává velikost úseček). Musí tedy platit pro každou dvojici bodů, že $XY = X''Y''$ a to je charakteristická vlastnost shodných zobrazení (přemístění). Tomuto novému druhu shodného zobrazení říkáme **posunuté zrcadlení** $\boldsymbol{Z}$.

Kdybychom chtěli hledat obrazy daných bodů v posunutém zrcadlení pomocí průsvitky, museli bychom průsvitku nejprve otočit o $2R$ kolem daného středu S a pak překlopit podle dané osy o. Název tohoto přemístění nevystihuje dost zřetelně fakt, že vzniklo složením středové a osové souměrnosti. Spíše bychom čekali, že posunuté zrcadlení vzniklo složením posunutí a osové souměrnosti (zrcadlení). To je ale rozpor pouze zdánlivý (viz obr. 56).

Uvažme toto:

1. Středová souměrnost vznikne složením kterýchkoliv dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé a protínají se ve středu souměrnosti.



Obr. 56

2. Posunutí vznikne složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různé rovnoběžky.

3. Skládání je asociativní operace v množině všech shodných zobrazení.

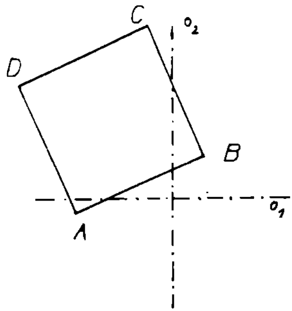
Pro posunutí zrcadlení $\boldsymbol{Z}$ platí:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S} * \boldsymbol{O}$$

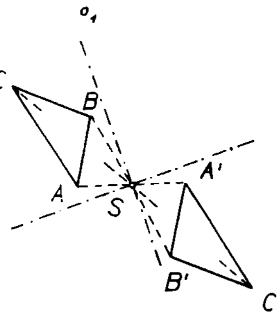
Osy o_1 a o_2 souměrností $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ z nichž vznikla středová souměrnost $\boldsymbol{S}$, zvolíme tak, aby první osa o_1 byla kolmá k ose o souměrnosti $\boldsymbol{O}$ a druhá osa o_2 byla s ní rovnoběžná: $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 = \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O})$. Osa o_2 je rovnoběžná s osou o a složením $\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}$ vznikne posunutí ve směru osy o_1. Posunuté zrcadlení **Z** vznikne také složením osové souměrnosti a posunutí ve směru osy této souměrnosti.

Cvičení

1. Složte dvě osové souměrnosti $\mathbf{O}_1$ a $\mathbf{O}_2$ s osami, které jsou různoběžné, ale nejsou k sobě kolmé. Pokuste se dokázat, že výsledná permutace je otočení (rotace) kolem průsečíku os!



Obr. 57



Obr. 58

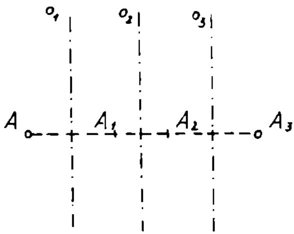
Je tato operace komutativní? Jak souvisí úhel otočení s odchylkou os?

2. Jaké zobrazení vznikne složením
a) dvou středových souměrností, které mají stejný střed?
b) dvou osových souměrností, které mají totožné osy?

3. Podle obr. 57 sestrojte obraz $\mathbf{Q}_1$ čtverce $ABCD$ ($\mathbf{Q}$) v souměrnosti podle osy o_1 a obraz $\mathbf{Q}_2$ čtverce $\mathbf{Q}_1$ v souměrnosti podle osy o_2. Ověřte, že čtverec $\mathbf{Q}_2$ je obraz čtverce $\mathbf{Q}$ v souměrnosti podle středu $o_1 \cap o_2$.

4. Podle obrázku 58 sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ a jeho obraz $\triangle A'B'C'$ v souměrnosti podle středu S. Zvolte dvě přímky o_1, o_2 navzájem kolmé a procházející bodem S. Ověřte, že obraz $\triangle ABC$ v souměrnosti podle osy o_1 splyne s obrazem $\triangle A'B'C'$ v souměrnosti podle osy o_2.

5. Jsou dány tři přímky $o_1 \parallel o_2 \parallel o_3$. Vzdálenost o_1, o_2, je rovna vzdálenosti o_2, o_3 (obr. 59). Vyšetřte shodnost, která vznikne složením příslušných osových souměrností o_1, o_2, o_3.



Obr. 59

2.4. Grupy shodných zobrazení

V článku 2,3 jsme definovali shodné zobrazení (přemístění) roviny. Konstrukčním předpisem nebo pomocí průsvitky jsme určili, jak bodu roviny X (vzoru) přiřadíme bod roviny X' (obraz).

Poznali jsme tato shodná zobrazení (přemístění):

1. identita $\boldsymbol{J}$
2. souměrnost podle osy $\boldsymbol{O}$
3. souměrnost podle středu $\boldsymbol{S}$
4. otočení kolem středu $\boldsymbol{R}$
5. posunutí $\boldsymbol{T}$
6. posunuté zrcadlení $\boldsymbol{Z}$ (viz př. 2,16)

Prohlédneme-li si pozorně předchozí příklady a cvičení z článku 2,3, uvidíte, že všechna přemístění, která známe, můžeme dostat složením nejvýše tří osových souměrností.

Identitu dostaneme složením dvou osových souměrností, jejichž osy splývají.

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 \quad (o_1 = o_2)$$

Posunutí složíme ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různé rovnoběžky.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 \quad (o_1 \not\equiv o_2;\ o_1 \parallel o_2)$$

Středová souměrnost vznikne složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 \quad (o_1 \perp o_2)$$

Otáčení složíme ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžné

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 \quad (o_1 \nparallel o_2)$$

Posunuté zrcadlení jsme složili ze středové a osové souměrnosti — to znamená, že jsme postupně skládali tři osové souměrnosti; osy prvních dvou byly k sobě kolmé, třetí neprocházela jejich průsečíkem.

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S} * \boldsymbol{O}$$

Shodné zobrazení, které vzniklo složením sudého počtu osových souměrností, se nazývá přímá shodnost (průsvitku při přemístění nemusíme otáčet na rub) — to je otočení a středová souměrnost, posunutí a identita.

Složením lichého počtu osových souměrností dostaneme nepřímou shodnost (při přemístění musíme průsvitku otáčet na rub) — to je osová souměrnost a posunuté zrcadlení.

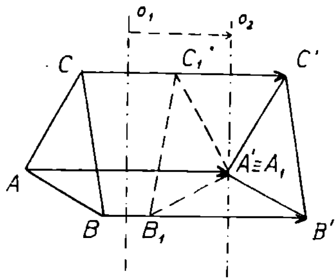
Napadne nás jistě otázka, zda existují ještě jiná shodná zobrazení kromě těch, která jsme dosud poznali— co se stane, složíme-li pět, deset, či sto osových souměrností. Aby byla odpověď aspoň trochu uspokojivá, musíme si říci ještě něco o rozkládání shodných zobrazení na osové souměrnosti.

Každé z našich shodných zobrazení (přemístění) umíme rozložit na osové souměrnosti a zvolíme-li osy vhodně, pak identitu, otočení, středovou souměrnost a posunutí rozložíme na dvě osové souměrnosti; posunuté zrcadlení na tři osové souměrnosti. Způsob rozkladu nám nejlépe ukáží příklady.

PŘÍKLAD 2,17

Je dáno posunutí *T*. Rozložte je na dvě osové souměrnosti!

Jednu z os (např. o_1) můžeme zvolit libovolně, ale tak, aby byla kolmá na směr posunutí. Druhá osa $o_2 \parallel o_1$ je od osy o_1 vzdálena ve směru posunutí o vzdálenost rovnou poloviční velikosti posunutí (obr. 60).



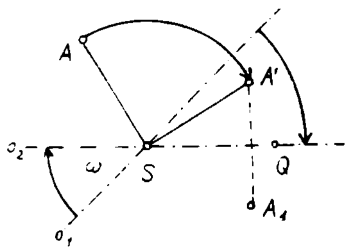
Obr. 60

Zvolíme-li libovolně druhou osu o_2' (musí být ovšem kolmá na směr posunutí), pak $o_1' \parallel o_2'$ je od osy o_2' vzdálená proti směru posunutí o vzdálenost rovnou polovině velikosti posunutí.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{O}_1' * \boldsymbol{O}_2'$$

PŘÍKLAD 2,18

Rozložte dané otočení $\boldsymbol{R} = (S; +90°)$ na dvě osové souměrnosti. Osa o_2 má procházet daným bodem $Q \neq S$.



Obr. 62

Osu o_2 zvolíme tak, aby procházela bodem Q a bodem S. Osa o_1 prochází rovněž bodem S a musí svírat s osou o_2 úhel $\varphi = + \frac{90}{2} = + 45°$ (od osy o_1 musíme přejít k ose o_2 „proti otáčení hodinových ručiček") (obr. 62).

PŘÍKLAD 2,19

Najděte shodné zobrazení $\boldsymbol{P}$, které vznikne postupným složením čtyř osových souměrností $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2, \boldsymbol{O}_3, \boldsymbol{O}_4$. Osy o_1 a o_2 jsou rovnoběžné, osy o_3 a o_4 různoběžné (viz obrázek 63).

Místo konstrukce provedeme výpočet (pozor! skládání osových souměrností není komutativní, ale je asociativní).

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_3 * \boldsymbol{O}_4)$$

$$\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{T};\ \boldsymbol{O}_3 * \boldsymbol{O}_4 = \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T} * \boldsymbol{R}$$

Translaci $\boldsymbol{T}$ rozložíme na osové souměrnosti $\boldsymbol{O}'_1$ a $\boldsymbol{O}'_2$. Osu o'_2 druhé souměrnosti volíme tak, aby procházela průsečíkem os o_3 a o_4

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}'_1 * \boldsymbol{O}'_2 * \boldsymbol{R}$$

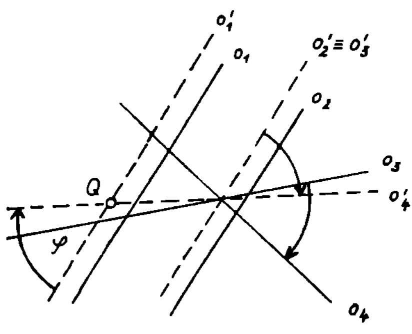
Rotaci $\boldsymbol{R}$ rozložíme na dvě osové souměrnosti $\boldsymbol{O}'_3$ a $\boldsymbol{O}'_4$. Osu o'_3 zvolíme tak, aby splynula s o'_2

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}'_1 * \boldsymbol{O}'_2) * (\boldsymbol{O}'_3 * \boldsymbol{O}'_4)$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}'_1 * (\boldsymbol{O}'_2 * \boldsymbol{O}'_3) \times \boldsymbol{O}'_4$$

$$\boldsymbol{O}'_2 = \boldsymbol{O}'_3; \quad \boldsymbol{O}'_2 * \boldsymbol{O}'_3 = \boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}'_1 * \boldsymbol{J} * \boldsymbol{O}'_4 = \boldsymbol{O}'_1 * \boldsymbol{O}'_4$$



Obr. 63

(identita je neutrální prvek operace, můžeme ji vynechat).

Přemístění $\boldsymbol{P}$ je složeno ze dvou osových souměrností, kde osy o_1', o_4' jsou různoběžné.

V našem případě je $\boldsymbol{P}$ otočení, jak nám ukáže konstrukce, kterou provedeme podle výpočtu (obr. 63). Výsledné otočení má střed Q a úhel otočení je φ.

PŘÍKLAD 2,20

Vyšetřete jaké zobrazení vznikne složením pěti různých osových souměrností: o_1, o_2 a o_3 navzájem rovnoběžné, $o_4 \parallel o_5$ jsou k nim kolmé (obr. 64).

Výpočet provedeme jen stručně:

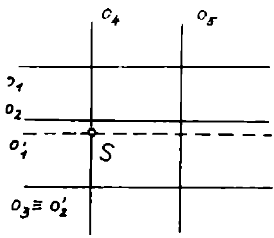
$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 * (\boldsymbol{O}_4 * \boldsymbol{O}_5)$$

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1' * \boldsymbol{O}_2') * \boldsymbol{O}_3 * \boldsymbol{O}_4 * \boldsymbol{O}_5$$

$$o_2' = o_3$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}_1' * (\boldsymbol{O}_2' * \boldsymbol{O}_3) * \boldsymbol{O}_4 * \boldsymbol{O}_5$$

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1' * \boldsymbol{O}_4) * \boldsymbol{O}_5 = \boldsymbol{S} * \boldsymbol{O}_5$$



Obr. 64

Výsledné zobrazení je posunuté zrcadlení, které se skládá ze souměrnosti podle středu S a z osové souměrnosti $\boldsymbol{O}_6$.

PŘÍKLAD 2,21

Vyšetřete zobrazení, které vznikne složením konečného sudého počtu osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem různé.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_2 \ast \boldsymbol{O}_3 \ast \boldsymbol{O}_4 \ast \ldots \ast \boldsymbol{O}_{2n}$$

Osové souměrnosti sdružíme do dvojic

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_2) \ast (\boldsymbol{O}_3 \ast \boldsymbol{O}_4) \ast (\boldsymbol{O}_4 \ast \boldsymbol{O}_5) \ast \ldots \ast$$
$$\ast (\boldsymbol{O}_{2n-1} \ast \boldsymbol{O}_{2n})$$

Osy jsou vesměs různé a složením dvou osových souměrností s různými osami vznikne buď posunutí nebo otočení, podle vzájemné polohy os, např.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}_1 \ast \boldsymbol{R}_2 \ast \boldsymbol{T}_1 \ast \boldsymbol{T}_2$$

Při dalším postupném sdružování skládáme tyto možné dvojice:

a) $\boldsymbol{R}_1 \ast \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{P}_1$

b) $\boldsymbol{R} \ast \boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}_2$

c) $\boldsymbol{T} \ast \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}_3$

d) $\boldsymbol{T}_1 \ast \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{P}_4$

Vyšetříme výsledné zobrazení v jednotlivých případech:

a) $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{R}_1 \ast \boldsymbol{R}_2 = (\boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_2) \ast (\boldsymbol{O}_2 \ast \boldsymbol{O}_3) =$

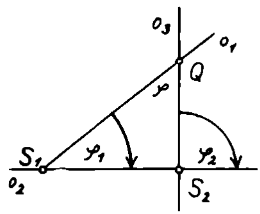
$$= \boldsymbol{O}_1 \ast (\boldsymbol{O}_2 \ast \boldsymbol{O}_2) \ast \boldsymbol{O}_3 = \boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_3$$

Osu o_2 souměrnosti $\boldsymbol{O}_2$ volíme tak, aby procházela středy obou otočení.

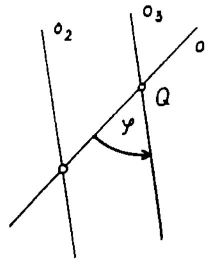
Zobrazení $\boldsymbol{P}_1$ *je otočení nebo posunutí, ve zvláštním případě identita,* jestliže osy o_1 a o_3 splynou (obr. 65).

b) $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_3) =$

$= \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_3$



Obr. 65



Obr. 66

Osu o_2 souměrnosti $\boldsymbol{O}_2$ jsme zvolili kolmo na směr posunutí tak, aby procházela středem otočení (obr. 66). *Zobrazení* $\boldsymbol{P}_2$ *je otočení* kolem středu Q o úhel φ.

c) $\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{T} * \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_3) =$

$= \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_3$

Osu o_2 volíme stejně jako v případě b).

Zobrazení $\boldsymbol{P}_3$ *je posunutí nebo otočení.*

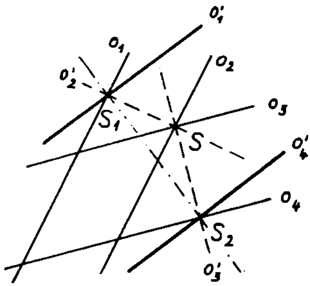
d) $\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{T}_1 * \boldsymbol{T}_2 = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_3 * \boldsymbol{O}_4)$

Jsou-li osy o_1, o_2, o_3, o_4 navzájem rovnoběžné, volíme opět $o_2 \equiv o_3$ a $\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_4 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_4$

Osy o_1 a o_4 jsou rovnoběžné a $\boldsymbol{P}_4$ *je posunutí nebo identita.*

Nemají-li $\boldsymbol{T}_1$ a $\boldsymbol{T}_2$ stejný nebo opačný smysl, pak osy o_2 a o_3 se protnou a svírají stejný úhel jako o_1 a o_4.

$$\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_4 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{R} * \boldsymbol{O}_4$$



Obr. 67

Rotaci $\boldsymbol{R}$ rozložíme na dvě osové souměrnosti $\boldsymbol{O}'_2$ a $\boldsymbol{O}'_3$ tak, aby osa o'_2 byla kolmá k ose o_1, osa o'_3 je pak kolmá k o_4 (obr. 67).

$$\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}'_2 * \boldsymbol{O}'_3) * \boldsymbol{O}_4 = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}'_2) *$$
$$* (\boldsymbol{O}'_3 * \boldsymbol{O}'_4) = \boldsymbol{S}_1 * \boldsymbol{S}_2$$

Středové souměrnosti $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$ mají různé středy otáčení. Zvolíme osu o, která spojuje středy souměrností S_1 a S_2 a obě středové souměrnosti rozložíme

$$\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{S}_1 * \boldsymbol{S}_2 = (\boldsymbol{O}'_1 * \boldsymbol{O}) * (\boldsymbol{O} * \boldsymbol{O}'_4) =$$
$$= \boldsymbol{O}'_1 * (\boldsymbol{O} \times \boldsymbol{O}) * \boldsymbol{O}'_4 = \boldsymbol{O}'_1 * \boldsymbol{O}'_4 = \boldsymbol{T}.$$

Osy souměrností $\boldsymbol{O}'_1$ a $\boldsymbol{O}'_2$ jsou různé rovnoběžky.

Zobrazení $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$ jsou opět otočení, posunutí nebo identita.

Můžeme tedy znovu postupně skládat a při skládání nenastane žádná jiná možnost kromě těch, které byly probrány v případech a), b), c), d).

Konečný sudý počet osových souměrností tak postupně snižujeme, až zůstane jediné shodné zobrazení, kterým je buď *posunutí nebo otočení nebo identita.*

Podobně jako v příkladu 2,21, můžeme postupně skládat lichý počet osových souměrností. Vyšetření všech možných případů by trvalo dlouho a závěr by byl stejně jednoduchý jako v předchozím případě:

Složením konečného lichého počtu osových souměrností vznikne buď osová souměrnost nebo posunuté zrcadlení.

Teď už můžeme odpovědět na otázku, kterou jsme si položili, než jsme počali řešit příklad 2,17:

Složením libovolného konečného počtu osových souměrností dostaneme pouze tato shodná zobrazení:

a) *Identitu, posunutí nebo rotaci* (případně její zvláštní případ — středovou souměrnost), je-li počet osových souměrností sudý,

b) *osovou souměrnost nebo posunuté zrcadlení*, je-li počet osových souměrností lichý.

O množinách shodných zobrazení v rovině platí tyto věty:

a) *Množina* $\boldsymbol{G}$ *všech shodností v rovině je nekomutativní grupou vzhledem k operaci skládání. Neutrálním prvkem operace je identita.*

b) *Množina* $\boldsymbol{G}_1$ *všech přímých shodností v rovině je nekomutativní grupou vzhledem k operaci skládání. Neutrálním prvkem operace je identita.*

c) *Množina* $\boldsymbol{G}_2$ *všech posunutí a identity je komutativní grupou vzhledem k operaci skládání.*

Ověříme, zda jsou pro všechny uvedené množiny splněny vlastnosti grupy vzhledem k operaci skládání.

1. ad a) Složením shodných zobrazení vznikne shodné zobrazení, tedy prvek z $\boldsymbol{G}$.

ad b) Složením dvou přímých shodností vznikne přímá shodnost (průsvitka se neotáčí), tedy prvek z $\boldsymbol{G}_1$.

ad c) Složením dvou posunutí vznikne posunutí nebo identita.

2. Skládání shodných zobrazení je asociativní.

3. Neutrálním prvkem všech tří grup je identita (je to přímá shodnost).

4. Inverzním zobrazením ke každému shodnému zobrazení je zobrazení stejného typu.

K otočení kolem středu je inverzním prvkem otočení kolem téhož středu o úhel stejné velikosti opačného smyslu.

K translaci je inverzním prvkem translace téhož směru, ale opačného smyslu a stejné velikosti.

Osová a středová souměrnost a identita jsou inverzní k sobě:

$$\bar{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{O}$$
$$\bar{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}$$
$$\bar{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J}$$

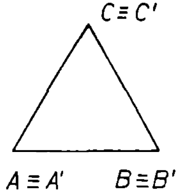
PŘÍKLAD 2,22

Najděte množinu $\boldsymbol{M}$ všech shodných zobrazení, které reprodukují daný rovnostranný trojúhelník, a dokažte, že $\boldsymbol{M}$ je grupa vzhledem k operaci skládání.

Je celkem šest shodných zobrazení, která reprodukují rovnostranný trojúhelník — je jich právě tolik, kolik je permutací tříprvkové množiny $\boldsymbol{M}' = \{A, B, C\}$, kde A,

B, C jsou vrcholy trojúhelníka. Každá z permutací určí jedno přemístění roviny:

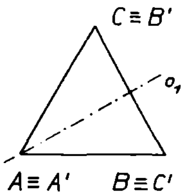
1.



$P_1 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{Bmatrix}$ Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje identitou $\boldsymbol{J}$

Obr. 68a

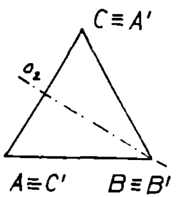
2.



$P_2 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{Bmatrix}$ Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje osovou souměrností $\boldsymbol{O}_1$

Obr. 68b

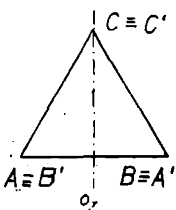
3.



$P_3 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{Bmatrix}$ Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje osovou souměrností $\boldsymbol{O}_2$

Obr. 68c

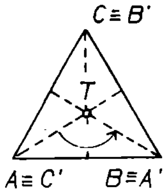
4.



$P_4 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{Bmatrix}$ Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje osovou souměrností $\boldsymbol{O}_3$

Obr. 68d

5.

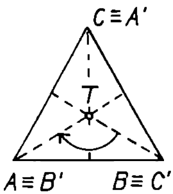


$$P_5 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ C & A & D \end{Bmatrix}$$

Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje otáčením $\boldsymbol{R}_1$ se středem T o úhel $+\ 120°$

Obr. 68e

6.



$$P_6 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{Bmatrix}$$

Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje otáčením $\boldsymbol{R}_2$ se středem v T o úhel $-\ 120°$

Obr. 68f

Množina $\boldsymbol{M}$ má šest prvků $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{J}, \boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2, \boldsymbol{O}_3, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2\}$. Sestavíme si tabulku skládání shodných zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$:

$x \ast y$	$x \backslash y$	$\boldsymbol{J}$	$\boldsymbol{O}_1$	$\boldsymbol{O}_2$	$\boldsymbol{O}_3$	$\boldsymbol{R}_1$	$\boldsymbol{R}_2$
	$\boldsymbol{J}$	$\boldsymbol{J}$	$\boldsymbol{O}_1$	$\boldsymbol{O}_2$	$\boldsymbol{O}_3$	$\boldsymbol{R}_1$	$\boldsymbol{R}_2$
	$\boldsymbol{O}_1$	$\boldsymbol{O}_1$	$\boldsymbol{J}$	$\boldsymbol{R}_2$	$\boldsymbol{R}_1$	$\boldsymbol{O}_3$	$\boldsymbol{O}_2$
	$\boldsymbol{O}_2$	$\boldsymbol{O}_2$	$\boldsymbol{R}_1$	$\boldsymbol{J}$	$\boldsymbol{R}_2$	$\boldsymbol{O}_1$	$\boldsymbol{O}_3$
	$\boldsymbol{O}_3$	$\boldsymbol{O}_3$	$\boldsymbol{R}_2$	$\boldsymbol{R}_1$	$\boldsymbol{J}$	$\boldsymbol{O}_2$	$\boldsymbol{O}_1$
	$\boldsymbol{R}_1$	$\boldsymbol{R}_1$	$\boldsymbol{O}_2$	$\boldsymbol{O}_3$	$\boldsymbol{O}_1$	$\boldsymbol{R}_2$	$\boldsymbol{J}$
	$\boldsymbol{R}_2$	$\boldsymbol{R}_2$	$\boldsymbol{O}_3$	$\boldsymbol{O}_1$	$\boldsymbol{O}_2$	$\boldsymbol{J}$	$\boldsymbol{R}_1$

Podle tabulky si ověříme, zda množina $\boldsymbol{M}$ má všechny vlastnosti grupy:

1. Složíme-li dvě shodná zobrazení, která reprodukují rovnostranný trojúhelník, dostaneme shodné zobrazení, které ho rovněž reprodukuje.

2. Skládání shodných zobrazení je v množině $\boldsymbol{M}$ asociativní.

3. Neutrálním prvkem operace v množině $\boldsymbol{M}$ je identita.

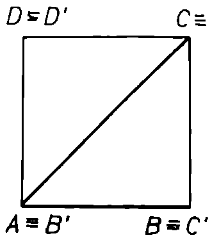
4. Ke každému shodnému zobrazení, které reprodukuje rovnostranný trojúhelník, existuje zobrazení inverzní, které ho rovněž reprodukuje.

5. Skládání shodných zobrazení není v množině $\boldsymbol{M}$ komutativní.

Množina $\boldsymbol{M}$ *všech shodných zobrazení, které reprodukují rovnostranný trojúhelník, je nekomutativní grupou vůči operaci skládání.*

PŘÍKLAD 2,23

Je dán čtverec $ABCD$. Najděte všechna shodná zobrazení, která jej reprodukují!



Obr. 69

V množině $\boldsymbol{M} = \{A, B, C, D\}$ existuje $4! = 24$ permutací. Snadno se však přesvědčíte, že pouze 8 z nich jsou přemístění. Zapíšeme si je:

$P_1 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{Bmatrix}$	Identita	J
$P_2 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{Bmatrix}$	Osová souměrnost podle úhlopříčky AC	O_1
$P_3 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{Bmatrix}$	Osová souměrnost podle úhlopříčky BD	O_2
$P_4 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{Bmatrix}$	Osová souměrnost podle osy strany AB (CD)	O_3
$P_5 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{Bmatrix}$	Osová souměrnost podle osy strany AD (BC)	O_4
$P_6 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{Bmatrix}$	Středová souměrnost podle průsečíku úhlopříček	S
$P_7 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{Bmatrix}$	Otočení kolem průsečíku úhlopříček o $\varphi_1 = +90°$	R_1
$P_8 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{Bmatrix}$	Otočení kolem průsečíku úhlopříček o $\varphi_2 = -90°$	R_2

Ostatní permutace vrcholů čtverce nejsou přemístění — snadno se přesvědčíme. (Obr. 69).

$$\boldsymbol{P} = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{Bmatrix}$$

Kdyby byla tato permutace shodným zobrazením (přemístěním), které reprodukuje čtverec, zobrazila by se např. strana AB čtverce do jeho úhlopříčky $A'B' \equiv CA$ a to není možné, protože úhlopříčka čtverce je delší než jeho strana (shodné zobrazení zachovává velikost úseček).

Příklad 2,22 můžeme ještě doplnit otázkou, zda množina všech osmi shodných zobrazení, která reprodukují čtverec, je grupou vzhledem k operaci skládání. Sestavíme-li si tabulku podobně jako v příkladě 2,21, uvidíme, že všechny vlastnosti grupy jsou splněny a odpověď je kladná:

Množina všech shodných zobrazení, která reprodukují čtverec, je grupou vůči operaci skládání.

Cvičení

1. Ze všech permutací množiny $\boldsymbol{M} = \{A, B, C, D, F, F\}$, jejíž prvky tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku, vyberte ty, které dostaneme přemístěním roviny, v níž šestiúhelník leží. Určete, o které shodné zobrazení se jedná, a rozhodněte, zda množina všech shodných zobrazení, která reprodukují pravidelný šestiúhelník, tvoří grupu vzhledem k operaci skládání.

2. $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ jsou osové souměrnosti s různými osami. Najděte osovou souměrnost $\boldsymbol{O}$ (pokud existuje), tak, aby platilo: $\boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{O} \ast \boldsymbol{O}_1$!

3. Je dáno pět osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem různé rovnoběžky. Najděte zobrazení, které vznikne jejich postupným skládáním!

4. V rovině jsou dány dva různé body $A \neq B$. Všechny rotace, které zobrazí bod A do bodu $A' = B$, zobrazí bod B do bodu B'. Najděte geometrické místo všech takových bodů B'.

Návod: Uvažte, že všechny takové rotace můžeme rozložit na dvě osové souměrnosti; první z nich lze vždy volit tak, že její osa splyne s osou úsečky AB. Osa druhé souměrnosti musí pak vždy procházet bodem B a bude platit, že $BB' = AB$. Nezapomeňte vyšetřit zvláštní případy, kdy nevznikne rotace — $o_1 \parallel o_2$!

ZÁVĚR

Náš druhý výlet do moderní matematiky skončil. Vypravili jsme se do oblastí, kde jste ještě nikdy nebyli, cesta byla někdy obtížná a neschůdná. Ti z Vás, kdo vydrželi a dívali se se zájmem a pochopením kolem sebe, uviděli známé věci z nového zorného úhlu.

Zdálo se vám, že úvahy o grupách a pologrupách jsou čistě teoretické a že nemají žádnou souvislost s tím, jak ve škole počítáte? Všimněte si trochu pozorněji, jak jste rozšiřovali své ,,početní" znalosti. Nejdříve jste se učili sčítat a násobit přirozená čísla — to znamená, že jste pracovali v množině $\boldsymbol{N}$, která byla pologrupou vzhledem k operaci sčítání a násobení. Velmi brzy jste cítili, že je nutné najít nadmnožinu k množině přirozených čísel tak, abychom mohli k operaci sčítání případně násobení zavést i operaci inverzní — odečítání, případně dělení. Ve škole jsme říkali, že si ,,rozšíříme číselný obor" — a co to je vlastně jiného nežli hledání množiny, která má vzhledem k operaci sčítání — případně násobení — strukturu grupy?

A co kladné zlomky — vždyť jsou to vlastně prvky kartézského součinu $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, pro něž máme definované operace např. tyto: ($a, b, c, d, \in \boldsymbol{N}$)

$$[a, b] \odot [c, d] = [ac, bd]$$

$$[a, b] \oplus [c, d] = [ad + bc; bd]$$

Zdá se, že jste se to ve škole nikdy neučili, a přece —

použijte místo zápisu $[a, b]$ tradiční způsob $\frac{a}{b}$; první složka je čitatel a druhá jmenovatel zlomku. Operace $\odot$ je známé násobení zlomků; operace $\oplus$ sčítání. Dosaďte si za a, b, c, d přirozená čísla a přesvědčte se.

Teorie grup je velmi obsáhlá a je jen krokem k teorii tak zvaných algebraických struktur. My jsme se jen na chvilku zastavili na samém kraji, jen abychom pochopili, že „počítání" nebo geometrické konstrukce nejsou jen mechanickým nácvikem. Pravidla, kterým jste se učili zpaměti a odříkávali bez porozumění, měli byste se učit chápat v širších souvislostech, snažit se poznat a pochopit to, co je pod povrchem. Studium matematiky pak už nebude nezáživné a nudné — bude to zajímavá a mnohdy dobrodružná cesta do neznámých oblastí za novými objevy.

REJSTŘÍK

OBSAH

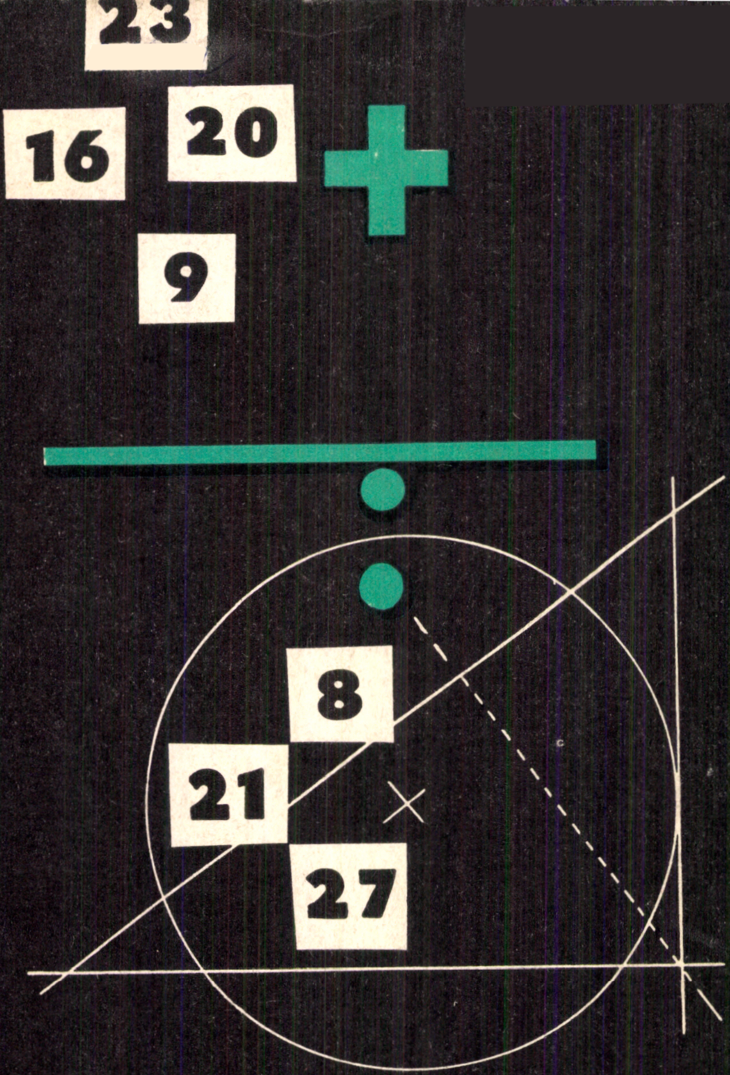
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAN VYŠÍN - JITKA KUČEROVÁ

druhý výlet do moderní matematiky

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Ladislav Smoljak
Publikace číslo 3257
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 32
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
3,80 AA, 3,95 VA. 100 stran
Náklad 7000 výtisků. 1. vydání
Praha 1973. 508/21/8.5

23-020-73 03-2 Cena brož. výt. Kčs 6,—



23 - 020 - 73
03/2
Cena brož.
Kčs 6,—