Malý výlet do moderní matematiky

[redacted]ATEMATIKŮ

MALÝ VÝLET DO MODERNÍ MATEMATIKY

30

Vydal ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MILAN KOMAN – JAN VYŠÍN

malý výlet do moderní matematiky

PRAHA 1972
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali František Macháň a Vlastimil Macháček

ÚVOD

Milí čtenáři, náš malý výlet do moderní matematiky má být cestou do krajin Vám dosud málo známých, kde Vás může potkat i nějaké matematické dobrodružství. O tom, že matematika může být dobrodružstvím, že může být zábavná i veselá, o tom se přesvědčuje stále více žáků a studentů, kteří chodí do experimentálních tříd.

Chtěli bychom však, aby se do těchto oblastí mohli podívat i jiní mladí lidé. Přitom bychom byli rádi, kdyby náš výlet byl co možná nejméně namáhavý, aby se ho mohli účastnit s potěšením i žáci ze základních devítiletých škol. Proto z podnětu ÚV matematické olympiády vznikl tento svazek Školy mladých matematiků. Z pokusných učebních textů pro experimentální ZDŠ byly vybrány nejzajímavější úlohy z několika oblastí netradiční matematiky a doplněny kromě toho ještě několika úlohami dalšími. Některé z nich jsou v knížce rozřešeny a je k nim připojen stručný teoretický výklad.

Malý výlet do moderní matematiky nebude autokarovým zájezdem, z něhož si unavení účastníci odnášejí jako jedinou trofej počet ujetých kilometrů. Náš výlet můžete absolvovat volným tempem — dokonce s jistým požitkem ze zastávek u složitějších úloh a problémů.

Navštívíte čtyři místa: Nejprve se seznámíte se základním pojmem moderní matematiky — s množinami, které umožňují jednotné chápání mnoha na první pohled různorodých úseků tradiční matematiky a které nám poskytují velmi úsporný a výkonný jazyk a symboliku. Potom navštívíte oblast statistiky a pravděpodobnosti. Zde potřebujete alespoň minimum matematických znalostí, ale zvládnete jimi i mnoho situací „ze života". Zde také odpadá ona věčná otázka „k čemu to je?" V teorii pravděpodobnosti a statistice má vlastně každá úloha pro praxi význam; tady skutečně byly nejdříve problémy a pak teprve teorie. Třetí návštěva bude patřit kombinatorice. Vstoupíte do ní už s jistou množinovou průpravou a ukáže se Vám, že opravdu nejde o nic jiného než o studium jistých specifických vlastností konečných množin. Zde se svazek odchyluje od pokusných textů nejvíce. Poznáte však, že látku, která se dříve ne právě vhodným způsobem probírala ve vyšších třídách gymnasia, mohou zvládnout i žáci velmi mladí. A k čemu kombinatorika je, na to Vám dají opět odpověď hlavně úlohy. V závěru výletu se opět přiblížíte k výchozí krajině. K čemu by nám byla čísla, kdybychom s nimi neuměli počítat? K čemu by nám byla geometrická zobrazení, kdybychom je neuměli skládat? A k čemu by nám byly množiny, kdybychom ani s nimi neuměli provádět jisté operace? „Kalkul" (učený výraz pro počítání) — to je to kouzelné slovo, které ovládá moderní matematiku. Dnešní matematik počítá nejen s čísly, ale se vším možným: s body, geometrickými zobrazeními, množinami, funkcemi, s lidmi a s jejich vlastnostmi, s tahy na šachovnici, s šifrovanými depešemi, s logickými úsudky atd. Ke každému takovému počítání potřebujeme symboly a pravidla, jak s nimi zacházet, operovat; tak vznikne kalkul. A k čemu jsou kalkuly? To je prosté: každé počítání znamená v matematice zpřesnění, zmechanizování a tím zlepšení úsudků. S jedním takovým velmi obecným kalkulem — je to počítání s množinami— se seznámíte v závěru knihy.

Během celého výletu Vám pak usnadní orientaci v terénu pečlivě narýsované obrázky, za které vděčíme F. Macháňovi. Při výběru cest v oblasti statistiky a pravděpodobnosti jsme využili cenných rad RNDr. F. Zítka CSc, za které mu touto cestou také děkujeme.

Doufáme, že se Vám tento první výlet zalíbí a že se v něm něčemu novému přiučíte. Prosíme žáky gymnasií, zvláště nižších ročníků, aby se nad tímto svazečkem ŠMM neošklíbali pohrdlivě jen proto, že je sestaven z textů pro ZDŠ. I oni se totiž mohou nad mnoha úlohami pěkně zapotit.

V Praze v lednu 1972 *Autoři*

Nejdůležitější symboly

V textu	Na obrázcích	Význam
$A, B, C, \dots$	$A, B, C, \dots$	body
$a, b, c, \dots$	$a, b, c, \dots$	přímky
$\overleftrightarrow{AB}$	–	přímka jdoucí body A, B
$\overrightarrow{AB}$	–	polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem B
AB	–	úsečka s krajními body A, B
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \dots, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \dots, \boldsymbol{Z}$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots, \mathcal{Z}$	množiny
$x \in \boldsymbol{A}$	–	prvek x patří množině $\boldsymbol{A}$
$\{a, b\}$	–	množina skládající se z prvků a, b
$\{x \in \boldsymbol{N} \mid x < 5\}$	–	množina všech přirozených čísel $x < 5$
$\emptyset$	$\not{\mathcal{O}}$	prázdná množina
$\boldsymbol{R}_Z$	$\mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$	rozklad množiny
$\boldsymbol{A}'$	$\mathcal{A}'$	doplněk množiny
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$	$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	sjednocení množin
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$	$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	průnik množin
$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$	$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$	$\boldsymbol{A}$ je podmnožinou množiny $\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{\mathsf{T}}, \boldsymbol{\mathsf{C}}$	$\mathcal{T}, \mathcal{C}$	množiny bodů (např. trojúhelník nebo čtyřúhelník)

1. kapitola

SEZNAMUJEME SE S MNOŽINAMI

1.1. Množiny a jejich prvky

Soudobá matematika se neobejde bez pojmů

MNOŽINA a PRVEK.

Jsou to základní a tedy v jistém smyslu nejjednodušší pojmy. Matematikům však trvalo dlouhá staletí, než se jim podařilo tyto velmi obecné a přitom reálnému světu blízké pojmy uspokojivě vymezit. Vybudování základů tzv. ***teorie množin***, vyhovující požadavkům moderní matematiky, patří totiž mezi nejobtížnější otázky.

Nám však úplně postačí, jestliže si představíme množinu jako skupinu, souhrn, soubor nejrůznějších věcí (předmětů, čísel, bodů ap.), které se nazývají prvky této množiny.

V matematice však nazýváme množinami jen takové soubory, pro něž platí:

a) *O každé věci lze jednoznačně rozhodnout, zda tomuto souboru patří či nepatří.* (Samozřejmě může nastat jen jedna z obou možností.)

b) *Všechny věci, které do souboru patří, jsou navzájem různé.* (Žádná věc se v takovém souboru neopakuje.)

Prvky označujeme libovolnými písmeny nebo jinými znaky (třeba číslicemi). Množiny označujeme v textu velkými polotučnými písmeny, například

$$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{Z}\,;$$

na obrázcích velkými psacími písmeny — viz str. 8. Chceme-li různé množiny označit týmž písmenem, můžeme je odlišit ***indexy***, např.

$$\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\,;$$

indexy jsou číslice 1, 2, 3 vpravo dole u písmene $\boldsymbol{M}$.

Množiny jsou buď ***konečné*** (např. množina všech obyvatel ČSSR, množina všech písmen latinské abecedy, množina vrcholů daného trojúhelníku ABC) nebo ***nekonečné*** (např. množina všech bodů na přímce, množina všech celých čísel ap.).*)

Konečné množiny udáváme zpravidla

a) ***výčtem prvků;***
b) ***tabulkou;***
c) ***Vennovým diagramem;***
d) ***charakteristickým znakem.***

Množinu udáme výčtem, jestliže vyjmenujeme všechny její prvky. Zapisujeme například

$$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$$

a čteme: množina $\boldsymbol{M}$ se skládá z prvků (čísel) 2, 3, 5, 7.

Při zápisu množiny výčtem nezáleží na pořadí prvků. Například zápisy

$$\{2, 5, 3, 7\} \quad \text{nebo} \quad \{3, 2, 5, 7\}$$

---

*) Mluvíme-li zde o konečných a nekonečných množinách vycházíme opět z názorné představy. Ovšem přesná definice těchto pojmů je téměř stejně obtížná jako vymezení samotného pojmu množina.

značí stále touž množinu $\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$. Při zápisu množiny výčtem píšeme **každý prvek jen jednou**. Proto nepíšeme

$$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 3, 5, 7\},$$

ale píšeme

$$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Tabulky užíváme pro udání množiny nejčastěji v těch případech, kdy mluvíme o více množinách, jejichž prvky jsou vybrány z nějaké „větší“ množiny $\boldsymbol{Z}$, tzv. ***základní množiny***. Například:

$\boldsymbol{Z}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{M}$	–	/	/	–	/	–	/	–
$\boldsymbol{A}$	/	/	/	–	–	–	–	–
$\boldsymbol{B}$	–	/	–	/	–	/	–	/

$\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$

$\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3\}$

$\boldsymbol{B} = \{2, 4, 6, 8\}$

Všimněte si, že využíváme způsobu, kterým se v seznamu osob zaznamenávají přítomní a nepřítomní lidé.

Množiny můžeme udat tzv. Vennovým diagramem. Na obrázku 1 je znázorněna množina $\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$, jejíž prvky jsou vybrány ze základní množiny $\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Z obrázku 1 (i z tabulky) je snadno patrné, že například číslo „2“ JE prvkem a číslo „1“ NENÍ prvkem množiny $\boldsymbol{M}$. Zápis:

$2 \in \boldsymbol{M}$ (čteme: číslo 2 je prvkem množiny $\boldsymbol{M}$);

$1 \notin \boldsymbol{M}$ (čteme: číslo 1 není prvkem množiny $\boldsymbol{M}$).

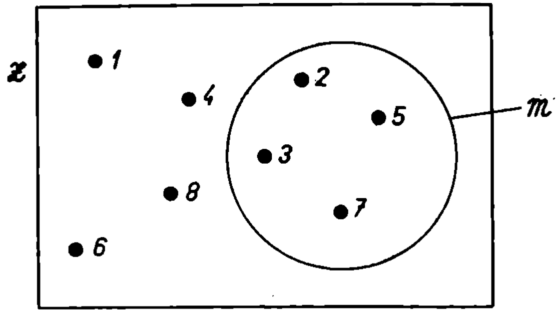
Množinu $\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$ můžeme udat též charakteristickým znakem:

„$\boldsymbol{M}$ je množina všech prvočísel z množiny $\boldsymbol{Z}$“.

Zapisujeme

$$\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je prvočíslo}\}$$

a čteme: $\boldsymbol{M}$ je množina všech čísel $x \in \boldsymbol{Z}$, která jsou prvočísly.



Obr. 1

PŘÍKLAD 1

$\boldsymbol{Z}$ je množina všech měst v ČSSR. $\boldsymbol{P}$ je množina všech měst v ČSSR, která mají více než milión obyvatel. Zápis:

$$\boldsymbol{P} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ má více než milión obyvatel}\};$$

výčtem

$$\boldsymbol{P} = \{\text{Praha}\}.$$

$\boldsymbol{P}$ je ***jednoprvková*** množina.

Množina $\boldsymbol{R}$ se skládá ze všech měst v ČSSR, která mají aspoň 2 milióny obyvatel. Zápis:

$$\boldsymbol{R} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ má aspoň 2 milióny obyvatel}\}.$$

V ČSSR není žádné dvoumiliónové město. Množina ***R*** nemá proto žádný prvek. Říkáme, že

$$\boldsymbol{R} \text{ je } \textbf{\textit{prázdná}} \text{ množina,}$$

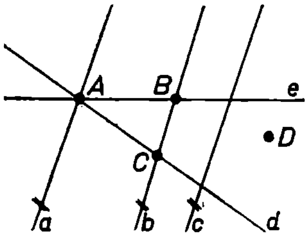
zápis

$$\boldsymbol{R} = \varnothing \text{ nebo } \boldsymbol{R} = \{\ \}\,.$$

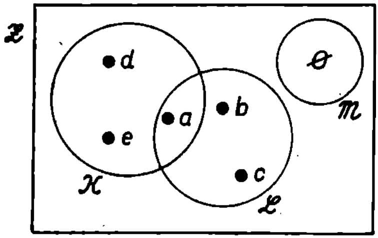
Znak $\varnothing$ není nula.

PŘÍKLAD 2.

Základní množina ***Z*** se skládá ze všech přímek znázorněných na obr. 2.



Obr. 2



Obr. 3

Množina ***K*** se skládá ze všech přímek z obrázku 2, které procházejí bodem A. Zápis:

$$\boldsymbol{K} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ prochází bodem } A\}.$$

Množina ***K***, která je dána svým charakteristickým znakem můžeme udat též výčtem všech jejích prvků; ***K*** je ***3-prvková*** množina.

$$\boldsymbol{K} = \{a, d, e\}\,.$$

Podobně pro množinu $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} = \{y \in \boldsymbol{Z} \mid y \parallel a\} ;$$

$\boldsymbol{L}$ je množina všech přímek z obrázku 2, které jsou rovnoběžné s přímkou a, tzn. $\boldsymbol{L}$ je 3-prvková množina

$$\boldsymbol{L} = \{a, b, c\} .$$

Množina

$$\boldsymbol{M} = \{p \in \boldsymbol{Z} \mid p \text{ prochází bodem } D\}$$

je prázdná množina, $\boldsymbol{M} = \varnothing$.

Množiny $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ můžeme zadat též Vennovým diagramem (obr. 3). *Ve Vennově diagramu znázorňujeme všechny prvky základní množiny* $\boldsymbol{Z}$ *jako body*, i když jsou to ve skutečnosti třeba přímky, kružnice ap.

Množiny $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ udává též tabulka:

	a	b	c	d	e
$\boldsymbol{K}$	/	–	–	/	/
$\boldsymbol{L}$	/	/	/	–	–
$\boldsymbol{M}$	–	–	–	–	–

Množiny $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, které byly dány charakteristickým znakem, jsme zapsali výčtem všech jejich prvků. Můžeme však řešit i obrácenou úlohu.

Základní množina $\boldsymbol{Z}$ je opět množina všech přímek z obr. 2. Množinu

$$\boldsymbol{N} = \{a, b, c, d\} ,$$

která je dána výčtem prvků, můžeme udat též charakteristickým znakem. Je to množina všech různoběžek s přímkou e;

$$\boldsymbol{N} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je různoběžka s přímkou } e\}.$$

Snad jste si všimli, že základní množina $\boldsymbol{Z}$ se může případ od případu měnit.

Pamatujte si názvy:

Množina,	základní množina,
prvek,	prázdná množina.

Pamatujte si označení a zápisy:

$a \in \boldsymbol{M}$,	$\boldsymbol{M} = \{3, 5, 12, 15\}$,
$b \notin \boldsymbol{M}$,	$\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je sudé číslo}\}$,
	$\boldsymbol{M} = \emptyset$.

CVIČENÍ

1. Přečtěte zápis

$\boldsymbol{T}$ = {pondělí, úterý, středa, čtvrtek, pátek, sobota}.

Dovedete popsat tuto množinu charakteristickým znakem?

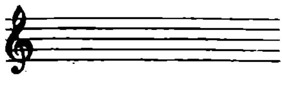
2. a) Přečtěte zápis

$\boldsymbol{P}$ = {Afrika, Amerika, Asie, Australie, Antarktida, Evropa}.

Dovedete popsat tuto množinu charakteristickým znakem?

b) Udejte výčtem a zapište množinu všech pevnin, které mají menší rozlohu než Australie.

3. Udejte výčtem a zapište základní stupnici (škálu) C-dur; prvky jsou tóny, označené písmeny — jako např. C, F, A atd. Proveďte notový zápis této množiny.



4. a) Opravte zápis $M = \{1, 2, 4, 3, 2, 1\}$.

b) Je $\{0\} = 0$?

c) Je $\{a, c, b\} = \{b, a, c\}$?

5. Potřebujete šachovnici. Její pole budete zapisovat takto: $f5$ je pole ležící ve sloupci „f“ a v řádku „5“; na obr. 4 je vyznačeno křížkem.

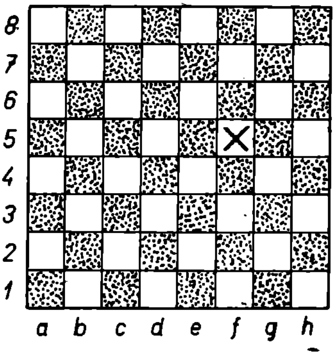
a) Vypište všecka bílá pole, v jejichž označení je číslo 3.

b) Vypište všecka černá pole, v jejichž označení jsou písmena c, f.

c) Vypište všecka rohová pole šachovnice.

d) Na pole $g1$ postavte figuru krále. Vypište všecka pole, na která se dostane tento král jedním tahem.

e) Na pole $f5$ postavte figuru koně. Vypište všecka pole, na která se dostane tento kůň jedním tahem.



Obr. 4

6. Potřebujete šachovnici a figuru koně, kterého umístíte na pole $c2$.

a) Kůň má přejít sedmi tahy na pole $g5$; vypište množinu všech polí, kterými projde.

b) Kůň má projít co nejmenším počtem tahů na pole $g5$; vypište množinu všech polí, kterými projde.

c) Kůň má přejít šesti tahy na pole $g5$; vypište množinu všech polí, kterými projde.

7. a) Vypište množinu $\boldsymbol{Z}$ všech násobků čísla 13, které jsou menší než 200.

b) Vyberte z množiny $\boldsymbol{Z}$ všecka čísla dělitelná třemi; vypište jejich množinu $\boldsymbol{M}_1$.

c) Vyberte z množiny $\boldsymbol{Z}$ všechna trojciferná čísla; vypište jejich množinu $\boldsymbol{M}_2$.

d) Vyberte z množiny $\boldsymbol{Z}$ všecka sudá trojciferná čísla; vypište jejich množinu $\boldsymbol{M}_3$.

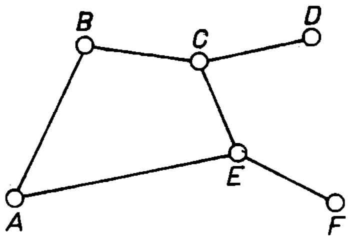
8. Přečtěte zápisy množin a pak je udejte výčtem prvků. Množina $\boldsymbol{Z} = \{4, 5, 7, 9, 13, 16, 20, 24\}$.

a) $\boldsymbol{A} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x$ je násobek čísla $4\}$.

b) $\boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid 8 < x < 24\}$.

c) $\boldsymbol{C} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x$ není násobek čísla $3\}$.

Všechny množiny znázorněte též Vennovými diagramy.



Obr. 5

9. Na obrázku 5 je znázorněno schéma části uliční sítě města.

a) Rozmístěte na křižovatky A, B, C, D, E, F co nejmenší počet policistů, kteří by mohli zrakem kontrolovat všechny ulice. Najděte všechny možnosti.

Řešení modelujte šachovými figurkami a pak zaznamenejte do tabulky naznačeným způsobem:

A	B	C	D	E	F
/	—	/	—	—	/

b) Kolik policistů stojí na každých dvou sousedních křižovatkách?

10. a) Rozmístěte na křižovatky A, B, C, D, E, F uliční sítě (obr. 5) co nejmenší počet veřejných hodin tak, aby z každé křižovatky bylo vidět aspoň jedny hodiny. Řešte stejným způsobem jako předešlé cvičení.

b) Kolik hodin stojí na každých dvou sousedních křižovatkách?

11. Z je množina všech kladných celých čísel menších než 13. Udejte výčtem množiny:

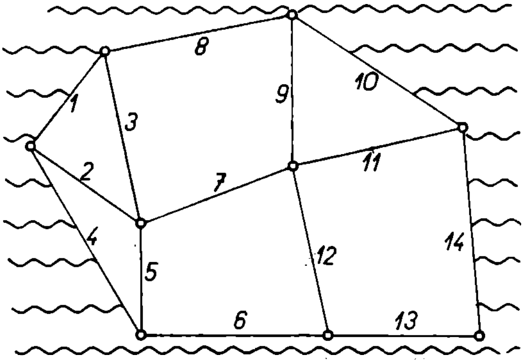
a) $A = \{x \in Z \mid x \text{ je násobek čísla } 5\}$;

b) $B = \{x \in Z \mid x \text{ není násobek čísla } 5\}$;

c) $C = \{x \in Z \mid \frac{3}{7}x \text{ je celé číslo}\}$;

d) $D = \{x \in Z \mid \text{čísla } x \text{ a } x^2 \text{ mají stejné poslední číslice}\}$.

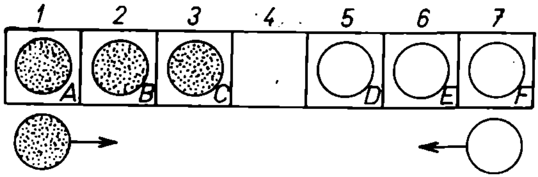
Množiny A, B a podobně množiny C, D znázorněte Vennovými diagramy.



Obr. 6

12. Představte si rýžová pole na ostrově, znázorněná na obrázku 6. Očíslované úsečky značí hráze. Kolem polí je jezero.

Všechna pole je třeba zavodnit tím, že se protrhnou některé hráze. Udejte několik možností. Pokuste se experimentálně zjistit kolik může mít množina protržených hrází nejméně prvků.



Obr. 7

13. Hra. Potřebujete pás se sedmi vyznačenými poli, tři bílé a tři černé kameny (obr. 7).

Cíl a pravidla hry:

1. Bílé kameny se mají přemístit na místa černých a naopak.

2. Každý černý kámen se smí pohybovat jen vpravo, bílý jen vlevo.

3. Každý kámen se smí buď posunout na vedlejší pole, je-li prázdné, nebo smí překročit jeden (kterýkoli) kámen, ale vždy jen na prázdné pole.

4. Začíná bílý.

a) Vypište všechny tahy; tah zaznamenejte například takto: C (3 — 4), tj. kámen C z pole 3 na pole 4.

b) Vypište všechny tahy, kdy jeden kámen přeskakuje jiný.

c) Vypište všechny tahy, kdy se hýbá bílým kamenem.

* * *

Nekonečné množiny udáváme obvykle **charakteristickým znakem.**

PŘÍKLAD 3.

Základní množina $\boldsymbol{Z}$ je rovina. Kruh $\boldsymbol{K}$ se středem S a poloměrem $r = 2{,}5$ cm je množina

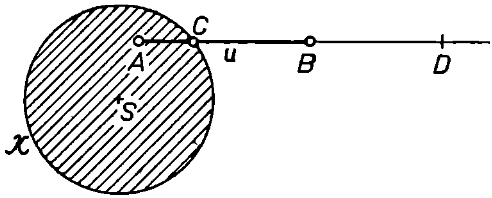
$$\boldsymbol{K} = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid SX \leqq 2{,}5 \text{ cm}\},$$

tj. množina všech bodů X roviny, které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnou 2,5 cm. (Obr. 8, kde je např. $A \in \boldsymbol{K}$, $C \in \boldsymbol{K}$, $S \in \boldsymbol{K}$, $B \notin \boldsymbol{K}$, $D \notin \boldsymbol{K}$.)

Podobně úsečka $u = AB$ je množina

$$u = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid X \text{ leží mezi } A \text{ a } B \text{ nebo s některým z bodů } A, B \text{ splývá}\}.$$

(Na obr. 8 je $A \in u$, $B \in u$, $C \in u$, $D \notin u$, $S \notin u$.)



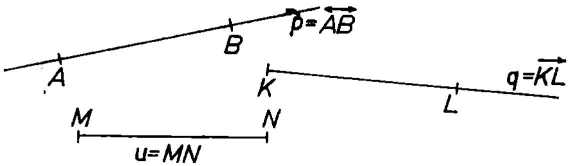
Obr. 8

V geometrii jsou přímky, úsečky, kružnice ap. množinami bodů, i když je označujeme někdy malými písmeny.

PŘÍKLAD 4.

Pro polopřímky a přímky (jsou to množiny bodů) užíváme zápisů:

$\overleftrightarrow{AB}$ ... přímka jdoucí body A, B ($A \in \overleftrightarrow{AB}$, $B \in \overleftrightarrow{AB}$);
$\overrightarrow{KL}$ ... polopřímka s počátkem K ($K \in \overrightarrow{KL}$, $L \in \overrightarrow{KL}$);
MN ... úsečka s krajními body M, N;
viz obrázek 9.



Obr. 9

PŘÍKLAD 5.

M je množina všech kladných násobků čísla tří. Za základní množinu ***Z*** můžeme považovat množinu skládající se ze všech kladných přirozených čísel. Tedy

$$\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je násobek čísla tři}\}\,.$$

Množiny ***Z*** a ***M*** nemůžeme udat výčtem. Přesto někdy zapisujeme množinu všech přirozených čísel takto:

$$\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

a podobně množinu ***M***:

$$\boldsymbol{M} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}\,.$$

Tečky znamenají „a tak dále“. Musíme udat tolik prvků, aby byl „zřejmý“ charakteristický znak příslušné množiny.

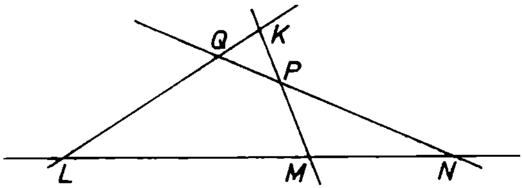
CVIČENÍ

14. Na obrázku 10 jsou zakresleny čtyři přímky a na nich je označeno šest bodů K, L, M, N, P, Q.

a) Pomocí označených bodů zapište všecky úsečky, které obsahují bod P; např. $P \in PN$.

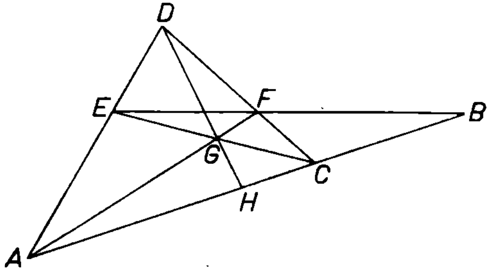
b) Pomocí označených bodů zapište všechny polopřímky, které obsahují bod Q: např. $Q \in \overrightarrow{LK}$.

c) Pomocí označených bodů zapište všecky polopřímky, které obsahují aspoň jeden z bodů K, M; např. $M \in \overrightarrow{NL}$.



Obr. 10

15. a) Narýsujte obrázek 11. Body vznikají v pořadí A, B, C, D, E, F, G, H. Nejdříve zvolíme body A, B, pak $C \in AB$. Pak zvolíme bod $D \notin \overleftrightarrow{AB}$, pak bod $E \in AD$. Body F, G, H už budete umět sestrojit.



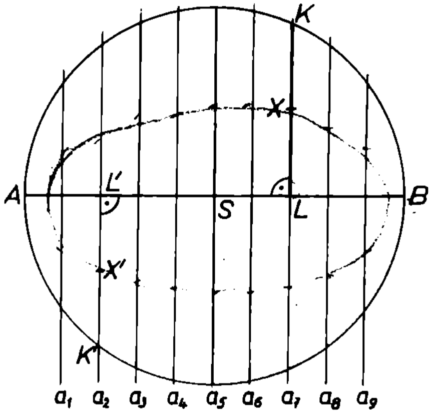
Obr. 11

b) Zvolte body D, E ještě jednou ($D \notin \overleftrightarrow{AB}$, $E \in AD$). Bod D zvolte „pod" přímkou $\overleftrightarrow{AB}$. Kde vyšel druhý bod H?

16. Na přímé trati je pět závodníků, které označíme písmeny A, B, C, D, E. V určitém okamžiku mají závodníci tyto vzdálenosti $AB = 30$ m, $AD = 60$ m, $BC = 40$ m, $CE = 30$ m, $DE = 20$ m. Zakreslete (při vhodném zmenšení) závodníky jako body na přímce, zejména zakreslete polohu závodníka C. Vypočtěte vzdálenost závodníků A, C. Pozor, úloha má dvě řešení.

17. Za základní množinu $\boldsymbol{Z}$ zvolte rovinu papíru. Sestrojte kružnici $k = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid SX = 5 \text{ cm}\}$ a její průměr AB (obr. 12; zmenšeno na polovinu). $\boldsymbol{M}$ je množina všech úseček KL kolmých k AB, kde $K \in k$, $L \in AB$. Množina $\boldsymbol{E}$ je tato:

$\boldsymbol{E} = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid X$ je střed úsečky $KL \in \boldsymbol{M}$, nebo splyne s některým z bodů A, $B\}$.

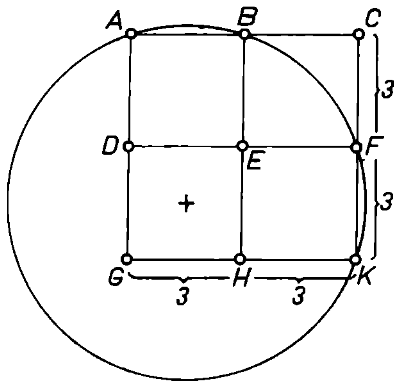


Obr. 12

Sestrojte na přímkách $a_1, a_2, \ldots, a_9$ (obr. 12) všechny body X množiny $\boldsymbol{E}$ a pak načrtněte přibližně průběh množiny $\boldsymbol{E}$. Vznikne křivka, tzv. ***elipsa***.

18. Na obrázku 13 je znázorněno 9 bodů $A, B, C, \ldots, K$.

Množina M se skládá ze všech kružnic k, které procházejí aspoň třemi z daných bodů. Množina S se skládá ze všech středů kružnic z množiny M. Znázorněte množinu S zjistěte počet jejích prvků a porovnejte jej s počtem prvků množiny M. (Jedna kružnice a její střed jsou na obr. 13 znázorněny.)



Obr. 13

1.2. Podmnožina

Množiny M, K jsou dány jednak Vennovým diagramem (obr. 14), jednak tabulkou 1.

Tabulka 1.

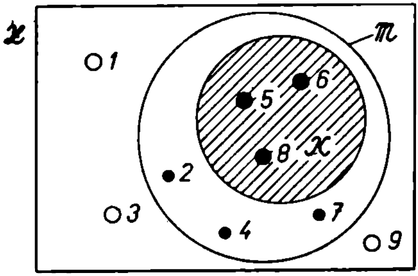
Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	—	/	—	/	/	/	/	/	—
K	—	—	—	—	/	/	—	/	—
	⇑		⇑		↑	↑		↑	⇑

Říkáme, že množina K je

PODMNOŽINOU nebo **ČÁSTÍ**

množiny M; zápis

$$K \subset M.$$



Obr. 14

*Množina **K** je podmnožinou **M**, je-li splněna aspoň jedna z vlastností:*

(1) *Každý prvek z **K** je prvkem z **M**;* (na obr. 14 viz prvky vyznačené velkými plnými kroužky, v tabulce 1 viz sloupce označené černými šipkami).

(2) *Každý prvek, který není z **M** není také prvkem z **K**;* (na obr. 14 viz prvky vyznačené bílými kroužky, v tabulce 1 viz sloupce označené bílými šipkami).

PŘÍKLAD 1.

Základní množina je $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$; je to množina všech přirozených čísel (bez nuly).

$A = \{x \in Z \mid 2 < x \leqq 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$;

$\boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x$ je jednociferné číslo$\} =$
$= \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$;

$\boldsymbol{C} = \{2, 3, 4\}$.

Platí:

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}, \; \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{B},$$

$\boldsymbol{C} \not\subset \boldsymbol{A}$ (čteme: $\boldsymbol{C}$ není podmnožinou množiny $\boldsymbol{A}$), protože $2 \in \boldsymbol{C}$, $2 \notin \boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{A}$,

Pro každou množinu $\boldsymbol{A}$, jejíž všechny prvky jsou vybrány ze základní množiny $\boldsymbol{Z}$ platí:

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Z}, \; \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}, \; \emptyset \subset \boldsymbol{A}$$

(vždy je splněna aspoň jedna z vlastností (1) a (2) na str. 23; ověřte si to sami).

PŘÍKLAD 2.

Na obrázku 15 jsou znázorněny kruhy

$\boldsymbol{K} = \{X \mid SX \leqq 4 \text{ cm}\}$, $\boldsymbol{L} = \{Y \mid OY \leqq 1{,}5 \text{ cm}\}$*);

vzdálenost středů S, O je 2 cm.

Platí:

$$\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}.$$

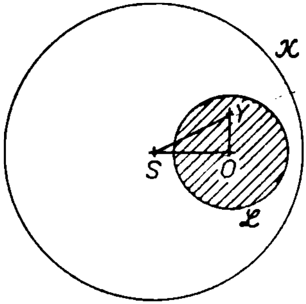
To můžeme ověřit též početně. Nechť

$$Y \in \boldsymbol{L}, \quad \text{tzn. } OY \leqq 1{,}5 \text{ cm}$$

*) Za základní množinu považujeme celou rovinu. Proto označení základní množiny v obdobných případech mnohdy nepíšeme.

Podle neostré ***„trojúhelníkové nerovnosti"*****) je

$$SY \leqq SO + OY = 2\ \text{cm} + 1{,}5\ \text{cm} = 3{,}5\ \text{cm}\ .$$

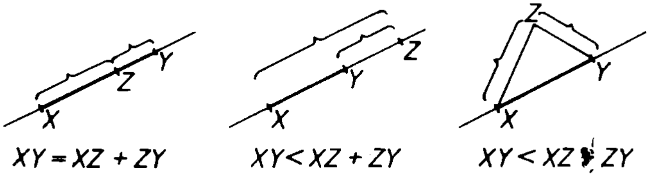


Obr. 15

Proto je

$$SY \leqq 3{,}5\ \text{cm} < 4\ \text{cm, tzn. bod } Y \in \boldsymbol{K}\,.$$

Tedy každý bod Y kruhu $\boldsymbol{L}$ patří též kruhu $\boldsymbol{K}$.



Obr. 16

**) Pro každé tři různé body X, Y, Z platí tzv. neostrá trojúhelníková nerovnost:

$$XY \leqq XZ + ZY\,.$$

Rovnost nastane pouze tehdy, když $Z \in XY$; viz obr. 16.

PŘÍKLAD 3.

Za základní množinu $\boldsymbol{Z}$ zvolme množinu všech prvočísel, tj.

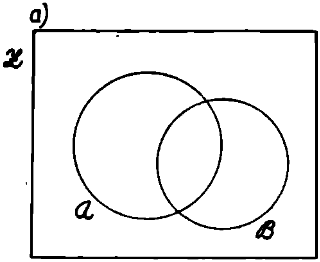
$$\boldsymbol{Z} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}^{*})$$

Množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou dány charakteristickými znaky:

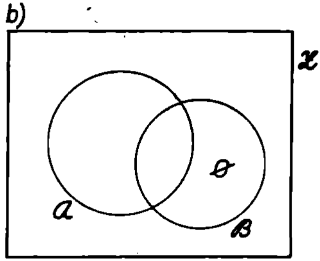
$$\boldsymbol{A} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid 100 < x < 115\},$$

$$\boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid 105 < x < 120\}.$$

Schematicky jsou tyto množiny vyznačeny na obrázku 17a.



Obr. 17a



Obr. 17b

V tomto případě můžeme rozhodnout o tom zda aspoň jedna z množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ je částí druhé teprve tehdy, když tyto množiny udáme výčtem.

---

*) Ačkoliv současná matematika nedovede rozhodnout o každém přirozeném čísle, zda je či není prvočíslo (např. o tzv. Fermatově čísle $2^a + 1$ pro $a = 2^{1071}$ — viz J. Sedláček: Co víme o přirozených číslech, Škola mladých matematiků, II. vydání, str. 25), tvoří tato čísla množinu. O každém přirozeném čísle lze rozhodnout, zda je prvočíslo bez ohledu, zda to my umíme nebo neumíme.

Zjistíme, že $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, neboť

$$\boldsymbol{A} = \{101, 103, 107, 109, 113\},$$

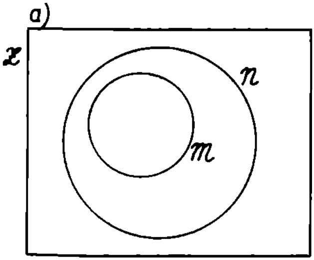
$$\boldsymbol{B} = \{107, 109, 113\};$$

viz např. Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro 7—9 roč. ZDŠ.

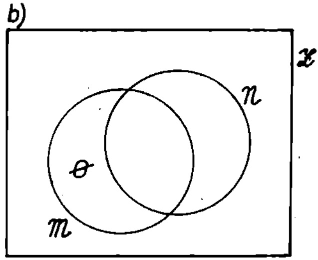
Skutečnost, že pro množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ z Vennova diagramu na obr. 17a platí

$$\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$$

vyznačíme způsobem zřejmým z obr. 17b (aniž obrázek 17a překreslujeme, nebo vyznačujeme na něm prvky množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$).



Obr. 18a



Obr. 18b

Pamatujte si názvy:

podmnožina, část množiny.

Pamatujte si označení:

$$\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$$

(znázorněno Vennovými diagramy na obr. 18ab bez vyznačení prvků).

$$\boldsymbol{A} \not\subset \boldsymbol{B}\,.$$

CVIČENÍ

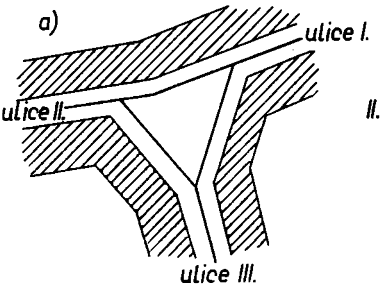
1. a) Obrázek 19a znázorňuje křižovatku pouliční dráhy v městě. Přes křižovatku vede celkem 5 linek. Zjistěte, kolik linek projíždí každou z ulic I, II, III. Jedno řešení ukazuje obrázek 19b. Načrtněte všecka další řešení.

b) Označte:

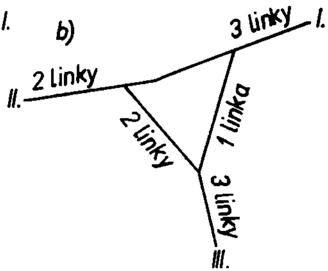
$\boldsymbol{M}_1$ množinu všech linek, které vedou ulicí I,
$\boldsymbol{M}_2$ množinu všech linek, které vedou ulicí II,
$\boldsymbol{M}_3$ množinu všech linek, které vedou ulicí III,
$\boldsymbol{P}_1$ množinu všech linek, které vedou po spojce II—III,
$\boldsymbol{P}_2$ množinu všech linek, které vedou po spojce III—I,
$\boldsymbol{P}_3$ množinu všech linek, které vedou po spojce I—II.

Je $\boldsymbol{P}_2 \subset \boldsymbol{M}_1$? Je $\boldsymbol{P}_3 \subset \boldsymbol{M}_1$? Může být v některém řešení $\boldsymbol{M}_2 \subset \boldsymbol{M}_1$?

Nezapomeňte uvážit, že po spojce II—III nemusí vést žádná linka!



Obr. 19a



Obr. 19b

2. Do autobusu se samoobsluhou nastoupili ráno první dva cestující a každý z nich zaplatil 1 Kčs. Žádná z odevzdaných mincí nebyla koruna a zároveň nebyla menší než desetihaléř. Označte $\boldsymbol{M}_{10}$, $\boldsymbol{M}_{25}$, $\boldsymbol{M}_{50}$ množinu desetihaléřových, pětadvacetihaléřových a padesátihaléřových mincí, které byly po zaplacení v pokladně. Určete, kolik mají tyto množiny prvků. Je celkem patnáct možností. Zapisujte si je do takovéto tabulky:

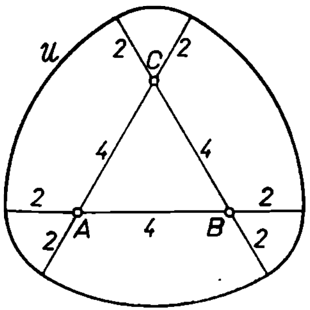
M_{10}	5				...
M_{20}	2				...
M_{50}	2				...

Vymyslete takový postup, abyste žádnou možnost nevynechali.

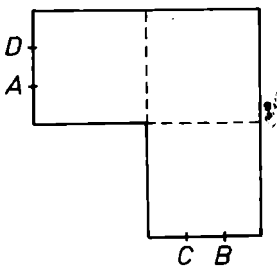
3. Udejte výčtem a zapište množinu všech čísel, která jsou větší než 10 000 a menší než 15 000 a která lze vyslovit takto: x tisíc, x set a x jednotek; např. 11 tisíc, 11 set a 11 jednotek, tj. 11 000 + 1 100 + 11 = 12 111.

4. Rýsujte podle obrázku 20. Obrazec U je omezen oblouky kružnic, které mají středy v bodech A, B, C.

a) Znázorněte nejdelší úsečku XY, pro kterou platí $XY \subset U$. Kolik má úloha řešení?



Obr. 20



Obr. 21

b) Lze sestrojit rovnostranný trojúhelník T o straně 8 cm (7,5 cm) tak, aby $T \subset U$? Pokuste se aspoň jednu z vašich domněnek odůvodnit.*)

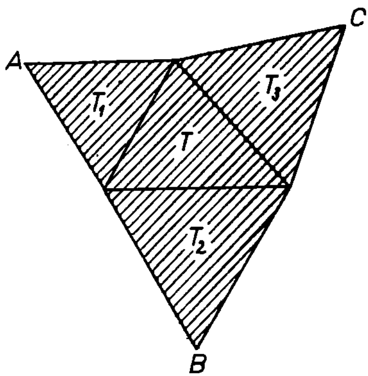
5. Na obrázku 21 je půdorys obrazárny Z. V místech A, B, C, D jsou zavěšeny 4 obrazy. Znázorněte množiny:

$M = \{X \in Z \mid$ z místa X je vidět pouze jeden z obrazů $A, B\}$,
$N = \{Y \in Z \mid$ z místa Y je vidět jen jeden z obrazů $C, D\}$,
$L = \{T \in Z \mid$ z místa T je vidět jen jeden z obrazů $A, C\}$.

Zjistěte, které ze zápisů:

$$M \subset N, \quad M \subset K, \quad N \subset K,$$
$$N \subset M, \quad K \subset M, \quad K \subset N,$$

jsou pravdivé.



Obr. 22

*) Návod: Je-li trojúhelník T o straně 8 cm částí U, pak musí některá strana procházet aspoň jedním z bodů A, B, C. Vyšetřete všechny polohy takových trojúhelníků T, jejichž jedna strana prochází bodem C a její krajní body se pohybují po obvodu U. Co vyplní třetí vrcholy těchto trojúhelníků? Pro trojúhelník T o str. 7,5 uvažujte taková umístění, kdy jedna jeho strana prochází dvěma z bodů A, B, C.

6. **a)** Rýsujte podle obrázku 22. T je libovolný trojúhelník, T_1, T_2, T_3 jsou rovnostranné trojúhelníky. U je šrafovaný obrazec. Vyšetřete, zda může být v některém případě $U \subset \triangle ABC$

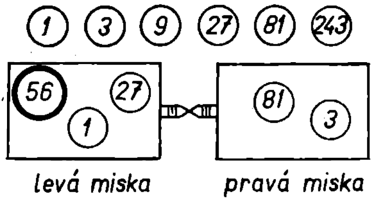
b) Úlohu řešte ještě jednou pro případ, že T_1, T_2, T_3 jsou rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech A, B, C.

7. Přijímací zkouška na střední školu se skládá ze dvou částí: ústní zkoušky a písemné zkoušky. Na střední školu mohou být přijati jen ti uchazeči, kteří úspěšně složí obě zkoušky. Z nich se udělá pořadí a skutečně se přijmou pouze ti, jejichž pořadové číslo není větší než počet volných míst.

Uchazeči	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M
Prospěli: a) ústně	A	–	/	/	–	/	/	/	/	–	–	/	/
b) písemně	B	–	–	/	/	/	/	/	–	/	–	/	/
c) ústně i písemně	C												
d) přijati	D												

a) Zapište vztah mezi množinami A, B, C, D!

b) Uveďte všechny možnosti pro množinu D v případě, že jsou volná 4 místa (6 míst, 8 míst).



Obr. 23

8. Pomocí šesti závaží o váze 1 g, 3 g, 9 g, 27 g, 81 g a 243 g můžeme (s přesností gramu) zvážit každý předmět do váhy 364 g. Udejte, jak navážíme 10 g, 80 g, 100 g, 300 g, 362 g.

Při vážení smíme klást závaží na obě misky. Použijte hracích kamenů s vepsanými čísly a klaďte je na obě „misky" vah. Např. 56 gramů navážíme podle obr. 23.

1.3. Nejvýše — aspoň — právě

V matematice často používáme slov:

NEJVÝŠE — ASPOŇ — PRÁVĚ.

Jejich význam si ujasníme příkladem.

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{M}_1$ je množina všech žáků vaší třídy, kteří mají nejvýše dva sourozence. Do $\boldsymbol{M}_1$ patří všichni žáci, kteří

a) nemají žádného sourozence,
b) mají jednoho sourozence,
c) mají dva sourozence.

Označíme-li množinu všech žáků vaší třídy $\boldsymbol{Z}$, pak platí

$$\boldsymbol{M}_1 = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid \text{počet sourozenců žáka } X \text{ je } x \leqq 2\}.$$

$\boldsymbol{M}_2$ je množina všech žáků vaší třídy, kteří mají aspoň dva sourozence. Do $\boldsymbol{M}_2$ patří všichni žáci, kteří

a) mají dva sourozence,
b) mají více sourozenců než dva.

To znamená

$$\boldsymbol{M}_2 = \{Y \in \boldsymbol{Z} \mid \text{počet sourozenců žáka } Y \text{ je } y \geqq 2\}.$$

$\boldsymbol{M}_3$ je množina všech žáků vaší třídy, kteří mají právě dva sourozence. Do M_3 patří jen ti žáci, kteří mají dva sourozence. Tedy

$$M_3 = \{V \in Z \mid \text{počet sourozenců žáka } V \text{ je } v = 2\}.$$

Platí

$$M_3 \subset M_1, \ M_3 \subset M_2,$$

ale nemusí platit

$$M_1 \subset M_3 \text{ ani } M_2 \subset M_3 .$$

Řekne-li někdo „žák má dva sourozence", myslíme tím „žák má právě dva sourozence".

Pamatujte:

Nejvýše 2 je 2 nebo méně než 2,
aspoň 2 je 2 nebo více než 2,
právě 2 je 2.

CVIČENÍ

1. a) Vypište množinu T_1 všech trojciferných čísel, z nichž každé obsahuje nejvýše 2 cifry a aspoň jednu jedničku.

b) Vypište množinu T_2 všech dvojciferných čísel, z nichž každá obsahuje nejvýše jednu jedničku. Je některá z množin T_1, T_2 podmnožinou druhé? Mají množiny T_1, T_2 společné prvky? Vypište množinu všech čísel společných množinám T_1, T_2.

2. Potřebujete mapu Evropy, na níž jsou vyznačena některá hlavní města; dále potřebujeme měřítko.

a) Vypište množinu M_1 všech vyznačených hlavních měst, která mají od Prahy vzdušnou vzdálenost aspoň 300 km.

b) Vypište množinu M_2 všech vyznačených hlavních měst, která mají od Prahy vzdušnou vzdálenost nejvýše 600 km

c) Vypište množinu P měst společných množinám M_1, M_2. Popište množinu P charakteristickým znakem.

3. Autobus má 32 míst k sezení a nejvýše 34 míst k stání. Na sportovní podnik má být dopraveno takovými autobusy 1000 osob. Aspoň polovina autobusů (jedoucích do vzdálenějších míst) má vézt jen sedící cestující. Aspoň kolik (kolik nejméně) autobusů potřebujeme pro tuto dopravu?
Vypočtené číslo zkontrolujte zkouškou.

4. Potřebujete šachovnici a figuru koně. Kůň má být přemístěn z pole $c6$ na pole $a1$ tak, že nesmí opustit sloupec a, b, c a každým polem smí projít nejvýše jednou.

a) Vypište všechny cesty, při nichž vykoná kůň nejvýše 4 tahy. (Např. takto $b4$ — $c2$).

b) Vypište všechny cesty, při nichž vykoná kůň aspoň 8 tahů.

5. Jirka provedl sérii deseti hodů mincí. Jenda si poznamenal prvních 6 výsledků:

Ⓛ Ⓡ Ⓡ Ⓛ Ⓛ Ⓛ . . . . . .

(Ⓛ značí „líc“, Ⓡ značí „rub“). Konečný výsledek pokusu mohl Jenda odhadnout takto:

a) Rub padl aspoň .... — krát;
b) Líc padl aspoň .... — krát;
c) Rub padl nejvýše .... — krát;
d) Líc padl nejvýše .... — krát.

6. Která celá čísla můžete dosadit za x, y, z do tabulky 1, jestliže mají být pravdivé zároveň tyto výroky:

(1) Součet čísel v každém řádku je aspoň 4.
(2) Součet čísel v každém sloupci je nejvýše 8.

Tab. 1.

2	—1	x
y	5	3
2	z	0

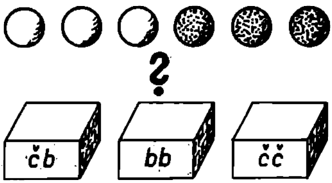
Dovedete určit, kolik má úloha různých řešení?

7. Doplňte chybějící údaje. Z jedenácti po sobě jdoucích přirozených čísel je

a) aspoň .... sudých,
b) nejvýše .... sudých,
c) aspoň............... násobkem čísla 3,
d) nejvýše .... násobkem čísla 3.

8. Na stole leží tři krabice a 3 černé a 3 bílé koule (obr. 24). Jenda vložil do každé krabice dvě koule, ale tak, že v žádné krabici nesouhlasil obsah s označením. Potom dal Jirkovi hádat, jaké koule jsou v jednotlivých krabicích. Jirka mu odpověděl: „Kdybych mohl vidět barvu aspoň jedné koule z krabice, kterou Ti ukáži, pak bych odpověděl přesně. Takhle však musím hádat“.

Dovedete uvažovat stejně dobře jako Jirka? Rozmyslete si napřed, jak mohl Jenda koule rozmístit.



Obr. 24

9. Číslo 180 rozložte v součin dvou činitelů, jejichž součet je

a) nejvýše 40;
b) aspoň 70;
c) co nejmenší.

10. Házíme třemi hracími kostkami různých barev. Vypište všecky způsoby, kterými může padnout součet 16 ok. Dokažte, že aspoň na jedné kostce musí padnout 6 ok.

11. Kolik je nejvýše (nejméně) pátků v kalendářním roce, které připadnou na 13. den v měsíci?

1.4. Rozklad množiny

Někdy se zabýváme množinami, jejichž **prvky** jsou opět **množiny**.

PŘÍKLAD

Na jednom menším gymnasiu jsou pouze čtyři třídy: I., II., III., IV. Množina $\boldsymbol{Z}$ se skládá ze všech žáků gymnasia.

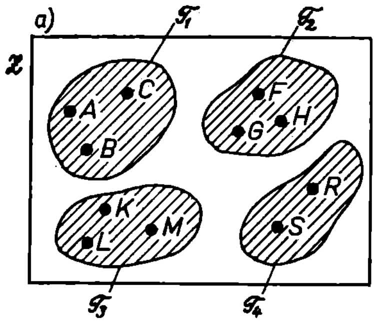
$\boldsymbol{T}_1$ je množina všech žáků I. třídy,

$\boldsymbol{T}_2$ je množina všech žáků II. třídy, atd.

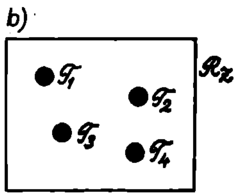
Množina $\boldsymbol{R}_Z$ je množina, jejíž prvky jsou všechny třídy, tzn.

$$\boldsymbol{R}_Z = \{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \boldsymbol{T}_4\}.$$

Viz obrázek 25a; v každé třídě jsou vyznačeni jen dva nebo tři žáci.



Obr. 25a



Obr. 25b

Důležitá poznámka. Zřejmě platí (obr. 25a):

$$A \in T_1, \qquad T_1 \in R_Z,$$

kromě toho PLATÍ

$$A \notin R_Z,$$

(tzn. NEPLATÍ: $A \in R_Z$, neboť *prvky množiny* R_Z *jsou třídy a nikoliv žáci*).

V matematice užíváme názvy:

R_Z . . . . **ROZKLAD MNOŽINY**

T_1, T_2, T_3, T_4 . . . . . **PRVKY** (nebo **TŘÍDY**) **ROZKLADU** R_Z.

Přesný význam těchto názvů vymezíme takto:

Množina

$$R_Z = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$$

je ROZKLAD MNOŽINY Z, *jestliže PRVKY (TŘÍDY)* $T_1, T_2, T_3, \ldots$ *množiny* R_Z *jsou takové neprázdné podmnožiny základní množiny* Z *pro něž platí*

(1) *Každý prvek* $x \in Z$ *patří aspoň jedné z tříd* $T_1, T_2, T_3, \ldots$;

(2) *Každý prvek* $x \in Z$ *patří nejvýše jedné z tříd* $T_1, T_2, T_3, \ldots$;

Víme, že vlastnosti (1) a (2) můžeme vyslovit současně.

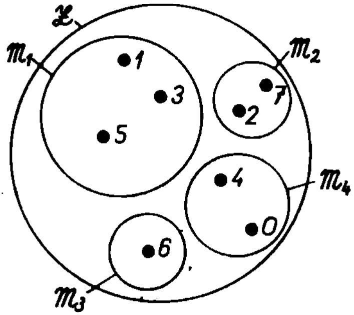
(3) *Každý prvek* $x \in Z$ *patří právě jedné z tříd* $T_1, T_2, T_3, \ldots$.

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\boldsymbol{M}_1 = \{1, 3, 5\}$, $\boldsymbol{M}_2 = \{2, 7\}$, $\boldsymbol{M}_3 = \{6\}$, $\boldsymbol{M}_4 = \{0, 4\}$.

$$\boldsymbol{R}_Z = \{\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_4\}$$

je rozklad množiny $\boldsymbol{Z}$ v třídy $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{M}_4$. Vennův diagram rozkladu je na obrázku 26.



Obr. 26

PŘÍKLAD

a) Označme $\boldsymbol{N}$ množinu všech přirozených čísel (včetně nuly), $\boldsymbol{S}$ množinu všech sudých přirozených čísel:

$$\boldsymbol{S} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\},$$

$\boldsymbol{L}$ množinu všech lichých přirozených čísel:

$$\boldsymbol{L} = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

Pak je $\boldsymbol{R}_N = \{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{L}\}$ rozklad množiny $\boldsymbol{N}$ na dvě třídy $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L}$.

b) Označme opět $\boldsymbol{N}$ množinu všech přirozených čísel (včetně nuly), $\boldsymbol{T}_0$ množinu všech násobků tří (tj. přirozených čísel, která při dělení třemi dávají zbytek 0); $\boldsymbol{T}_1$ množinu všech přirozených čísel, která při dělení třemi dávají zbytek 1; $\boldsymbol{T}_2$ množinu všech přirozených čísel, která při dělení třemi dávají zbytek 2.

Je tedy $\boldsymbol{T}_0 = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$,

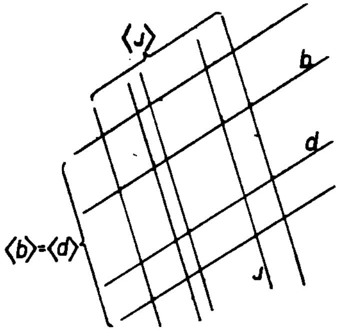
$\boldsymbol{T}_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$,

$\boldsymbol{T}_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$,

pak $\boldsymbol{R}_N = \{\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2\}$ je rozklad množiny $\boldsymbol{N}$ ve tři třídy $\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2$.

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{M}$ je množina všech přímek v rovině. Všechny přímky rovnoběžné s danou přímkou p tvoří množinu, kterou označíme $\langle p \rangle$. Z názoru víme: je-li $q \in \langle p \rangle$, je $\langle q \rangle = \langle p \rangle$ (obr. 27).



Obr. 27

Popsaným způsobem jsme provedli rozklad množiny $\boldsymbol{M}$ všech přímek v rovině v třídy $\langle p \rangle$, $\langle r \rangle$, ...

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{M}$ je množina všech lidí, kteří na Zemi žili nebo žijí od počátku našeho letopočtu. Označme $\boldsymbol{S}_n$ množinu všech lidí, kteří žili (žijí) v n-tém století, $\boldsymbol{R}_n$ množinu všech lidí, kteří se narodili v n-tém století. Množiny

$$\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \ldots, \boldsymbol{S}_{20}$$

neurčují rozklad množiny $\boldsymbol{M}$, neboť např. Hus žil v 14. i 15. století, tzn. není splněna podmínka **(2)**.

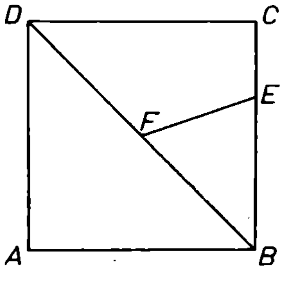
Také množiny

$$\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3, \ldots, \boldsymbol{R}_{20}$$

neurčují rozklad množiny $\boldsymbol{M}$. Není splněna podmínka **(1)**, neboť do $\boldsymbol{M}$ patří i někteří lidé, kteří se narodili před začátkem našeho letopočtu, ale žili v 1. století.

PŘÍKLAD

Na obrázku 28 je čtverec $ABCD$ rozdělen ve tři obrazce; trojúhelník ABD, trojúhelník BEF a čtyřúhel-



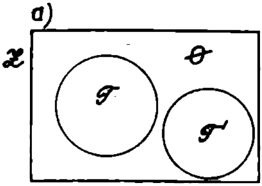
Obr. 28

ník $CDFE$. Jestliže ke každému obrazci počítáme — jak je obvyklé — i body jeho obvodu, není toto rozdělení čtverce $ABCD$ jeho rozkladem, neboť každé dva z obrazců ABD, BEF, $CDFE$ mají společné části obvodů, a proto není splněna podmínka **(2)**.

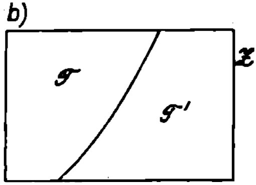
Jestliže rozklad $\boldsymbol{R_Z}$ množiny $\boldsymbol{Z}$ obsahuje ***JEN DVĚ TŘÍDY*** $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T'}$ (obr. 29a, b), říkáme, že množiny

$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T'}$ jsou ***NAVZÁJEM DOPLŇKOVÉ MNOŽINY***

v množině $\boldsymbol{Z}$.



Obr. 29a



Obr. 29b

Platí pro ně

$$\boldsymbol{T} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \notin \boldsymbol{T'}\}, \quad \boldsymbol{T'} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \notin \boldsymbol{T}\}.$$

Za navzájem doplňkové množiny v základní množině $\boldsymbol{Z}$ počítáme i množiny: $\emptyset$, $\boldsymbol{Z}$.

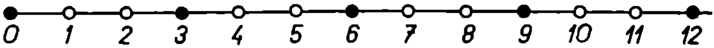
PŘÍKLAD

$\boldsymbol{Z}$ je množina všech přirozených čísel (včetně nuly), $\boldsymbol{M}$ je množina všech nezáporných násobků tří. $\boldsymbol{M'}$ je množina všech přirozených čísel, která nejsou násobky tří, neboli množina všech takových přirozených čísel, která při dělení třemi dávají zbytek 1 nebo 2.

M' se skládá ze všech přirozených čísel, která můžeme napsat ve tvaru

$$3n + 1 \quad \text{nebo} \quad 3n + 2\,,$$

kde n probíhá všechna přirozená čísla.



Obr. 30

Na obrázku 30 je číselná poloosa. Plné kroužky znázorňují prvky množiny *M*, prázdné kroužky prvky jejího doplňku *M'*. Tedy

$$\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x = 3n, \text{ kde } n \in \boldsymbol{Z}\},$$
$$\boldsymbol{M}' = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x = 3n + 1 \text{ nebo } x = 3n + 2, \text{ kde } n \in \boldsymbol{Z}\}.$$

Pamatujte si názvy (a jejich význam):

Rozklad množiny,
třídy rozkladu,
doplněk množiny,
navzájem doplňkové množiny.

CVIČENÍ

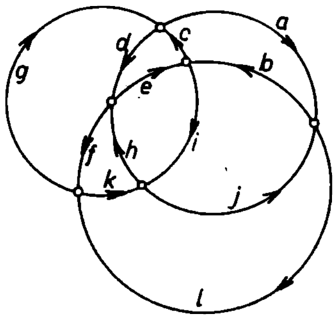
1. Je dána množina měst $\boldsymbol{M}$ = {Banská Bystrica, Bratislava, Brno, Košice, Olomouc, Ostrava, Plzeň, Praha, Prešov, Ústí nad Labem, Žilina}.

$\boldsymbol{M}_1$ je množina všech měst z $\boldsymbol{M}$, která mají od Brna vzdušnou vzdálenost menší než 200 km, $\boldsymbol{M}_2$ množina všech měst z $\boldsymbol{M}$, která mají od Brna vzdušnou vzdálenost 200 až 400 km,

M_3 je množina všech měst z M, která mají od Brna vzdušnou vzdálenost větší než 400 km.

a) Vypište (výčtem) množiny M_1, M_2, M_3.

b) Odůvodněte, že množiny M_1, M_2, M_3 tvoří rozklad množiny M.



Obr. 31

2. Na obrázku 31 jsou nakresleny tři kružnice, které se protínají celkem v 6 bodech; tím vznikne 12 oblouků a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, z nichž každý je opatřen šipkou.

a) Množinu $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ rozložte ve dvě podmnožiny M_1, M_2 tak, aby M_1 (M_2) obsahovala jen šipky ve smyslu pohybu hodinových ručiček (proti smyslu pohybu hodinových ručiček).

b) Množinu M rozložte ve dvě podmnožiny M_3, M_4 tak, aby při pohybu v naznačeném smyslu ležel vnitřek příslušné kružnice po pravé, resp. levé ruce.

c) Porovnejte oba rozklady.

3. N je množina všech přirozených čísel, A je množina všech sudých čísel, která nejsou dělitelná čtyřmi, B je množina všech násobků čtyř, C je množina skládající se ze všech přirozených čísel, která končí dvěma lichými ciframi, D je množina skládající se z čísel 1, 5, 9 a ze všech lichých čísel, která mají na místě desítek sudou cifru.

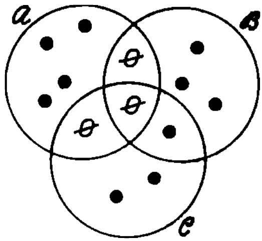
a) Vypište několik prvních prvků množin A, B, C, D.
b) Zjistěte, zda $R_N = \{A, B, C, D\}$ je rozklad množiny N.

4. Rozhodněte, zda Vennovy diagramy na obrázku 32 znázorňují rozklad $M = \{A, B, C\}$.

5. M je množina všech trojciferných čísel, v jejichž zápise se vyskytují aspoň 2 stejné číslice. Z je množina všech trojciferných čísel.

a) Určete charakteristický znak doplňku M' množiny M, a počet prvků této množiny.

b) Zjistěte počet prvků množiny M. Využijte výsledku z cvičení 1a na str. 33.



Obr. 32

6. a) Na obrázku 33 je síť složená z devíti čtverců. Vypište množinu Z všech „cest" z A do B, které postupují po stranách čtverců a to vpravo a nahoru. Zápis provádějte takto: postup o jednu stranu čtverce vpravo zaznamenejte číslem 1, o jednu stranu nahoru číslem 0. Například tlustě vytažená cesta na obrázku 33 má zápis 110100.

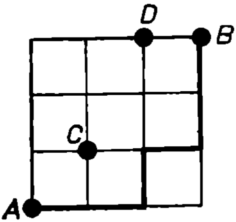
b) Určete (např. tabulkou) množiny

$K = \{x \in Z \mid \text{cesta } x \text{ prochází bodem } C \text{ i } D\}$,

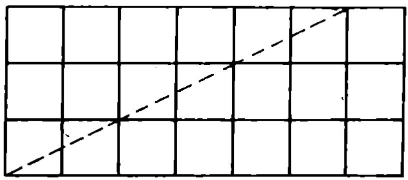
$L = \{y \in Z \mid \text{cesta } y \text{ neprochází žádným z bodů } C, D\}$

c) Vysvětlete, jsou — nejsou (nehodící se škrtněte) množiny K, L navzájem doplňkové v množině Z.

7. Lístek do kina stojí 1 Kčs. V pokladně nejsou žádné peníze, před pokladnou stojí 10 dětí. Sedm má pouze korunu, tři děti mají pouze tříkorunu.



Obr. 33



Obr. 34

a) Určete aspoň 10 různých pořadí dětí, při kterých nemusí žádné z dětí, které má tříkorunu čekat na vrácení. Použijte zápisu (1 značí dítě vlastnící korunu; 3 značí dítě vlastnící tříkorunu):

1 1 1 1 1 1 1 3 3 3
1 1 1 1 1 1 3 1 3 3
atd.

(Není možné pořadí: 1 1 3 1 3 1 1 3 1 1. Proč?)

b) Možná pořadí zakreslujte podobně jako ve cvičení 6 do sítě čtverců z obrázku 34. Pokuste se charakterizovat množinu M všech možných pořadí pomocí obrázku 34. (Všimněte si vzájemné polohy zakreslených lomených čar a čárkované „úhlopříčky".)

c) Charakterizujte množinu M' všech nepřípustných pořadí.

d) Řešte úlohu pro případ, že před pokladnou je 11 dětí, z nichž 7 má tříkorunu a zbytek korunu.

8. Množina Z má $n = 15$ prvků. Prozradíme vám, že v množině můžeme najít celkem 5 005 různých 6 prvkových podmnožin. Dovedete určit počet všech 9 prvkových podmnožin? (Pokud si nevíte rady, řešte napřed úlohu pro $n = 5$ a tříprvkové podmnožiny.)

9. a) Množina Z má n prvků (např. $n = 6$). Zvolte číslo

$k < n$ (např. $k = 2 < 6$). Ukažte, že číslo, které udává počet k-prvkových podmnožin a $(n - k)$ - prvkových (např. $(n - k) = 4$) podmnožin v množině Z je vždy sudé.

b) Množina Z má $2n$ prvků. Ukažte, že číslo, které udává počet n-prvkových podmnožin množiny Z je vždy sudé.

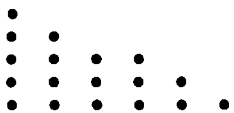
10. Otec zanechal svým třem synům dědictví pozůstávající z pěti domácích zvířat a dalších čtyř věcí, které byly takto oceněny:

koza K_1	420,—	televizor T	3 200,—
pes P	900,—	sud s vínem S	1 200,—
kočka K_2	250,—	jízdní kolo J	970,—
kuře K_3	20,—	obraz O	2 900,—
husa H	140,—		

Tři synové se mají rozdělit tak, aby všichni dostali stejný podíl z dědictví. Zjistěte jak se rozdělili. (Žádný předmět dědictví se nesmí dělit.)

11. Máte rozložit množinu M skládající se z 18 cvičenců na co největší počet tříd tak, aby každé dvě různé třídy měly také různý počet členů.

Návod: Můžeme utvořit například rozklad, jehož třídy mají tyto počty prvků: 1, 2, 4, 5, 6. Ten znázorníme tzv. ***bodovým diagramem:***



Obdobně můžeme znázornit i ostatní rozklady.

12. Tři kamarádi Jirka, Vlastík, Karel stříleli z malorážek do terče. Každý vystřelil šest ran. V terči byly zjištěny tyto zásahy:

bodové ohodnocení zásahu	1	2	3	5	10	20	25	50
počet zásahů	3	2	2	2	3	3	2	1

Každý dosáhl celkem 71 bodů. Máte zjistit, kdo měl nejlepší zásah, jestliže vám prozradíme, že Jirka získal prvními dvěma ranami 22 bodů a Vlastík dosáhl první ranou jen tři body.

Návod: Zjistěte, které zásahy měl ten, kdo zasáhl střed terče ohodnocený číslem 50.

13. Hrací kostky domina mají velikost dvou sousedních polí šachovnice. Dá se ukázat, že šachovnici o 64 polích lze pokrýt 32 kostkami z domina celkem $12\,988\,816 = 2^4 \cdot 901^2$ způsoby. Zjistěte, zda lze obdobným způsobem pokrýt zmenšenou šachovnici o 7×7 polích.

Návod: Zjistěte, kolik bílých a kolik černých polí má zmenšená šachovnice.

2. kapitola

CO JE PRAVDĚPODOBNOST?

2.1. Statistická pravděpodobnost

V ***teorii pravděpodobnosti*** užíváme názvů

POKUS — VÝSLEDEK POKUSU — JEV.

Pokus zpravidla může skončit různými výsledky a předem nedovedeme určit, který výsledek nastane. Říkáme, že jde o ***náhodný*** pokus.

PŘÍKLADY

Pokus ***P***	Výsledek pokusu ($V_1, V_2, \ldots$)
— Hodíme mincí.	V_1: Padne rub. V_2: Padne líc.
— Hodíme hrací kostkou.	V_1: Padne jedno oko. V_2: Padnou dvě oka. V_3: Padnou tři oka. . . . .
— Lékař zjišťuje stav chrupu 13letého žáka určité školy.	V_1: Chrup je bezvadný. V_2: Chrup má jediný zub s kazem. V_3: Chrup má právě dva zuby s kazem. . . . .

— Zasadili jsme semeno hrachu z určitého pytle na určitý záhon.	V_1: Semeno hrachu vzklíčilo. V_2: Semeno hrachu nevzklíčilo.

Každou část (podmnožinu) množiny všech možných výsledků daného pokusu $\boldsymbol{P}$ nazýváme jevem.

PŘÍKLADY

— Pokus: Hodíme mincí.

Množina $\boldsymbol{W}$ všech výsledků: padne líc (L), padne rub (R);
$\boldsymbol{W} = \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}$

Jev $\boldsymbol{J}_1$: padne líc; tedy $\boldsymbol{J}_1 = \{\mathsf{L}\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_2$: padne rub; tedy $\boldsymbol{J}_2 = \{\mathsf{R}\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_3$ (jev ***jistý***): padne rub nebo líc; tedy $\boldsymbol{J}_3 = \boldsymbol{W} = \{\mathsf{R}, \mathsf{L}\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_4$ (jev ***nemožný***): nepadne ani líc ani rub; tedy $\boldsymbol{J}_4 = \emptyset$.

— Pokus: Hodíme hrací kostkou.

Množina $\boldsymbol{W}$ všech výsledků: padne jedno oko (1), padnou dvě oka (2), ..., padne šest ok (6); $\boldsymbol{W} = \{1, 2, \ldots, 6\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_1$: padne jedno oko; $\boldsymbol{J}_1 = \{1\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_2$: padne sudý počet ok; $\boldsymbol{J}_2 = \{2, 4, 6\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_3$: padne aspoň 5 ok; $\boldsymbol{J}_3 = \{5, 6\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_4$ (jev jistý): padne aspoň jedno oko; $\boldsymbol{J}_4 = \boldsymbol{W} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_5$ (jev nemožný): padne více než 6 ok; $\boldsymbol{J}_5 = \emptyset$.
. . . .

— Pokus: Zjistíme stav chrupu 13letého chlapce určité školy.

Množina $\boldsymbol{W}$ všech výsledků: chrup je bez kazu (0), jediný zub má kaz (1), právě dva zuby mají kaz (2), atd.

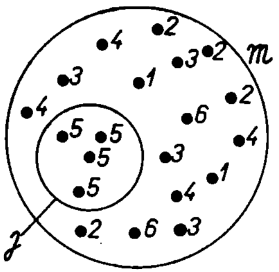
Jev J_1: chrup je bez kazu; $J_1 = \{0\}$.
Jev J_2: chrup má nejvýše dva zuby s kazem;
$J_2 = \{0, 1, 2\}$.
Jev J_3: chrup má aspoň jeden zub s kazem;
$J_3 = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
. . . .

Jestliže měl pokus výsledek, který patří jevu (množině) J, říkáme, že ***„nastal jev J"***.

Zpravidla neprovádíme pokus jediný. Při opakování pokusu předpokládáme, že výsledek žádného z pokusů nezávisí na výsledcích předchozích pokusů. Říkáme, že pokusy jsou ***nezávislé***.

PŘÍKLAD

Pokus: Hodíme hrací kostkou. Výsledek pokusu: Padne 5 ok. Množina M pokusů: Hodili jsme 20-krát kostkou (opakování pokusu). Výsledky pokusů udává Vennův diagram na obrázku 35. Jev J: padne 5 ok. V množině M jsou čtyři pokusy, pro které nastal jev J.



Obr. 35

Obr. 36

Množina M všech opakovaných pokusů P má zpravidla mnoho prvků; tento počet pokusů označíme n. Všechny pokusy z množiny M, při nichž nastal jev J, tvoří jistou podmnožinu množiny M (na obrázcích ji zpravidla označujeme opět J). Počet prvků této podmnožiny značíme a a nazýváme

ČETNOST JEVU J

v množině M.

Racionální číslo dané zlomkem $\frac{a}{n}$, nazýváme

RELATIVNÍ ČETNOST JEVU J

v množině M.

Při mnohonásobném opakování téhož pokusu P za stejných podmínek relativní četnost jevu J zůstává přibližně stejná, blízká nějakému pevnému číslu p. Toto číslo se nazývá

PRAVDĚPODOBNOST JEVU J.

Pravděpodobnost jevu J lze přibližně určit jako relativní četnost jevu J v „dostatečně" velké množině pokusů. Proto místo relativní četnost jevu J užíváme též názvu

STATISTICKÁ PRAVDĚPODOBNOST JEVU J.

Pravděpodobnost jevu J	$$p \doteq p_0 = \frac{a}{n}$$	Četnost jevu J
Statistická pravděpodobnost jevu J		Počet všech provedených pokusů

Pamatujte: *Pravděpodobnost (statistická pravděpodobnost) jevu* ***J*** *je číslo p, pro které platí*

$$0 \leqq p \leqq 1 .$$

Nemožný jev má pravděpodobnost $p = 0$, jistý jev má pravděpodobnost $p = 1$.

PŘÍKLAD

Pokus: Házíme mincí. Jev ***J***: Padne líc.

Počet opakovaných pokusů; (n)	Četnost jevu ***J***; (a)	Statistická pravděpodobnost jevu ***J***; (p_0)
100	48	$\frac{48}{100} = 0{,}48 = 48\ \%$
200	98	$\frac{98}{200} = 0{,}49 = 49\ \%$
400	212	$\frac{212}{400} = 0{,}53 = 53\ \%$
1 000	514	$\frac{514}{1\,000} = 0{,}514 = 51{,}4\ \%$

Všechny statistické pravděpodobnosti se „pohybují“ kolem $0{,}5 = 50\ \%$. Můžeme vyslovit domněnku, že pravděpodobnost jevu ***J*** je asi 50 %.

PŘÍKLAD

Pokus ***P***: Hodíme hrací kostkou. Množina ***M*** vznikne tak, že pokus opakujeme 200krát ($n = 200$).

a) Jev J_1: padne jedno oko.
Jev J_2: padnou dvě oka.

.

.

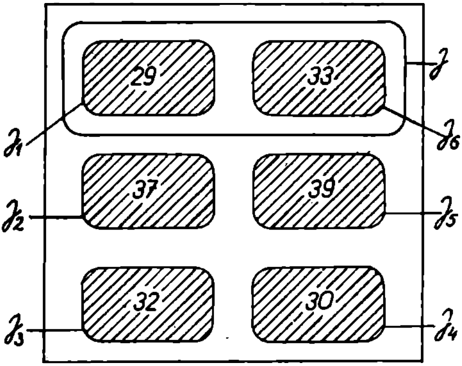
Jev J_6: padne šest ok.

b) Jev J: padne jedno oko nebo šest ok.

Výsledky opakovaného pokusu jsou zaznamenány v tabulce 1 a ve Vennově diagramu (obr. 37).

Tabulka 1

Jev	Četnost jevu
J_1	29
J_2	37
J_3	32
J_4	30
J_5	39
J_6	33
Celkem	200



Obr. 37

Pravděpodobnost jevu J_1 je přibližně rovna statistické pravděpodobnosti:

$$p_1 = \frac{29}{200} = 0{,}145 \doteq 15\ \%$$

Podobně vypočítáme pravděpodobnosti jevů J_2, J_3, J_4, J_5, J_6.

Výsledky výpočtů jsou uvedeny v tabulce:

Jev	Pravděpodobnost
J_1	$0{,}145 \doteq 15\ \%$
J_2	$0{,}185 \doteq 18\ \%$
J_3	$0{,}16 = 16\ \%$
J_4	$0{,}15 = 15\ \%$
J_5	$0{,}195 = 20\ \%$
J_6	$0{,}165 \doteq 16\ \%$
Celkem	$1{,}00 = 100\ \%$

Pro každý pokus z množiny M nastane právě jeden z jevů $J_1, J_2, \ldots, J_6$. Proto pro součet jejich pravděpodobností platí

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = 1 = 100\ \%,$$

neboť

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = \frac{29+37+32+30+39+33}{200} = \frac{200}{200} = 1.$$

Pravděpodobnost jevu J je přibližně

$$p = \frac{29 + 33}{200} = \frac{62}{200} = 0{,}31 \doteq 31\ \%.$$

Pravděpodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_6$ a pravděpodobnost p jsou určeny přibližně jako statistické pravděpodobnosti.

VÝZNAM PRAVDĚPODOBNOSTI

Dá se očekávat, že *při velkém počtu k nezávisle opakovaných pokusů $\boldsymbol{P}$ nastane jev $\boldsymbol{J}$, jehož pravděpodobnost (statistická pravděpodobnost)* je p, *přibližně v*

$$p \,.\, k$$

případech.

Předpokladem je, že pokus probíhá za stejných podmínek, za kterých byla zjišťována pravděpodobnost. (Např. hází se stále stejnou kostkou nebo mincí a stejným způsobem, kontroluje se chrup žáků z téže krajiny, kontrolujeme auta projíždějící určitou křižovatkou přibližně v tutéž denní dobu pracovního dne apod.).

PŘÍKLAD

Pokus ***P***: Zjištujeme kolik nákladních aut projelo křižovatkou K (jev ***J***). Celkem tu projelo 150 aut. Jev ***J*** a jeho četnost: Zjistili jsme, že projelo 48 nákladních aut. Pravděpodobnost jevu ***J*** je přibližně

$$p = \frac{48}{150} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25} = \frac{4.8}{4.25} = 0{,}32 = 32\ \%.$$

Za týden projede (v téže denní době) křižovatkou asi 5 000 aut, tj. $k = 5\,000$. Můžeme předvídat, že z nich bude asi

$$p.k = 0{,}32.5\,000 = 1\,600$$

nákladních aut.

PŘÍKLAD

Pokus ***P***: Házíme mincí: $n = 100$. Těchto 100 pokusů dává výsledky:

	padne líc	padne rub	celkem
Četnost jevu	48	52	100

Jev J: Padne rub; pravděpodobnost jevu J je přibližně

$$p = \frac{52}{100} = 0{,}52 = 52\ \%.$$

Hodíme-li toutéž mincí 2 500krát ($k = 2\,500$), můžeme předpokládat, že rub padne asi v

$$p.k = 0{,}52.2\,500 = 1\,300$$

případech.

PŘÍKLAD

Lékař prohlédl chrup u 600 třináctiletých žáků a zjistil 137 žáků se zdravým chrupem. Je tedy pokus P prohlídka chrupu 13letého žáka, počet pokusů $n = 600$, jev J je: žák měl zdravý chrup; četnost jevu J je $a = 137$. Pravděpodobnost p jevu J je přibližně

$$p = \frac{a}{n} = \frac{137}{600} \doteq 0{,}23 = 23\ \%.$$

Dá se tedy očekávat, že mezi 2 000 žáky ($k = 2\,000$) bude přibližně

$$23\ \%.2\,000 = 0{,}23.2\,000 = 460$$

žáků se zdravým chrupem.

Ve všech předcházejících příkladech byla pravděpodobnost jevu vypočtena přibližně na základě skutečně provedených pokusů — na základě statistického zkoumání (tj. statistickou pravděpodobností).

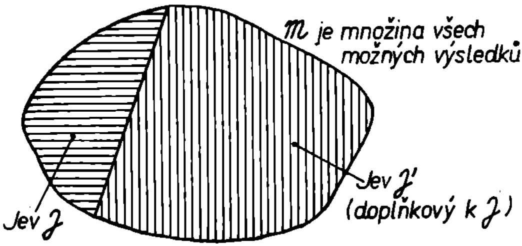
JEV DOPLŇKOVÝ

Jestliže při pokusu nenastal jev J, pak musel nastat jev J' (tj. doplněk množiny J v množině W všech možných výsledků pokusu P), který nazýváme

DOPLŇKOVÝ JEV K JEVU J.

PŘÍKLADY

Jev *J*	Doplňkový jev *J'*
— Při házení kostkou padne 5 ok.	— Při házení kostkou padne 1 oko nebo 2, 3, 4, 6 ok.
— Při házení mincí padne líc.	— Při házení mincí padne rub.
— Křižovatkou *K* projede nákladní vůz.	— Křižovatkou *K* projede jiný vůz než nákladní (osobní, autobus, jeřábový apod.).



Obr. 38

> *Je-li p pravděpodobnost jevu **J**, je 1 — p pravděpodobnost doplňkového jevu **J'**.*

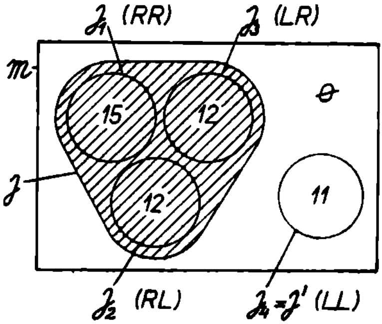
PŘÍKLAD

Pokus ***P***: Hodíme kovovou tříkorunou a korunou. Množina ***M*** vznikne tak, že pokus opakujeme 50krát ($n = 50$). Výsledky zapíšeme do tabulky:

Jev	Tříkoruna	Koruna	Četnost jevu
J_1	R (rub)	R	15
J_2	R	L (líc)	12
J_3	L	R	12
J_4	L	L	11
		Celkem	50

Jev J: padne aspoň na jedné minci rub (má četnost $15 + 12 + 12 = 39$).

Jev J' (doplňkový jev k jevu J): na žádné minci nepadne rub, tj. na obou mincích padne líc (má četnost 11). Vennův diagram:



Obr. 39

Pravděpodobnost p jevu J je přibližně

$$p = \frac{15 + 12 + 12}{50} = 0{,}78 = 78\ \% .$$

Pravděpodobnost p' jevu J' je přibližně

$$p' = \frac{11}{50} = 0{,}22 = 22\ \% .$$

Tedy

$$p' = 1 - p = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$$

nebo v procentech

$$p' = 100\ \% - p = 100\ \% - 78\ \% = 22\ \% .$$

Pamatujte si názvy (a jejich význam):

Pokus, výsledek pokusu, jev, jev jistý, jev nemožný, četnost jevu, relativní četnost jevu, pravděpodobnost, statistická pravděpodobnost, doplňkový jev.

CVIČENÍ

1. **Hra.** Dva hráči hází střídavě touž mincí. Na počátku hry má každý 0 bodů. Při každém hodu mincí si připíše hráč jedno z čísel 0, 1, 2 podle těchto pravidel:

a) Číslo musí být jiné, než číslo, které si hráč připsal při předchozím hodu.

b) Číslo připsané k „rubu" nechť je menší, než číslo připsané k „líci".

Každý z hráčů hodí desetkrát. Vyhrává, kdo má větší celkový součet počtu bodů. Zapisujte průběh hry např. takto:

Hráč A	R 1	L 2	L 1	R 0	L 2	R 0	R 1	L 2	R 0	L 2	Součet bodů 11
Hráč B	L 2	L 1	L 2	L 1	L 2	R 0	R 1	R 0	R 1	L 2	Součet bodů 12

Vyhrává hráč B. Je ovšem také možná remíza (nerozhodná hra).

2. Zjistěte, jaký je nejmenší možný součet počtu bodů a jaký je největší možný součet počtu bodů ve hře z cvičení 1.

3. Hra. V neprůhledném sáčku jsou kuličky označené všemi dvojcifernými čísly (10 až 99). Hráč po zatřepání sáčkem vytáhne jednu kuličku a zjistí ciferný součet čísla na ní napsaného a vrátí ji do sáčku.

Je-li ciferný součet číslo 5 až 14, postupuje do druhého kola. V druhém kole se hra opakuje; je-li ciferný součet v tomto kole 6 až 13, postupuje do třetího kola. Vyhrává v třetím kole, dosáhne-li tu součtu 7 až 12.

a) Zjistěte, kolik různých tahů umožňuje postup do druhého kola, kolik do prvního kola, kolik umožňuje výhru v třetím kole.

b) Jaká je pravděpodobnost postupu do prvního, druhého a třetího kola?

4. Zjednodušená sportka. Zvolte 6 sportů a označte je čísly 1 až 6; např. 1 - kopaná, 2 - plavání, 3 - lyžaření, 4 - horolezectví, 5 - lední hokej, 6 - skok vysoký. Každý hráč vsadí na tři z těchto sportů. Vedoucí hry hází hrací kostkou tak dlouho, až padnou tři různé počty ok. Padnou-li čísla dvou vsazených sportů, vyhrává hráč II. cenu, padnou-li všech tří vsazených sportů, vyhrává hráč I. cenu.

Zapište do tabulky podle tohoto vzoru:

Hráč	1	2	3	4	5	6	7	8	
Vsadil	124	235	156	245	251	345	356	123	
Vyhrál cenu	II	II	—	I	II	—	—	—	

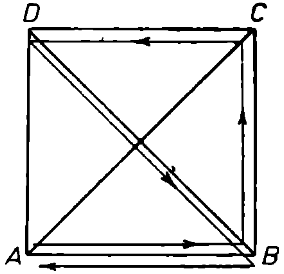
Vedoucí hry hodil 245.

5. Malé bludiště (obr. 40). Na obrázku je čtverec $ABCD$ a jeho úhlopříčky AC, BD. Hráč proběhne stranu AB a pak pokračuje takto:

a) nikdy se nevrací po cestě, po které bezprostředně předtím do bodu přišel;

b) hodí mincí: padne-li líc jde po cestě „vpravo", padne-li rub, jde po cestě „vlevo".

Hra končí, když se hráč dostane do bodu A. Vyhrává ten, kdo se dostane do A s nejmenším počtem hodů.



Obr. 40

Příklad průběhu hry a jejího zápisu L - líc, R - rub.

	L	L	R	L		
AB	BC	CD	DB	BA		

Průběh je zakreslen na obrázku 40.

a) Zahrajte tuto hru se čtyřmi tahy.

b) Zapište a zakreslete průběh hry: L L L, R R R R.

6. Při padesáti vrzích hrací kostkou nastaly tyto jevy s četnostmi uvedenými v tabulce

Padl počet ok	1	2	3	4	5	6
Četnost	8	9	7	10	9	7

Vypočtěte statistické pravděpodobnosti jevů:

a) padne jedno oko;

b) padne lichý počet ok;

c) padnou nejvýše 4 oka;

d) padne aspoň 5 ok.

7. Stejnou hrací kostkou jako v pokusech ze cvičení 6 hodíme tisíckrát. Kolikrát přibližně padne

a) sudý počet ok;

b) 2 nebo 5 ok;

c) 2 nebo 3 nebo 4 oka.

8. Ze 100 zasazených hrášků vzklíčilo 86. Zasadíme 2 500 hrášků z téhož pytle; kolik jich pravděpodobně nevzklíčí?

9. Na 100 školách se zjišťovalo sportování mládeže. Zjistilo se, že průměrně z 50 žáků je 28 lyžařů.

a) Kolik lyžařů připadá na 120 žáků?

b) Jaká je pravděpodobnost, že libovolně vybraný žák je lyžař?

c) Kolik musíme vzít žáků, abychom mezi nimi měli asi 100 lyžařů?

10. Mezi 32 hracími kartami je 12 figur (spodek — svršek — král). Pokusy bylo zjištěno, že při 100 tazích z úplné karetní hry byla tažena v 35 případech figura.

a) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnu figuru při tahu z úplné karetní hry?

b) Kolikrát asi musíme táhnout, abychom vytáhli z úplné karetní hry 60-krát figuru?

11. Stokrát vymrštěná koule na tzv. ruském kulečníku dala tyto počty bodů:

Jev (počet bodů)	2	5	10	20	50	100
Četnost	40	26	15	10	7	2

a) Vypočtěte jednotlivé pravděpodobnosti.

b) Kolikrát musím vymrštit kouli, abych získal přibližně 20-krát po 50 bodech?

12. Házím třemi mincemi současně. Při dvaceti pokusech dostanu výsledky (líc L — rub R) zapsané do tabulky takto:

1. mince	R	L	L	...
2. mince	R	R	R	...
3. mince	L	L	R	...

Vyplňte tabulku na základě skutečných pokusů.

Vypočtěte statistickou pravděpodobnost jevu, že padne
a) trojí líc;
b) dvojí líc a jeden rub.

2.2. Pravděpodobnost teoretická

V některých případech můžeme předpokládat, že všechny výsledky pokusu ***P*** jsou stejně pravděpodobné. Například při hodech mincí nebo hrací kostkou. Pak můžeme pravděpodobnost jevu ***J*** vypočítat pomocí

TEORETICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI.

Teoretická pravděpodobnost je racionální číslo dané zlomkem $p = \frac{a}{n}$, kde n značí počet všech možných výsledků při pokusu ***P***, a počet všech výsledků, které charakterizují jev ***J***.

$$\boxed{\text{teoretická pravděpodobnost jevu } J} - p = \frac{a \;\; \boxed{\text{počet výsledků charakterizujících jev } J}}{n \;\; \boxed{\text{počet všech možných výsledků pokusu}}}$$

Pomocí teoretické pravděpodobnosti můžeme přibližně vypočítat četnost jevu ***J*** v daném počtu nezávisle opakovaných pokusů (aniž bychom museli tyto pokusy provádět). Tím se můžeme vyhnout často dosti zdlouhavému statistickému zkoumání.

Je-li p teoretická pravděpodobnost jevu J, potom teoretická pravděpodobnost doplňkového jevu je opět rovna $1 - p$.

PŘÍKLAD

Napíšeme přirozená čísla od 1 do 100. Jaká je pravděpodobnost, že číslo z nich namátkou vybrané nebude prvočíslo? (Prvočíslo je přirozené číslo $p > 1$, které má jen dělitele 1, p.)

Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Počet možných výsledků je $n = 100$. Jev J' (napsané číslo je prvočíslo) nastane při a' výsledcích; přitom a' je počet všech prvočísel od 1 do 100. Jsou to čísla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, tj. $a' = 25$. Pravděpodobnost $p' = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Teoretická pravděpodobnost p jevu J (napsané číslo není prvočíslo) je

$$p = 1 - p' = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\,\%\,.$$

Jestliže pokládáme za stejně pravděpodobné napsání kteréhokoliv z čísel 1 až 100, pak pravděpodobnost jevu J se rovná jeho teoretické pravděpodobnosti. (Toho lze dosáhnout například losováním čísel 1 až 100.)

PŘÍKLAD

Máme určit teoretickou pravděpodobnost, že při napsání pěticiferného přirozeného čísla napíšeme číslo s nejvýše dvěma nulami.

Je zřejmé, co je pokus $\boldsymbol{P}$; počet možných výsledků je $n = 90\,000$. Jev $\boldsymbol{J}'$ je množina pěticiferných čísel s aspoň třemi nulami; četnost jevu $\boldsymbol{J}'$ je $324 + 9 = 333$. (První sčítance 324 udává počet čísel s třemi nulami; 9 je počet čísel se čtyřmi nulami.) Teoretická pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}'$ je

$$p' = \frac{333}{90\,000} = 0{,}0037$$

Je tedy $p' \doteq 0$. Teoretická pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$ (napsání pěticiferného čísla s nejvýše dvěma nulami), který je doplňkový k jevu $\boldsymbol{J}'$, je

$$p = 1 - p' = 0{,}9963 \doteq 1 .$$

Pamatujte si název:

Teoretická pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$.

CVIČENÍ

1. Narýsujte obrázek 41; A', B', C' jsou středy stran trojúhelníka ABC.

a) Určete všecky možné cesty z A do B, které vedou po nakreslených úsečkách, ale každým bodem procházejí nejvýš jednou. Zapište je podle tohoto vzoru $AC'TB'CB$. Tyto cesty tvoří množinu $\boldsymbol{M}$ o n lomených čarách. Určete n.

b) Vyberte z množiny $\boldsymbol{M}$ všecky cesty, které procházejí bodem B' a určete jejich počet a. Vypočtěte podíl $\frac{a}{n}$. Jaký význam má tento podíl?

c) Opakujte úlohu b) pro všechny cesty, které neprocházejí bodem B' ani C'.

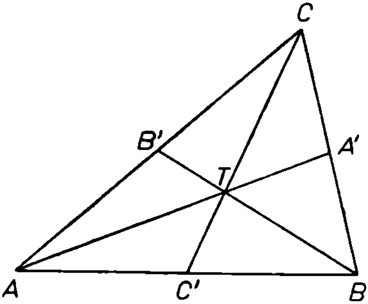
2. Na půdě se suší dva páry červených ponožek, 2 páry zelených a 4 páry modrých ponožek; všechny jsou stejné velikosti. Někdo sundává ponožky za tmy.

Kolik musí nejméně sundat ponožek, aby měl zaručeno, že přinese:

a) aspoň jeden pár stejnobarevných;

b) aspoň dva páry stejnobarevných (třeba každý pár jiné barvy);

c) aspoň dva páry stejnobarevných, a to oba téže barvy. (Poznámka. U ponožek nerozlišujeme levou a pravou ponožku.)



Obr. 41

3. K množině pokusů M a jevu J o četnosti a určete:

a) doplňkový jev J' a jeho četnost a';

b) pravděpodobnost p jevu J i pravděpodobnost p' jevu J'; ověřte, že je $p + p' = 1$.

c) Nakreslete Vennův diagram. Množinu M tvoří 20 pokusů — pokus je vrh dvou hracích kostek.
J: padne součet počtu ok 9 až 12.
J': ...., $a =$ ......, $p =$ ...., $a' =$ ....., $p' =$ ......

d) Proveďte skutečně pokusy a jejich výsledky zapište do tabulky.

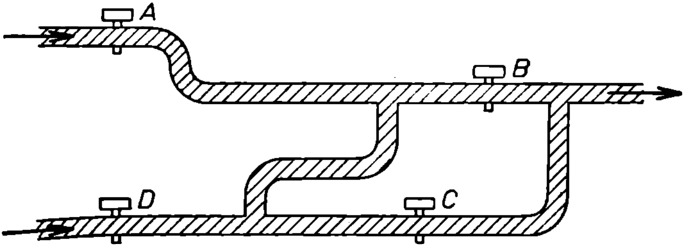
e) Určete teoretické pravděpodobnosti a porovnejte je s pravděpodobnostmi statistickými.

4. Na obrázku 42 je systém vodovodního potrubí s kohouty A, B, C, D. Voda přitéká i vytéká ve směru šipek.

a) Sestrojte strom všech možností otevření a uzavření kohoutů (A otevřen — A' uzavřen); viz obr. 43.

b) Vytáhněte ve stromu všecky možnosti průtoku vody a zapište je podle vzoru: $A'BC'D$. Zjistěte jejich počet a.

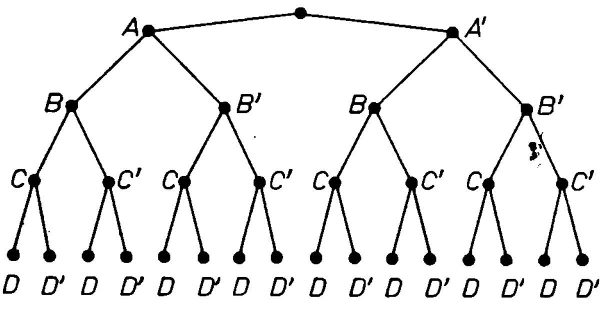
c) Zjistěte počet n všech možností postavení čtyř kohoutů a vypočtěte $\frac{a}{n}$. Jaká je pravděpodobnost (teoretická) při nahodilém postavení kohoutů, že voda bude protékat?



Obr. 42

5. Cvičení 6, 7 z článku 2,1 řešte teoretickou pravděpodobností a výsledky porovnejte s výsledky získanými statistickou pravděpodobností.

6. Na obrázku 44 je známá čtvercová síť; v ní jsou vyzna-



Obr. 43

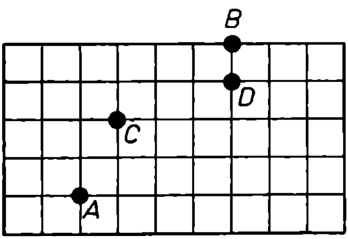
čeny body A, B jako kartézské grafy zlomků $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$. Dále jsou tam vyznačeny body C, D.

a) Zjistěte, kolika „cestami“ vpravo — nahoru lze dospět z bodu A do bodu B.

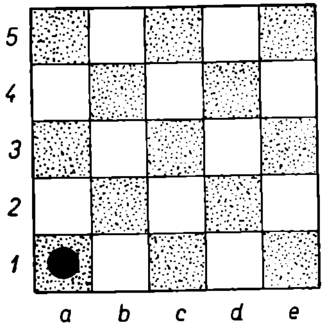
b) Zjistěte, kolik z těchto cest prochází bodem C, kolik bodem D.

c) Určete s jakou pravděpodobností prochází cesta bodem C, nebo bodem D, nebo oběma body C, D.

d) Určete pravděpodobnost, že cesta neprochází ani bodem C, ani bodem D.



Obr. 44



Obr. 45

7. Na obrázku 45 je zjednodušená šachovnice o 25 polích. Na poli $a1$ stojí jezdec.

a) Vypište (jako množinu M) všecka pole, na něž se jezdec dostane dvěma skoky.

b) Vypište všecka pole z M, která leží v sloupci d.

c) Vypište všecka pole z M, která leží v řádku 3.

d) Jaká je pravděpodobnost, že se jezdec dvěma skoky dostane buď do sloupce d nebo do řádku 3 (připouštíme možnost, že se jezdec dostane na pole $d3$).

e) Jaká je pravděpodobnost, že se jezdec dvěma skoky nedostane ani do sloupce d ani do řádku 3?

f) Jaká je pravděpodobnost, že se jezdec dvěma skoky dostane zároveň do sloupce d a do řádku 3?

Ve cvičeních 8 až 15 znamená slovo „náhodně", že všechny možné výsledky pokusů jsou stejně pravděpodobné.

8. Ze slova „pravděpodobnost" se má náhodně vybrat jedno písmeno. Jaká je pravděpodobnost, že bude vybráno: **a)** písmeno „v"; **b)** písmeno „p"; **c)** písmeno označující některou samohlásku (a, e, o).

9. Z množiny slov $S = \{$kolo, oko, sklo, lak, pluk, louka$\}$ se vybírá náhodně jedno slovo. Jaká je pravděpodobnost, že ve vybraném slově

a) bude aspoň jedno „o";
b) nebude buď „e" nebo „u";
c) budou aspoň dvě slabiky.

10. Karlík si přál k Ježíšku: auto na baterii, knížku, album na poštovní známky, samopal. Tatínek, maminka a starší bratr Jan mu chtějí koupit po jedné z těchto věcí. Jaká je pravděpodobnost, že v případě, když se předem nedohodnou, koupí

a) každý jinou věc;
b) nejvýše dva z nich stejnou věc.

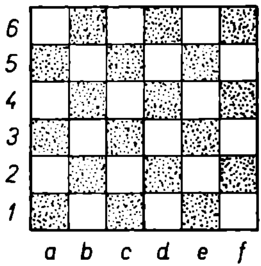
11. V jednom sáčku jsou 3 bílé kuličky a 5 černých, v druhém sáčku 4 bílé a 3 černé. Táhnu po 1 kuličce z každého sáčku.

a) Kolik možných výsledků je při opakování pokusu?
b) Kolik je pokusů, při nichž vytáhnu
. dvě kuličky téže barvy;
. dvě kuličky černé;
. dvě kuličky bílé;
. dvě kuličky různé barvy.
c) Vypočtěte příslušné teoretické pravděpobobnosti.
d) Proveďte 20 pokusů, výsledky zapisujte. Vypočtěte statistické pravděpodobnosti a porovnejte je s výsledky z úlohy **c)**.

12. Do 4 vagónů byly naloženy vyrobené stroje téhož druhu, do každého vagónu **a)** 3 kusy, **b)** 4 kusy, **c)** 5 kusů. Mezi naloženými stroji jsou dva vadné. Jaká je (teoretická) pravděpodobnost, že oba vadné stroje jsou v témže vagóně?

13. Volám telefonem svého přítele. První tři cifry jeho telefonního čísla znám spolehlivě, poslední tři cifry jsou 5, 4, 2, ale nevím, v jakém pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že hned napoprvé vytočím správné číslo?

14. Řešte cvičení 13 v tomto případě:
. první čtyři cifry telefonního čísla znám spolehlivě;
. čtvrtá cifra je sudá;
. pátá cifra je 1 nebo 7.



Obr. 46

15. Síla šachových figur; a) Na zmenšenou šachovnici (obr. 46) postavíme náhodně věž a jezdce. Vyjádřete v procentech teoretickou pravděpodobnost p_v, že věž ohrožuje jezdce a p_j, že jezdec ohrožuje věž. Čísla p_v, p_j lze považovat za „sílu" těchto figur. Porovnejte, jak se liší poměr $p_v : p_j$ od běžně užívaného poměru sil 5 : 3.

b) Řešte úlohu pro jiné dvojice figur.

Návod: Všimněte si, že stačí uvažovat pouze takové polohy figur, při nichž jedna je umístěna v „malém" čtverci, který je na obrázku 46 vyznačen tlustým orámováním.

2.3. Stromy logických možností

Při určování teoretické pravděpodobnosti je pro některé pokusy dost těžké určit množinu všech možných výsledků. V takových případech užíváme často

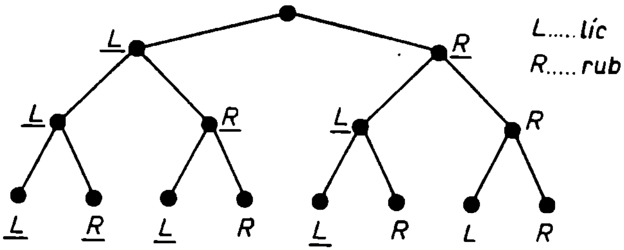
STROMŮ LOGICKÝCH MOŽNOSTÍ

PŘÍKLAD

Pokus ***P*** je házení třemi mincemi (např. tříkorunou, korunou a padesátihaléřem). Jev ***J*** je: padne aspoň na dvou mincích líc (*L*).

Množinu všech výsledků pokusu ***P*** určíme pomocí stromu logických možností (obr. 47).

Je celkem 8 možností:



Obr. 47

<u>*LLL*</u>, <u>*LLR*</u>, <u>*LRL*</u>, *LRR*, <u>*RLL*</u>, *RLR*, *RRL*, *RRR* .

Jev ***J*** tvoří čtyři (podtržené) možnosti.

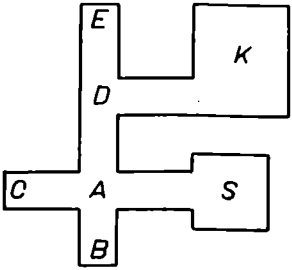
Pravděpodobnost jevu ***J*** je proto

$$p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\ \%$$

PŘÍKLAD

Na obrázku 48 je plán bludiště. V místě *K* je potrava. Pokus ***P***: Vložíme myšku do bludiště v místě *S*. Myška ucítí potravu a snaží se k ní bludištěm dostat. Jev $\boldsymbol{J_1}$:

Myška běží v bludišti za potravou nejkratší cestou (viz obr. 48, cesta S — A — D — K). Jev $\boldsymbol{J}_2$: Myška zabočí nejvýše jednou do nesprávné chodby.



Obr. 48

Množinu všech možných výsledků pokusu $\boldsymbol{P}$ určíme pomocí stromu logických možností — obr. 49. (Ve stromu je silnějšími čarami vyznačena cesta S — A — C — A — D — E — D — K.)

Pokus $\boldsymbol{P}$ má celkem 10 možných výsledků. Pouze pro jeden výsledek nastane jev $\boldsymbol{J}_1$ (viz koncový „uzel" stromu logických možností vyznačený ⊙). Jev $\boldsymbol{J}_2$ nastane pro čtyři výsledky (viz koncové „uzly" ⊙ a ⊡).

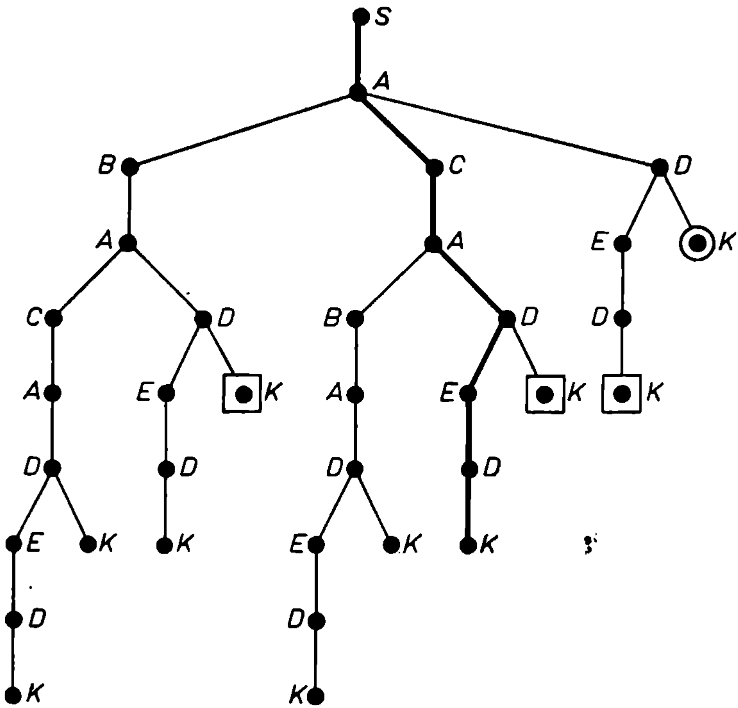
Pravděpodobnosti p_1, p_2 jevů $\boldsymbol{J}_1$ a $\boldsymbol{J}_2$ jsou

$$p_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\ \%\,, \quad p_2 = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\ \%$$

Poznámka. Při sestrojování stromu logických možností, které má myška v bludišti, jsme předpokládali, že se pohybuje náhodně, avšak nevrací se ke startu S nikdy více než je to „nutné". V tom je skryt obecný návod

Pravidlo si vyslovíme přesně. Je třeba vyhovět dvěma požadavkům:

(a) *V bludišti nikdy neprocházíme touž chodbou dvakrát stejným směrem.*



Obr. 49

(b) *Na každé křižovatce*) si pamatujeme chodbu, kterou jsme přišli poprvé. Touto chodbou smíme z křižovatky odejít pouze v tom případě, že nemáme na vybranou jinou možnost.*

Prakticky můžeme toto pravidlo uskutečnit s použitím dopravních značek (obr. 50).

Obr. 50

Vcházíme-li do nějaké chodby, vyznačíme na jejím začátku „zákaz vjezdu“. Jestliže z nějaké chodby vycházíme na určitou křižovatku po prvé, označíme tuto chodbu značkou „jednosměrný provoz“ v ostatních případech „zákazem vjezdu“.

Pro bludiště, která *nemají okružní chodby* lze udat ještě jednodušší návod. *Stačí vždy jít vlevo.*

CVIČENÍ

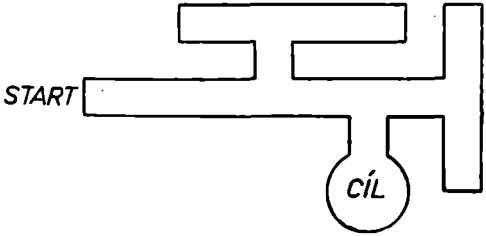
1. Dva přibližně stejně silní soupeři hrají tenisový zápas na tři vítězné sety. Určete pravděpodobnost, že zápas skončí výsledkem 3 : 2 pro zvoleného hráče.

---

*) Za „křižovatku“ pokládáme i konec každé slepé ulice.

2. Na jednom bájném ostrově se dlouhodobě sledovalo počasí. Denně se zjišťovalo, zda je slunečno nebo zataženo nebo prší. Statistika potvrdila starou místní pranostiku: „Jestliže jsi dnes zmokl, nemusíš si brát zítra deštník“. Ukázalo se totiž, že nikdy neprší dva dny za sebou. Jinak se střídá počasí zcela náhodně. Máte určit pravděpodobnost, že když zmoknete v pondělí, pak nezmoknete v pátek.

3. Řešte úlohu o myšce pro bludiště na obrázku 51.



Obr. 51

4. Házíte třemi hracími kostkami. Určete pravděpodobnost, že padne dohromady aspoň 8 ok.

5. V šatně si odložili čtyři návštěvníci kabáty a klobouky. Protože klobouky spadly, šatnářka je pověsila náhodně k jednotlivým kabátům znovu. Určete pravděpodobnosti

a) všechny klobouky byly přiděleny ke správným kabátům;

b) aspoň dva klobouky patřily ke správným kabátům.

6. Na kroužku jsou tři patentní klíče: od branky do zahrady, od domovních dveří a od bytu. Po tmě beze světla je nemůžeme rozeznat. Chceme všechny zámky při návratu z kina otevřít. Nezbývá nic jiného, než u jednotlivých zámků klíče náhodně vyzkoušet. Je pochopitelné, že když zjistíme klíč od branky, nebudeme ho už zkoumat u domovních dveří. Máme zjistit pravděpodobnosti, že se zmýlíme nejvýše jednou.

7. Házíme čtyřmi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že padne líc nejvýše dvakrát?

2.4. Geometrická pravděpodobnost

Chceme-li určit teoretickou či statistickou pravděpodobnost určitého jevu ***J***, potřebujeme obvykle předem zjistit dvě celá nezáporná čísla. Například pro teoretickou pravděpodobnost to jsou:

a) číslo a, které udává počet prvků množiny všech výsledků charakterizujících jev ***J***;
b) číslo n, které značí počet prvků množiny ***Z*** všech možných výsledků.

Taková čísla existují, pokud jsou obě množiny (jev ***J*** i množina ***Z***) konečné. Jsou-li množiny ***J*** a ***Z*** nekonečné, nelze mluvit o počtu jejich prvků. Přesto můžeme teoretickou pravděpodobnost rozšířit i pro některé nekonečné množiny. Protože nemůžeme charakterizovat jejich „velikost“ počtem jejich prvků, užíváme obecnějšího pojmu tzv. ***MÍRY***. V souhlase s tím mluvíme v takovém případě o

MĚŘITELNÝCH MNOŽINÁCH.

Mezi měřitelné množiny patří například úsečky (s krajními body i bez nich).

MÍROU ÚSEČKY JE (zpravidla) JEJÍ DÉLKA.

Také některé křivky (např. kružnice a oblouky kružnic) jsou měřitelné; mírou je opět jejich délka.

Jiným příkladem měřitelných množin jsou obrazce (včetně hranic i bez hranice nebo její části).

MÍROU OBRAZCE JE (zpravidla) JEHO OBSAH.

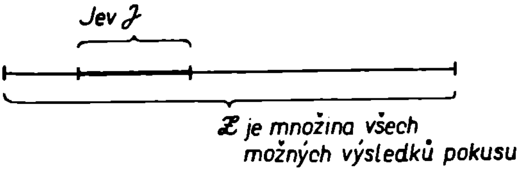
Míry úsečky i míry obrazce využíváme při tzv.

GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI.

Každou z těchto možností si ukážeme zvlášť.

a) Množiny ***Z*** i ***J*** jsou měřitelné; jejich mírou je jejich délka (např. úsečky, oblouky kružnic ap.):

geometrická pravděpodobnost jevu (množiny) ***J***	$p = \dfrac{j}{z}$	míra (délka) množiny ***J*** / míra (délka) množiny ***Z***



Obr. 52

PŘÍKLAD 1

Je dána úsečka $AB = 6$ cm.

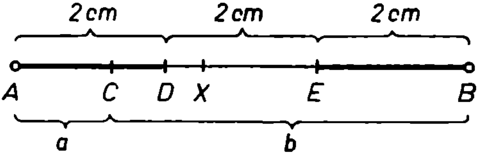
Pokus ***P*** je: zvolíme náhodně bod $C \in AB$, $(A \neq \neq C \neq B)$. Tím vzniknou dvě úsečky $a = AC$, $b = CB$.

Jev J_1: Některá z úseček a, b má délku aspoň dvakrát větší než druhá úsečka.

Jev J_2: Úsečka a je přesně dvakrát delší než úsečka b.

Množina ***Z*** všech možných výsledků pokusu ***P*** je množina všech bodů úsečky AB bez krajních bodů A, B.

Množina $\boldsymbol{M}_1$ všech výsledků charakterizujících jev $\boldsymbol{J}_1$



Obr. 53

se skládá ze dvou úseček (obr. 53): AD (bez bodu A), EB (bez bodu B); neboť (kreslete si vlastní obrázky):

$$\text{pro } C \in AD \text{ je } AC \leqq 2 \text{ cm}, CB \geqq 4 \text{ cm},$$

$$\text{pro } C \in EB \text{ je } AC \geqq 4 \text{ cm}, CB \leqq 2 \text{ cm}.$$

Zatím co

$$\text{pro } C \in DE \ (D \neq C \neq E), \text{ tj. } C \notin \boldsymbol{M}, \text{ je}$$

$$2 \text{ cm} < AC < 4 \text{ cm}, \ 2 \text{ cm} < CB < 4 \text{ cm}.$$

Pravděpodobnost p_1 jevu $\boldsymbol{J}_1$ je rovna geometrické pravděpodobnosti

$$p_1 = \frac{AD + EB}{AB} = \frac{2 + 2}{6} = \frac{4}{6} \doteq 0{,}67 = 67\ \%\ ^{*})$$

Množina $\boldsymbol{M}_2$ všech výsledků charakterizujících jev $\boldsymbol{J}_2$ je množina

$$\boldsymbol{M}_2 = \{E\}.$$

*) Délkou úsečky bez jednoho nebo obou krajních bodů rozumíme délku úsečky, která vznikne z dané úsečky doplněním chybějících krajních bodů.

Množina M_2 je „nulová" úsečka; její míra (délka) se rovná nule. Pravděpodobnost p_2 jevu J_2 je

$$p_2 = \frac{0}{AB} = \frac{0}{6} = 0\,,$$

tzn. p_2 je nulová pravděpodobnost. Ačkoliv jev J_2 není nemožný, je jeho pravděpodobnost rovna nule.

Kdybychom určovali délky s přesností na 1 mm, pak bychom dostali výsledek

$$p_2 = \frac{0{,}2}{6} \doteq 0{,}03 = 3\,\%\,.$$

Ověřte si to sami výpočtem.

Poznámka. **PŘÍKLAD 1** (str. 77) můžeme rozřešit přibližně i bez geometrické pravděpodobnosti. Můžeme použít opět teoretické i statistické pravděpodobnosti. Musíme však využít jistého zjednodušení. Ukážeme si to pro pravděpodobnost jevu J_1.

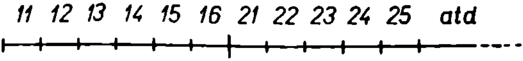
a) Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Úsečku $AB = 6$ cm, která je (bez krajních bodů A, B) množinou všech možných výsledků rozdělíme na 60 shodných úseček délky 1 mm. Úsečky očíslujeme zleva doprava čísly 1, 2, ..., 60. (Ke každé z těchto úseček — s výjimkou úsečky č. 1 — počítáme i levý krajní bod; k žádné z nich nepočítáme jejich pravý krajní bod.)

Jev J_1 (viz **PŘÍKLAD 1** str. 77) nastane právě tehdy, jestliže „dělicí" bod C patří některé z úseček č. 1, 2, ..., 20 nebo 41, 42, ..., 60 (nesmí to však být levý krajní bod úsečky č. 41). Těchto shodných nepřekrývajících se úseček je celkem 40. Teoretická pravděpodobnost, že bod C patří některé z úseček č. 1, 2, ..., 20 nebo 41, 42, ..., 60 je tedy

$$p_1^* = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \doteq 0{,}67 = 67\,\%\,.$$

Vidíme, že p_1^* se rovná geometrické pravděpodobnosti p_1 jevu J_1 z **PŘÍKLADU 1**.

b) Použijeme statistické pravděpodobnosti. Uvnitř úsečky AB budeme náhodně volit bod C (pokus P). Pokus provedeme celkem 100krát. Náhodnost volby zajistíme například takto: Úsečku AB rozdělíme na 36 shodných úseček, které označíme pomocí dvojciferných čísel zapsaných číslicemi 1, 2, ..., 6. (Viz obr. 54).



Obr. 54

Při každém pokusu umístíme „dělící" bod C uvnitř úsečky, jejíž číslo „získáme" pomocí hodu dvou hracích kostek.

Výsledky získané stem pokusů s hracími kostkami byly zaznamenány v tabulce četností se dvěma vstupy:

2. kostka / 1. kostka	1	2	3	4	5	6
1	5	1	4	3	3	3
2	1	4	2	1	1	4
3	1	2	1	0	2	2
4	3	3	6	3	1	4
5	1	4	4	7	2	4
6	4	3	3	2	0	5

Jevu J_1 z **PŘÍKLADU 1** (str. 77) odpovídají hody, jejichž četnosti jsou vyznačeny v tabulce ve dvou silně vytažených rámečcích. Těchto hodů je celkem 72.

Tomu odpovídá statistická pravděpodobnost

$$p_1^{**} = \frac{72}{100} = 0{,}72 = 72\ \% .$$

Tento výsledek se příliš neliší od obou pravděpodobností (geometrické a teoretické) získaných při předcházejících řešeních.

PŘÍKLAD 2

Parašutista přistál při nočním seskoku v místě A, které je vzdáleno 4 km od přímé silnice (s).

Pokus $\boldsymbol{P}$. Parašutista se vydá rychlostí 5 km/hod z místa A neznámým směrem (pohybuje se po polopřímce).

Jev $\boldsymbol{J}$. Parašutista narazí nejpozději během jedné hodiny na silnici.

Máme určit pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$.

Množina $\boldsymbol{Z}$ všech možných výsledků je kružnice se středem A a poloměrem $r = 5$ km. Množina $\boldsymbol{M}$ charakterizující jev $\boldsymbol{J}$ je kratší oblouk $\overset{\frown}{BC}$ kružnice $\boldsymbol{Z}$ s krajními body na přímce s (obr. 55). Pravděpodobnost p jevu $\boldsymbol{J}$ je

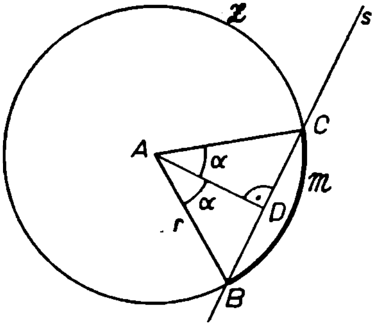
$$p = \frac{l}{z},$$

kde l je délka (kratšího) oblouku $\overset{\frown}{BC}$ a z délka kružnice $\boldsymbol{Z}$. Tedy

$$p = \frac{\pi r \dfrac{2\alpha}{180}}{2\pi r} = \frac{\alpha}{180} \quad (\alpha \text{ ve stupních}) .$$

Velikost úhlu α zjistíme buď úhloměrem nebo výpočtem pomocí goniometrických funkcí:

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \,.$$



Obr. 55

Užijeme např. „Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro 7. až 9. ročník“ — tab. M5 a zjistíme

$$\alpha \doteq 37^\circ \,.$$

Pravděpodobnost p je

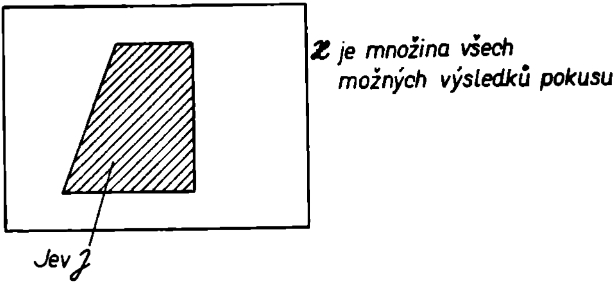
$$p = \frac{37}{180} \doteq 0{,}205 \doteq 20\ \% \,.$$

b) Množina Z všech možných výsledků pokusu P i jev J jsou měřitelné množiny, jejichž mírou je jejich obsah. (Množiny Z a J jsou tedy měřitelné obrazce; obr. 56). Geometrickou pravděpodobnost jevu J počítáme podle vzorce:

geometrická pravděpodobnost jevu (množiny) J — $p = \dfrac{j}{z}$

j — míra (obsah) množiny J

z — míra (obsah) množiny Z



Obr. 56

PŘÍKLAD 1

Je dán obdélník $\boldsymbol{O} = ABCD$ s rozměry $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm.

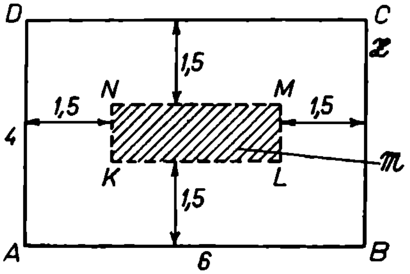
Pokus $\boldsymbol{P}$: Zvolíme náhodně bod $X \in \boldsymbol{O}$.

Jev $\boldsymbol{J}$: Vzdálenost bodu X od obvodu obdélníku $\boldsymbol{O}$ je větší než 1,5 cm.

Množina $\boldsymbol{Z}$ všech možných výsledků pokus $\boldsymbol{P}$ je obdélník $\boldsymbol{O}$. Množina $\boldsymbol{M}$ všech výsledků charakterizujících jev $\boldsymbol{J}$ je vnitřek obdélníku $KLMN$ (obr. 57) — tj. obdélník $KLMN$ bez obvodu, který je proto na obrázku 57 vyznačen jen čárkovaně. Rozměry obdélníku jsou 1 cm a 3 cm.

Obsah vnitřku obdélníku $KLMN$ počítáme jako obsah celého obdélníku. Pravděpodobnost jevu ***J*** je

$$p = \frac{1.3}{6.4} = \frac{1}{2.4} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%.$$



Obr. 57

Doplňková pravděpodobnost p' jevu ***J'*** (tzn., že bod X má od obvodu obdélníku ***O*** vzdálenost nejvýše 1,5 cm) je

$$p' = 0{,}875 = 87{,}5\ \%.$$

Poznámka. Také tento **PŘÍKLAD 1** lze řešit za jistých jednodušších předpokladů bez geometrické pravděpodobnosti. (Srovnejte s poznámkou na str. 79 až 81.) Pokuste se sami o takové řešení.

PŘÍKLAD 2

Obdélník ***O***, který má rozměry 1 m a 2 m je rozdělen rovnoběžkami na shodné pásy šířky 5 cm a délky 1 m.

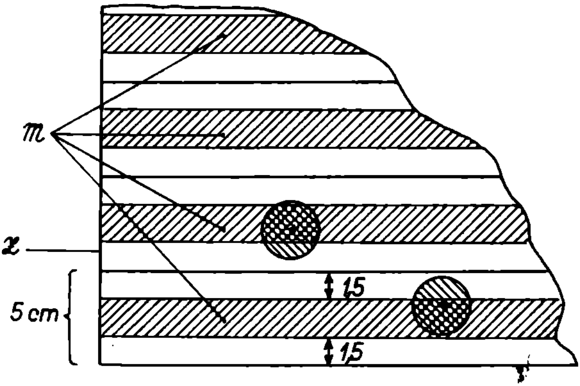
Pokus ***P***. Na obdélník náhodně umístíme minci o průměru 3 cm. (Střed mince musí patřit obdélníku ***O***; část mince tedy může „přečnívat ven“.)

Jev ***J***. Celá mince leží uvnitř některého z 40 pásů.

Množina ***Z*** všech různých výsledků pokusu ***P*** (tj. umístění středu mince) je obdélník ***O***.

Množina ***W*** všech výsledků charakterizujících jev ***J*** se skládá ze 40 pásů (bez hraničních přímek) s rozměry 2 cm a 1 m. (Dvě možné polohy mince jsou na obr. 58 znázorněny.) Pravděpodobnost jevu ***J*** je

$$p = \frac{40.(2.100)}{100.200} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\ \%\,.$$



Obr. 58

Zajímavá poznámka. Vezměme opět obdélník ***O*** z předešlého příkladu. Pokus ***P*** změníme takto: Na obdélník budeme házet z výšky jehlu délky 5 cm. Jev ***J*** spočívá v tom, že jehla zasahuje do dvou různých pásů.

Nechť p je statistická pravděpodobnost jevu J. Dá se ukázat (užitím tzv. vyšší matematiky), že

$$\frac{2}{p} \approx \pi$$

(slovy: $\frac{2}{p}$ se přibližně rovná Ludolfovu číslu π).

Překvapující na tom je, že bychom mohli tímto způsobem mnohonásobným opakováním pokusu $\boldsymbol{P}$ experimentálně určit číslo π s libovolnou přesností.

Pamatujte název: geometrická pravděpodobnost.

CVIČENÍ

1. Na úsečce $AB = 10$ cm se volí náhodně bod C. Určete pravděpodobnost p, že úsečka AC bude aspoň o 1 cm delší než úsečka BC.

2. Na obvodu čtverce $ABCD$ o straně **a)** 5 cm; **b)** 8 cm; **c)** 4 cm; **d)** 2 cm se volí zcela náhodně bod $X \neq A$. Jaká je pravděpodobnost, že bude úsečka $AX \geqq 5$ cm.

3. Trojúhelník $\boldsymbol{T} = \triangle ABC$ má strany $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm. Bod X se volí náhodně mezi body A a B. Přímka CX dělí obvod trojúhelníku na dvě části délek O_1, O_2. Určete geometrickou pravděpodobnost, že

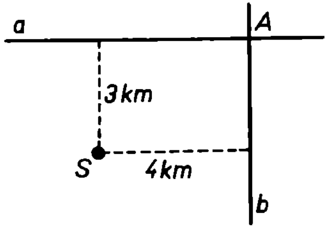
a) $|O_1 - O_2| \leqq 2$ cm;

b) jedna z částí O_1, O_2 je aspoň dvakrát delší než druhá.

4. Hodiny se zastavily mezi druhou a třetí hodinou. Jaká je pravděpodobnost, že hodinová a minutová ručička svírají úhel menší než 90°. (Návod: Užijte časové osy.)

5. Je dán čtverec $ABCD$ a bod M na straně BC tak, že $3\,BM = BC = 6$ cm. $\boldsymbol{K}$ je libovolný kruh o poloměru $r = 3{,}5$ cm a středu $S \in DM$. Určete pravděpodobnost, že kruh $\boldsymbol{K}$ obsahuje aspoň jeden vrchol čtverce.

6. V místě A se křižují kolmo dvě silnice a, b, (obr. 59). V místě S přistál parašutista. Odtud se vydá přímočaře rychlostí 6 km/hod. S jakou pravděpodobností narazí nejdéle po jednohodinovém pochodu na některou ze silnic a, b.



Obr. 59

7. Obdélník $\mathbf{O} = ABCD$ má rozměry $a = AB = 5$ cm, $b = BC = 3$ cm. Zvolíme náhodně bod $X \in \mathbf{O}$. Jaká je pravděpodobnost, že vzdálenost bodu X od strany AB je větší než od strany BC?

8. Mořský ostrov má tvar kruhu $\boldsymbol{K}$ se středem O a poloměrem 4 km. Jaká je pravděpodobnost, že z náhodně zvoleného místa X je ke studni S, která je ve středu ostrova,

a) blíže než 3 km (jev $\boldsymbol{J}_1$).

b) blíže než k moři (jev $\boldsymbol{J}_2$).

9. Řešte cvičení 8a pro případ, že studna S není ve středu ostrova. Dovedete vždy úlohu vyřešit?

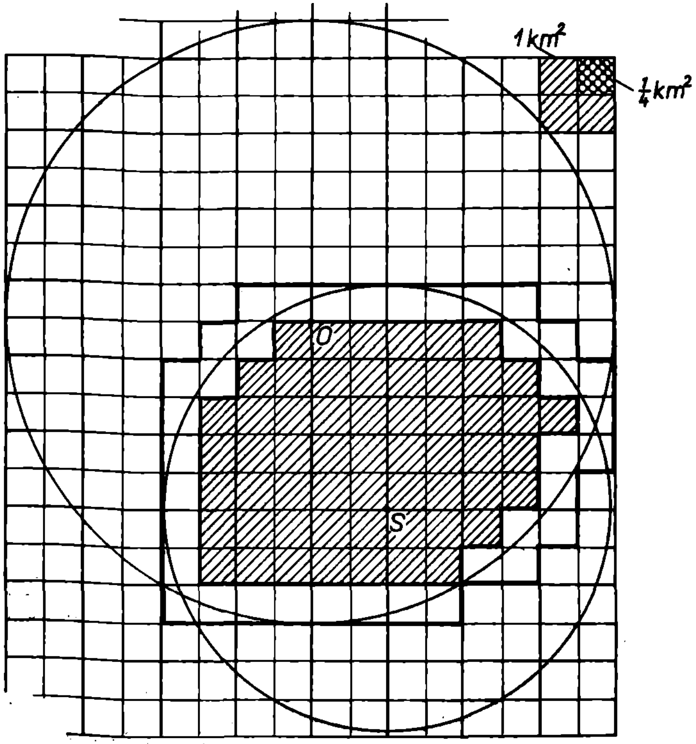
10. Jestliže nedovedete řešit cvičení 9 (tzn. nedovedete vypočítat obsah množiny charakterizující jev $\boldsymbol{J}_1$) můžete postupovat takto: Situaci znázorněte na čtverečkovaném papíře — viz např. obrázek 60.

Zmenšeno: 1 cm na obrázku značí 1 km ve skutečnosti.
1 cm² na obrázku značí 1 km² ve skutečnosti.

Vyznačíme všechny čtverečky, které jsou částí množiny $\boldsymbol{M}$. Jejich počet je v_1. Tyto čtverce mají celkem obsah $o_1 = 1/4\ v_1$ km². Dále vyznačíme všechny čtverečky, které pokrývají množinu M. Jejich počet je v_2. Tyto čtverce mají celkem obsah $o_2 = 1/4\ v_2$ km². Obsah množiny M je přibližně

$$o = \frac{1}{2}(o_1 + o_2)\ \text{km}^2 .$$

Rýsujte a počítejte sami pro různé případy.



Obr. 60

11. Pole má tvar obdélníku $O = ABCD$ s rozměry $a = AB = 600$ m, $b = BC = 400$ m. V místech A, B, S (S je střed CD) jsou studánky. Na poli stojí v místě X traktorista. Jaká je pravděpodobnost, že má nejblíže ke studánce v místě A (B, S)?

12. Parašutista seskočil v noci v trojúhelníkové oblasti $T = ABC$. ($AB = 5$ km, $BC = 8$ km, $CA = 7$ km). V místě V vysílá krátkovlnná vysílačka s dosahem 5 km. Jaká je pravděpodobnost, že parašutista může zachytit tuto vysílačku. Uvažujte tyto případy: **a)** $V = A$; **b)** V je střed AB. Použijte postupu naznačeného ve cvičení 10.

13. Trojúhelník má strany $AB = 13$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 10$ cm. Bod X je náhodně zvolen uvnitř tohoto trojúhelníku. Jaká je pravděpodobnost, že vzdálenost bodu X od strany AC je menší, než jeho vzdálenosti od zbývajících dvou stran BC, AB.

14. Na čtverečkovaný papír se čtverci o stranách 4 cm se hodí mince o průměru 2,5 cm. Jaká je pravděpodobnost, že hozená mince je celá částí jednoho ze čtverců sítě?

3. kapitola

PRVNÍ POZNATKY Z KOMBINATORIKY ANEB DALŠÍ POZNATKY O MNOŽINÁCH

3.1. Dvouprvková kombinace

Je dána konečná množina M, která má aspoň dva prvky. Pak každá její podmnožina o dvou prvcích se jmenuje

DVOUPRVKOVÁ KOMBINACE MNOŽINY M.

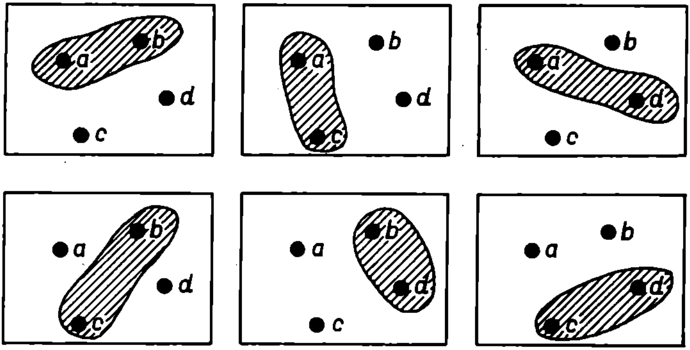
Slovo „kombinace" užíváme z historických důvodů. Místo dvouprvkové kombinace můžeme říkat dvouprvková podmnožina.

PŘÍKLAD

Je dána množina $M = \{a, b, c, d\}$ o čtyřech prvcích. Všecky její dvouprvkové kombinace jsou: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$. Na obrázku 61 jsou příslušné Vennovy diagramy.

Systém, podle kterého jsou vybírány všecky dvouprvkové kombinace z množiny M, ukazuje schéma z obrázku 62.

Stručně řečeno: ke každému z prvků a, b, c, d přidružíme postupně všecky prvky, které stojí za ním v zápisu množiny výčtem. Tentýž systém znázorňuje tabulka 1 s dvěma přístupy.



Obr. 61

Tabulka 1

	a	*b*	*c*	*d*
a	/////	*ab*	*ac*	*ad*
b	/////	/////	*bc*	*bd*
c	/////	/////	/////	*cd*
d	/////	/////	/////	/////

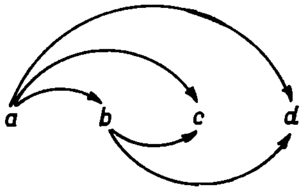
Tabulka 2

a	*b*	*c*	*d*
/	/	—	—
/	—	/	—
/	—	—	/
—	/	/	—
—	/	—	/
—	—	/	/

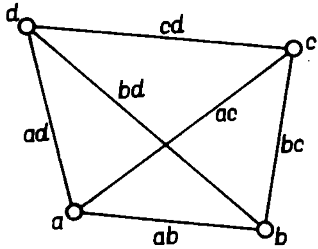
Vyšrafovaná pole se nesmějí vyplňovat. Někdy používáme též tabulky 2.

Jiný postup je tento: Sestrojíme čtyři body (nejvýhodnější je, neleží-li žádné tři z nich v přímce) a každé dva z nich spojíme jednou čarou (úsečkou). Krajní body těchto úseček udávají dvouprvkové kombinace (obr. 63).

> *Počet všech dvouprvkových kombinací množiny* M *o* n *prvcích* ($n \geqq 2$) *je* $n(n-1) : 2 = \frac{1}{2} n(n-1)$.



Obr. 62



Obr. 63

Tento vzorec lze odvodit pro libovolné $n \geqq 2$ z náčrtku podobného náčrtku z obrázku 63. Každý z n bodů spojíme s $n-1$ zbývajícími; tak dostaneme $n(n-1)$ spojnic. Každá z těchto spojnic byla však počítána dvakrát; proto je počet spojnic jen $n(n-1) : 2$, tj. počet dvouprvkových kombinací.

Následující tabulka udává čísla $\frac{1}{2} n(n-1)$ pro některá $n \geqq 2$.

n	2	3	4	5	6	7	8	...
$\frac{1}{2} n(n-1)$	1	3	6	10	15	21	28	...

Poznámka: Číslo $n(n-1):2$ je vždy přirozené, neboť právě jedno z čísel n, $n-1$ je sudé a proto i součin $n(n-1)$ je sudý.

PŘÍKLAD

Každá dvě z n měst jsou spojena leteckou linkou Kolik z těchto linek nevychází z jednoho z těchto měst?

Jsou to právě všecky linky, které spojují zbývajících $n-1$ měst (po dvou). Počet těchto leteckých linek je $(n-1)(n-2):2$.

Tento výsledek dostaneme, když ve vzorci $n(n-1):2$ píšeme místo n číslo $n-1$ a ovšem místo $n-1$ číslo $n-2$.

Pamatujte názvy:

kombinace množiny,
dvouprvková kombinace množiny.

CVIČENÍ

1. Přátelé A, B, C, D se loučí. Každý dva si podají ruku. Kolik stisků ruky si navzájem vymění?

a) Udělejte si náčrtek. Přátele si zakreslete jako body na kružnici a každé podání ruky vyznačte úsečkou.

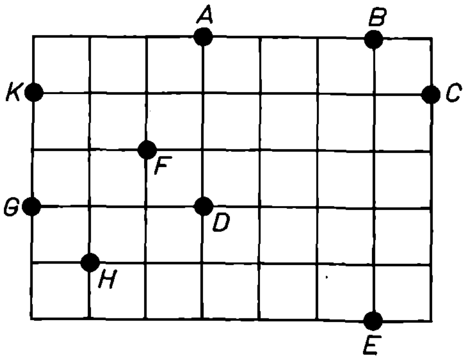
b) Vypište všechny dvojice přátel podávajících si ruku.

2. Jsou dány délky $a = 2$; $b = 4$; $c = 3$; $d = 2{,}5$. Vypočtěte obsahy všech obdélníků, jejichž rozměry jsou některá z uvedených čísel. Uspořádejte tyto obdélníky podle velikosti.

3. a) Na mapě je devět vesnic A, B, C, D, E, F, G, H, K. Má se sestrojit co nejkratší komunikační síť spojující všech devět vesnic. Přitom se smí rozvětvovat jen na vesnicích. (Obr. 64).

Řešte úlohu nejdříve zkusmo a pak teprve pro kontrolu užijte postupu:

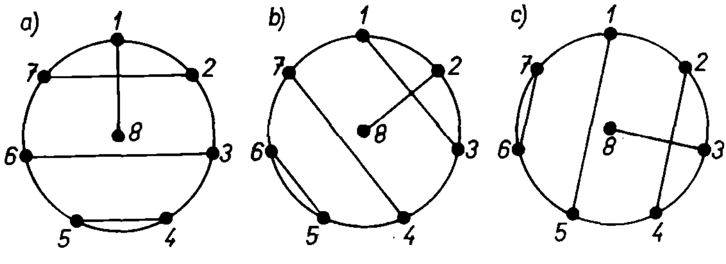
1) Spojte každé místo úsečkou s nejbližším dalším místem.



Obr. 64

2) Jestliže vznikne nesouvislá síť složená z několika souvislých částí, najděte pro každou z nich nejkratší možné spojení s jinou částí. (Takto postupujte tak dlouho, dokud nedostanete souvislou síť.)

b) „Naplánujte" nejvhodnější spojení pro okresní města vašeho kraje. (Potřebujete mapu.)



Obr. 65

4. Rozpis turnaje pro 8 hráčů (hraje každý s každým). Hráče označíme čísly 1, 2, ..., 8 a užijeme schemat (obr. 65).

1. kolo: $1 + 8$ $\quad \underbrace{2 + 7,\ 3 + 6,\ 4 + 5}_{\text{při dělení číslem 7 je zbytek 2}}$

2. kolo: $2 + 8$ $\quad \underbrace{3 + 1,\ 4 + 7,\ 5 + 6}_{\text{při dělení číslem 7 je zbytek 4}}$

3. kolo: $3 + 8$ $\quad \underbrace{4 + 2,\ 5 + 1,\ 6 + 7}_{\text{při dělení číslem 7 je zbytek 6}}$

atd.

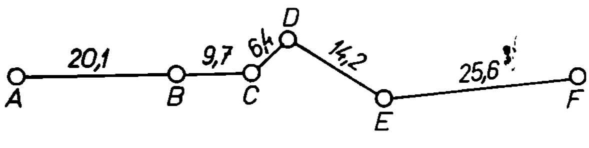
Dokončete rozpis turnaje sami:

5. a) Na obrázku 66 je úsek železniční trati s místy A, B, C, D, E, F a vyznačenými vzdálenostmi v km. Zapište do tabulky vzdálenosti každých dvou míst (v tabulce na obr. 67 je již uvedena vzdálenost míst B, D).

b) Ukažte, že množina $\boldsymbol{M} = \{A, B, C, D, E, F\}$ má $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ dvouprvkových kombinací.

c) Podobně jako v úloze **b)** ukažte, že množina o sedmi prvních má $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ dvouprvkových kombinací.

6. a) Jsou dána čtyři různá přirozená čísla $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 8$. Vypočítejte kladné rozdíly každých dvou z těchto čísel. Vypočtěte dále součin všech těchto rozdílů. Výsledek bude násobkem čísla 12. Přesvědčte se!



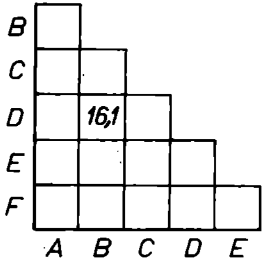
Obr. 66

b) Úlohu opakujte pro jinou čtveřici čísel a, b, c, d.

c) Zvolte ještě jednou čísla a, b, c, d, a to tak, aby výsledný součin byl co nejmenší.

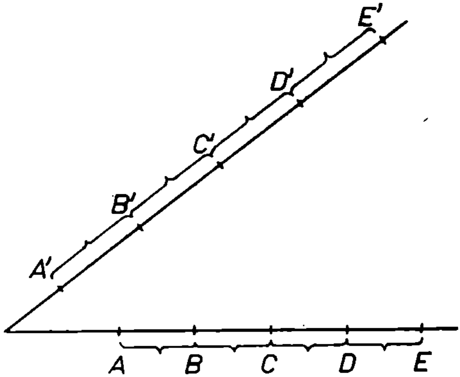
7. Která z číslic 0, 1, ..., 9 se nejčastěji vyskytne v zápisech všech přirozených čísel od 1 do 99?

8. Hází se dvěma hracími kostkami, čísla, která padnou, se sčítají. Která čísla tak můžeme dostat? Která z těchto čísel lze získat nejvíce způsoby?



Obr. 67

9. Nové vozy tramvaje se spřahují v tzv. dvojčata. Ve vozovně je 60 vozů. Kolika způsoby je lze spřáhnout ve dvojčata? (Pozor, záleží na tom, který vůz je první a který druhý.)



Obr. 68

10. Můj přítel má telefonní číslo 435 84 95. Při vytáčení tohoto čísla jsem se zmýlil při volbě dvou číslic. Kolik telefonních čísel (chybných) jsem mohl tak vytočit?

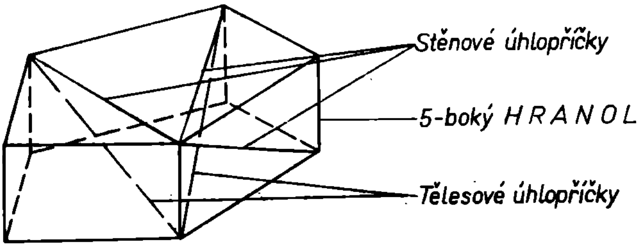
11. a) Na obrázku 68 sestrojte průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Při přesném rýsování leží tyto průsečíky na jedné přímce.

b) Sestrojte průsečíky úhlopříček všech čtyřúhelníků

$\underline{AB}B'A'$, $\underline{AC}C'A'$, $\underline{AD}D'A'$, $\underline{AE}E'A'$, $\underline{BC}C'B'$, ...

(Kolik takových čtyřúhelníků je, jestliže podtržená písmena tvoří dvojprvkové kombinace množiny bodů A, B, C, D, E.) Co pozorujete?

12. Na obrázku 69 je znázorněn 5boký hranol. Vypočítejte, kolik má stěnových a kolik tělesových úhlopříček. (Můžete počítat různými způsoby.)



Obr. 69

13. Doplňte tabulku (n je počet vrcholů n-úhelníka, p je počet jeho úhlopříček):

n	6	8	*)	12	*)	15	*)	22
p			10		60		120	

*) Odhadněte a pak odhad kontrolujte výpočtem.

14. Do roku 1968 hrálo v nejsilnější skupině MS v ledním hokeji 8 mužstev. Turnaj byl jednokolový. Od roku 1969 hraje v nejsilnější skupině MS v ledním hokeji 6 mužstev; turnaj je však dvoukolový.

a) Kolik zápasů se sehrálo dříve a kolik nyní v boji o titul MS?

b) Kolik zápasů sehrálo každé mužstvo dříve a kolik nyní?

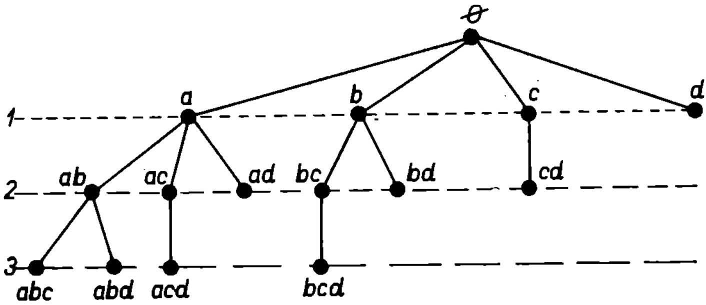
3.2. Kombinace k-prvkové

Je dána konečná množina $M \neq \emptyset$, která má n prvků a dále přirozené číslo $k \leq n$. Každou podmnožinu $M_k \subset M$, která má k prvků, nazveme

k — PRVKOVOU KOMBINACÍ MNOŽINY M.

Speciálně: pro $k = 0$, je $M_0 = \emptyset$, pro $k = n$ je $M_n = M$.

Jak utvoříme tříprvkové kombinace z dvouprvkových? Budeme postupovat jako při tvoření dvouprvkových kombinací tak, že prvky každé kombinace budou v „základním uspořádání". Je dána čtyřprvková množina $M = \{a, b, c, d\}$. Jednoprvkové, dvouprvkové a tříprvkové kombinace zapíšeme pomocí stromu logic-



Obr. 70

kých možností (složené závorky pro jednoduchost vynecháváme); viz obr. 70.

Na linkách 1, 2, 3 jsou zapsány všecky jednoprvkové, dvouprvkové a tříprvkové kombinace množiny M.

Pro pětiprvkovou množinu $M = \{a, b, c, d, e\}$ sestavíme příslušný strom logických možností podle obrázku 71.

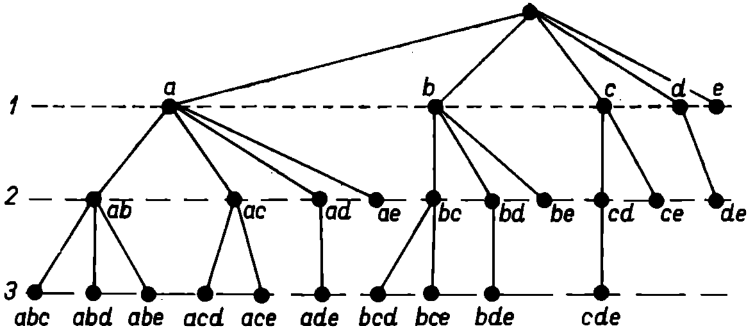
Množinu všech tříprvkových kombinací množiny M můžeme udat tabulkou:

a	b	c	d	e
/	/	/	—	—
/	/	—	/	—
/	/	—	—	/
/	—	/	/	—
/	—	/	—	/
/	—	—	/	/
—	/	/	/	—
—	/	/	—	/
—	/	—	/	/
—	—	/	/	/

Je-li C_k libovolná k-prvková kombinace množiny M, pak její doplněk $C'_k = C_{n-k}$ je $(n - k)$ — prvkovou kombinací množiny M. Kombinace C_{n-k} se nazývá

DOPLŇKOVÁ KOMBINACE KE KOMBINACI C_k.

Zřejmě je také C_k doplňková kombinace k C_{n-k}. Proto říkáme někdy, že C_k, C_{n-k} jsou



Obr. 71

KOMBINACE NAVZÁJEM DOPLŇKOVÉ

Jsou tedy $C_0 = \emptyset$ a $M = C_n$ navzájem doplňkové kombinace.

PŘÍKLAD

$M = \{a, b, c, d, e\}$. V následující tabulce jsou uvedeny všechny dvouprvkové kombinace a k nim doplňkové tříprvkové.

Dvouprvková kombinace	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	*be*	*bd*	*be*	*cd*	*ce*	*de*
K ní doplňková tříprvková kombinace	*cde*	*bde*	*boe*	*bcd*	*acd*	*ace*	*acd*	*abe*	*abd*	*abc*

PŘÍKLAD

Z šesti žáků (Mirek, Jan, Karel, Věra, Dana, Helena) máme sestavit všecky čtveřice, v nichž není Karel, ale je Dana.

Žáci tvoří množinu $\mathbf{Z} = \{M, J, K, V, D, H\}$ (počáteční písmena jejich jmen). Hledané čtveřice musíme vybírat jen ze čtyřprvkových kombinací množiny $\{M, J, V, D, H\}$, tj. doplňku množiny $\{K\}$.

$$MJVD,\ \underline{MJVH},\ MJDH,\ MVDH,\ JVDH.$$

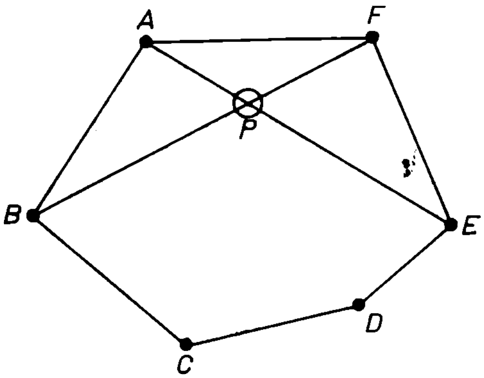
Z nich jen druhá (podtržená) neobsahuje D; řešením jsou tedy čtyři zbývající.

Pamatujte názvy:

k-prvková kombinace množiny;
doplňková kombinace (k dané kombinaci).

CVIČENÍ

1. Potřebujeme po 10 kusech mincí v hodnotách 5h, 10h, 25h, 50h, 1 Kčs. Které částky lze zaplatit **a)** dvěma, **b)** třemi různými mincemi? Sestavte všechny možnosti.

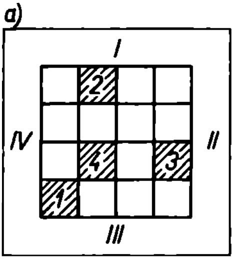


Obr. 72

2. Narýsujte 6-úhelník $ABCDEF$ podle obrázku 72. Každé čtveřici vrcholů 6-úhelníka odpovídá jediný průsečík přímek. Např.:

$$\{A, B, E, F\} \longleftrightarrow P$$

Využijte toho k sestavení všech 4-prvkových kombinací množiny $M = \{A, B, C, D, E, F\}$.



Obr. 73a

b)

I	Ť	R	P
B	!	L	K
E	I	E	Ž
A	A	U	J

Obr. 73b

c)

1	2	3	1
3	4	4	2
2	4	4	3
1	3	2	1

Obr. 73c

3. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e, f\}$. Pomocí stromu logických možností udejte všecky tříprvkové kombinace v abecedním pořádku.

4. a) Kódovací tabulka. Narýsujte podle obrázku 73a kódovací tabulku a vystřihněte ji. Vyřízněte z ní též vyšrafovaná políčka. Pomocí tabulky přečtěte zašifrovaný text z obrázku 73b. Postupujte tak, že k hornímu okraji šifrovaného textu přiložte postupně strany kódovací tabulky označené I, II, III, IV a vždy přečtěte po řadě písmena v okénkách 1, 2, 3, 4.

b) Vytvořte sami jiné kódovací tabulky. Vždy se vystřihne po jednom poli označeném na obr. 73c čísly 1, 2, 3, 4. Odůvodněte! Zjistěte, kolik lze sestavit takových tabulek.

5. V garáži je umístěno 7 autobusů, z nichž čtyři musí jezdit na linkách, zbývající zůstávají doma. Označte autobusy a vypište do tabulky všecky čtveřice autobusů, které garážmistr může vypravit a všecky trojice, které zůstanou doma.

6. Číslo 2 310 lze napsat jako součin $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$; přesvědčte se! Vypište do tabulky všecky dělitele čísla 2 310, které jsou součiny dvou různých čísel množiny $M = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Vypište pomocí toho všecky dělitele čísla 2 310, které jsou součiny tří čísel z M.

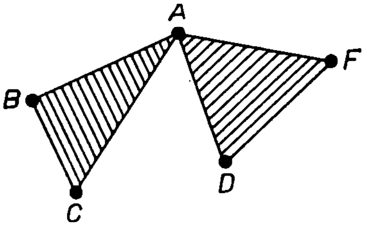
Dvojice	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 5$	$2 \cdot 7$	...	$7 \cdot 11$
Trojice			$3 \cdot 5 \cdot 11$	...	

Který ze součtů dvou čísel stojících v tabulce nad sebou je **a)** největší; **b)** nejmenší?

7. Všechny 3-prvkové kombinace množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rozdělte na 4 podmnožiny M_0, M_1, M_2, M_3 podle toho, zda neobsahují 1 nebo 2 či 3 sudá čísla. Která z nich má nejvíce prvků?

8. Ze 6 hráčů se mají postavit 2 tříčlenná družstva. Kolika způsoby se to může provést?

9. Zvolte si 5 bodů A, B, C, D, E, z nichž žádné 3 neleží v přímce. Každá trojice bodů vybraná ze zvolených bodů určuje trojúhelník. Na obrázku 74 jsou znázorněmy dva trojúhelníky.



Obr. 74

a) Určete výčtem množinu M všech takto vzniklých trojúhelníků.

b) Změřte obvody všech trojúhelníků množiny M. Trojúhelníky seřaďte podle velikosti obvodů.

10. a) Zjistěte, kolik různostranných trojúhelníků lze sestrojit z úseček

$$a = 4{,}8 \text{ cm}, \quad b = 1{,}8 \text{ cm}, \quad c = 3{,}6 \text{ cm},$$
$$d = 7{,}3 \text{ cm}, \quad e = 6{,}0 \text{ cm}, \quad f = 8{,}1 \text{ cm}.$$

(Trojúhelník o stranách a, b, c ($a \geqq b \geqq c$) lze sestrojit právě tehdy, jestliže platí

$$b + c > a\,,$$

tzn. součet dvou kratších stran je větší než zbývající třetí strana.)

b) Kolik trojúhelníků lze sestrojit celkem?

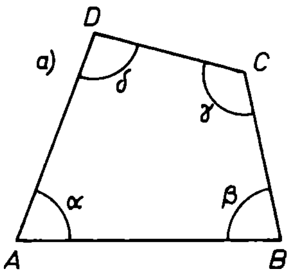
c) Určete pravděpodobnost, že z libovolně zvolených tří stran ze cvičení **a)** lze sestrojit trojúhelník.

11. a) Roztřiďte trojúhelníky ze cvičení **10. b)** na pravoúhlé, ostroúhlé a tupoúhlé.

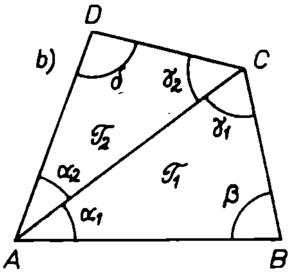
(Trojúhelník o stranách a, b, c ($a \geqq b \geqq c$) je pravoúhlý, resp. ostroúhlý, resp. tupoúhlý, jestliže platí

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \textit{resp. } a^2 < b^2 + c^2, \quad \textit{resp. } a^2 > b^2 + c^2.)$$

b) Jaká je pravděpodobnost, že libovolný trojúhelník z cvičení **10. b)** je pravoúhlý, ostroúhlý, tupoúhlý.



Obr. 75a



Obr. 75b

12. a) Pro vnitřní úhly konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 75a) platí: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Správnost ověřte buď měřením, nebo pomocí obrázku 75b takto:

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \beta = \underline{\qquad\qquad},$$
$$\underline{\alpha_2 + \delta + \gamma_2 = \underline{\qquad\qquad},}$$

Sečtením dostaneme

$$\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\alpha} + \beta + \underbrace{(\gamma_1 + \gamma)}_{\gamma} + \delta = \underline{\qquad\qquad}.$$

b) Vyhledejte všechny trojice úhlů množiny $M = \{29°, 95°, 132°, 44°, 113°\}$, které jsou vnitřní úhly téhož konvexního čtyřúhelníku.

Řešení zapisujte do tabulky:

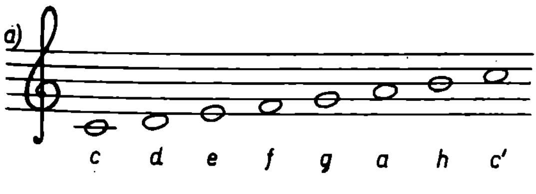
Vzor:

29°	95°	132,	44°	113,	4. úhel	
/	/	/	—	—	360° — (29° + 95° + 132°) = 104° < 180°	ano
/	/	—	/	—	360° — (29° + 95° + 44° = 192° > 180°	ne*)

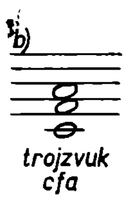
*) Velikost každého vnitřního úhlu konvexního čtyřúhelníka je menší než 180°.

13. Výtah je maximálně pro 3 osoby. Před výtahem stojí společnost šesti lidí, která se chce dopravit dvěma jízdami do 4. patra. Kolika různými způsoby lze dopravu provést? (Je-li známa posádka 1. jízdy, je tím určena posádka 2. jízdy.) Způsoby zapište do tabulky.

14. Je dána stupnice *c - dur*, tj. *c, d, e, f, g, a, h, c'* (obr. 76a). Na obrázku 76b je znázorněn trojzvuk *cfa*. Sestavte do tabulky všechny trojzvuky, které neobsahují sekundu (tj. dva „sousední" tóny).



Obr. 76a

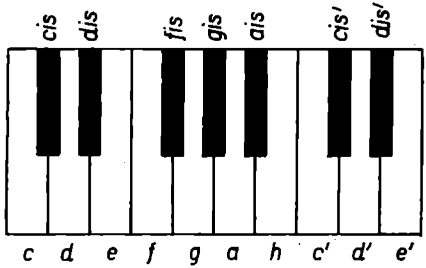


Obr. 76b

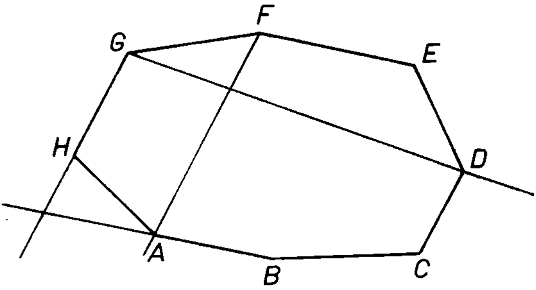
Vzor:

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	*c'*
/	—	/	—	/	—	—	—
/	—	/	—	—	/	—	—

15. Kolik různých 3-zvuků (4-zvuků) lze zahrát na klávesnici z obrázku 77.



Obr. 77



Obr. 78

16. Na obrázku 78 je znázorněn 8-úhelník *ABCDEFGH*.
a) Kolik přímek je určeno jeho vrcholy?
b) Označme ***Z*** množinu průsečíků všech přímek z úlohy

a). Kolik má množina Z nejvýše prvků?

c) Označme $V_1 = \{X \in Z \mid X$ je vně 8-úhelníka$\}$,
$V_2 = \{X \in Z \mid X$ je vrchol 8-úhelníka$\}$,
$V_3 = \{X \in Z \mid X$ je uvnitř 8-úhelníka$\}$.

Pokuste se zjistit kolik nejvýše prvků mají množiny V_1 a V_3.

3,3. Kombinační čísla

Počet všech k-prvkových kombinací dané n-prvkové množiny označíme symbolem

$$\binom{n}{k}$$

POČET PRVKŮ DANÉ MNOŽINY

POČET PRVKŮ KOMBINACE

čte se „n nad k“ (např. „pět nad dvěma“). Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá

KOMBINAČNÍ ČÍSLO.

Symbol $\binom{n}{k}$ není zlomek $\frac{n}{k}$. Závorky nesmíme vynechat. Zlomkovou čáru nepíšeme.

Zřejmě je $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ pro každé přirozené číslo $n \geqq 1$. Z definice doplňkových kombinací a z jejich vytvoření plyne vzorec

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

PŘÍKLAD

Množina $\boldsymbol{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ má šest prvků. Všechny její dvouprvkové kombinace jsou:

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Všechny její čtyřprvkové kombinace jsou:

3456, 2456, 2356, 2346, 2345, 1456, 1356, 1346, 1345, 1256, 1246, 1245, 1236, 1235, 1234.

Je tedy $\binom{6}{2} = 15$ i $\binom{6}{4} = 15$, tj. $\binom{6}{2} = \binom{6}{6-2}$.

Všimněte si, jakým způsobem byly vytvořeny čtyřprvkové kombinace pomocí dvouprvkových.

PŘÍKLAD

Množina $\boldsymbol{M}$ má 32 prvků; máme zjistit počet všech jejích 30prvkových kombinací.

Protože je $\binom{32}{30} = \binom{32}{32-30} = \binom{32}{2}$, je hledaný počet roven počtu dvouprvkových kombinací. Jejich počet je — jak známo — $(32 \,.\, 31) : 2 = 992 : 2 = 496$.

Kombinační čísla pro malá n, k udává tabulka, zvaná ***Pascalovo*** (čti Paskalovo) ***schéma***.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66

Pascalovo schéma je tvořeno podle tohoto výtvarného předpisu (klíče):

a	b
	$a+b$

První sloupec tabulky obsahuje vesměs čísla 1, každý řádek se skládá z čísel uspořádaných souměrně „podle středu", např.:

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

Poslední číslo v každém řádku je také 1.

Zapíšeme-li výtvarný předpis Pascalova schématu kombinačními čísly, dostaneme vzorec

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

je to tzv.

SOUČTOVÝ VZOREC PRO KOMBINAČNÍ ČÍSLA

PŘÍKLAD

Ověříme si součtový vzorec pro $n = 4$, $k = 2$. Číslo $\binom{5}{3}$ je počet všech tříprvkových kombinací pětiprvkové množiny

$$\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e\}$$

Tyto kombinace tvoří množinu $\boldsymbol{K}$. Utvoříme rozklad množiny $\boldsymbol{K}$ na dvě třídy $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ (viz obr. 79):

$\boldsymbol{K}_1$ je množina všech tříprvkových kombinací množiny $\boldsymbol{M}$, které obsahují prvek e.

$\boldsymbol{K}_2$ je množina všech tříprvkových kombinací množiny $\boldsymbol{M}$, které neobsahují prvek e.

$\boldsymbol{K}_1$ můžeme vytvořit takto: sestrojíme všecky dvouprvkové kombinace množiny $\{a, b, c, d\}$ — (množina $\boldsymbol{M}$ bez prvku e), tj.

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

a připojíme k nim prvek e; je tedy

$$\boldsymbol{K}_1 = \{abe, ace, ade, bce, bde, cde\}.$$

Počet prvků množiny $\boldsymbol{K}_1$ je tedy $\binom{4}{2}$.

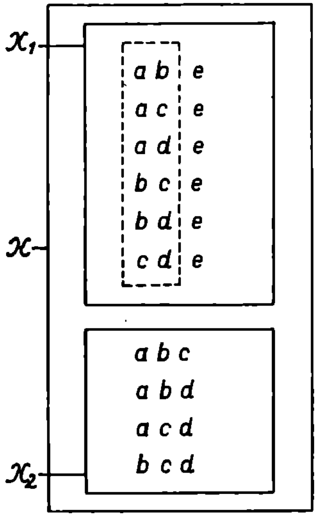
$\boldsymbol{K}_2$ je množina tříprvkových kombinací množiny $\{a, b, c, d\}$, tj.

$$\boldsymbol{K}_2 = \{abc, abd, acd, bcd\} ;$$

jejich počet je $\binom{4}{3}$.

Počet prvků množiny $\boldsymbol{K}$ dostaneme sečtením počtu prvků tříd $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$, tj. $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$. Je tedy skutečně $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, jak říká součtový vzorec.

Diagramem znázorníme množiny $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$, $\boldsymbol{K}$ např. takto (obr. 79):



Obr. 79

PŘÍKLAD

Házíme šesti různými mincemi. Máme určit pravděpodobnost, že padne aspoň na dvou mincích líc.

Počet možných výsledků udává tabulka

Počet líců na mincích	0	1	2	3	4	5	6
Počet možností	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

Celkem je možností

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} =$$

$$= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64.$$

Počet možností, při nichž nastane požadovaný jev

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64 - \binom{6}{0} - \binom{6}{1} = 57$$

Hledaná pravděpodobnost je

$$p = \frac{57}{64} \doteq 0,89 = 89\ \%.$$

Pamatujte název a zápis:

kombinační číslo; $\binom{n}{k}$.

CVIČENÍ

1. Které z čísel $\binom{4}{1}$, $\binom{3}{2}$ je větší?

2. Odůvodněte, proč je číslo $\binom{n}{k} + \binom{n}{n-k}$ sudé.

3. Užitím kombinačních čísel zapište počet

a) různých typů ve Sportce (v Matesu);

b) různých trojúhelníků, jejichž vrcholy splývají s některými třemi body z daných n bodů, z nichž žádné 3 neleží na přímce;

c) průsečíků n přímek, z nichž žádné 3 neprocházejí týmž bodem.

4. Kolika způsoby lze udělat chybu v umístění aspoň jedné oddělující čárky v souvětí: „Myslím, že člověka, který přišel, znám".

5. a) První poločas fotbalového zápasu skončil za stavu 4 : 3. Pořadí branek, které střelili hosté (H) a domácí (D) bylo toto:

H	D	D	H	D	H	D
1	2	3	4	5	6	7

Všimněte si, že dosavadní průběh utkání lze charakterizovat 4-prvkovou kombinací {2, 3, 5, 7} množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $(7 = 4 + 3)$.

Kolika různými způsoby mohl zápas v 1. poločase probíhat při stejném výsledku?

b) Kolika způsoby mohl probíhat celý zápas, jestliže byl výsledek 7 : 5 (poločas 4 : 3).

6. a) Znáte Pascalovo schéma. Řádky očíslujte podle schématu. Ve 3. řádku jsou vesměs lichá čísla. Určete nejbližší 2 řádky téže vlastnosti.

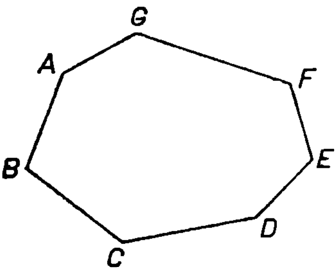
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b) Úlohu můžete řešit rychleji podle schématu. Dovedete to vysvětlit?

L
L L
L S L
L L L L
L S S S L

7. a) V Pascalově schématu nahraďte každé číslo zbytkem, který vznikne při dělení tohoto čísla třemi.

b) Jsou v některém řádku Pascalova schématu všechna „vnitřní" čísla přirozené násobky tří?



Obr. 80

8. Na obrázku 80 je 7-úhelník;

a) Kolik má úhlopříček?

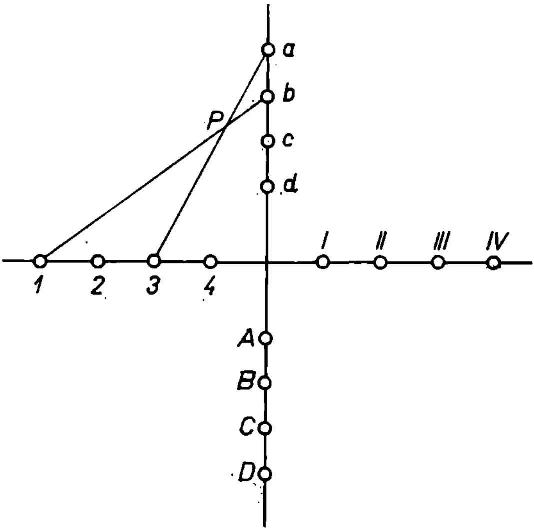
b) Kolik přímek je určeno těmito body?

c) V kolika bodech se protínají přímky omezující 7-úhelník?

9. Pro přijetí návrhu hlasovalo 8 členů komise z 11 přítomných. Kolika různými způsoby se mohlo v komisi hlasovat pro a proti?

10. Každý bod (obr. 81) na vodorovné přímce lze spojit úsečkou s každým bodem na svislé přímce. Kolik vznikne průsečíků?

Všimněte si, že průsečík P na obrázku 81 je určen dvěma 2-prvkovými kombinacemi: Jsou to kombinace $\{1, 3\}$ množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a kombinace $\{a, b\}$ množiny $M = \{a, b, c, d\}$.



Obr. 81

11. Z deseti vybraných žáků dostalo z písemky známky

1 .... 3 žáci
2 .... 5 žáků
3 .... 2 žáci

Kolika způsoby se to může stát?

12. Vypočtěte podle součtového vzorce:

a) $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, c) $\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3}$,

b) $\binom{30}{28} + \binom{30}{27}$, d) $\binom{10}{4} + \binom{10}{3}$.

13. Sestavte všechny 3-prvkové kombinace množiny $M = \{1, 2, \ldots, 6\}$, které

a) obsahují číslo 1,
b) obsahují číslo 1 a neobsahují číslo 2,
c) obsahují aspoň jedno z čísel 1, 2.

14. Vyjádřete jediným kombinačním číslem a pak tato čísla najděte v tabulce na str. 109.

a) $\binom{4}{1} + 2\binom{4}{2} + \binom{4}{3} =$

b) $\binom{6}{3} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} =$

c) $\binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} =$

d) $\binom{13}{4} - \binom{12}{3} + \binom{12}{5} =$

e) $\binom{10}{3} + \binom{10}{6} =$

f) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} =$

g) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \binom{6}{3} + \binom{7}{4} =$

15. Zjistěte, kolika způsoby lze ve schematech

P
R R
A A A
H H H H
A A A A A

B
R R
A A A
T T T T
I I I I I
S S S S S S
L L L L L L L
A A A A A A A A
V V V V V V V V V
A A A A A A A A A A

přečíst slova „Praha", „Bratislava". Čte se slovo dolů ve dvou možných směrech udanými šipkami; při každém kroku máte tedy možnost volby mezi dvěma písmeny.

16. Házíte n mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že padne k-krát líc. Vypočítejte pro tyto údaje:

a) $n = 5$, $k = 3$; b) $n = 7$, $k = 4$; c) $n = 8$, $k \leq 4$;

17. U stolu sedí 3 lidé. Každý z nich si myslí některé z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jaká je pravděpodobnost, že si aspoň dva lidé myslí stejné číslo. (Pravděpodobnost volby všech čísel 1 až 6 je stejná.)

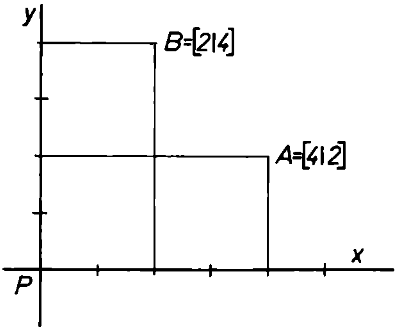
18. Ukažte, že ve skupině lidí musí být aspoň 5 osob, abychom měli zaručenu minimálně 50 % pravděpodobnost, že jsou mezi nimi dvě osoby narozené v témže měsíci.

3.4. Kartézský součin dvou množin

USPOŘÁDANÁ DVOJICE je dvojice předmětů (prvků), kde záleží na tom, který předmět (prvek) je první, a který druhý.

PŘÍKLADY

a) Uspořádaná dvojice Jan — Jiří je jiná, než uspořádaná dvojice Jiří — Jan. (Např. uspořádaná dvojice



Obr. 82

Jan — Jiří může znamenat, že Jan vstoupil do místnosti před Jiřím.)

b) První a druhá souřadnice bodu A tvoří uspořádanou dvojici [4 | 2]. Uspořádaná dvojice [2 | 4] je jiná (obr. 82).

c) Ze dvou totožných prvků můžeme utvořit jen jednu uspořádanou dvojici; např. Jan — Jan, [3 | 3], K K ap.

KARTÉZSKÝ SOUČIN množin $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{b, c, d\}$ je množina uspořádaných dvojic

$$ab,\ ac,\ ad,\ bb,\ bc,\ bd\ ;$$

Zapisujeme:

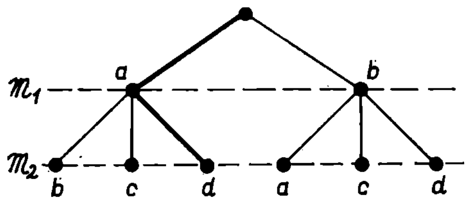
$$M_1 \times M_2 = \{ab, ac, ad, bb, bc, bd\}\ .$$

Říkáme, že tvoříme ***kartézský součin***, nebo že ***množiny kartézsky násobíme.***

Kartézský součin lze přehledně udat tabulkou se dvěma vstupy:

$M_1 \times M_2$	$M_1 \backslash M_2$	b	c	d
	a	ab	ac	ad
	b	bb	bc	bd

Kartézský součin $M_1 \times M_2$ lze udat pomocí „klesa-



Obr. 83

jících cest“ ve stromu logických možností (obr. 83, kde tlustě vytažená „cesta“ značí uspořádanou dvojici *ad*).

PŘÍKLAD

V češtině se uvádí na prvním místě rodné jméno, na druhém místě příjmení. Která jména lze sestavit z rodných jmen Jan, Jiří a z příjmení Suchý, Novák, Vodička?

$M_1 = \{\text{Jan, Jiří}\}$,
$M_2 = \{\text{Suchý, Novák, Pavel}\}$;

$M_1 \times M_2$	$M_1 \backslash M_2$	Suchý	Novák	Pavel
	Jan	Jan Suchý	Jan Novák	Jan Pavel
	Jiří	Jiří Suchý	Jiří Novák	Jiří Pavel

V tomto případě nemá množina $M_2 \times M_1$ význam. (V češtině nepíšeme Novák Jan.)

PŘÍKLAD

a) $M_1 = \{1, 3, 5\}$, $M_2 = \{2, 4, 6\}$.

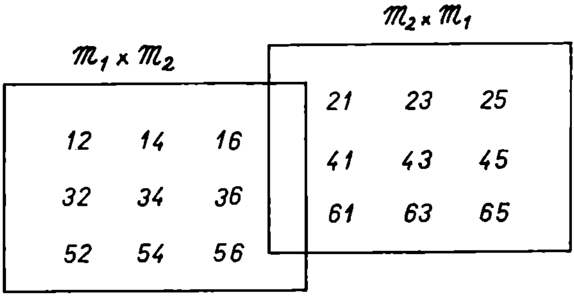
$M_1 \times M_2$	$M_1 \backslash M_2$	2	4	6
	1	12	14	16
	3	32	34	36
	5	52	54	56

$M_2 \times M_1$	$M_2 \backslash M_1$	1	3	5
	2	21	23	25
	4	41	43	45
	6	61	63	65

Tedy:

$M_1 \times M_2 = \{12, 14, 16, 32, 34, 36, 52, 54, 56\}$,
$M_2 \times M_1 = \{21, 23, 25, 41, 43, 45, 61, 63, 65\}$.

Množiny $M_1 \times M_2$, $M_2 \times M_1$, jsou dokonce bez společných prvků (viz diagram na obr. 84).

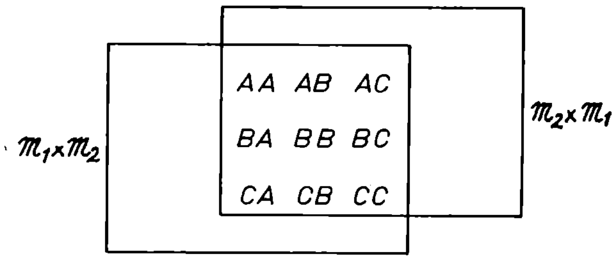


Obr. 84

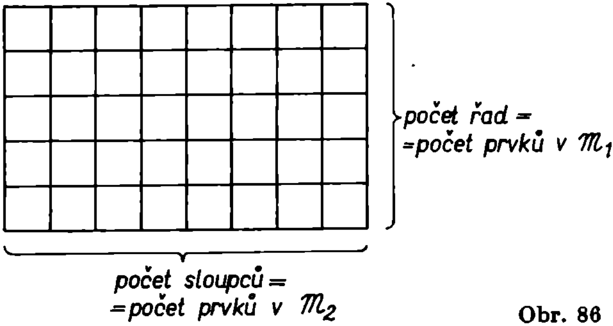
b) $M_1 = M_2 = \{A, B, C\}$;

$M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1 = \{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}$.

Pro konečné množiny M_1, M_2 můžeme zapsat prvky kartézského součinu $M_1 \times M_2$ do pravoúhlé tabulky.



Obr. 85



Obr. 86

Proto pro konečné množiny platí:

Množina	Počet prvků množiny	Například (viz obr. 86)
$\boldsymbol{M_1}$	n_1	$n_1 = 5$
$\boldsymbol{M_2}$	n_2	$n_2 = 8$
$\boldsymbol{M_1} \times \boldsymbol{M_2}$	$n_1 . n_2$	$n_1 . n_2 = 40$

Údaje z pravého sloupce tabulky si můžete ověřit sami též pomocí stromu logických možností.

PŘÍKLAD

Kartézský součin nekonečných množin:

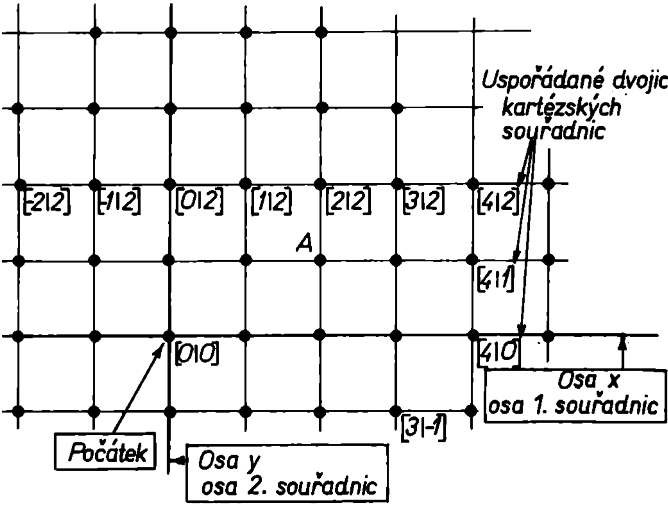
$\boldsymbol{C} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\ldots\}$.

$\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ je množina uspořádaných dvojic

KARTÉZSKÝCH SOUŘADNIC

bodů; obě jejich souřadnice jsou celá čísla.

C \ C	0	+1	—1	+2	—2	+3
0	[0 | 0]	[0 | 1]	[0 | –1]	[0 | 2]	[0 | —2]	...
+1	[1 | 0]	[1 | 1]	[1 | –1]	[1 | 2]	[1 | –2]	...
—1	[–1 | 0]	[–1 | 1]	[–1 | –1]	[–1 | 2]	[–1 | –2]	...
+2	[2 | 2]	[2 | 1]	[2 | –1]	[2 | 2]	[2 | –2]	...
—2	[–2 | 0]	[–2 | 1]	[–2 | –1]	[–2 | 2]	[–2 | –2]	...
+3	...	...	...	...	...	...



Obr. 87

Bod A na obrázku 87 má souřadnice 2 a 1; píšeme:

$$A = [2 \mid 1]$$

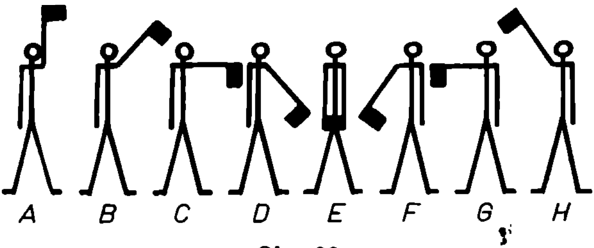
1. souřadnice (souřadnice x)   2. souřadnice (souřadnice y)

Pamatujte názvy:

kartézský součin dvou množin,
kartézské násobení množin,
uspořádaná dvojice.

CVIČENÍ

1. Při signalisování jedním černým praporkem lze vyslat osm znaků (obr. 88).



Obr. 88

Kolik znaků můžete vyslat při signalisování dvěma praporky — černým a bílým? (Polohy bílého praporku značte písmeny $a, b, \ldots, h$).

Vypište přehledně všechny různé signály:

Např.: Aa Ab Ac
Ba Bb Bc atd.

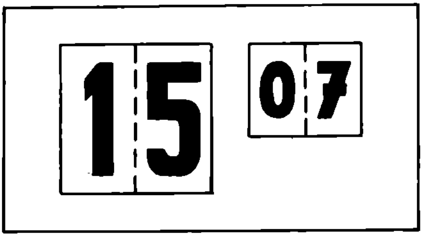
2. Novější typy veřejných hodin jsou „číslicové“ (obr. 89).

Ve větším okénku jsou údaje o hodinách — jde o prvky množiny $H = \{00, 01, 02, \ldots, 23\}$.

V menším okénku jsou údaje o minutách — jde o prvky množiny $M = \{00, 01, 02, \ldots, 59\}$.

a) Kolik časových údajů hodiny ukazují? Zapište některé z nich; např. 15 - 07 značí 15 hodin 7 minut.

b) Vypište všechny časové údaje, které udávají půlhodiny a celé hodiny. Uspořádejte je do tabulky.



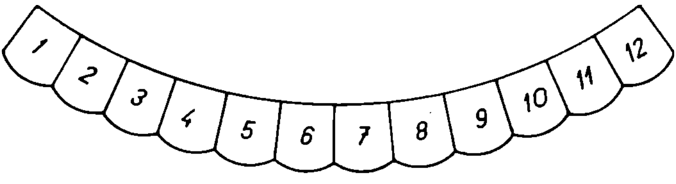
Obr. 89

3. V divadelním sále je 15 řad po 12 sedadlech, číslovaných v každé řadě zleva doprava 1 až 12 (obr. 90). Každé sedadlo lze určit dvěma údaji. Sedadlo

5/9

je sedadlo č. 9 v 5. řadě.

Cena sedadel: I. místo (řada 1 až 8) ...... 12,50 Kčs
II. místo (řada 9 až 15) ..... 8,00 Kčs



Obr. 90

a) Vypište všechny dvojice udávající prostřední sedadla I. místa.

b) Vypište všechna krajní sedadla II. místa.

c) Kolik korun se vybere, je-li sál plně obsazen?

d) Vláďa seděl na sedadle 10/8, Zdeněk na sedadle 7/5 a vyměnili si místa. Na kterých místech museli diváci vstát, když byl sál plně obsazen?

4. M_1 je množina dvou druhů obrazců:

$$M_1 = \{\text{čtverec, kruh}\},$$

M_2 je množina tří barev:

$$M_2 = \{\text{červená, modrá, žlutá}\}.$$

Znázorněte kartézský součin $M_1 \times M_2$ tabulkou i modelem (barevné obrazce).

5. Jsou dány množiny slabik:

$$M_1 = \{\text{no, vě, ví, sí}\},$$
$$M_2 = \{\text{ha, ta, la, ra}\}.$$

Vypište tabulku $M_1 \times M_2$ (jde např. o „slova“: noha, nola, atd.). Která z těchto „slov“ se užívají v češtině?

6. a) Kartézský součin $M_1 \times M_2$ má 12 prvků. Kolik prvků mají množiny M_1, M_2? (Úloha má více řešení.)

b) Množiny M_1, M_2 mají společné právě dva prvky. Kartézský součin $M_1 \times M_2$ má 24 prvků. Kolik prvků má každá z množin? (Úloha má více řešení.)

7. Mezi čtyři pracující A, B, C, D mají být rozděleny čtyři poukazy na rekreaci: do Tater, do Krkonoš, do Beskyd, na Šumavu. Kolik je možných způsobů rozdělení? Jak je vyčtete z následující tabulky? Vypište všechny způsoby rozdělení, při nichž A jede do Krkonoš.

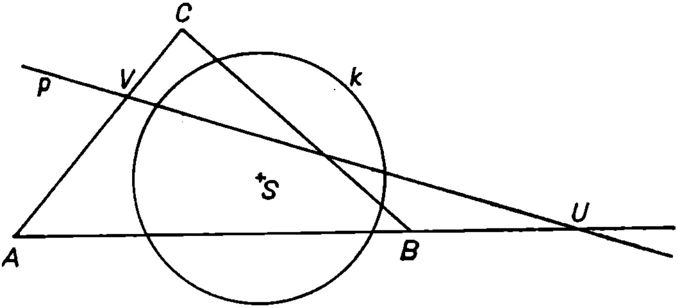
Místo / Pracující	Tatry	Krkonoše	Beskydy	Šumava
A				
B				
C				
D				

8. Zvolte kartézskou soustavu souřadnic.

a) Zobrazte body $A = [-1 \mid 0]$, $B = [1 \mid 2]$, $C = [0 \mid 4]$, $D = [4 \mid 0]$.

b) Sestrojte všechny přímky určené body A, B, C, D. Kolik jich bude?

c) Označte průsečíky narýsovaných přímek a určete jejich kartézské souřadnice.



Obr. 91

9. a) Rýsujte přibližně podle obrázku 91.

b) Na jiném listě papíru narýsujte znovu tento obrázek tak, aby útvary měly na vašich obrázcích touž velikost i vzájemnou polohu.

Návod: Použijte soustavy souřadnic. Za kladnou poloosu x zvolte polopřímku $\overrightarrow{AB}$. Změřením zjistěte souřadnice bodů B, C, S, U. Nyní už dovedete obrázek narýsovat.

10. Množina $M = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$. A_4 je množina všech násobků čísla 4, které patří množině M. Podobně definujeme množiny A_5, A_7.

a) Udejte množiny A_4, A_5, A_7 výčtem prvků.

b) Doplňte tabulku:

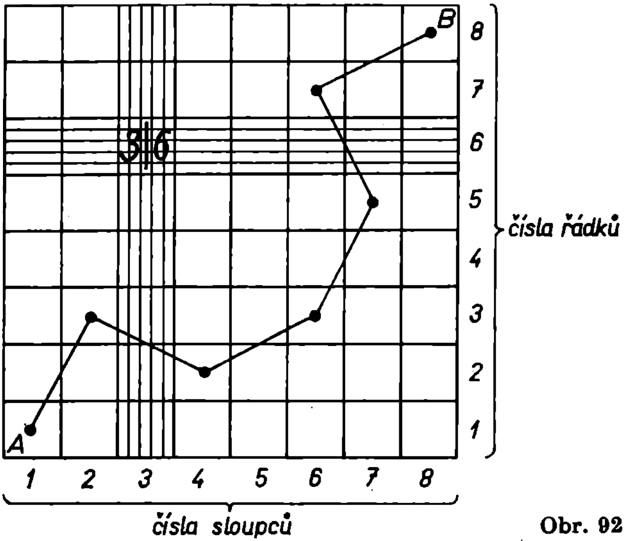
množina	$M \times A_4$	$A_4 \times A_5'$	$A_5 \times A_5$	$A_7 \times A_4$
počet prvků				

Výsledky odůvodněte!

11. Na obrázku 92 je šachovnice bez vyznačených černých polí. Pole, které je ve 3. sloupci a v 4. řádku, označíme

[3 | 4] .

číslo sloupce číslo řádku



Obr. 92

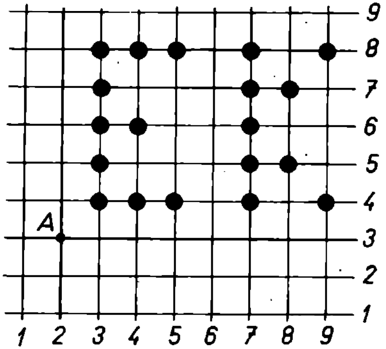
a) Zapište tímto způsobem pole, které prošel jezdec z pole A na pole B:

[1 | 1], [2 | 3], [4 | 2], . . .

b) Na šachovnici postavte 4 dámy na pole: [1 | 3], [4 | 4], [5 | 5], [6 | 8]. Sami najděte polohu páté dámy tak, aby všechna volná pole byla napadena aspoň jednou dámou. Její poloha je [|]. Doplňte.

12. Na obrázku 93 je čtvercová síť, jejíž přímky jsou očíslovány. Bod A je průsečík svislé přímky č. 2 a vodorovné přímky č. 3. Zapíšeme jej pomocí kartézských souřadnic [2 | 3].

a) Zapište tímto způsobem všechny body tvořící písmena E, K. Např.:
E: $[3 \mid 4]$, $[3 \mid 5]$, ...



Obr. 93

b) Zapište obdobně další písmena a dejte je přečíst svým kamarádům.

13. Znázorněte množiny bodů

a) $\boldsymbol{P} = \{Z \mid Z = [x \mid 2x]\}$,

b) $\boldsymbol{R} = \{Y \mid Y = [2x \mid x]\}$,

kde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Jakou polohu mají body těchto množin?

14. Z kosmické lodi je možno vyslat signály: a, b, c, d, e. Při příjmu nelze některé dvojice signálů bezpečně odlišit. Viz levou část tabulky:

vysláno	možnosti příjmu	vysláno	možnosti příjmu
a	a, b	aa	
b	b, c	bc	
c	c, d	ce	
d	d, e	db	
e	e, a	ed	

d) Doplňte pravou část tabulky.

b) Budou-li vysílána pouze „slova" *aa*, *bc*, *ce*, *db*, *ed*, lze je při příjmu bezpečně rozeznat. Přesvědčte se o tom!

15. Obměňte úlohu 14 pro jiný počet vysílaných signálů. Hledejte maximální počet „slov" složených ze dvou písmen, která lze při příjmu odlišit.

16. Určete všechny obdélníky a čtverce s celočíselnými rozměry, jejichž obsah a obvod je vyjádřen týmž číslem.

3.5. Kartézský součin tří množin

USPOŘÁDANÁ TROJICE je trojice předmětů (prvků), kde záleží na tom, který předmět (prvek) je první, který druhý a který třetí.

PŘÍKLADY

a) Uspořádaná trojice JAN — JIŘÍ — JOSEF je jiná, než uspořádaná trojice JIŘÍ — JOSEF — JAN.

b) Ze dvou různých prvků, např. 1, 2 můžeme utvořit uspořádané trojice: 111, 112, 121, 211, 221, 212, 122, 222.

c) Z jediného předmětu můžeme utvořit jedinou uspořádanou trojici, v níž se tento předmět opakuje; např. *AAA*.

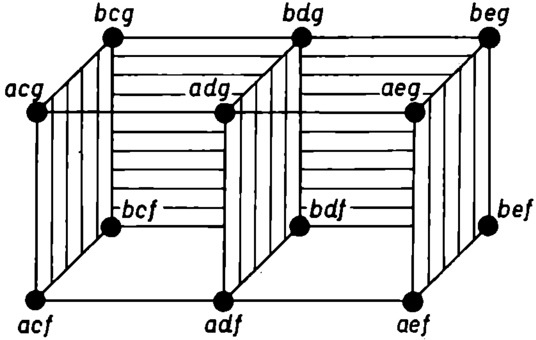
KARTÉZSKÝ SOUČIN

tří množin $\boldsymbol{M}_1 = \{a, b\}$, $\boldsymbol{M}_2 = \{c, d, e\}$, $\boldsymbol{M}_3 = \{f, g\}$ je množina uspořádaných trojic: *acf*, *acg*, *adf*, *adg*, *aef*, *aeg*, *bcf*, *bcg*, *bdf*, *bdg*, *bef*, *beg*.

Zapisujeme:

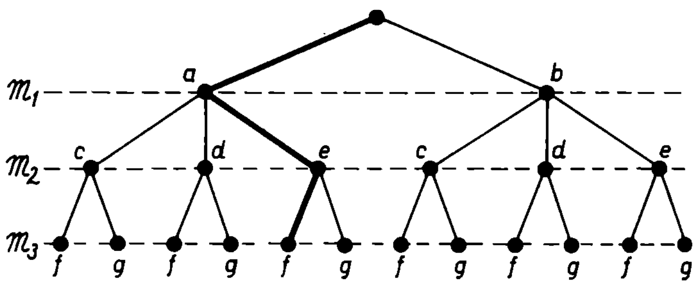
$$\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{M}_3 = \{acf,\ acg,\ adf,\ \ldots,\ bef,\ beg\}.$$

Říkáme, že ***tvoříme kartézský součin*** množin M_1, M_2 M_3, nebo že množiny M_1, M_2, M_3 ***kartézsky násobíme***. Kartézský součin tří množin můžeme znázornit pomocí prostorového schématu na obrázku 94. (Například



Obr. 94

uspořádané trojice, které mají na 1. místě písmeno „a“ jsou znázorněny v přední průčelní rovině; uspořádané trojice, které mají na 2. místě písmeno „c“ jsou znázor-



Obr. 95

něny v levé boční rovině, atd.). Nebo pomocí „klesajících cest“ ve stromu logických možností (obr. 95, kde je tlustou „cestou“ vyznačena uspořádaná trojice *aef*).

PŘÍKLAD

Máme utvořit všechna trojciferná čísla, pro která platí: jednotky 2. řádu udává některá z číslic 2, 4, 8; jednotky 1. řádu udává některá z číslic 0, 1; jednotky 0. řádu udává některá z číslic 0, 2, 7.

Hledaná čísla jsou prvky kartézského součinu množin $\boldsymbol{A}_2 = \{2, 4, 8\}$, $\boldsymbol{A}_1 = \{0, 1\}$, $\boldsymbol{A}_0 = \{1, 2, 7\}$.

$$\boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_0 = \{201, 202, 207, 211, 212, 217, \\ 401, 402, 407, 411, 412, 417, \\ 801, 802, 807, 811, 812, 817\}.$$

Pozor, nesmíme zaměnit kartézský součin $\boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_0$ např. s kartézským součinem $\boldsymbol{A}_0 \times \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$.

Pro konečné množiny platí:

Množina	Počet prvků	Např. (viz obr. 95)
$\boldsymbol{M}_1$	n_1	$n_1 = 2$
$\boldsymbol{M}_2$	n_2	$n_2 = 3$
$\boldsymbol{M}_3$	n_3	$n_3 = 2$
$\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{M}_3$	$n_1 . n_2 . n_3$	$n_1 . n_2 . n_3 = 12$

Pamatujte názvy:

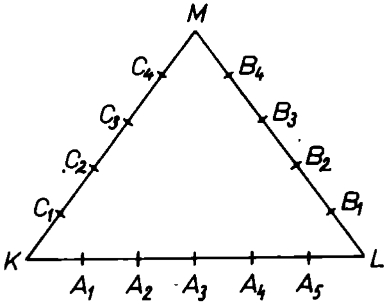
kartézský součin tří množin,
uspořádaná trojice.

CVIČENÍ

1. Sazebník pro dopravu balíků rozlišuje tři pásma vzdáleností: I (do 50 km), II (51 až 100 km), III (přes 100 km); dále tři třídy podle váhy: L (do 5 kg), S (od 5 do 10 kg), T (od 10 do 15 kg); těžší balíky se nedopravují. Mimo to lze balík poslat obyčejně (o) nebo s pojištěním (p).

a) Vypište všechny možnosti do dvou tabulek: jednu pro o, druhou pro p.

b) Vypište všechny možnosti do tří tabulek: jednu pro I., druhou pro II, třetí pro III.



Obr. 96

2. Rýsujte podle obrázku 96 (každé dva sousední body na obvodu rovnoramenného trojúhelníka KLM mají vzdálenost 1 cm). Označte: $\boldsymbol{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $\boldsymbol{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, $\boldsymbol{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$,

a) Udejte počet trojúhelníků $\triangle XYZ$, kde $X \in \boldsymbol{A}$, $Y \in \boldsymbol{B}$, $Z \in \boldsymbol{C}$.

b) Pokuste se mezi těmito trojúhelníky najít ten, který má největší (nejmenší) délku obvodu.

c) Řešte obdobnou úlohu jako je úloha **b)** pro obsah.

3. a) Všimněte si tabulky:

$$\begin{array}{llllllllll}
5 & 8 & 1 & & & & & & & \\
 & 3 & 7 & 4 & & & & & & \quad (3 = 8 - 5,\ 7 = 8 - 1,\ 4 = 5 - 1) \\
 & & 4 & 3 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 2 & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & \text{atd.} & &
\end{array}$$

Najděte klíč k sestavení tabulky. Vysvětlete, proč se v tabulce vyskytují od 6 řádku jen trojice 011, 101, 110.

b) Tabulka z úlohy **3. a)** je určena prvkem $581 \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, kde $\boldsymbol{M} = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Opakujte úlohu pro jiné prvky kartézského součinu $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$. Vždy vám na jednom místě vznikne řádek tvaru $dd0$. Přesvědčte se.

4. Kartézský součin $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{M}_3$ má celkem 12 prvků. Udejte všechny možnosti pro počty prvků množin $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$. Výsledky zapisujte do tabulky.

5. Házíme třemi hracími kostkami (pokus $\boldsymbol{P}$).

a) Určete počet možných výsledků pokusu $\boldsymbol{P}$.

b) Určete pravděpodobnost, že padne právě jedna šestka.

c) Určete pravděpodobnost, že padnou všechna sudá čísla.

6. Zvolíme libovolně prvek z množiny $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{M}_3$, kde $\boldsymbol{M}_1 = \{k, n, p\}$, $\boldsymbol{M}_2 = \{o, a, e\}$, $\boldsymbol{M}_3 = \{s, t, l\}$.
Jaká je pravděpodobnost, že tento prvek značí české slovo?

7. Pokuste se najít aspoň dva kvádry s celočíselnými rozměry, jejichž objem i povrch jsou vyjádřeny týmž číslem.

3.6. Variace

Zatím jsme kartézsky násobili dvě nebo tři množiny. Podobně můžeme ***kartézsky násobit*** i ***více množin***.

PŘÍKLADY

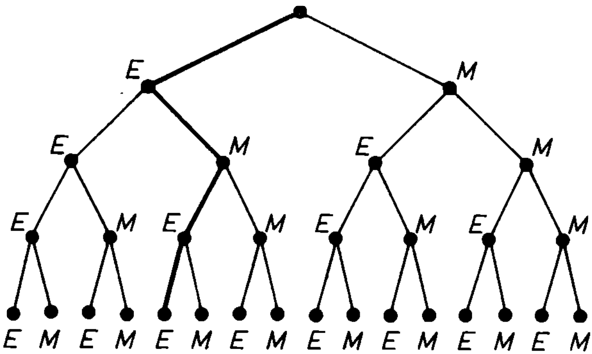
a) Množina $\boldsymbol{M} = \{E, M\}$. Kartézský součin čtyř množin:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$$

je množina všech uspořádaných čtveřic

EEEE	*MEEE*	*EMME*	*MEMM*
EEEM	*EEMM*	*MEME*	*MMEM*
EEME	*EMEM*	*MMEE*	*MMME*
EMEE	*MEEM*	*EMMM*	*MMMM*

Můžeme je opět znázornit jako „klesající cesty" ve stromu logických možností (obr. 97, kde tlustě vytažená cesta značí čtveřici *EMEE*).



Obr. 97

b) $\boldsymbol{M}_1 = \{A\}$, $\boldsymbol{M}_2 = \{B, C, D, E, H, K, J, L, M\}$, $\boldsymbol{M} = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Kartézský součin šesti množin:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$$

se skládá ze všech „starých“ evidenčních značek pražských automobilů. Například číslo

$$AL\ 19\ 86 \in \boldsymbol{L}\,.$$

Z historických důvodů se prvky kartézského součinu

$$\underbrace{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \times \ldots \times \boldsymbol{M}}_{k\text{-krát}}$$

(**M** je neprázdná množina) nazývají

k — ČLENNÉ VARIACE (MNOŽINY M)

jsou to uspořádané k-tice prvků z množiny **M**.

Počet prvků kartézského součinu lze snadno vypočítat:

Množina	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	...	M_k	$M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \times M_5 \times \ldots \times M_k$
Počet prvků	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	...	n_k	$n_1 . n_2 . n_3 . n_4 . n_5 \ldots n_k$
Příklad	2	3	2	2				$2.3.2.2 = 24$

Ověřte si správnost výsledku pro příklad z posledního řádku tabulky (jde o kartézský součin 4 množin) pomocí stromu logických možností.

Speciálně pro počet variací dostáváme:

*Z množiny **M**, která má n prvků lze vytvořit celkem*

$$\underbrace{n . n . n . \ldots . n}_{k\text{-krát}} = n^k$$

k-členných variací.

Viz příklad a) na str. 134, kde $n = 2$, $k = 4$.

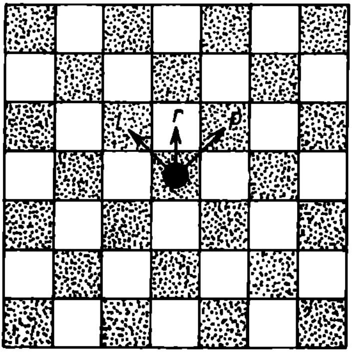
Počet variací je dán číslem

$$\underbrace{2.2.2.2}_{\text{4-krát}} = 2^4 = 16\,.$$

Pamatujte názvy: uspořádaná k-tice,
variace množiny,
k-členná variace množiny.

PŘÍKLAD

a) Král stojí na prostředním poli zmenšené šachovnice o 7 × 7 polích (obr. 98). Třemi tahy se může dostat na poslední řadu. Máme zjistit kolika způsoby to lze provést.



Obr. 98

Tahy krále mohou být pouze trojího druhu: l = vlevo po úhlopříčce, p = vpravo po úhlopříčce, r = po sloupci.

Každé přemístění lze charakterizovat jedinou tříčlennou variací množiny $M = \{l, p, r\}$. Všech variací je

$$3.3.3 = 3^3 = 27$$

b) Dále máme zjistit s jakou pravděpodobností dorazí král při náhodném výběru tří tahů z množiny M na bílé pole poslední řady.

V tom případě je přemístění charakterizováno takovými variacemi, které obsahují buď jeden nebo tři členy „r". To jsou variace:

$$\begin{array}{llll} rll & lrl & llr & rrr \\ rlp & lrp & lpr & \\ rpl & prl & plr & \\ rpp & prp & ppr & \end{array}$$

Požadovaný jev může nastat ve 13 případech. Hledaná pravděpodobnost je

$$p = \frac{13}{27} \doteq 0{,}48 = 48\ \%\ .$$

CVIČENÍ

1. V šatníku je 5 košil, 2 vázanky, troje kalhoty a dvě saka. Zjistěte kolika způsoby si můžete tyto čtyři součásti oblečení zvolit.

2. Řešte úlohu z **PŘÍKLADU** b) na str. 137 užitím statistické pravděpodobnosti. Abyste zaručili náhodnou volbu tahů postupujte takto: Házejte hrací kostkou a určete tahy předpisem:

$$1,2 \to l, \quad 3,4 \to p, \quad 5,6 \to r\ .$$

3. Na třech hranách vycházejících z jednoho vrcholu krychle zvolte po třech bodech.

a) Kolik rovin je určeno těmito devíti body?

b) Každé dvě z těchto rovin se protínají nejvýše v jedné přímce, tzv. průsečnici. Kolik vznikne maximálně průsečnic?

4. Čísla 32 623, 427 724 nazveme s y m e t r i c k á. Označte:
c_n . . . počet všech n-ciferných čísel ($n = 1, 2, \dots$)
s_n . . . počet všech n-ciferných symetrických čísel ($n = 1, 2, \dots$).
a) Doplňte tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7
c_n	9	90					
s_n	9	9					

b) Najděte a dokažte vzorce pro výpočet c_n a s_n.
c) Napíšete libovolné 5-ciferné číslo. S jakou pravděpodobností můžete očekávat, že toto číslo bude symetrické?

5. a) Na každém z pěti letišť A, B, C, D, E startuje jistého dne v 8 hodin ráno jedno letadlo. Po ukončení denního provozu ve 22 hodin je opět každé letadlo na některém z uvedených letišť. Na některých letištích může být i více letadel, dokonce na určitém letišti mohou být všechna letadla. Kolik je celkem možností?
b) Řešte tutéž úlohu pro jiné počty letišť.

6. Z kosmické lodi se vysílají dva signály: 0, 1. Pro předání zpráv se užívá kódu:

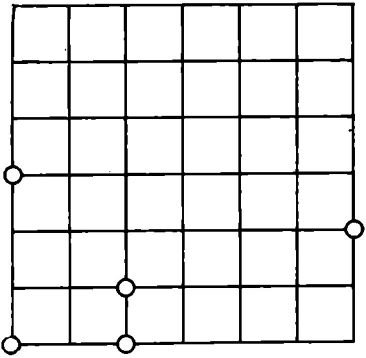
A =	1111 1111	M =	0000 0000
B =	1110 1000	O =	0001 0111
C =	1011 0100	P =	0100 1011
E =	1001 1010	R =	0110 0101
I =	1000 1101	S =	0111 0010
J =	1100 0110	T =	0011 1001
K =	1010 0011	U =	0101 1100
L =	1101 0001	V =	0010 1110

Důležitou vlastností tohoto kódu je, že odstraňuje chyby, které vzniknou při přejímání zpráv. Jestliže byl jeden z osmi signálů určujících libovolné písmeno zachycen chybně, lze písmeno přesto jednoznačně stanovit. Například:

přejatý signál	1100 0010	0111 1100	0010 1111
vyslaný signál	1100 0110	0101 1100	0010 1110

a) Přesvědčte se o této vlastnosti pro písmena C, E, U.
b) Dešifrujte zprávu:

01100001 01011110 01000000 11110100 11111111
11001110 01110000 00000111 00101111 11101111
01011011 11001101 01110010 00111001 00000111
11110001 10100011 11111110



Obr. 99

7. Mezi 49 vrcholy čtvercové sítě z obrázku 99 lze nalézt nejvýše 7 bodů tak, že každé dva mají různou vzdálenost. Na obrázku 99 je znázorněno pět bodů. Máte najít polohu dalších dvou bodů tak, aby vznikla skupina 7 bodů uvedené vlastnosti.

3.7. Prosté variace

Jestliže má k-členná variace

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_k$$

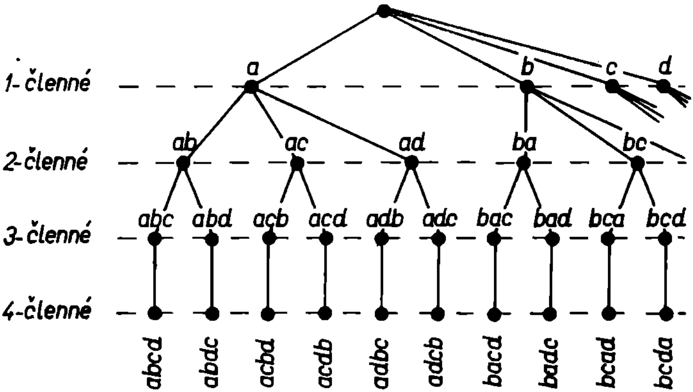
množiny M vesměs různé členy, nazývá se

PROSTOU (k-člennou) VARIACÍ

někdy též ***variací bez opakování.***

PŘÍKLAD

Všechny prosté variace množiny $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d\}$ můžeme sestrojit pomocí stromu logických možností. Na obrázku 100 je znázorněna jeho část; chybějící část si sami snadno doplníte.



Obr. 100

> *Pro* $1 \leqq k \leqq n$ *lze z množiny* $\boldsymbol{M}$ *o* n *prvcích sestavit celkem* $\underbrace{n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(n-k+1)}_{k\text{-činitelů}}$
>
> *prostých k-členných variací.*

Toto tvrzení si ověříme na příkladech:

PŘÍKLADY

a) Množina $\boldsymbol{M} = \{r, s, t\}$, počet jejich prvků je $n = 3$.

	1-členné	2-členné	3-členné
prosté variace	r, s, t	$sr, rt, rs,$ st, tr, ts	$rst, rts, srt,$ str, trs, tsr
počet	3	$3.2 = 6$	$3.2.1 = 6$

b) Počet n-členných prostých variací množiny $\boldsymbol{M}$ o n-prvcích je dán tabulkou

n	2	3	4	5	6	...
výpočet	2.1	3.2.1	4.3.2.1	5.4.3.2.1	6.5.4.3.2.1	...
výsledek	2	6	24	120	720	...

Číslo $n.(n - 1).(n - 2). \ldots .3.2.1$ zapisujeme obvykle

$$\boxed{n!}$$

čteme „n **faktoriál**“.

Uvedeme tabulku faktoriálů čísel 1, 2, ..., 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

Pamatujte název a označení:

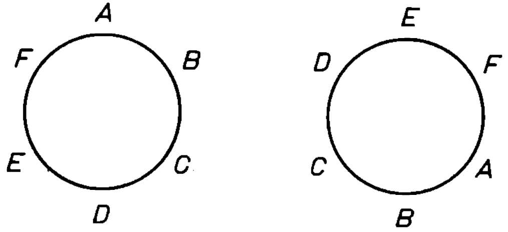
prostá variace;
$n!$ („n faktoriál“).

CVIČENÍ

1. Kolem kulatého stolu zasedne 6 přátel.

a) Kolik je možných rozmístění přátel kolem stolu?

b) Kolik je možných různých rozmístění, jestliže nerozlišujeme takové dvě rozmístění, z nichž jedno vznikne z druhého otočením. Např. nerozlišujeme rozmístění znázorněná na obr. 101.



Obr. 101

2. Házíme hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že při třech hodech jednou kostkou padne vždy jiný počet ok?

3. Zítra ke mně přijde pět přátel: Jan, Karel, Jiří, Vlastík, Zbyněk. Předpokládám, že žádní dva nepřijdou současně, a že všechna pořadí jsou stejně pravděpodobná.

a) Jaká je pravděpodobnost, že Jan přijde první a Zbyněk poslední?

b) Vypočítejte pravděpodobnost, že Jan přijde dříve než Zbyněk.

4. Na šachovnici se má rozmístit 8 věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly (tzn. v každém sloupci a v každé řadě musí být právě jedna věž).

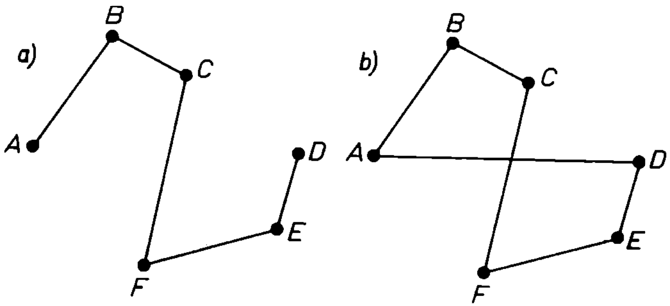
a) Kolik je možných rozmístění?

b) Jaká je pravděpodobnost, že při takovém rozmístění budou stát všechny věže pouze na černých polích?

5. V rovině si zvolte 6 různých bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce.

a) Kolik lomených čar, které mají vrcholy v těchto bodech, lze celkem sestrojit? Rozlište případ uzavřených a otevřených lomených čar. Viz obrázek 102 ab.

b) Snažte se narýsovat mezi těmito čarami tu nejkratší (červeně) a tu nejdelší (modře).



Obr. 102a,b

6. Problém knihaře: Při vazbě knih je třeba použít dvou strojů A, B. Každá kniha musí být nejdříve zpracována strojem A, teprve pak může být vložena do stroje B. Má se provést vazba tří knih; doba zpracování na jednotlivých strojích je v minutách udána tabulkou:

kniha	1	2	3
A	40	20	50
B	25	35	30

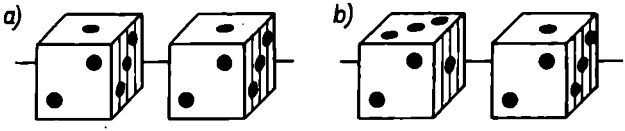
a) V jakém pořadí je třeba knihy zpracovat, aby doba od zahájení práce stroje A do skončení práce stroje B byla co nejkratší.

b) Obměňte a sami řešte problém knihaře pro případ čtyř knih.

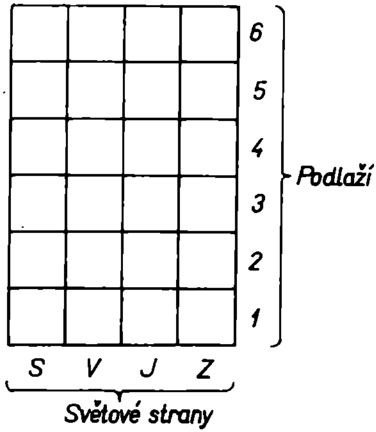
7. Na pramičku se vejdou tři osoby. Ve společnosti je 7 lidí: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. Uskutečnilo se celkem 7 projížděk; přitom každé dvě osoby jely spolu právě jednou. Doplňte v seznamu chybějící projížďky:

$$ABC,\ ADE,\ AFG,\ BDF\ .$$

8. (Problémová úloha.) Správná hrací kostka má vždy součet ok na dvou protějších stěnách rovný sedmi. Dvě kostky považujeme za stejné, jestliže je lze přemístit tak, že na stěnách obrácených ve stejném směru mají týž počet ok. Např. jsou-li kostky znázorněné na obrázku 103a,b správné, pak vlevo jsou stejné, vpravo různé.



Obr. 103a Obr. 103b



Obr. 104

a) Kolik je různých správných kostek?

b) Kolik je různých — správných i nesprávných hracích kostek?

9. (Problémová úloha, pokračování) a) Ze šesti správných, úplně stejných, hracích kostek postavte „šestipodlažní" magickou věž těchto vlastností:

(1) na každé světové straně mají různá podlaží různé počty ok.

(2) Počty ok na dolních stěnách udávají číslo podlaží (tzn. na dolních stěnách kostek jsou od zdola čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Popis věže zapište do „plánu" na obrázku 104.

b) Určete kolik magických věží lze postavit. Přitom nerozlišujeme dvě věže, které lze otočením ztotožnit.

10. V závodě soutěžili žáci A, B, C, D, E. Kdosi předpověděl pořadí žáků A, B, C, D, E. Ukázalo se, že neuhádl umístění ani jednoho žáka, ani pořadí žádných dvou po sobě následujících žáků. Někdo jiný předvídal pořadí D, A, E, C, B a uhádl tak správně umístění právě dvou žáků a zároveň dvě dvojice po sobě jdoucích žáků. Máte určit správné pořadí.

4. Kapitola

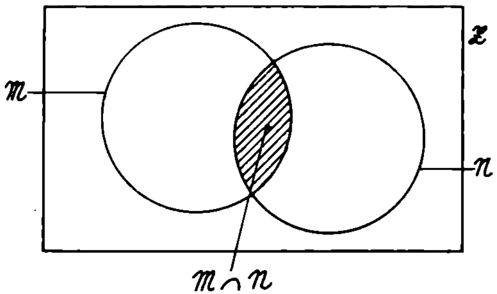
UČÍME SE POČÍTAT S MNOŽINAMI

4.1. Průnik množin

Všecky prvky množiny M, které náleží množině N, tvoří množinu, kterou nazýváme

PRŮNIK MNOŽINY M S MNOŽINOU N.

Zapisujeme jej $M \cap N$.



Obr. 105

Je zřejmé, že průnik množiny N s množinou M, tj. množina $N \cap M$ je táž jako $M \cap N$.

Můžeme tedy říci, že společné prvky množin ***M***, ***N*** tvoří množinu zvanou jednoduše

PRŮNIK MNOŽIN *M, N*;

označujeme ji $M \cap N$ nebo $N \cap M$.

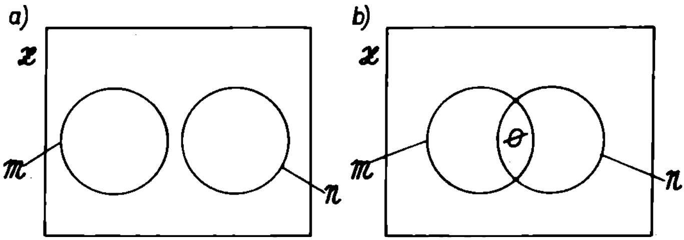
Nemají-li množiny ***M***, ***N*** žádný společný prvek, je jejich průnik množina prázdná, což zapisujeme

$$M \cap N = \varnothing .$$

Je-li $M \cap N = \varnothing$, nazývají se množiny ***M***, ***N***

DISJUNKTNÍ.

Vennův diagram pro disjunktní množiny lze nakreslit dvojím způsobem (obr. 106a, b).



Obr. 106a,b

PŘÍKLADY

1. Průnik množin ***M*** a ***N*** snadno určíme v tabulce:

Z	2	3	4	7	9	15	16	21	25	30
M	/	/	—	/	/	/	—	—	—	—
N	—	—	/	/	/	—	/	/	—	/
$M \cap N$	—	—	—	/	/	—	—	—	—	—

2. $\boldsymbol{A}$ je množina všech nezáporných násobků čísla 3; $\boldsymbol{A} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$.

$\boldsymbol{B}$ je množina všech nezáporných násobků čísla 4; $\boldsymbol{B} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots\}$.

Pozor! Nula je násobkem čísla 3 i čísla 4.

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ je množina všech nezáporných čísel, která jsou zároveň násobky čísla 3 i čísla 4, tj. která jsou násobky čísla 12;

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{0, 12, 24, 36, \ldots\}$.

3. $\boldsymbol{U}$ je množina všech celých čísel menších než 30, $\boldsymbol{V}$ je množina všech přirozených čísel větších než 29.

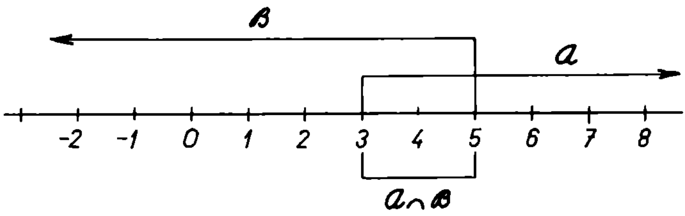
$$\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V} = \emptyset.$$

4. $\boldsymbol{Z}$ je množina všech celých čísel.

$$\boldsymbol{A} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x > 2\},\ \boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \leqq 5\}$$

Průnik (viz obr. 107):

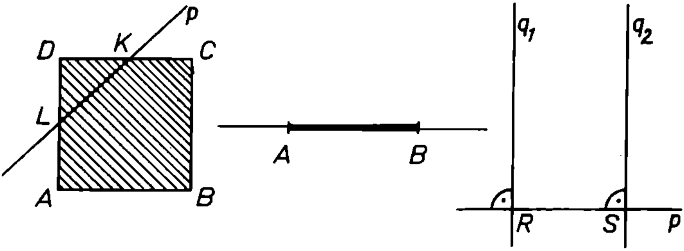
$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x > 2 \textbf{ a zároveň } x \leqq 5\} = \\ = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid 2 < x \leqq 5\} = \{3, 4, 5\}.$$



Obr. 107

Na obrázku 108 je průnik čtverce $ABCD$ s přímkou p úsečka KL. Označíme-li **C** čtverce $ABCD$, je

$$\mathbf{C} \cap p = KL\,.$$



Obr. 108

Na témž obrázku je průnik polopřímek $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ úsečka AB.

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB\,.$$

Na témž obrázku: Dvě kolmice q_1, q_2 k téže přímce p nemají společný bod i když je libovolně prodloužíme.

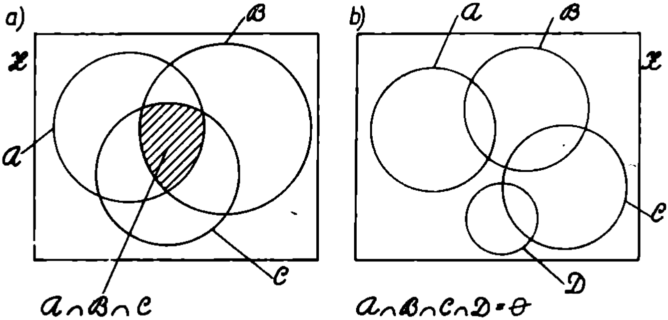
$$q_1 \cap q_2 = \emptyset\,.$$

Přímky q_1, q_2 jsou disjunktní množiny bodů.

Průniky přímek p, q_1 i p, q_2 jsou opět množiny (jednoprvkové), nikoliv body. Proto píšeme

$$p \cap q_1 = \{R\}, \quad p \cap q_2 = \{S\}\,.$$

Můžeme určit ***průnik*** i ***více než dvou množin***. Obr. 109a, b.



Obr. 109a,b

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{A}$ je množina všech sudých nezáporných čísel:

$$\boldsymbol{A} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

$\boldsymbol{B}$ je množina všech celých čísel menších než 9:

$$\boldsymbol{A} = \{x \text{ je celé} \mid x < 9\}.$$

$\boldsymbol{C}$ je udána výčtem:

$$\boldsymbol{C} = \{0, 3, 12, 4, 6\}.$$

Průnik:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} = \{0, 4, 6\}.$$

Přesvědčte se, že

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C}$$

Pamatujte název a označení:

Průnik množin,

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}.$$

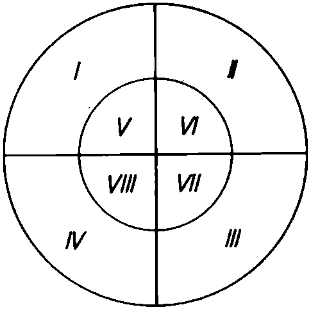
CVIČENÍ

1. Sportovní škola. Z určitých 100 žáků vaší školy je 95 plavců, 85 lyžařů a 60 fotbalistů.

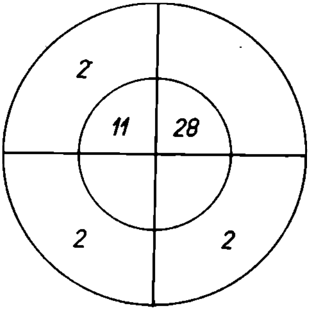
V diagramu na obrázku 110 značí horní půlkruh množinu všech plavců, dolní půlkruh množinu všech neplavců, pravý půlkruh množinu všech lyžařů, levý půlkruh množinu všech nelyžařů. Menší kruh značí množinu těch, kdo nehrají kopanou, mezikruží značí množinu fotbalistů.

a) Popište, jaké množiny jsou znázorněny částmi, označenými římskými číslicemi I až VIII. (Např. III jsou neplavci, kteří lyžují a hrají kopanou.)

b) Na obrázku 111 je nakreslen týž diagram; v některých částech jsou vepsána čísla, která značí počty jednotlivých množin. Doplňte zbývající části.



Obr. 110



Obr. 111

2. Zapište:

a) Prvek x nenáleží průniku množin M, N.

b) Průnik množin A_1, A_2 je podmnožinou M.

c) Množiny C, D jsou disjunktní.

d) Množina A obsahuje průnik množin M, N.

3. Rozhodněte zda pro libovolné množiny platí:

a) $M \cap N \subset M$;

b) $M \cap M \subset M$;

c) $M \cap A \subset M \cap B$, když $A \subset B$.

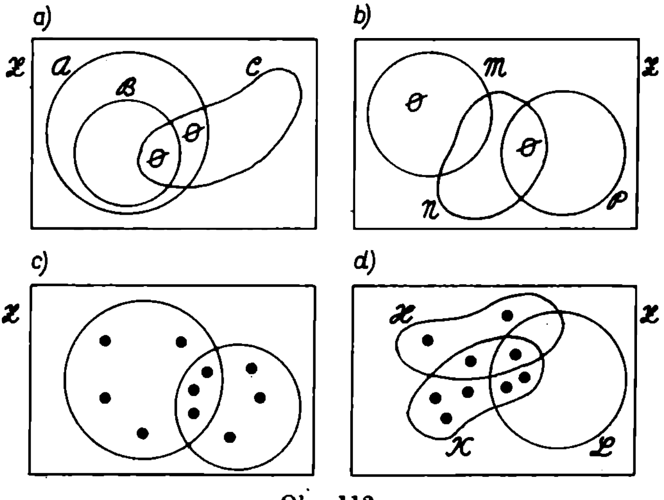
Uveďte příklady číselných množin.

4. Udejte výčtem a zapište průnik množin;
M je množina všech kladných sudých čísel menších než 1 000. N je množina kladných celých čísel, která mají ciferný součet 3.

5. Narýsujte čtverec $ABCD$. Na polopřímku $\overrightarrow{AB}$ naneste postupně dvakrát úsečku AB; dostanete tak mimo bod B ještě bod E. Určete a zapište průniky:

a) $AB \cap BC$, b) $AD \cap BC$, c) $\overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{AC}$, d) $\overrightarrow{AE} \cap \overrightarrow{BC}$,
e) $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{DE}$ (označte jej I).

6. Zapište, co vidíte na Vennových diagramech z obrázku 112. V obrázcích c), d) značí tečky všechny prvky množin.

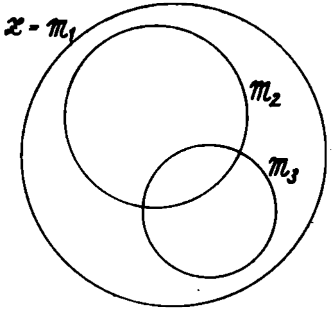


Obr. 112

7. Do náčrtku nakresleného podle obrázku 113 zapište, které části roviny znázorňují průniky:

a) $M_1 \cap M_2$, b) $M_1 \cap M_3$, c) $M_2 \cap M_3$, d) $(M_1 \cap M_2) \cap M_3$.

8. Chodba má půdorys naznačený na obrázku 114; je to obrazec složený ze dvou čtverců $ABCD$, $BEFG$; čísla udávají délky v metrech.

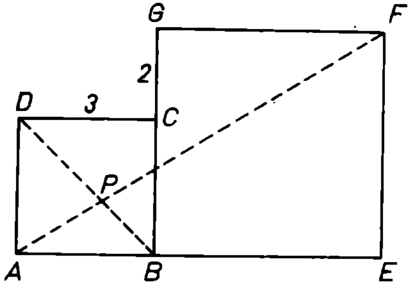


Obr. 113

a) Narýsujte obrazec; čísla pokládejte za délky v centimetrech.

b) Vyšrafujte v půdoryse část chodby, kterou nevidí člověk stojící v místě P; $\{P\} = AF \cap BD$.

c) Ohraničte tlustou čarou tu část půdorysu chodby, z jejíhož každého místa vidí pozorovatel celou chodbu.



Obr. 114

9. Které množiny mohou být průnikem dvou trojúhelníků? (Je 7 možností — načrtněte je!)

10. Zvolte čtyři body A, B, C, D tak, aby žádné tři neležely v přímce. Které množiny mohou být průnikem trojúhelníků

a) $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$;
b) $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$.

11. **a)** Kolik je čísel, která jsou větší než 95 a menší nebo rovna 227?

b) Kolik je čísel, která jsou větší nebo rovna 187 a menší nebo rovna 348?

c) Kolik je čísel, která jsou větší nebo rovna 111 a menší než 445?

d) Kolik je čísel, která jsou větší než 715 a menší než 1032?

Ve všech čtyřech úlohách vyjádřete výsledek pomocí rozdílu daných dvou čísel.

12. Kolik je čísel větších než a a menších nebo rovných číslu b? Zkuste nejprve pro určitá čísla a, b, např. $a = 11$, $b = 37$, nebo $a = 9$, $b = 24$ apod. Pak zapište výsledek písmeny.

13. **a)** Kůň na šachovnici má být přemístěn z pole $b2$ na pole $g6$. Udejte čtyři různé cesty a porovnejte jejich délky. (Délka cesty je počet tahů, které musí kůň při přemístění vykonat.)

b) Dovedete najít dvě cesty, z nichž jedna bude delší o 1 tah než druhá?

14. Udejte, který útvar je průnikem následujících dvou geometrických útvarů:

a) Čtverec a přímka.
b) Kružnice a úsečka.
c) Kruh a přímka.

Ve všech případech jsou tři možnosti — načrtněte je.

15. Množina $\boldsymbol{Z} = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Jsou dány dva rozklady množiny $\boldsymbol{Z}$:

Rozklad $\boldsymbol{R}_1$ má třídy:

$\{1, 2, \ldots, 7\}$, $\{8, 9, \ldots, 18\}$, $\{19, 20\}$.

Rozklad $\boldsymbol{R}_2$ má třídy:

$T_0 = \{x \in Z \mid x$ je násobek tří$\}$,
$T_1 = \{x \in Z \mid (x + 1)$ je násobek tří$\}$,
$T_2 = \{x \in Z \mid (x + 2)$ je násobek tří$\}$.

a) Sestrojte rozklad $\boldsymbol{R}$ množiny $\boldsymbol{Z}$, který je **zjemněním** rozkladů $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$. (Rozklad $\boldsymbol{R}$ má co nejméně tříd, z nichž každá je podmnožinou některé třídy rozkladu $\boldsymbol{R}_1$ i $\boldsymbol{R}_2$.)

b) Dovedete předem určit, kolik má **zjemněný rozklad** $\boldsymbol{R}$ nejvýše tříd, znáte-li počty tříd rozkladů $\boldsymbol{R}_1$ a $\boldsymbol{R}_2$?

4.2. Sjednocení množin

Ke všem prvkům množiny M přidáme (připojíme) všecky prvky množiny N; tím dostaneme novou množinu, kterou nazýváme

SJEDNOCENÍM MNOŽINY M S MNOŽINOU N.

Mají-li množiny M, N společné prvky, počítáme je do sjednocení jen jednou. Sjednocení množin M, N zapisujeme

$$M \cup N.$$

Je zřejmé, že platí

$$M \cup N = N \cup M.$$

PŘÍKLADY

a) M je hromada jablek, N jiná hromada jablek. $M \cup N$ je hromada, která vznikne sesypáním obou prvních hromad.

b) P je množina všech žáků vaší třídy, kteří hrají na klavír; $\boldsymbol{G}$ je množina všech žáků vaší třídy, kteří hrají šachy. $\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{G}$ je množina všech takových žáků vaší třídy, z nichž každý ***buď*** hraje na klavír ***nebo*** hraje šachy.

Mezi příklady a), b) je tento rozdíl:

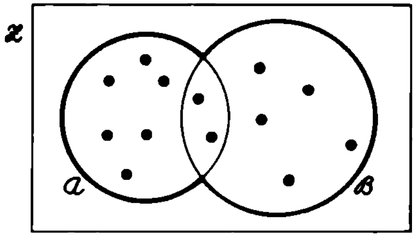
V příkladu a) je

$$\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N} = \varnothing$$ ($\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ jsou disjunktní — žádné jablko není zároveň na obou hromadách jablek.)

V příkladu b) může být

$\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N} \neq \varnothing$ ($\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ nejsou disjunktní — může být žák, který zároveň hraje na klavír a je šachistou.)

Množinový diagram sjednocení $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ ukazuje obrázek 115. Diagram sjednocení $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ je ohraničen tlustou čarou.



Obr. 115

Platí

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \subset \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A} \subset (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}),$$
$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \subset (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}).$$

c) Sjednocení množin $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ zadaných tabulkou:

$\boldsymbol{Z}$	3	5	6	9	15	16	19	23	31
$\boldsymbol{M}$	—	/	/	—	—	—	/	/	/
$\boldsymbol{N}$	—	—	/	/	/	—	/	/	—
$\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{N}$	—	/	/	/	/	—	/	/	/

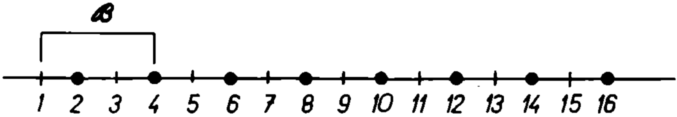
d) $\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$;

$\boldsymbol{A} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x$ je sudé číslo$\}$, $\boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x < 5\}$.

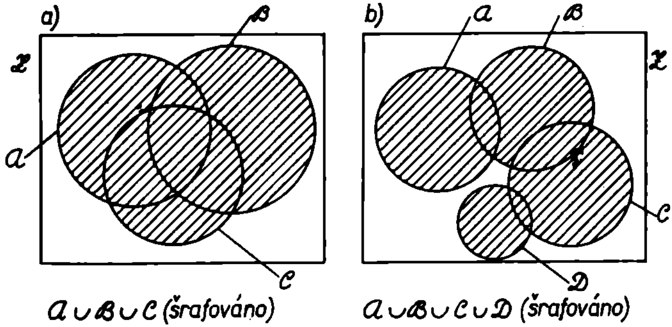
Sjednocení (viz obr. 116):

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x$ je sudé číslo ***nebo*** $x < 5\} =$

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$.



Obr. 116



Obr. 117a,b

Můžeme určit sjednocení i více než dvou množin. Viz obrázek 117ab.

Pamatujte název a označení:

Sjednocení množin;

$$A \cup B, \quad A \cup B \cup C.$$

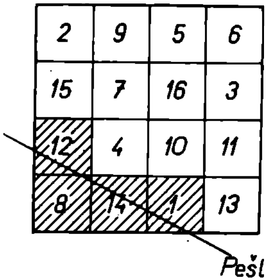
CVIČENÍ

1. N je množina všech čísel menších než 73 a větších než 50.

a) Vypište tyto podmnožiny množiny N: množinu N_3 všech násobků tří, množinu N_4 všech násobků čtyř, množinu N_5 všech násobků pěti. Znázorněte prvky těchto množin na číselné poloose; každou množinu jinou barvou.

b) Vypište množinu P všech čísel z N dělitelných dvanácti. Vypište množinu G všech čísel z N dělitelných buď třemi nebo pěti nebo třemi i pěti. Zapište, jakými výkony vzniknou množiny P, G z množin N_3, N_4, N_5.

c) Z kterých čísel se skládají množiny: $N_4 \cap N_5$, $N_4 \cup N_5$, $N_3 \cap N_4 \cap N_5$, $N_3 \cup N_4 \cup N_5$?



Obr. 118

2. Hra: Obrázek 118. Potřebujeme hrací desku, na které je velký čtverec rozdělený na 16 menších čtverců téže velikosti, do nichž jsou vepsána čísla podle náčrtu. Hráč položí přímé pravítko a narýsuje přímku tak, aby neprocházela žádným vrcholem žádného čtverce.

K přímce připíše své jméno a sečte čísla polí, kterými přímka prochází. (Např. na obrázku je součet $12 + 8 + 14 + 1 = 35$.) Vyhrává ten, kdo dosáhne největšího součtu. Pokuste se dosáhnout součtu 74.

3. a) Popište (charakteristickým znakem) množinu čísel, která vznikne sjednocením všech dvojciferných a množiny všech trojciferných čísel.

b) Popište množinu, která vznikne sjednocením množiny všech čísel jednociferných a množiny čísel menších než 20.

c) Popište množinu, která vznikne sjednocením všech čísel větších než 205 a menších nebo rovných 199.

d) Popište množinu, která vznikne sjednocením množiny všech čísel aspoň trojciferných a množiny všech čísel menších než 307.

e) Popište množinu, která vznikne sjednocením množiny všech sudých čísel a množiny všech násobků šesti.

4. Na množinovém diagramu vyznačte tři množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, průniky $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{A}$, sjednocení $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{A}$, a rozhodněte, které ze zápisů platí:

$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \subset (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$,	$(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{C}$,
$\boldsymbol{A} \subset (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$,	$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \subset \boldsymbol{A}$,
$\boldsymbol{B} \subset (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$.	$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{C}$.

5. V síti čtverců na obrázku 119 sestrojujeme „cesty" z vrcholu S do vrcholu Z. Všechny „cesty" vedou vždy vpravo nebo nahoru. $\boldsymbol{M}$ je množina všech cest. $\boldsymbol{A}$ je množina všech cest, které jdou bodem A. Podobný význam mají množiny $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$. (Na obrázku 119 je znázorněna jedna cesta vedoucí bodem D; patří množině $\boldsymbol{D}$.)

a) Určete počty prvků všech množin $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ pomocí kombinačních čísel. Například množina $\boldsymbol{D}$ má

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{9}{4}$$

prvků. Čísla 5 a 9 značí „délky" cest SD a DZ. Čísla 3 a 4 značí délky těch částí cest SD a DZ, které směřují vpravo.

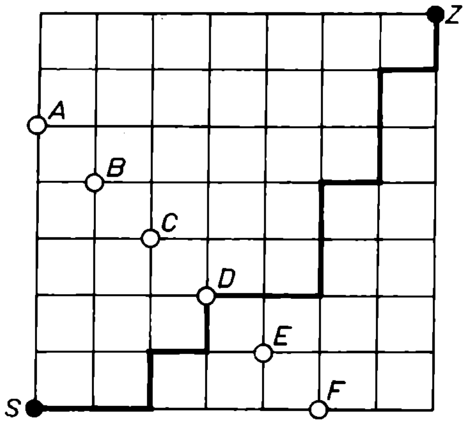
b) Odůvodněte (bez použití tabulky kombinačních čísel):

$$\binom{5}{0}\binom{9}{7} + \binom{5}{1}\binom{9}{6} + \binom{5}{2}\binom{9}{5} + \binom{5}{3}\binom{9}{4} + \binom{5}{4}\binom{9}{3} + \binom{5}{5}\binom{9}{2} = \binom{14}{7}$$

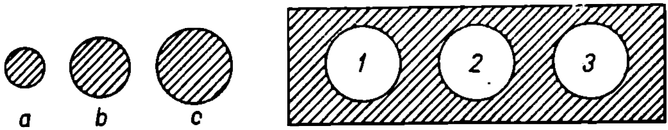
6. Vyšetřete, které množiny mohou být sjednocením dvou čtverců s rovnoběžnými stranami.

7. a) Kolika různými způsoby můžete zapsat pětiúhelník $ABCDE$ jako sjednocení tří trojúhelníků!

b) Řešte obdobnou úlohu pro šestiúhelník a čtyři trojúhelníky.



Obr. 119



Obr. 120

8. **Brahmínská hra.** Obrázek 120. Potřebujete tři kotouče různých velikostí a podložku, na které jsou vedle sebe vyznačeny tři kruhy velikosti největšího kotouče. Na kruhu 1 jsou narovnány kotouče *a*, *b*, *c* tak, že největší z nich (*c*) je vespod a nejmenší (*a*) navrchu. Úkolem hry je přemístit kotouče

z kruhu 1 na kruh 2 (nebo 3) tak, aby byl opět největší vespod a nejmenší navrchu.

Pravidla hry: I. Kotouče se musí přemisťovat jednotlivě.
II. Nikdy nesmí ležet větší kotouč na menším.

Zapište všechny tahy hry. (Např. je-li první tah přemístění kotouče a na kruh 2, druhý tah přemístění kotouče b na kruh 3, zapíšeme $a2$ — $b3$ atd.). Kolika tahy lze hru ukončit?

Opakujte hru se čtyřmi kotouči různých velikostí (při nezměněném počtu 3 kruhů). Zapište tahy a zjistěte jejich počet. Vypráví se, že indičtí mnichové hrají tuto hru se 100 kotouči a věří, že až hra skončí, nastane konec světa. Dovedeme vypočítat, že trvá-li jeden tah vteřinu, potrvá brahmínská hra se 100 kotouči asi 30 tisíc trilionů let (to je číslo o 23 cifrách).

4.3. Počet prvků sjednocení dvou množin

Pro konečné množiny označíme:

množina	A_1	A_2	$A_1 \cup A_2$	$A_1 \cap A_2$
počet prvků	n_1	n_2	s_{12}	p_{12}

Platí vzorec

$$\boxed{s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12}}$$

PŘÍKLADY

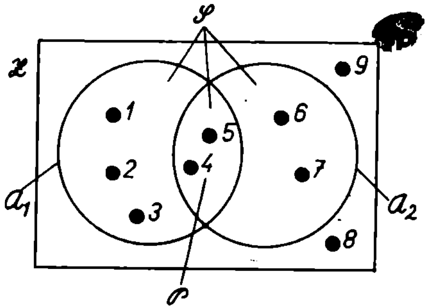
a) Množina $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_2 = \{4, 5, 6, 7\}$. Základní množina Z se skládá ze všech jednociferných čísel. Viz Vennův diagram (obr. 121).

Sjednocení množin $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ je

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

průnik je

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{P}_2 = \{4, 5\}.$$



Obr. 121

Je tedy: $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $s_{12} = 7$, $p_{12} = 2$, takže opravdu platí rovnost

$$s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12} \quad (\text{neboť } 7 = 5 + 4 - 2).$$

Vzorec můžeme ověřit i tabulkou:

$\boldsymbol{Z}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\boldsymbol{A}_1$	/	/	/	/	/	—	—	—	—	$n_1 = 5$
$\boldsymbol{A}_2$	—	—	—	/	/	/	/	—	—	$n_2 = 4$
$\boldsymbol{S}$	/	/	/	/	/	/	/	—	—	$s_{12} = 7$
$\boldsymbol{P}$	—	—	—	/	/	—	—	—	—	$p_{12} = 2$

b) Ve třídě je 18 žáků (množina A_1), kteří mají aspoň jednoho bratra; 12 žáků (množina A_2), kteří mají aspoň jednu sestru, a konečně 23 žáci (množina $A_1 \cup A_2$), kteří mají aspoň jednoho sourozence. Kolik žáků má sestru i bratra (počet prvků množiny $A_1 \cap A_2$).

Počítáme podle známého vzorce:

$$23 = 18 + 12 - p_{12},$$
$$23 = 30 - p_{12},$$
$$p_{12} = 7.$$

Ve třídě má tedy $p_{12} = 7$ žáků sestru i bratra.

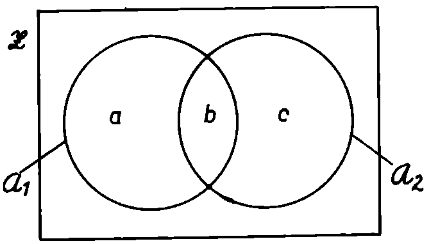
c) Je-li $n_1 = 15$, $n_2 = 29$, $p_{12} = 17$, lze podle známého vzorce vypočítat $s_{12} = 27$.

Ale nelze najít množiny A, B, pro něž je $n_1 = 15$, $n_2 = 29$, $p_{12} = 17$, $s_{12} = 27$. Tato čísla nevyhovují nerovnostem:

$$p_{12} \leqq n_1 \leqq s_{12}.$$
$$p_{12} \leqq n_2 \leqq s_{12}.$$

Poznámka. Vzorec

$$s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12}$$



Obr. 122

lze dokázat s použitím Vennova diagramu z obr. 122 (kde malá písmena značí počty prvků).

Platí:

$s_{12} = a + b + c, \quad n_1 = a + b, \quad n_2 = b + c, \quad p_{12} = b,$

to znamená, že opravdu je

$$\underbrace{a + b + c}_{s_{12}} = \underbrace{a + b}_{n_1} + \underbrace{b + c}_{n_2} - \underbrace{b}_{p_{12}}.$$

Pamatujte si vzorec:

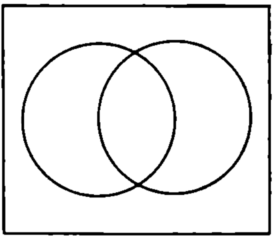
$$s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12},$$

CVIČENÍ

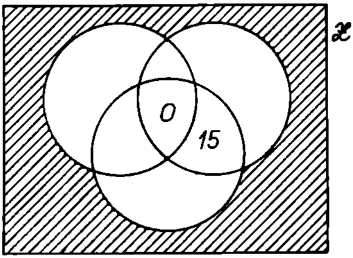
1. Každý pracující jistého závodu buď je členem kulturního kroužku nebo cvičí v závodní tělovýchově, nebo dělá obojí činnost.

a) Označte K množinu pracujících, kteří jsou členy kulturního kroužku, T množinu těch, kteří cvičí v tělovýchově. Popište množiny $K \cap T$, $K \cup T$ a označte množiny v diagramu z obrázku 123.

b) V závodě je 85 pracujících; 36 jich cvičí v závodní tělovýchově, z nich 9 jsou členové kulturního kroužku. Kolik pracujících je celkem členy kulturního kroužku? (Hledejte počet prvků množin K, T, $K \cup T$, $K \cap T$.)



Obr. 123



Obr. 124

2. L je množina všech letadel, která byla ráno jistého dne na letišti, P je množina všech letadel, která během dne přiletěla, O množina všech letadel, která během dne odletěla. Žádné letadlo nepřiletělo toho dne na letiště víckrát než jednou a také žádné letadlo neodletělo toho dne víckrát než jednou.

a) Popište množiny $P \cap O$, $L \cup P$, $O \cup P$, $L \cup O$.

b) Ráno bylo na letišti 17 letadel, z nich odletělo 15, celkem odletělo 27 letadel, celkem přiletělo 32 letadel. Kolik letadel zůstalo večer na letišti?

c) Do každé ze sedmi nevyšrafovaných částí roviny (obr. 124) vepište číslo, které značí počet letadel, která tvoří příslušnou množinu. (Dvě z čísel jsou zapsána jako příklad.)

3. Na úpravě terénu pracoval první bagr 63 dní, druhý bagr 48 dní, oba společně 29 dní. Kolik dní trvala úprava? Znázorněte diagramem.

4. Na žňové práce ve státním statku byly nasazeny dva kombajny. Celkem pracovaly 189 hodin, první pracoval 115 hodin, druhý 168 hodin. Kolik hodin pracovaly oba zároveň? Znázorněte diagramem.

5. V této úloze značí a počet prvků množiny A, b počet prvků množiny B, p počet prvků průniku $A \cap B$, s počet prvků sjednocení $A \cup B$.

a) Určete p, je-li $s = a + b$; jaké jsou množiny A, B?

b) Platí $p = s$; co lze říci o množinách A, B?

c) Platí $p = b$; co lze říci o množinách A, B?

Ve všech třech případech nakreslete diagram.

6. Podnik se skládá ze dvou oddělených závodů. V obou závodech byl proveden průzkum, kolik lidí mluví anglicky a rusky. Byly získány tyto údaje

	I.	II.
Počet všech zaměstnanců závodu	147	112
z toho znají: anglicky	55	52
rusky	83	88
anglicky i rusky	37	23

Vypočítejte kolik lidí mluví v každém závodě anglicky nebo rusky (aspoň jedním z těchto jazyků), kolik mluví jen anglicky a kolik jen rusky. (Co lze prohlásit o údajích ze závodu II?)

7. Na vesnici je 43 majitelů motorových vozidel (aut a motocyklů). Přitom auto vlastní o 12 osob více než motocykl. Kolik je ve vesnici majitelů aut?

8. V holičské provozovně stojí holení 2 Kčs a stříhání 5 Kčs. Za dopoledne bylo inkasováno 209 Kčs. Podle vydaných pokladních lístků se zjistilo, že bylo obslouženo 41 zákazníků. Kolik lidí se dalo holit a kolik stříhat? (Úloha má 8 řešení.)

4.4. Počet prvků sjednocení tří množin

PŘÍKLAD

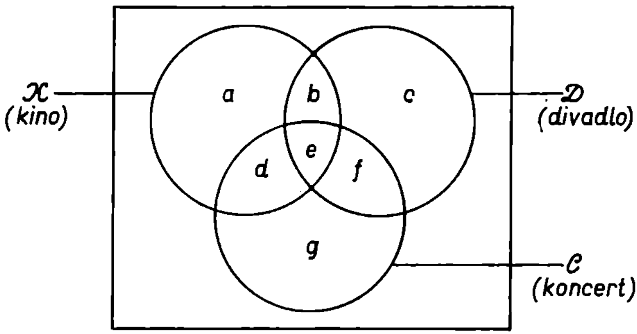
V jedné zprávě o průzkumu využití volného času byly uvedeny údaje: „Ze zkoumané skupiny 150 osob navštívilo alespoň jednou v měsíci nějaký kulturní podnik (tj. kino, divadlo nebo koncert) 101 osob, z toho:

kino 77 osob
divadlo 63 osoby
koncert 32 osoby

kino a divadlo 36 osob
kino a koncert 21 osob
divadlo a koncert 29 osob

kino, divadlo i koncert 15 osob"

Máme ukázat, že údaje ve zprávě jsou nepravdivé.



Obr. 125

Užijeme Vennova diagramu (obr. 125, malá písmena značí počty prvků). Můžeme postupně doplnit údaje (zapište do diagramu sami):

$e = 15$, neboť průnik množin $K \cap D \cap C$ má 15 prvků;
$b = 21$, neboť průnik $K \cap D$ má $b + e = 36$ prvků;
$d = 6$, neboť průnik $K \cap C$ má $d + e = 21$ prvků;
$p = 14$, neboť průnik $D \cap C$ má $p + e = 29$ prvků;
$g = -3$, neboť množina C má $d + e + p + g = 32$ prvků.

Ale g je počet lidí, kteří navštívili jen koncert a nemůže to být záporné číslo.

Pro konečné množiny užijeme označení:

Množiny	Počet prvků
A_1	n_1
A_2	n_2
A_3	n_3

Průniky množin	Počet prvků
$A_1 \cap A_2$	p_{12}
$A_1 \cap A_3$	p_{13}
$A_2 \cap A_3$	p_{23}
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	p_{123}

Sjednocení množin	Počet prvků
$A_1 \cup A_2$	s_{12}
$A_1 \cup A_3$	s_{13}
$A_2 \cup A_3$	s_{23}
$A_1 \cup A_2 \cup A_3$	s_{123}

Platí vzorce

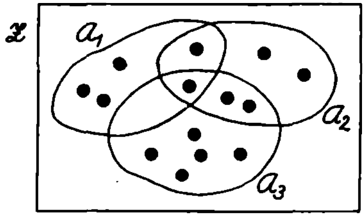
$$s_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - p_{12} - p_{13} - p_{23} + p_{123}$$

$$p_{123} = n_1 + n_2 + n_3 - s_{12} - s_{13} - s_{23} + s_{123}$$

Jeden vzorec vznikne z druhého pouhou záměnou písmen p a s. Říkáme, že jsou tyto vzorce **duální**.

PŘÍKLAD

Pro množiny znázorněné Vennovým diagramem (obr. 126) platí:



Obr. 126

$$n_1 = 5\,, \quad p_{12} = 2\,, \quad s_{12} = 9\,,$$
$$n_2 = 6\,, \quad p_{13} = 1\,, \quad s_{13} = 12\,,$$
$$n_3 = 8\,, \quad p_{23} = 3\,, \quad s_{23} = 11\,,$$
$$p_{123} = 1\,, \quad s_{123} = 14\,.$$

Ověření 1. vzorce:

$$14 = 5 + 6 + 8 - 2 - 1 - 3 + 1\,.$$

Ověření 2. vzorce:

$$1 = 5 + 6 + 8 - 9 - 12 - 11 + 14\,.$$

Poznámka. Oba vzorce pro s_{123} a p_{123} můžete ověřit podobně jako vzorec pro s_{12} na str. 163 a 164. Pokuste se o to sami.

CVIČENÍ

1. Ve městě jsou tři linky elektrické dráhy. Celková délka kolejí je 26 km. Tratě jsou dlouhé:

I . . . . . 9 km, II . . . . . 12 km, III . . . . . 13 km.

Dále je známá délka společných úseků každých dvou linek:

I, II . . . . 3 km, II, III . . . . 6 km, I, III . . . . 4 km.

Určete délku tratě společnou všem třem linkám.

2. V rodinném albu je 74 fotografií, na nichž je aspoň jeden člen rodiny (otec, matka, syn). Na 7 fotografiích jsou oba rodiče na 53 fotografiích aspoň jeden z rodičů. 17 fotografií znázorňuje oba muže a 65 alespoň jednoho z mužů. Na 5 fotografiích je zachycen jen otec a na 25 je matka se synem. Podle toho, kdo je na fotografii, můžeme rozlišit 7 druhů fotografií. Určete počty fotografií všech sedmi druhů.

3. Na vysoké škole musí každý posluchač studovat vedle vlastního oboru ještě aspoň jeden z cizích jazyků: anglický, francouzský, ruský. Údaje o posluchačích posledního ročníku jsou zachyceny tabulkou:

(a)	**(b)**	
23	13	. . . . angličtina
23	23	. . . . francouzština
28	36	. . . . ruština
8	4	. . . . angličtina a francouzština
11	11	. . . . angličtina a ruština
12	6	. . . . francouzština a ruština
5	1	. . . . všechny tři jazyky.

Vysvětlete výsledek v případě **(b)**.

4. Ve cvičení **3. a)** určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný posluchač studuje

a) angličtinu,

b) angličtinu a ruštinu, ale ne francouzštinu.

5. V knihovně byl proveden průzkum, jaký zájem mají čtenáři o beletrii, poezii a naučnou literaturu. Bylo zjištěno, že z registrovaných čtenářů si vypůjčilo za půl roku:

65 % čtenářů beletrii,
26 % čtenářů poezii,
16 % čtenářů naučnou literaturu,
12 % čtenářů beletrii a poezii,
8 % čtenářů beletrii a naučnou literaturu,
7 % čtenářů poezii a naučnou literaturu,
1 % čtenářů knihy všech tří skupin.

a) Kolik čtenářů čte jen poezii?

b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodný návštěvník knihovny si půjčuje beletrii?

6. Na palubě výletní lodi cestuje: 9 kluků, 5 dětí z Prahy, 9 dospělých mužů, 7 venkovských kluků, 14 Pražanů, 6 Pražáků mužského rodu a 7 venkovanek. Kolik bylo na lodi celkem cestujících? Kolik z nich bylo mužského rodu, kolik Pražanů, kolik dospělých? Kolik bylo mezi cestujícími venkovských děvčat a kolik pražských kluků? Můžete dát na všechny otázky jednoznačnou odpověď? (Užijte množin: Z — množina všech cestujících, P — množina všech cestujících z Prahy, D — množina všech dospělých cestujících, M — množina cestujících mužského rodu.)

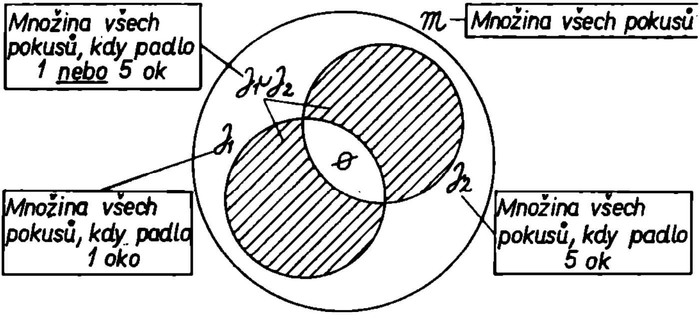
4.5. Pravděpodobnost sjednocení dvou jevů

Označíme:

jev	J_1	J_2	$J_1 \cup J_2$	$J_1 \cap J_2$
pravděpodobnost	$p(J_1)$	$p(J_2)$	$p(J_1 \cup J_2)$	$p(J_1 \cap J_2)$

A. Případ disjunktních jevů J_1, J_2 (obr. 127).

M je množina n pokusů	M je množina 100 vrhů kostkou
J_1 je první jev; v množině W má četnost n_1	J_1 nastane, když padne 1 oko; $n_1 = 15$
J_2 je druhý jev; v množině W má četnost n_2	J_2 nastane, když padne 5 ok; $n_2 = 18$
$J_1 \cup J_2$ je další jev; v množině M má četnost s_{12}	$J_1 \cup J_2$ nastane, když padne buď 1 oko, nebo 5 ok; $s_{12} = 33$



Obr. 127

Pravděpodobnost jevu J_1 je přibližně

$$p(J_1) = \frac{n_1}{n} = \frac{15}{100} = 0{,}15 = 15\ \%\,.$$

Pravděpodobnost jevu J_2 je přibližně

$$p(J_2) = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{100} = 0{,}18 = 18\ \%.$$

Pravděpodobnost jevu $J_1 \cup J_2$ je přibližně

$$p(J_1 \cup J_2) = \frac{n_1 + n_2}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} =$$

$$= p\,(J_1) + p(J_2) = 0{,}33 = 33\ \%.$$

PRAVDĚPODOBNOST SJEDNOCENÍ DVOU DISJUNKTNÍCH JEVŮ J_1, J_2 *(tj.* $J_1 \cap J_2 = \emptyset$*) je* $$p(J_1 \cup J_2) = p(J_1) + p(J_2)$$

PŘÍKLAD

V kapse mám 6 desetihaléřů, 2 pětadvacetihaléře, 1 padesátihaléř a 4 mince korunové. Vytáhnu z kapsy minci, vrátím ji a pokus opakuji 50-krát. Kolikrát pravděpodobně vytáhnu desetihaléř nebo pětadvacetihaléř?

Řešení. Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Množina všech možných výsledků má $n = 13$ prvků, neboť mám v kapse 13 mincí. Jev J_1 je množina všech výsledků, při nichž je vytažená mince desetihaléř. Jev J_1 má tedy $a_1 = 6$ prvků. Jev J_2 je množina všech výsledků, kdy vytažená mince je pětadvacetihaléř; má $a_2 = 2$ prvků. Zřejmě je $J_1 \cap J_2 = \varnothing$.

Pravděpodobnost jevu J_1 je $p(J_1) = \frac{a_1}{n} = \frac{6}{13}$.

Pravděpodobnost jevu J_2 je $p(J_2) = \frac{a_2}{n} = \frac{2}{13}$.

Pravděpodobnost jevu $J_1 \cup J_2$ je

$$p(J_1) + p(J_2) = \frac{8}{13} \doteq 0{,}61.$$

Všecky tyto pravděpodobnosti jsou teoretické.

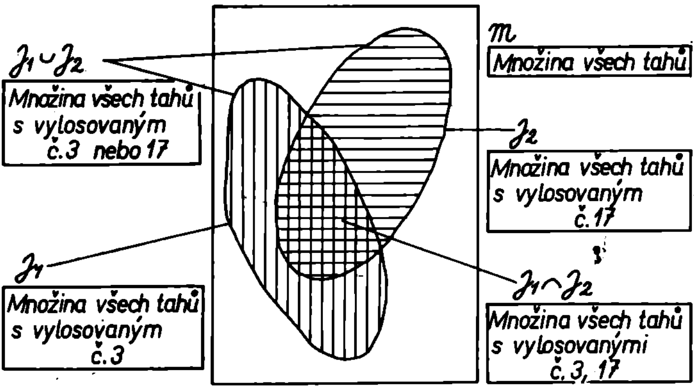
Při $k = 50$ pokusech nastane jev $J_1 \cup J_2$ (vytáhnu desetihaléř nebo pětadvacetihaléř) přibližně 31-krát, neboť

$$k.(p(J_1) + p(J_2)) = 50.0{,}61 = 30{,}5 \doteq 31.$$

B. Případ libovolných jevů J_1, J_2 (obr. 128).

M je množina n pokusů	M je množina 52 tahů ve Sportce

J_1 je první jev; v množině M má četnost n_1	J_1 nastane, když je vylosováno číslo 3; četnost $n_1 = 16$
J_2 je druhý jev; v množině M má četnost n_2	J_2 nastane, když je vylosováno číslo 17; četnost $n_2 = 13$
$J_1 \cap J_2$ je třetí jev: v množině W má četnost p_{12}	$J_1 \cap J_2$ nastane, když jsou vylosována obě čísla 3 a 17; četnost $p_{12} = 2$
$J_1 \cup J_2$ je další jev; v množině M má četnost $s_{12} = n_1 + n_2 - p_{12}$*)	$J_1 \cup J_2$ nastane, když je vylosováno aspoň jedno z čísel 3, 17; četnost $s_{12} = 16 + 13 - 2 = 27$



Obr. 128

*) Viz vzorec pro počet prvků sjednocení dvou množin na str. 161.

Pravděpodobnost $p(J_1) = \frac{n_1}{n} \doteq \frac{16}{52} \doteq 0{,}31 = 31\,\%$.

Pravděpodobnost $p(J_2) = \frac{n_2}{n} = \frac{13}{52} = 0{,}25 = 25\,\%$.

Pravděpodobnost $p(J_1 \cap J_2) = \frac{p_{12}}{n} = \frac{2}{52} \doteq$

$\doteq 0{,}04 = 4\,\%$.

Pravděpodobnost $p(J_1 \cup J_2) = \frac{s_{12}}{n} =$

$$= \frac{n_1 + n_2 - p_{12}}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} - \frac{p_{12}}{n} =$$

$$= p(J_1) + p(J_2) - p(J_1 \cap J_2) = 0{,}56 = 56\,\%.$$

PRAVDĚPODOBNOST SJEDNOCENÍ DVOU LIBOVOLNÝCH JEVŮ J_1, J_2 JE

$$p(J_1 \cup J_2) = p(J_1) + p(J_2) - p(J_1 \cap J_2)$$

Vzorec platí i pro statistické, teoretické a geometrické pravděpodobnosti.

Porovnejte uvedený vzorec se vzorcem pro počet prvků sjednocení dvou množin, str. 161.

PŘÍKLAD

Házíme velkou a malou kostkou. Výsledky zapisujeme jako dvojciferná čísla — počet ok na velké kostce udává desítky, počet ok na malé kostce značí jednotky.

Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo, které je násobkem dvou nebo tří?

Řešení. Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Pokus, tj. hod velkou a malou kostkou, má 36 možných výsledků. Jsou to dvojčlenné variace množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6}, které zapisujeme jako dvojciferná čísla. Jev J_1 je množina všech výsledků, kdy hod určí sudé číslo; jev J_1 má $n_1 = 18$ prvků. Jev J_2 je množina výsledků, kdy hod určí číslo dělitelné třemi:

$$J_2 = \{12, 15, 21, 24, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 63, 66\};$$

Jev J_2 má $n_2 = 12$ prvků. Jev

$$J_1 \cap J_2 = \{12, 24, 36, 42, 54, 66\}$$

má $p_{12} = 6$ prvků.

Pravděpodobnosti:

$$p(J_1) = \frac{18}{36} = 0,5 = 50\ \%.$$

$$p(J_2) = \frac{12}{36} \doteq 0,33 = 33\ \%.$$

$$p(J_1 \cap J_2) = \frac{6}{36} \doteq 0,17 = 17\ \%.$$

Pravděpodobnost jevu $J_1 \cup J_2$ je

$$p(J_1 \cup J_2) = p(J_1) + p(J_2) - p(J_1 \cap J_2) \doteq 0,66 = 66\ \%.$$

CVIČENÍ

1. Vypište množinu M všech dvojciferných čísel, která mají ciferný součet 9, a zjistěte počet n jejích prvků. Vypište podmnožinu $M_1 \subset M$ všech čísel, která jsou násobky čísla 5, a zjistěte počet a_1 jejich prvků. Vypište podmnožinu $M_2 \subset M$ všech čísel, která jsou sudá; zjistěte počet a_2 jejích prvků.

a) Určete teoretickou pravděpodobnost p_1, že napsané číslo z množiny M je násobek pěti.

b) Určete teoretickou pravděpodobnost p_2, že napsané číslo z množiny M je sudé.

c) Určete teoretickou pravděpodobnost p, že napsané číslo z množiny M je buď násobek pěti nebo sudé. Je $p = p_1 + p_2$?

Vysvětlete!

2. Opakujte cvičení **1** s tím, že množinu M_1 ponecháte, množinu M_2 nahradíte množinou M_3 všech čísel z M, která jsou násobky čtyř. Vypočtěte pravděpodobnosti p_1, p_3 a zjistěte zda je $p_1 + p_3 = q$, kde q je pravděpodobnost, že napíši násobek čtyř nebo pěti. Vysvětlete rozdíl mezi výsledky cvičení **1** a **2**.

3. Na rozvodné desce je pět vypínačů, každý z nich zapíná jedno světlo. Chceme rozsvítit buď světlo A nebo světlo B. Jaká je teoretická pravděpodobnost, že se nám to zdaří:

a) při zapnutí jednoho vypínače;

b) při zapnutí dvou vypínačů?

4. V osudí jsou kuličky označené všemi přirozenými čísly množiny $M = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

a) Jaká je teoretická pravděpodobnost, že vytáhnu kuličku označenou násobkem jedenácti?

b) Jaká je teoretická pravděpodobnost, že vytáhneme kuličku, označenou násobkem třinácti?

c) Jaká je teoretická pravděpodobnost, že dostaneme buď výsledek **a)** nebo výsledek **b)**?

5. a) Nakreslete podle obrázku 127 Vennův diagram tří jevů po dvou navzájem disjunktních s pravděpodobnostmi p_1, p_2, p_3. Určete pravděpodobnost, že nastane buď jev J_1 nebo jev J_2 nebo jev J_3.

b) Sestavte konkrétní příklad, třeba s hrací kostkou nebo pohybem koně na šachovnici (viz obr. 45 na str. 68).

6. Vyjděte ze stejné situace jako ve cvičení **11** na str. 69. Vypočtěte pravděpodobnost, že vytáhnu:

a) buď dvě kuličky černé nebo dvě kuličky bílé;

b) buď dvě kuličky černé nebo dvě kuličky různých barev;

c) Buď dvě kuličky černé nebo dvě kuličky bílé nebo dvě kuličky různých barev.

7. Vyjděte ze situace popsané ve cvičení **13** na str. 69 a vypočtěte teoretickou pravděpodobnost, že vytočím:

a) čtvrté nebo páté číslo správně;

b) čtvrté nebo páté nebo šesté (tj. aspoň jedno číslo) správně;

c) aspoň dvě z posledních tří čísel správně.

8. Řešte úlohu 4 pro případ množiny $M = \{1, 2, \ldots, 500\}$.

9. Ve třídě je 12 chlapců. Z nich se mají vybrat losem 4 žáci, kteří mají jet na brigádu na školní pozemek. Jaká je pravděpodobnost, že los určí aspoň jednoho ze sourozenců Jana a Josefa Okounových?

10. V dostihu poběží 8 koní, mezi nimi Avann, Vánek a Bělka. Jaká je pravděpodobnost, že Avann předběhne buď Vánka nebo Bělku. (Předpokládáme, že všechny koně mají stejné šance na umístění.)

11. Jaká je pravděpodobnost, že dva náhodně vybraní občané republiky jsou narozeni v témže měsíci, nebo slaví svátek v témže měsíci (rok narození nerozhoduje).

12. Ve škole jsou tři zájmové kroužky: sportovní (S), výtvarný (V), hudební (H). Ve třídě je 35 žáků. Počet účastníků v kroužcích udává tabulka:

S	V	H	S, V	S, H	V, H	S, V, H
12	6	9	3	5	4	1

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený žák pracuje aspoň v jednom kroužku?

13. Pokuste se určit pravděpodobnost $p\,(J_1 \cup J_2 \cup J_3)$ pomocí pravděpodobností: $p(J_1)$, $p(J_2)$, $p(J_3)$, $p(J_1 \cap J_2)$, $p(J_1 \cap J_3)$, $p(J_2 \cap J_3)$, $p(J_1 \cap J_2 \cap J_3)$.

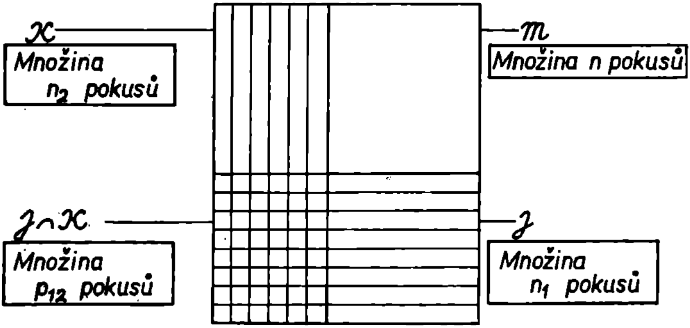
14. Z osudí vytáhněte náhodně jedno z čísel 1, 2, 3, ..., 100. Jaká je pravděpodobnost, že vytažené číslo je násobkem alespoň jednoho z čísek 3, 5, 7 (není násobkem žádného z čísel 3, 5, 7).

4.6. Pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů

Dva jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ mohou být buď

NEZÁVISLÉ nebo **ZÁVISLÉ**

Jak poznáme o dvou jevech $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$, zda jsou **nezávislé** nebo **závislé**?



Obr. 129

Máme dánu (viz Vennův diagram na obrázku 129):

Množinu $\boldsymbol{M}$ skládající se z n pokusů;

Jev $\boldsymbol{J}$ četnosti n_1;

Jev $\boldsymbol{K}$ četnosti n_2;

Jev $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}$ četnosti p_{12}.

Vypočítáme:

(a) Pravděpodobnosti jevů $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$:

$$p(\boldsymbol{J}) = \frac{n_1}{n}, \quad p(\boldsymbol{K}) = \frac{n_2}{n}.$$

(b) Pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}_1$ za předpokladu, že nastal jev $\boldsymbol{K}$. (Označení je $p_K(\boldsymbol{J})$). Je to pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}$ v množině všech pokusů, při nichž nastal jev $\boldsymbol{K}$.

$$p_K(\boldsymbol{J}) = \frac{p_{12}}{n_2}.$$

(c) Pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{K}$ za předpokladu, že nastal jev $\boldsymbol{J}$; označíme ji $p_J(\boldsymbol{K})$.

$$p_J(\boldsymbol{K}) = \frac{p_{12}}{n_1}.$$

(d) Jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ pokládáme za ***nezávislé*** právě tehdy, je-li

$$p(\boldsymbol{J}) = p_K(\boldsymbol{J}) \quad \text{a} \quad p(\boldsymbol{K}) = p_J(\boldsymbol{K})$$

Protože tyto rovnosti buď obě současně platí nebo současně neplatí (nemůže se tedy stát, že by platila pouze jedna), stačí ověřit jen jednu z těchto rovností.

Jestliže tedy

$$p(\boldsymbol{J}) \neq p_K(\boldsymbol{J}) \quad \text{a} \quad p(\boldsymbol{K}) \neq p_J(\boldsymbol{K})$$

jsou jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ ***závislé***.

K zjišťování závislosti či nezávislosti dvou jevů $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{K}$ můžeme vycházet jak ze statistické tak teoretické nebo geometrické pravděpodobnosti.

PŘÍKLAD

a) $\boldsymbol{M}$ je množina 100 vrhů hrací kostkou; $n = 100$. Jev $\boldsymbol{J}$ je množina všech vrhů, při nichž padne sudé číslo; $n_1 = 52$. Jev $\boldsymbol{K}$ je množina všech hodů, kdy padne prvočíslo; $n_2 = 49$. Množina $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}$ značí jev, při kterém padne sudé prvočíslo; $p_{12} = 16$.

Počítáme pravděpodobnosti jevů $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$.

$$p(\boldsymbol{J}) = \frac{n_1}{n} = \frac{52}{100} = 0{,}52; \quad p(\boldsymbol{K}) = \frac{n_2}{n} = \frac{49}{100} = 0{,}49\,.$$

Pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$ za předpokladu, že nastal jev $\boldsymbol{K}$ je

$$p_K(\boldsymbol{J}) = \frac{p_{12}}{n_2} = \frac{16}{49} \doteq 0{,}32\,.$$

Pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{K}$ za předpokladu, že nastal jev $\boldsymbol{J}$ se rovná

$$p_J(\boldsymbol{K}) = \frac{p_{12}}{n_1} = \frac{16}{52} \doteq 0{,}31\,.$$

Porovnáním pravděpodobností:

$$p(\boldsymbol{J}) \neq p_K(\boldsymbol{J}), \text{ neboť } 0{,}52 \neq 0{,}32\,;$$
$$p(\boldsymbol{K}) \neq p_J(\boldsymbol{K}), \text{ neboť } 0{,}49 \neq 0{,}31$$

zjistíme, že jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ jsou závislé.

b) Množiny $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{J}$ jsou z **příkladu** a). Jev $\boldsymbol{L}$ je množina všech vrhů, kdy padne násobek tří; má četnost $n_2 = 32$. Jev $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{L}$ je množina všech vrhů, při nichž padne sudé číslo a zároveň násobek tří, tj. číslo 6; má četnost $p_{12} = 17$.

Počítáme:

$$p(\boldsymbol{J}) = \frac{n_1}{n} = \frac{52}{100} = 0{,}52; \quad p(\boldsymbol{L}) = \frac{n_2}{n} = \frac{32}{100} = 0{,}32;$$

$$p_L(\boldsymbol{J}) = \frac{p_{12}}{n_2} = \frac{37}{32} \doteq 0{,}53; \quad p_J(\boldsymbol{L}) = \frac{p_{12}}{n_1} = \frac{17}{52} = 0{,}33.$$

Porovnáním pravděpodobností

$$p(\boldsymbol{J}) \doteq p_L(\boldsymbol{J}), \quad \text{neboť} \quad 0{,}52 \doteq 0{,}53\,;$$

$$p(\boldsymbol{L}) \doteq p_J(\boldsymbol{L}), \quad \text{neboť} \quad 0{,}32 \doteq 0{,}33.$$

Zjistíme, že jevy $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{L}$ jsou zřejmě nezávislé. (Rozdíly mezi porovnávanými pravděpodobnostmi jsou totiž zanedbatelné.)

Kdybychom použili teoretické pravděpodobnosti, pak by vyšlo $p(\boldsymbol{J}) = p_L(\boldsymbol{J})$ (přesně). Proveďte výpočty sami!

Jaká je pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů *J*, *K*?

Počítáme (užíváme označení zavedené na str. 178 a na obrázku 129):

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}) = \frac{p_{12}}{n} = \frac{p_{12}}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n} = \frac{p_{12}}{n_1} \cdot p(\boldsymbol{J})\,.$$

Jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ jsou nezávislé a tedy

$$\frac{p_{12}}{n_1} = p_J(\boldsymbol{K}) = p(\boldsymbol{K})\,,$$

takže

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}) = p(\boldsymbol{K}) \cdot p(\boldsymbol{J})$$

> *PRAVDĚPODOBNOST PRŮNIKU DVOU NEZÁVISLÝCH JEVŮ* ***J***, ***K*** *JE*
>
> $$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}) = p(\boldsymbol{J}) \cdot p(\boldsymbol{K})$$

Vzorec platí i pro teoretické a geometrické pravděpodobnosti.

PŘÍKLAD 2

Ověříme vzorec pro nezávislé jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{L}$ z **příkladu 1b**.

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{L}) = \frac{p_{12}}{n} = \frac{17}{100} = 0{,}17\ ;$$

$$p(\boldsymbol{J}) \, . \, p(\boldsymbol{L}) = 0{,}52 \, . \, 0{,}32 = 0{,}1664 \doteq 0{,}17\ .$$

Platí tedy rovnost

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{L}) = p(\boldsymbol{J}) \, . \, p(\boldsymbol{L})\ .$$

PŘÍKLAD 3

Házíme dvěma mincemi současně. Jaká je pravděpodobnost, že padne na obou mincích líc?

$\boldsymbol{J}$ je množina všech vrhů, kdy padne na první minci líc.

$\boldsymbol{K}$ je množina všech vrhů, kdy na druhé minci padne líc.

$\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}$ je množina všech vrhů, kdy na obou mincích padne líc.

Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Protože je

$$p(\boldsymbol{J}) = p(\boldsymbol{K}) = p_{K}(\boldsymbol{J}) = p_{J}(\boldsymbol{K}) = \frac{1}{2}\ ,$$

jsou jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ nezávislé a platí:

$$p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K}) \doteq p(\boldsymbol{J}) \, . \, p(\boldsymbol{K}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ .$$

Pro závislé jevy nelze pravděpodobnost průniku dvou jevů $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ *počítat jako součin pravděpodobností* $\boldsymbol{J}$ *a* $\boldsymbol{K}$.

PŘÍKLAD 4

Pro závislé jevy J, K z **příkladu 1a** máme:

$$p(J \cap K) = \frac{p_{12}}{n} = \frac{16}{100} = 0{,}16,$$

$$p(J) \, . \, p(K) = 0{,}52 \, . \, 0{,}49 \doteq 0{,}25 \, .$$

Oba výsledky se však podstatně liší.

Pamatujte si názvy a jejich význam:

Nezávislé a závislé jevy.

Pamatujte vzorec pro průnik nezávislých jevů J, K:

$$p(J \cap K) = p(J) \, . \, p(K) \, .$$

CVIČENÍ

1. Házíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne sudý počet ok?

2. Ve městě žije 1 200 rodin se čtyřmi dětmi. Určete přibližně v kolika rodinách mají samé dcery, tři dcery, více dcer než synů?

3. Množina M se skládá ze 2 000 následovně vybraných osob. J je množina všech lidí z množiny M trpících chronickými chorobami horních dýchacích cest. K je množina všech kuřáků z množiny M. Množiny J, K, $J \cap K$ mají pořadě 120, 1 080, 72 prvků. Zjistěte, zda jsou jevy J, K závislé nebo nezávislé.

4. K dostihu jsou přihlášeni koně: A, B, C, D. Sázková kancelář tipuje vítězství jednotlivých koní s těmito pravděpodobnostmi:

A ..... 0,4 = 40 %	C ..... 0,2 = 20 %
B ..... 0,3 = 30 %	D ..... 0,1 = 10 %

Těsně před dostihem bylo oznámeno, že kůň C nepoběží. Jak se změní pravděpodobnosti na vítězství pro koně A, B, D?

5. Házíme dvakrát hrací kostkou. Určete teoretickou pravděpodobnost, že padne celkem součet 10 ok za předpokladu, že **a)** jednou padne šestka; **b)** při prvním hodu padne šestka.

6. Do útoku hokejového mužstva mají nastoupit hráči A, B C, z nichž každý může hrát na kterémkoli místě. Jev $\boldsymbol{J}$ je: „B hraje vpravo od A (nikoliv nutně vedle A)“. Jev $\boldsymbol{K}$ je: „C hraje vpravo od A (nikoliv nutně vedle A)“.

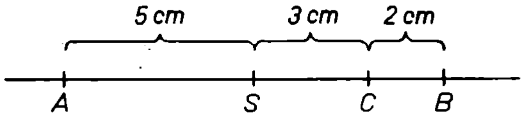
a) Určete zda jsou jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ nezávislé nebo závislé.

b) Vypočítejte teoretickou pravděpodobnost $p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K})$.

7. Zjistěte zda jevy: $\boldsymbol{J}$ — být majitelem automobilu, $\boldsymbol{K}$ — být majitelem motocyklu ze cvičení **7.** na str. 165 jsou závislé nebo nezávislé!

8. Zjistěte pro každou dvojici jevů: $\boldsymbol{J}$ — na fotografii je otec, $\boldsymbol{K}$ — na fotografii je matka, $\boldsymbol{L}$ — na fotografii je syn z cvičení **2.** na str. 169, — zda jsou či nejsou závislé.

9. Obměňte cvičení **8.** pro jevy ze cvičení **12.** na str. 177.



Obr. 130

10. Zvolíme náhodně bod $X \in AB$ (obr. 130). Doplňte tabulku!

Jev	$\boldsymbol{J}_1$	$\boldsymbol{J}_2$	$\boldsymbol{J}_1 \cup \boldsymbol{J}_2$	$\boldsymbol{J}_1 \cap \boldsymbol{J}_2$
výsledek pokusu	$CX \leqq 3\,\mathrm{cm}$	$SX \leqq 2\,\mathrm{cm}$		
pravděpodobnost				

11. Zvolíme náhodně dva body X, Y úsečky $AB = 10$ cm. Jevy $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ jsou množiny

a) $\boldsymbol{J} = \{X, Y \in AB \mid AX \leqq 3 \text{ cm}\}$, $\boldsymbol{K} = \{X, Y \in AB \mid BY = 2 \text{ cm}\}$;

b) $\boldsymbol{J} = \{X, Y \in AB \mid AX \leqq 3 \text{ cm}\}$, $\boldsymbol{K} = \{X, Y \in AB \mid BY = 2 \text{ cm}\}$.

Vypočítejte pravděpodobnost: $p(\boldsymbol{J})$, $p(\boldsymbol{K})$, $p_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{J})$, $p_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{K})$, $p(\boldsymbol{J} \cup \boldsymbol{K})$, $p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K})$.

12. Zvolíme náhodně bod X patřící rovnostrannému trojúhelníku $\boldsymbol{T} = ABC$. Jev $\boldsymbol{J}$ je množina všech bodů X, které mají od strany AB menší vzdálenost než od strany AC. Jev $\boldsymbol{K}$ je množina všech bodů X, které mají od bodu A větší vzdálenost než od bodu B.

Vypočítejte pravděpodobnosti: $p(\boldsymbol{J})$, $p(\boldsymbol{K})$, $p_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{J})$, $p_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{K})$, $p(\boldsymbol{J} \cup \boldsymbol{K})$, $p(\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{K})$.

Seznam pokusných učebních textů

(Hvězdičkami jsou označeny učební texty, ze kterých bylo použito úloh v této knížce)

A. UČEBNÍ TEXTY PRO ZDŠ

**J. Taišl* a *M. Koman:* Matematika pro 5. roč. ZDŠ

**J. Vyšín:* Úvod do moderní matematiky, část 1 - Množiny a číselné soustavy, část 2 - Desetinná čísla, obsahy a objemy (6. roč. ZDŠ)

**M. Koman:* Kombinatorika (7. roč. ZDŠ)

Z. Dlouhý: Relace (7. roč. ZDŠ)

J. Hájek, J. Maláč a *J. Weigel:* Zlomky (7. roč. ZDŠ)

J. Vyšín: Zobrazení (7. roč. ZDŠ)

J. Vyšín: Rovnice (8. roč. ZDŠ)

V. Čech a *V. Blažek:* Obrazce (8. roč. ZDŠ)

Z. Dlouhý: Reálná čísla (8. roč. ZDŠ)

K. Hruša: Operace (8. roč. ZDŠ)

J. Vyšín: Množiny bodů (9. roč. ZDŠ)

J. Vyšín: Stereometrie (9. roč. ZDŠ)

J. Vyšín: Grupy (9. roč. ZDŠ)

**M. Koman* a *J. Taišl:* Matematika pro 6. roč. ZDŠ, část I a II

Z. Dlouhý: Matematika pro 7. roč. ZDŠ, část I, II a III

**J. Vyšín, Z. Dlouhý* a *M. Koman:* Množiny a relace (7. roč. ZDŠ)

**J. Vyšín:* Nezáporná racionální čísla (7. roč. ZDŠ)

J. Vyšín: Geometrické struktury I a II (8. roč. ZDŠ)

J. Vyšín: Funkce (9. roč. ZDŠ)
J. Vyšín: Aritmetika a logika (8. roč. ZDŠ)
J. Rohlíčková a J. Vyšín: Matematika pro 8. roč. ZDŠ

B. UČEBNÍ TEXTY PRO GYMNASIA

J. Šedivý: Matematika pro 1. roč. gymnasií
J. Šedivý: Zobrazení, funkce a operace (1. a 2. roč. gymnasií)
J. Vyšín: Metoda souřadnic (2. roč. gymnasií)
V. Jodas: Komplexní čísla (3. roč. gymnasií)

Všechny uvedené učební texty vydala JČsMF, Kabinet pro modernizaci vyučování matematice, MÚ ČSAV, Praha 1-Nové Město, Krakovská 10, tel. 26 43 01.

OBSAH

4. Učíme se počítat s množinami

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MILAN KOMAN - JAN VYŠÍN

malý výlet do moderní matematiky

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Ladislav Smoljak
Publikace číslo 3161
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 30
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
7,29 AA, 7,53 VA. 192 stran
Náklad 7000 výtisků. 1. vydání
Praha 1972. 508/21/8.5

23-043-72 03/2 Cena brož. výt. Kčs 12,—

[redacted]

23 - 043 - 72
03/2
Cena brož.
Kčs 12 =