Dirichletov princíp

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

DIRICHLETOV PRINCÍP

25

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

LEV BUKOVSKÝ - IGOR KLUVÁNEK

Dirichletov princíp

PRAHA

VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali dr. Jaroslav Fuka a dr. Milan Koman

PREDSLOV

Na jeseň roku 1966 usporiadal KV MO Východoslovenského kraja školenie pre úspešných riešiteľov MO kategórie B. Jedna z tém preberaných na tomto školení je predmetom tejto knihy. Jedná sa o známy *Dirichletov „zásuvkový" princíp*. Úlohy a problémy preberané na tomto školení sme doplnili, sústavnejšie usporiadali a v tejto forme ich podávame.

Táto brožúrka je v podstate zbierkou príkladov a úloh. Ostatného textu je veľmi málo. Pritom niet rozdielu medzi príkladom a úlohou. K niektorým úlohám sme pripojili ihneď do textu riešenie a nazvali príkladmi. Majú slúžiť ako návod na riešenie úloh, ktoré za príkladom nasledujú. K niektorým úlohám vzadu pripojujeme návody na riešenie.

Brožúrka je rozdelená do niekoľkých kapitol. Sú podľa nášho názoru odstupňované podľa obtiažnosti. Sú však medzi sebou nezávislé, možno ich teda čítať v ľubovoľnom poradí. Formulácia princípu, ktorý sa v celej knihe používa, možno nájsť na začiatku prvej a začiatku tretej kapitoly.

Autori

1. kapitola

DIRICHLETOV PRINCÍP

Pod menom „*Dirichletov princíp*" sa obyčajne uvádza nasledujúce tvrdenie:

(d) Ak je viac než n predmetov rozdelené do n skupín (n je prirodzené číslo), potom aspoň v jednej skupine sa nachádzajú aspoň dva predmety.

V konkrétnych situáciách tvrdenie (d) hovorí napr. toto:

Profesor Kvantifikátor nemôže rozmiestniť svojich päť detí do štyroch izieb svojho bytu tak, aby v každej izbe bolo najviac jedno dieťa, tj. nutne musia aspoň v jednej izbe byť aspoň dve deti.

Ak má profesor Kvantifikátor deväť fajok svojej zbierky v zásuvkách písacieho stola a stôl má osem zásuviek, potom aspoň v jednej zásuvke je viac než jedna fajka.

Tvrdenie (d) sa niekedy nazýva „*zásuvkový princíp*". V literatúre sa stretneme i s označením „*holubníkový princíp*". Autori, ktorí dávajú tento názov tvrdeniu (d), majú na mysli holuby profesora Kvantifikátora (vo voľnom čase sa venuje chovu ušľachtilých holubov). Má totiž n holubníkov, ale viac než n holubov. Potom aspoň v jednom holubníku musí mať dvoch, alebo viac holubov.

Tvrdenie (d) nie je ťažké **dokázať**.

Nech k_i je počet predmetov v i-tej skupine ($i = 1, 2, \ldots, n$). Keby v každej skupine bol naviac jeden predmet (tj. žiaden, alebo iba jeden), čiže k_i je menšie, alebo rovné jednej, pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom všetkých predmetov by bolo $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant 1 + 1 + \ldots + 1 = n$.

Jedná sa teda o tvrdenie na pohľad veľmi jednoduché, ale vhodným použitím môžeme dostať veľmi silné výsledky. Obyčajne pomocou Dirichletovho princípu dokazujeme existenciu takých objektov, ktoré nemožno (alebo je veľmi ťažké) efektívne skonštruovať.
Uveďme príklad.

Príklad 1. Podľa antropológie neexistujú ľudia s väčším počtom vlasov, ako 500 000. Dokážeme, že v Prahe existujú dvaja ľudia s rovnakým počtom vlasov.

Riešenie. Najskôr uvážime, že Praha má vyše milión obyvateľov. Obyvateľov Prahy rozdelíme do skupín tak, že do n-tej dáme všetkých obyvateľov Prahy, ktorí majú práve n vlasov ($n = 0, 1, 2, \ldots, 500\,000$). Podľa tvrdenia antropológov, každý obyvateľ Prahy padne do niektorej z tých skupín. Pretože Pražanov je viac ako skupín, aspoň v jednej skupine je viac ako jeden Pražan, tj. existujú dvaja obyvatelia Prahy s rovnakým počtom vlasov.

Uvedený príklad je typický tým, že efektívne nájsť dvoch Pražanov s rovnakým počtom vlasov je z pochopiteľných dôvodov prakticky nemožné.

Bezprostredné použitie Dirichletovho princípu si možno overiť na nasledujúcich úlohách.

Úloha 1. Súkromná knižnica má 1100 zväzkov, pričom žiaden z nich nemá viac ako 1000 strán. Dokážte, že v knižnici existujú dve knihy s rovnakým počtom strán.

Úloha 2. Na vysokú školu prijali do prvého ročníka 120 poslucháčov, ktorí maturovali na 84 stredných školách. Potom sa v prvom ročníku nájdu aspoň dvaja poslucháči, ktorí sa poznajú zo strednej školy. Dokážte!

Úloha 3. Neporiadny študent mal v zásuvke ponožky piatich farieb (z každej farby aspoň dve). Koľko kusov ponožiek musí po tme vybrať, aby bol istý, že mezdi nimi budú dve rovnakej farby?

Úloha 4. Hádžeme dvoma kockami. Koľkokrát treba hodiť, aby sme mali zaručené, že dvakrát padol rovnaký súčet bodov na kockách?

Dirichletov princíp možno formulovať i všeobecnejšie: (D) Ak je viac než mn predmetov rozdelených do n skupín, potom aspoň v jednej skupine je viac ako m predmetov.

Dôkaz je rovnaký ako prv. Nech k_i je počet predmetov v i-tej skupine ($i = 1, 2, \ldots, n$). Keby v každej skupine bolo najviac m predmetov, tj. $k_i \leqslant m$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom všetkých predmetov by bolo $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant m + m + \ldots + m = mn$.

Príklad 2. Konferencie sa zúčastnilo 40 delegátov z 13 krajín. Dokážte, že delegácia aspoň jednej krajiny mala viac ako troch členov!

Riešenie. Rozdelíme delegátov do skupín podľa krajín, tj. v každej skupine sú všetci delegáti istej krajiny. Keďže skupín je 13 a delegátov je viac ako $3 . 13 = 39$, musia byť aspoň v jednej skupine viac ako traja delegáti.

Úloha 5. Koľkokrát treba hodiť troma kockami, aby bolo zistené, že aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet bodov na kockách?

Úloha 6. Koľkokrát treba hodiť dvoma kockami, aby trikrát padla tá istá dvojica čísel? Úlohu riešte a) v prípade, že kocky sú rovnaké (t. j. dvojice (2,1) a (1,2) pokladáme za rovnaké); b) v prípade, že kocky sú rôzne (napr. rôznej farby; v tomto prípade dvojice (2,1) a (1,2) považujeme za rôzne).

Predošlé príklady a úlohy sa dali riešiť bezprostredným použitím Dirichletovho princípu. Stačilo vhodne zvoliť rozdelenie do skupín, čo obyčajne vyplynulo zo zadania úlohy. Často sa však stáva, že k riešeniu nedôjdeme takto bezprostredne, ale sme nútení využiť i iné okolnosti, ktoré vyplývajú zo zadania úlohy.

Príklad 3. Daný je vypuklý štrnástisten s 9 vrcholmi. Dokážte, že existuje na ňom vrchol, z ktorého vychádza aspoň 5 hrán.

Riešenie. Ako vieme, pre počet s stien, počet v vrcholov a počet h hrán vypuklého mnohostena platí *Eulerov vzťah*

$$s + v = h + 2.$$

Teda náš 14-sten má $14 + 9 - 2 = 21$ hrán. Rozdeľme každú hranu napoly, dostaneme 42 polhrán. Tieto rozdeľme do 9 skupín, podľa toho, z ktorého vrcholu vychádzajú. Podľa (D) v jednej skupine je viac ako 4 t. j. aspoň 5 polhrán. Teda z jedneho vrcholu vychádza aspoň 5 polhrán, čiže aj hrán.

Úloha 7. Daný je vypuklý sedmisten so 6 vrcholmi. Dokážte, že práve jedna stena toho sedmistena je štvoruholník.

Niekedy vedie k cieľu použitie Dirichletovho princípu niekoľkokrát za sebou.

Príklad 4. Konferencie sa zúčastnilo 70 delegátov, ktorí hovoria 11 rôznymi jazykmi. Jedným jazykom hovorí najviac 15 delegátov. Organizačný výbor rozhodol, že za oficiálny bude považovať taký jazyk, ktorým hovorí najmenej 5 delegátov. Dokážte, že na konferencii boli aspoň 3 oficiálne jazyky.

Riešenie. Keďže delegátov je 70 a hovoria 11 jazykmi, iste jedným jazykom hovorí nie menej, ako 5 delegátov. Teda existuje jeden oficiálny jazyk, nazvime ho jazyk A. Jazykom A hovorí najviac 15 delegátov, t. zn., že ostatnými 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov. Teda medzi týmito 10 jazykmi sa musí nájsť jazyk (označme ho B), ktorým hovorí najmenej 5 delegátov. To je druhý oficiálny jazyk. Jazykom B hovorí najviac 15 delegátov, teda zbývajúcimi 9 jazykmi hovorí aspoň 40 delegátov. Zasa podľa

Dirichletovho princípu možno spomedzi týchto 9 jazykov vybrať jeden oficiálny.

Existenciu štyroch oficiálnych jazykov nie je možné dokázať (protipríkladom je napríklad nasledovná situácia: tromi jazykmi hovorí po 15 delegátov, siedmimi jazykmi hovorí po 3 delegátov a jedným jazykom hovoria 4 delegáti).

Iné podobné ukážky sú napr. v kapitole V.

Uvedieme ešte niekoľko rôznych, prípadne i náročnejších príkladov a úloh.

Príklad 5. Treba dokázať, že spomedzi ľubovoľne zvolených 13 (reálnych) čísel možno vybrať dve, označme ich x, y, také, že

$$0 < \frac{y - x}{1 + xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

Riešenie. Označme dané čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$. Nech $b_1, b_2, \ldots, b_{13}$ sú také čísla ležiace medzi $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, že $a_1 = \operatorname{tg} b_1$, $a_2 = \operatorname{tg} b_2, \ldots, a_{13} = \operatorname{tg} b_{13}$. (Také čísla určitě existujú. Spomeňte si, že funkcia $y = \operatorname{tg} x$ nadobúda v intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ všetky reálne hodnoty). Rozdelíme interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ na 12 rovnakých častí. Podľa (d) aspoň v jednej z týchto častí existujú dve z čísel $b_1, b_2, \ldots, b_{13}$, nech sú to napr. α, β (napr. $\alpha = b_3$, $\beta = b_7$, alebo podobne). Nech naviac $\alpha < \beta$ (t. j. označili sme α menšie a β väčšie z nich). Potom $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{12}$. Označme $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$. Teda x je niektoré z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$, a y tiež.

Keďže funkcia tg x je v intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rastúca, máme

$$\frac{y-x}{1+xy} = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\beta-\alpha) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3},$$

a naše tvrdenie je dokázané.

Úloha 8. Spomedzi $n + 1$ ľubovoľne zvolených čísel možno vždy vybrať dve tak, že ak ich označíme x, y, bude

$$0 < \frac{y-x}{1+xy} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Dokážte!

Úloha 9. Spomedzi ľubovoľne zvolených 11 čísel intervalu (1,100) sa vždy dajú vybrať dve tak, že ich podiel je menší než 1,6 a väčší než 1. Dokážte!

Príklad 6. V záhrade tvaru obdĺžnika o rozmeroch 20 m × 15 m musí byť menej než 26 stromov, ak má byť zachované pravidlo, že vzdialenosť dvoch stromov nie je menšia než 5 m. Dokážte!

Riešenie. Pripusťme, že by v záhrade bolo viac, než 25 stromov. Rozdelíme záhradu na obdĺžniky rozmerov 4 m × 3 m. Takých obdĺžnikov sa do našej záhrady vmestí práve 25. Teda podľa (d) aspoň v jednom z týchto obdĺžnikov musia byť aspoň dva stromy. Keďže uhlopriečka obdĺžnika má dĺžku 5 m, vzdialenosť týchto stromov je menšia než 5 m.

Úloha 10. V záhrade o rozmeroch 35 m × 42 m je 100 stromov. Dá sa v nej nájsť obdĺžnik o rozmeroch 3 m × 5 m taký, aby na ňom rástli aspoň dva stromy?

Úloha 11. Ak je na štvorci rozmerov 10 × 10 umiestené 101 bodov, potom možno vybrať taký trojuholník o plošnom obsahu 1 cm², že na ňom sú aspoň dva spomedzi daných bodov.

Úloha 12. V záhrade o rozmeroch 80 m $\times$ 90 m rastie 365 stromov. Dá sa nájsť časť záhrady tvaru obdĺžnika o rozmeroch 5 m $\times$ 8 m, na ktorej rastú aspoň 3 stromy?

Úloha 13. Na obdĺžniku rozmerov 27 m $\times$ 36 m je umiestené 1945 bodov. Dokážte, že aspoň 7 z nich možno naraz pokryť trojuholníkom plošného obsahu 3 ~~c~~m^2.

Úloha 14. Ak je v štvorci o strane 1 umiestené ľubovoľne 51 bodov, potom možno niektoré tri spomedzi nich pokryť kruhom o polomere $\frac{1}{7}$.

2. kapitola

ÚLOHY Z TEÓRIE ČÍSEL

V teórii čísel možno použitím Dirichletovho princípu nájsť často neočakávané výsledky. Dirichlet sám s úspechom používal tento princíp v teórii čísel a odtiaľ má tento princíp svoje meno. Je však veľmi pravdepodobné, že bol niektorými matematikmi využívaný i pred tým. Možno, že nie tak výrazne a vedome.

Príklad 7. Dané je 82 prirodzených čísel. Treba dokázať, že sa medzi nimi dajú nájsť dve také, že ich rozdiel je deliteľný číslom 81.

Riešenie. Rozdelíme dané čísla do 81 skupín, podľa toho, aký zvyšok dávajú po delení číslom 81. Teda do prvej skupiny dáme tie, ktoré dávajú zvyšok 0 po delení 81, do druhej tie, ktoré dávajú zvyšok 1, do tretej tie, ktoré dávajú zvyšok 2, atď., až do osemdesiatej prvej dáme tie čísla, ktoré po delení číslom 81 dávajú zvyšok 80. Keďže skupín je menej ako čísel, aspoň v jednej skupine sa nachádzajú dve čísla. Teda medzi danými číslami sa dajú nájsť dve, ktoré po delení 81 dávajú rovnaký zvyšok. Ich rozdiel je deliteľný číslom 81.

Úloha 15. Ak je dané $n + 1$ prirodzených čísel, potom medzi nimi existujú dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom n. Dokážte!

Úloha 16. Ku každému prirodzenému číslu n existuje číslo zapísané v desiatkovej sústave v tvare $11\ldots100\ldots0$, ktoré je deliteľné číslom n.

Úloha 17. Ku každému prvočíslu p rôznemu od 2,5 existuje číslo tvaru $111\ldots1$ (t. j. zapísané v desiatkovej sústave iba pomocou cifry 1) deliteľné p.

Príklad 8. Je dané 67 prirodzených čísel. Dokážte, že možno spomedzi nich vybrať niekoľko tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom 67.

Riešenie. Označme dané čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{67}$. Utvorme čísla $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_{67} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{66} + a_{67}$. Ak je niektoré z čísel $s_1, s_2, \ldots, s_{67}$ deliteľné číslom 67, úloha je riešená. Ak nie je, čísla $s_1, s_2, \ldots, s_{67}$ rozdelíme do 66 skupín a to tak, že do n-tej skupiny dáme tie, ktoré po delení číslom 67 dávajú zvyšok n ($n = 1, 2, \ldots, 66$). Podľa Dirichletovho princípu aspoň v jednej skupine sa nájdu dve, označme ich s_k, s_h, $k < h$. Potom $s_h - s_k$ je deliteľné 67, pričom $s_h - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_h$.

Úloha 18. Spomedzi n čísel sa dá vybrať niekoľko tak, že ich súčet je deliteľný n. Dokážte!

Podobným obratom, ako príklad 7 a predošlú úlohu, je možné riešiť nasledujúce úlohy.

Úloha 19. Ignác Kvantifikátor (syn známeho profesora Kvantifikátora) rieši po dobu troch mesiacov pred krajským kolom *MO* aspoň jednu úlohu denne. Pritom za kalendárny týždeň nerieši viac, ako 13 úloh. Dokážte, že sa dá nájsť niekoľko po sebe idúcich dní v uvedenom období, za ktoré rieši práve 33 úloh!

Úloha 20. Jeho priateľka v tom istom období rieši aspoň dve úlohy denne, ale za týždeň nie viac, ako 17. Dokážte, že buď existuje niekoľko po sebe idúcich dní, za ktoré rieši práve 23 úloh, alebo niekoľko po sebe idúcich dní, za ktoré rieši práve 46 úloh!

Úloha 21. Nech p a q sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že existuje prirodzené číslo n také, že číslo

$1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ je deliteľné číslom p! Ak $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ je deliteľné číslom p a k je prirodzené číslo, potom aj číslo $1 + q + q^2 \ldots + q^{k(n+1)-1}$ je deliteľné číslom p. Dokážte!

Príklad 9. Dokážte, že dekadický zápis niektorej mocniny čísla 37 končí skupinou cifier 00001! (Tu i v ďalšom, tým myslíme, že dané číslo má v dekadickom zápise okrem cifry 1 na mieste jednotiek ešte aspoň jednu cifru rôznu od nuly. Teda napr. dekadický zápis čísla 1 nekončí skupinou cifier 00001.)

Riešenie. Vezmeme čísla 37, 37^2, 37^3, atď., až $37^{100\,000}$. Ak niektoré z nich po vydelení číslom 100 000 dá zvyšok 1, sme hotoví, pretože jeho zápis v desiatkovej sústave končí 00001. Ak žiadne nedáva po delení 100 000 zvyšok 1, rozdelíme ich na skupiny tak, že do n-tej skupiny dáme tie čísla 37^k, ktoré dávajú po delení 100 000 zvyšok n, pričom $n = 0, 2, 3, \ldots, 99\,998, 99\,999$. Teda skupín je 99 999 a čísel 100 000. Existujú dve čísla h, k také, že $37^k - 37^h$ je deliteľné 100 000. Predpokladajme, že $k > h$. Keďže $37^k - 37^h = 37^h (37^{k-h} - 1)$ a 37 je nesúdeliteľné s číslom 100 000, je $37^{k-h} - 1$ deliteľné číslom 100 000, čiže 37^{k-h} dáva po delení číslo 100 000 zvyšok 1.

Úloha 22. Nech číslo p je nesúdeliteľné s číslom 100 000. Dokážte, že dekadický zápis niektorej mocniny čísla p končí skupinou cifier 00001! Dokážte tiež, že pre každé n prirodzené existuje také prirodzené číslo k, že p^k má dekadický zapis končiaci skupinou n núl a cifrou 1!

Úloha 23. Nech čísla p a q sú nesúdeliteľné. Dokážte, že niektorá kladná mocnina čísla p dáva po delení číslom q zvyšok 1.

Poznámka. Tzv. *Malá veta Fermatova* tvrdí, že tá mocnina čísla p je p^{q-1}. Jej dôkaz je však podstatne zložitejší.

Ak x je reálne číslo, znakom $[x]$ označujeme tzv. *celú* *časť* čísla x. Je to také celé číslo, že $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Napr. $[3] = 3$, $[-7] = -7$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-7{,}2] = -8$ a pod.

Príklad 10. Dokážte, že existuje také prirodzené číslo $k \leqslant 100$, že rovnici $\left[\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right] = k$ vyhovuje aspoň 100 prirodzených čísel!

Riešenie. Pre x prirodzené, $x \leqslant 10\,000$ je $1 \leqslant \left[\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right] \leqslant$ $\leqslant 100$. Prirodzené čísla nie väčšie ako 10 000 rozdeľme do tried tak, že do k-tej triedy, $k = 1, 2, \ldots, 100$ dáme tie čísla, pre ktoré $\left[\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right] = k$. Aspoň jedna z týchto tried obsahuje nie menej než 100 čísel (podľa (D)). Príslušné k vyhovuje požiadavkám úlohy.

Úloha 24. Dokážte, že existuje také prirodzené číslo k

a) $k \leqslant 6000$, že rovnici $[\sqrt{x} \log x] = k$ vyhovuje aspoň 160 prirodzených čísel!

b) $k \leqslant 600$, že rovnici $[\sqrt{x} \log x] = k$ vyhovuje aspoň 1600 prirodzených čísel!

Príklad 11. Nech x je iracionálne číslo. Ak k je ľubovoľné prirodzené číslo, potom existujú také celé čísla m, n, že $0 < m + nx < \frac{1}{k}$. Dokážte!

Riešenie. Uvažujme o číslach $x_1 = x - [x]$, $x_2 = 2x - [2x]$, $\ldots$, $x_k = kx - [kx]$, $x_{k+1} = (k + 1)\,x - [(k + 1)\,x]$. Tieto všetky čísla sú kladné a menšie ako 1. Pre každé $i = 1, 2, \ldots, k, k + 1$ je $[ix] \leqslant ix < [ix] + 1$. Pritom nemôže byť $x_i = 0$, pretože by bolo $x = \frac{[ix]}{i}$ a keďže $[ix]$ je celé, bolo by x racionálne. Všetky čísla $x_1, x_2, \ldots,$

x_{k+1} sú navzájom rôzne. Keby totiž bolo $x_i = x_j$ pre $i \neq j$, bolo by $ix - [ix] = jx - [jx]$, odkiaľ $x = \frac{[ix] - [jx]}{i - j}$, čo je spor.

Interval $\langle 0,1)$ rozdelíme na k rovnakých častí, t. j. uvažujeme intervaly $\langle 0,\frac{1}{k})$, $\langle \frac{1}{k},\frac{2}{k})$, $\langle \frac{2}{k},\frac{3}{k})$, $\ldots$, $\langle \frac{k-1}{k},\frac{k}{k})$. Podľa (d) aspoň do jedného z týchto intervalov padnú aspoň dve z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$. Nech sú to čísla x_i, x_j a nech je $x_i < x_j$. Potom je $0 < x_j - x_i < \frac{1}{k}$, čiže $0 < jx - [jx] - (ix - [ix]) < \frac{1}{k}$. Ak položíme $m = [ix] - [jx]$ a $n = j - i$, bude $0 < m + nx < \frac{1}{k}$.

Poznámka. Z príkladu 11 vyplýva, že medzi každými dvoma číslami a, b existuje číslo tvaru $m + nx$. Podrobnejšie: ak $a < b$ a ak x je iracionálne číslo, potom existujú celé čísla m, n tak, že $a < m + nx < b$.

Dôkaz. Nájdeme prirodzené číslo k tak, aby bolo $\frac{1}{k} < b - a$. Podľa príkladu 11 existujú celé čísla m_0, n_0 tak, že $0 < m_0 + n_0 x < \frac{1}{k}$. Nech h je najmenšie celé číslo, pre ktoré $a < h(m_0 + n_0 x)$, teda $h = \left[\frac{a}{m_0 + n_0 x}\right] + 1$. Potom je aj $h(m_0 + n_0 x) < b$. Keby totiž bolo $h(m_0 + n_0 x) \geq b$, bolo by $(h-1)(m_0 + n_0 x) = h(m_0 + n_0 x) - (m_0 + n_0 x) \geq b - \frac{1}{k} > a$. Stačí teda zvoliť $m = hm_0$, $n = hn_0$ a bude $a < m + nx < b$.

Úloha 25. Nech $x \neq 0$ je racionálne číslo, ktoré sa dá písať v tvare $x = \frac{p}{q}$, kde p je celé, q prirodzené a p, q sú nesúdeliteľné. Ak k je prirodzené číslo, $k < q$, potom existujú také celé čísla m, n že $0 < m + nx < \frac{1}{k}$. Dokážte!

Poznámka 1. Ak x je racionálne číslo, $x \neq 0$, $x = \frac{p}{q}$, kde p je celé a q prirodzené číslo a α, β sú také čísla, že $\beta - \alpha < \frac{1}{q}$, potom existujú celé čísla m a n tak, že $\alpha < < m + nx < \beta$.

2. Ak $k \geq q$ potom neexistujú také celé čísla m a n, aby $0 < m + nx < \frac{1}{k}$.

Úloha 26. Dokážte tvrdenie v poznámke 1.

Úloha 27. Dokážte tvrdenie v poznámke 2.

Nasledujúci príklad a úlohy využívajú skôr myšlienku dôkazu Dirichletovho princípu, než princíp sám. Taká situácia sa často vyskytuje bez toho, že by sme si ju uvedomovali. Nie je to potrebné si uvedomovať, ale je vhodné nacvičiť sa pohotovo myšlienku tohoto typu využívať. Je samozrejmé, že uvedené úlohy možno riešiť i priamo použitím Dirichletovho princípu, avšak za cenu väčšej ťažkopádnosti.

Hovoríme, že prvočísla p, q nasledujú po sebe, ak $p < q$ a ak neexistuje také prvočíslo r, že $p < r < q$. Ak p, q sú prvočísla, ktoré nasledujú po sebe a $q - p = 2$, hovoríme, že p, q je *pár dvojičiek.*

Príklad 12. Ak je známe, že existuje práve 7 prvočísel nie menších než 1061 a nie väčších než 1097 a existujú medzi nimi dve prvočísla p, q nasledujúce po sebe a také, že $p - q = 18$, treba dokázať, že existujú aspoň dva páry dvojičiek medzi 1061 a 1097.

Riešenie. Označíme $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ prvočísla medzi 1061 a 1097 usporiadané podľa veľkosti. Teda $1061 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_6 < p_7 \leq 1097$. Podľa zadania existuje také i (i je niektoré z čísel 1, 2, ..., 6), že $p_{i+1} - p_i = 18$. Žiaden z rozdielov $p_{j+1} - p_j$ nemôže byť nepárny. Ale $(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \ldots + (p_7 - p_6) \leq 36$. Keďže jeden z týchto rozdielov je 18, súčet piatich rozdielov neprevyšuje 18. Ak medzi týmito rozdielmi je jeden väčší alebo rovný 6, potom medzi zbývajúcimi štyrmi musia byť aspoň dva, ktoré sa rovnajú 2 (lebo ich súčet neprevyšuje 12). Ale, ak by každý rozdiel bol menší ako 6, t. j. neprevyšoval by 4 a neexistovali by dva rovnajúce sa dvom, potom by uvedené rozdiely museli byť 2, 4, 4, 4, 4 (prípadne v inom poradí). Máme teda jeden rozdiel 2, štyri rozdiely 4 a jeden rozdiel 18. Teda aspoň dva rozdiely 4 musia ísť po sebe (Dirichletov princíp), t. j. nastáva situácia $p_j < p_{j+1} < p_{j+2}$, pričom $p_{j+1} = p_j + 4$, $p_{j+2} = p_j + 8$. Ale to je spor, lebo p_j nie je deliteľné tromi, dáva teda po delení zvyšok 1 alebo 2, potom však buď $p_j + 4$ alebo $p_j + 8$ je deliteľné tromi, lebo dávajú zvyšok postupne 2,0 alebo 0,1.

Úloha 28. Medzi číslami 3 907 a 3 947 je 9 prvočísel a rozdiel dvoch z nich po sebe idúcich je 12. Dokážte, že medzi 3 907 a 3 947 sú aspoň 2 páre dvojičiek!

Úloha 29. Ak medzi číslami a, b je $k \geq 2$ prvočísel, $a < b$ a rozdiel dvoch z nich po sebe nasledujúcich je h, potom existuje medzi a a b aspoň $\left[2(k-1) - \frac{b-a-h}{2}\right]$ párov dvojičiek. Dokážte!

Takto získaný odhad je veľmi slabý. Porovnajte ho napr. s tvrdením úlohy 28!

3. kapitola

VÄČŠINOU GEOMETRIA

Dirichletov princíp v tej forme, ako sme ho formulovali v I. kapitole sa týkal iba prirodzených čísel, pretože sa v ňom jednalo o počet prvkov nejakej množiny (konečnej). Niekedy je však výhodné využívať iné veličiny na meranie „*veľkosti*" množiny, ako počet jej prvkov (napr. ak je množina nekonečná). Môže to napr. byť dĺžka plošný obsah, objem, veľkosť uhla a pod. V takých prípadoch „*veľkosť*" nemusí byť číslo prirodzené, ale ľubovoľné reálne číslo (napr. zlomok alebo aj iracionálne číslo). Pre také prípady je výhodné formulovať *Dirichletov princíp* takto:

(D_1) Ak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú ľubuvoľné reálne čísla, ktorých súčet je väčší, alebo sa rovná číslu b, potom aspoň jedno z nich je väčšie, alebo sa rovná číslu $\frac{b}{n}$.

Dôkaz tohoto tvrdenia je úplne rovnaký ako dôkaz Dirichletovho princípu v I. kapitole. Keby bolo $a_i < \frac{b}{n}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom by bolo $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < < \frac{b}{n} + \frac{b}{n} + \ldots + \frac{b}{n} = b.$

Príklad 13. Treba dokázať, že aspoň jeden vnútorný uhol vypuklého n-uholníka je väčší, alebo sa rovná $\frac{n-2}{n}\pi$.

Riešenie. Súčet vnútorných uhlov vypuklého n-uholníka je $(n-2)\pi$, preto podľa (D_1) aspoň jeden z nich musí byť väčší, alebo sa rovná $\frac{n-2}{n}\pi$.

Príklad 14. Poldavia má rozlohu 268 138 km². Je v nej rozmiestnených 13 televíznych vysielačiek a retranslačných staníc. Nejaké miesto spĺňa normu kvality príjmu, ak nie je vzdialené od najbližšej stanice ako 80 km. Dokážte, že Poldavia ešte nie je úplne televizifikovaná, t. j. existujú v nej miesta, ktoré nespĺňajú normu kvality televízneho príjmu.

Riešenie. Nech s_i je plošný obsah tej časti Poldavie, ktorej miesta sú vzdialené od i-tej stanice nie viac, ako 80 km, $i = 1, 2, \ldots, 13$. Ak by bolo každé miesto televizifikované, potom by bolo $s_1 + s_2 + \ldots + s_{13} \geq 268\,138$, čiže podľa (D_1) aspoň pre jedno i by bolo $s_i \geq \frac{268\,138}{13} =$ $= 20\,626$ km². Ale $s_i \leqslant \pi . 80^2$ km² $\doteq 20\,160$ km² pre každé $i = 1, 2, \ldots, 13$. (Nemusí byť nutne $s_i = \pi . 80^2$, pretože časť kruhu o polomere 80 km, v strede ktorého je i-ta stanica, môže siahať za hranice Poldavie.)

Všimnite si, že z (D_1) ihneď vyplýva (d) aj (D).

Úloha 30. Dokážte (d) a (D) pomocou (D_1)!

Nech je daná množina M bodov. Každý uhol $\sphericalangle ABC$, kde A, B, C sú body množiny M, nazveme uhlom určeným bodmi množiny M. Pripomíname, že $\sphericalangle ABC$ znamená uhol s vrcholom B a ramenami BA, BC, pritom, ak sa nerovná π, menší z dvoch možných. Napr. vnútorné uhly vypuklého mnohouholníka sú uhly určené vrcholmi tohto mnohouholníka (ale nie každý uhol určený vrcholmi vypuklého mnohouholníka je jeho vnútorný uhol).

Úloha 31. Ak sú dané tri body v rovine, potom aspoň jeden uhol nimi určený je väčší, alebo sa rovná $\frac{1}{3}\pi$.

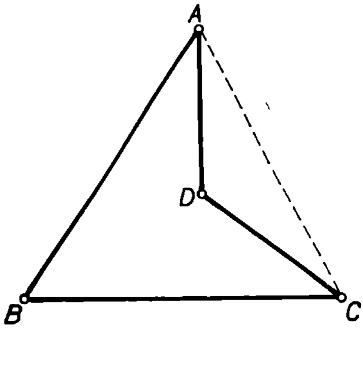
Poznámka. Všetky uhly určené vrcholmi rovnostranného trojuholníka sa rovnajú $\frac{1}{3}\pi$. Všetky uhly určené vrcholmi pravidelného štvorstena sa rovnajú tiež $\frac{1}{3}\pi$.

Príklad 15. Ak sú dané štyri rôzne body v rovine, potom aspoň jeden uhol nimi určený je väčší, alebo sa rovná $\frac{1}{2}\pi$.

Riešenie. Ak tri z daných bodov ležia na jednej priamke, je príklad vyriešený, lebo potom jeden uhol nimi určený sa rovná π. Pripusťme preto, že žiadne tri z daných bodov neležia na jednej priamke. Uvažujme o štvoruholníku, ktorý má vrcholy v daných bodoch. Rozoznávajme dva prípady.

a) Uvažovaný štvoruholník je vypuklý. Potom všetky vnútorné uhly tohoto štvoruholníka sú uhly určené danými štyrmi bodmi. Podľa príkladu 13 aspoň jeden z nich musí byť väčší, alebo rovný $\frac{1}{2}\pi$.

b) Uvažovaný štvoruholník nie je vypuklý. Potom jeden z jeho vrcholov leží vo vnútri trojuholníka určeného ostatnými tromi. (Obr. 1.) Označíme ten bod D a ostatné vrcholy A, B, C. Uvažujme o uhloch $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle BDC$,



Obr. 1.

$\sphericalangle$ *CDA*. Ich súčet je 2π. Teda zasa podľa Dirichletovho princípu (formulácia (D_1)) aspoň jeden je väčší, alebo sa rovná $\frac{2}{3}\pi > \frac{1}{2}\pi$.

Úloha 32. 5 bodov v rovine určuje aspoň jeden uhol väčší alebo rovný $\frac{3}{5}\pi$. Dokážte!

Úloha 33. 6 bodov v rovine určuje aspoň jeden uhol väčší alebo rovný $\frac{2}{3}\pi$. Dokážte!

Úloha 34. Ak je daných 7 bodov v rovine, potom aspoň jeden uhol nimi určený je väčší ako $\frac{2}{3}\pi$. Dokážte!

Problém. Úlohy 31—34 a príklad 15 vzbudzujú domnienku, že platí tvrdenie:

Ak je daných $n + 1$ bodov v rovine, ($n \geq 3$) potom aspoň jeden uhol nimi určený je väčší $\frac{n-2}{n}\pi$.

Toto tvrdenie sa autorom nepodarilo ani dokázať, ani vyvrátiť. Bolo by zaujímavé dokázať toto tvrdenie pre niektoré ďalšie hodnoty n, napr. $n = 7,8$, atď.

Analogicky ako (D_1) sa dajú dokázať nasledujúce obmeny princípu (D_1).

(D_2) Ak je dané n reálnych čísel, ktorých súčet je väčší než číslo b, potom aspoň jedno z nich je väčšie než $\frac{b}{n}$.

(D_3) Ak súčet n reálnych čísel je menší alebo sa rovná číslu b, potom aspoň jedno z nich je menšie alebo sa rovná $\frac{b}{n}$.

(D_4) Ak je súčet n reálnych čísel menší než b, potom aspoň jedno z nich je menšie než $\frac{b}{n}$.

Úloha 35. Dokážte (D_2), (D_3), (D_4) podobne, ako sme dokázali (D_1).

I keď každé z tvrdení (D_2), (D_3), (D_3) možno dokazovať podobne ako (D_1), všetky sa dajú z (D_1) odvodiť (podobne z každého tvrdenia (D_2), (D_3), (D_4) ostatné). Na ukážku urobíme dôkaz (D_2) pomocou (D_1).

Pripusťme, že $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú také čísla, že $a_1 + a_2 + + \ldots + a_n > b$. Označme $b' = a_1 + a_2 + \ldots a_n$, teda $b' > b$. Podľa D_1 existuje také a_i, že $a_i \geq \frac{b'}{n} > \frac{b}{n}$.

Príklad 16. Dokážte, že do krabice tvaru valca výšky 60 cm a priemeru základne 40 cm sa nevmestí 2630 stolnotenisových loptičiek priemeru 3,8 cm.

Riešenie. Objem krabice je 75 412,5 cm^3. Predpokladajme, že by v tejto krabici bolo umiestených 2630 loptičiek. Potom súčet ich objemov nemôže prevyšovať 75 412,5 cm^3. Podľa (D_3) objem aspoň jednej z nich by musel byť menší alebo sa rovnať $\frac{75\,412{,}5}{2630} < 28{,}69$. Ale objem každej z nich je $\frac{\pi}{6} (3{,}8)^3 > 28{,}7$.

Príklad 17. Treba dokázať, že v sade tvaru obdĺžnika o rozmeroch 100 m krát 300 m musí byť menej než 3851 stromov, ak vzdialenosť ľubovoľných dvoch má byť väčšia než 4 m.

Riešenie. Postupujeme podobne ako v príklade 6. Pripusťme, že v sade je viac stromov než 3851. Sad rozdelíme na rovnaké obdĺžniky o stranách $\frac{100}{35}$ a $\frac{300}{110}$. Bude ich $35 \times 110 = 3850$. Podľa (d) aspoň v jednom z týchto obdĺžnikov sa musia nachádzať aspoň dva stromy. Keďže uhlopriečka má dĺžku $\sqrt{\left(\frac{100}{35}\right)^2 + \left(\frac{300}{110}\right)^2} < 4$ vzdialenosť aspoň dvoch stromov je menšia ako 4.

Ak by sme sa pokúsili (vo funkcii hospodárneho záhradníka) rozmiestiť v sade z predošlého príkladu čím viac stromov tak, aby ich vzdialenosti boli aspoň 4 m, pri žiadnom rozmiestnení sa nám nepodarí umiestiť do sadu 3000 stromov. Mali by sme sa teda pokúsiť dokázať, že sa nedá umiestiť do sadu menší počet stromov. Inými slovami, v riešení príkladu (ktoré je inak správne) sme použili pomerne slabú metódu.

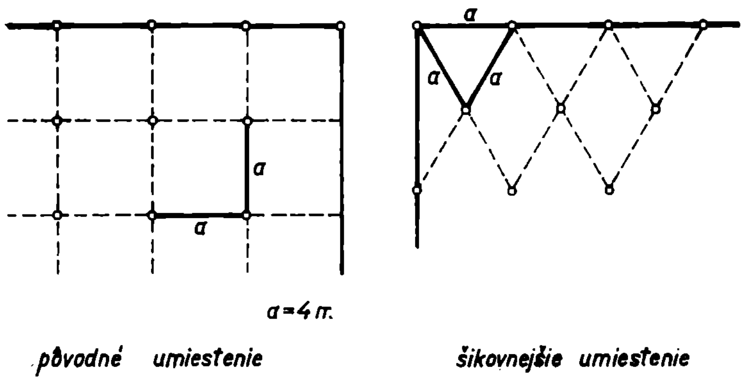
Keď použijeme vhodnejšiu, môžeme dostať lepší výsledok. Prezradíme ho v nasledujúcom príklade.

Príklad 18. V sade tvaru obdĺžnika o rozmeroch 100 m × 300 m musí byť menej než 2516 stromov, ak vzdialenosť ľubovoľných dvoch stromov má byť väčšia ako 4 m. Dokážte!

Riešenie. Predpokladajme, že v sade je viac než 2515 stromov a že vzdialenosť ľubovoľných dvoch je väčšia než 4 m. Uvažujme o kruhoch, ktorých stredy sú miesta, v ktorých sú zasadené stromy a ktorých polomery sú rovnaké a to 2 m. Podľa predpokladu žiadne dva z týchto kruhov nemajú spoločný bod (lebo vzdialenosť stromov je väčšia než 4 m). Všetky kruhy ležia vo vnútri obdĺžnika o rozmeroch 2 + 100 + 2 m krát 2 + 300 + 2 m, pretože stromy rastú v sade a teda kruh môže siahať von najviac o 2 m. Plošný obsah tohoto obdĺžnika je 31 616 m². Súčet plošných obsahov kruhov nemôže byť väčší než 31 616. Teda podľa (D) aspoň jeden z nich má plošný obsah nie väčší než $\frac{31\,616}{2516} < 12{,}5659$ m². Ale plošné obsahy týchto kruhov sú rovnaké a to $\pi . 2^2 < 12{,}5663$. To je spor.

Samozrejme, ani výsledok tohoto príkladu nebude najlepší možný. Je dobre možné, že maximálny počet stromov, ktoré sa dajú umiestiť pri zachovaní vzdialenosti 4 m do sadu, bude menší než 2515.

Na prvý pohľad je jasné, že do sadu možno umiestiť 1976 stromov. Umiestime ich tak, že sad rozdelíme na štvorce strany 4 m a do ich vrcholov nasadíme stromy. Bude ich $\left(\frac{100}{4}+1\right) \times \left(\frac{300}{4}+1\right) = 26 \times 76 = 1976.$



Obr. 2.

Ale pri šikovnejšom umiestení sa ich dá umiestiť viac. Dá sa umiestiť dokonca 2219 stromov. Umiestime ich podľa schémy na obr. 2 (je tam 44 radov po 26 a 43 radov po 25 stromov). Teda maximálny počet stromov, ktoré možno v sade umiestiť je niekde medzi 2219 a 2515. Každé zúženie tohto intervalu znamená nový matematický výsledok. Pritom zvýšenie dolnej hranice predpokladá umiestenie väčšieho počtu stromov do sadu a zníženie hornej hranice predpokladá dôkaz, že do sadu nemožno umiestiť viac než k stromov, pričom k je nejaké číslo menšie než 2515.

Úloha 36. Dokážte, že v obdĺžniku o rozmeroch 197 krát 94 sa nedá umiestiť 24 000 bodov tak, aby každé dva mali vzdialenosť nie menšiu než 1!

Úloha 37. Dokážte, že v obdĺžniku o rozmeroch a, b sa nedá umiestiť viac než $\frac{4(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)}{\pi\varepsilon^2}$ bodov tak, aby vzdialenosť ľubovoľných dvoch bola väčšia než ε!

Úloha 38. Dokážte, že v obdĺžniku o rozmeroch a, b sa nedá umiestiť viac než $\left[\frac{2ab}{\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(a+b)\right] + 1$ bodov tak, aby vzdialenosť ľubovoľných dvoch bola väčšia než ε!

Príklad 19. Jama kruhového tvaru priemeru 6 m je zakrytá 15 doskami (t. j. nie je vidieť ani kúsok jamy). Dokážte, že šírka aspoň jednej dosky nie je menšia než 40 cm!

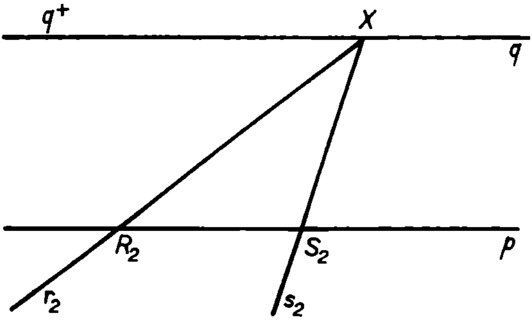
Riešenie. Zadanie úlohy možno presnejšie sformulovať takto. Daný je kruh priemeru 6 m, ktorý je pokrytý 15 rovinnými pásmi $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$. Nech šírky pásov sú h_1, $h_2, \ldots, h_{15}$. Máme dokázať, že aspoň pre jedno h_i platí $h_i \geq 40$ cm.

Uvažujme o guľovej ploche priemeru 6 m, ktorej stred leží v strede daného kruhu. Cez každé dve priamky, ohraničujúce pás p_i, veďme roviny kolmé na rovinu daného kruhu. Tieto dve roviny vyrežú z guľovej plochy časť (je to časť guľovej plochy, ohraničujúcej guľovú vrstvu alebo guľový vrchlík). Jej plošný obsah je $6\pi h_i$ alebo menší. Keďže pásy pokrývajú kruh, tieto časti guľovej plochy pokrývajú celú guľovú plochu. Plošný obsah celej guľovej plochy je 36π. Teda $\sum_{i=1}^{15} 6\pi h_i \geq 36\pi$, odkiaľ $\sum_{i=1}^{15} h_i \geq 6$.

Teda podľa (D_1) aspoň pre jednu zo šírok h_i je $h_i \geq \frac{6}{15}$ m = = 40 cm.

Úloha 39. Kruh polomeru R je pokrytý n pásmi. Dokážte, šírku aspoň jedného pásu je väčšia alebo rovná $\frac{2R}{n}$.

V nasledujúcich príkladoch a úlohách nech je v rovine daná priamka p a nech je zvolená jedna z polrovín, označme ju ϱ^+, na ktoré p delí rovinu ϱ.



Obr. 3.

Všimnime si nasledujúcu zaujímavú situáciu. Zvoľme ľubovoľne bod X v polrovine ϱ^+ neležiaci na priamke p. Na priamke p existuje 5 úsečiek u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 bez spoločných bodov s týmito vlastnosťami. Ak zostrojíme kružnice k_i so stredom S_i v ϱ^+ polomeru u_i tak, aby u_i bola jej tetivou, potom bod X leží vo vnútri každej kružnice k_i pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Tieto úsečky možno zostrojiť takto (obr. 3). Bodom X vedieme rovnobežku q s priamkou p. Nech q^+ je jedna z polpriamok na ktoré delí X priamku q. Nech r_1 je polpriamka s počiatkom X pretínajúca p a zvierajúca s q^+ uhol 1°, s_1 je polpriamka s počiatkom X pretínajúca p a zvierajúca s q^+ uhol 35°, r_2 nech zviera uhol 36°, s_2 uhol 70°, r_3 uhol 71°, s_3 uhol 105°, r_4 uhol 106°, s_4 uhol 140°, r_5 uhol 141°, s_5 uhol 175° (obr. 3). Nech R_1 je priesečník r_1 s p, S_1 priesečník s_2 s p, R_2 priesečník r_2 s p, S_2 priesečník s_2 s p, atď.

Nech u_1 je úsečka R_1S_1, u_2 úsečka R_2S_2. atď. Zrejme tieto úsečky nemajú spoločný bod. Ak zostrojíme kružnicu k_i tak, že u_i je jej tetiva a kružnica k_i má polomer u_i, bod X leží nutne vo vnútri k_i. Obvodový uhol na kružnici k_i prislúchajúci tetive u_i má totiž 30°, kdežto trojuholník s vrcholom X a základňou u_i má pri vrchole X uhol 34°.

Šesť úsečiek s týmito vlastnosťami zostrojiť nie je možné.

Príklad 20. Nech je na priamke p dané 6 úsečiek u_1 až u_6 bez spoločných bodov. Nech k_i sú také kružnice so stredmi v polrovine ϱ^+ polomeru u_i, že u_i sú ich tetivy. Potom neexistuje bod, ktorý by ležal vo vnútri každej z týchto kružníc.

Riešenie. Nech X je ľubovoľný bod roviny ϱ. Dokážeme, že X neleží vnútri každej z daných kružníc, že leží mimo niektorej (t. j. aspoň jednej) z daných kružníc.

Rozoznávajme tri prípady.

a) Bod X leží na p. Bod X leží vo vnútri kružnice k_i práve vtedy, keď leží na úsečke u_i. Keďže tieto úsečky nemajú spoločný bod, X bude ležať nanajvýš vo vnútri jednej z kružníc k_i.

b) Bod X leží v polrovine ϱ^- opačnej k polrovine ϱ^+, ale nie na p. Potom X zasa leží vo vnútri nanajvýš jednej z daných kružníc, pretože časti príslušných kruhov ležiace v ϱ^- nemajú dva a dva spoločný bod.

c) Nech X leží v polrovine ϱ^+ a nie na priamke p. Pospájame bod X s koncovými bodmi úsečiek u_i. Označme α_i uhol pri vrchole X trojuholníka so základňou u_i a s vrcholom X. Keďže všetky základne ležia na jednej priamke, súčet uhlov α_i je menší než 180°, t. j. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 < 180°$. Teda podľa ($D_4$) aspoň jeden z uhlov α_i je menší než 30°. Keďže obvodový uhol na kružnici k_i zostrojený nad tetivou má 30°, bod X padne mimo tejto kružnice.

Poznámka. Riešenie sa ľahko upraví i pre prípad, že niektoré z úsečiek u_1 až u_6 majú spoločný koncový bod, ale okrem neho žiaden iný.

Úloha 40. Nech je na priamke p dané n úsečiek $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bez spoločných bodov (alebo so spoločnými iba koncovými bodmi). Nech k_i sú kružnice so stredmi ležiacimi v ϱ^+ také, že u_i sú ich tetivy a k nim prislúchajúce stredové uhly sú α (všetky rovnaké). Ak $n . \alpha \geq 360°$, potom neexistuje bod ležiaci vo vnútri týchto kružníc. Ak $n . \alpha < 360°$, tak sa úsečky $u_1, \ldots, u_n$ dajú zvoliť tak, že existuje bod ležiaci vo vnútri všetkých týchto kružníc.

Úloha 41. Nech je na priamke p dané n úsečiek $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bez spoločných bodov (alebo so spoločnými iba koncovými bodmi). Nech k_i sú kružnice so stredmi ležiacimi v ϱ^+ také, že u_i sú ich tetivy a k nim prislúchajúce stredové uhly sú α_i.

Ak $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 360°$, potom neexistuje bod ležiaci vo vnútri všetkých týchto kružníc.

Ak $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 360°$, tak sa úsečky $u_1, \ldots, u_n$ dajú zvoliť tak, že existuje bod ležiaci vo vnútri všetkých týchto kružníc.

4. kapitola

KÓDOVANIE

Príklad 21. Dané sú dve cifry (napr. 1, 2). Koľko sa dá nájsť trojciferných čísel zostavených iba z týchto cifier takých, aby sa ľubovoľné dve čísla líšili aspoň na dvoch miestach?

Riešenie. Skúšaním sa nám podarí nájsť napr. tieto štyri čísla, ktoré majú uvedenú vlastnosť 111, 122, 212, 221. Každé dve sa líšia aspoň na dvoch miestach (napr. prvé dve na druhom a treťom mieste.) Iná štvorica je 222, 211, 121, 112. I pri viacerých pokusoch sa nám nepodarí nájsť päť takých čísel. Pokúsime sa dokázať, že skutočne viac ako 4 čísla s danými vlastnosťmi nájsť nemožno.

Dvojciferné čísla, ktoré sa líšia na dvoch miestach možno zrejme nájsť iba dve, napr. 11 a 22 alebo 12 a 21. Predpokladajme, že trojciferných by bolo viac ako 4. Rozdelíme ich na dve skupiny. Do prvej dáme tie, ktoré začínajú cifrou 1, do druhej tie, ktoré začínajú cifrou 2. Potom podľa (D) aspoň v jednej z týchto skupín musia byť aspoň 3 čísla. Tieto tri čísla sa medzi sebou líšia aspoň na dvoch miestach. Ale cifru na prvom mieste majú rovnakú. Ak túto prvú cifru vynecháme, dostaneme 3 dvojciferné čísla, ktoré sa líšia medzi sebou na dvoch miestach. To však nie je možné. Teda existujú najviac 4 trojciferné čísla, ktoré sa všetky medzi sebou líšia aspoň na dvoch miestach.

Úloha 42. Ukážte, že možno nájsť 8 štvorciferných (16 päťciferných) čísel zostavených z dvoch cifier tak, že ľubovoľné dve čísla sa líšia aspoň na dvoch miestach a viac než

8 štvorciferných (16 päťciferných) čísel s touto vlastnosťou neexistuje.

Úloha 43. Ukážte, že nemožno nájsť viac ako 2^{n-1} n-ciferných čísel zostavených z dvoch cifier tak, aby ľubovoľné dve z nich sa líšili aspoň na dvoch miestach. Pokúste sa dať návod na zostrojenie 2^{n-1} n-ciferných čísel s touto vlastnosťou (indukciou podľa n).

Uvedený príklad a úlohy majú zaujímavý význam. Dané dve cifry môžu znamenať dva signály, ktoré používa nejaké zariadenie na prenášanie zpráv (telegraf a pod.). Napr. 1 značí impulz $+$ a 2 impulz $-$, alebo 1 značí bodku a 2 čiarku Morseovej abecedy a pod.

Pri prenášaní zpráv musíme písmená našej obyčajnej abecedy zakódovať (označiť) pomocou signálov, ktoré naše zariadenie používa, napr. *a* bude dané ako 11111, *b* ako 11112, *c* ako 11221 atď. Pritom, ako každé technické zariadenie, i náš telegraf sa môže dopustiť pri svojej činnosti chyby. Mohlo by sa stať napr., že namiesto poslednej cifry 1 v označení písmena *a* prijmeme cifru 2 a rozlúštime namiesto písmena *a* písmeno *b*. Ak by sme zakódovali písmená tak, že čísla označujúce jednotlivé písmená sa budú líšiť aspoň na dvoch miestach, potom vždy možno zbadať, ak náš telegraf urobí jednu chybu. Ak by sme zakódovali písmená tak, že sa čísla označujúce písmená budú líšiť aspoň na troch miestach, potom dokonca môžeme jednu chybu i opraviť. Ak telegraf vyšle jednu cifru chybne, kódové označenie iba jedného písmena sa bude od vyslaného čísla líšiť iba na jednom mieste.

Pri týchto úlohách je potrebné zistiť, koľko písmen možno zakódovať pomocou čísel (kódových označení) n-ciferných, kde n je dané prirodzené číslo. Ide o to, či budeme mať k dispozícii dosť čísel na zakódovanie. Nemusíme totiž kódovať (a teda prenášať) iba písmená abecedy, ale aj iné údaje alebo znaky, ktorých môže byť ľubovoľný počet.

Ďalej je zrejmé, že je nepodstatné či používame cifry a čísla, alebo iné znaky a ich skupiny.

Príklad 22. Treba dokázať, že nemožno zostrojiť viac než 4 päťciferné čísla (stále iba pomocou dvoch cifier 1, 2) tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na troch miestach. Pritom štyri také čísla je možné zostrojiť, napr. 11111, 22211, 11222, 22122.

Riešenie. Predpokladajme, že máme aspoň 5 päťciferných čísel, ktoré sa líšia medzi sebou aspoň na troch miestach. Rozdelíme ich na dve skupiny. V prvej skupine budú tie, ktoré začínajú cifrou 1, v druhej tie, ktoré začínajú cifrou 2. Podľa (D) aspoň v jednej z týchto skupín budú aspoň tri čísla. Ak vynecháme z nich prvú cifru (tá je pre všetky rovnaká), dostaneme 3 štvorciferné čísla, ktoré sa líšia aspoň na troch miestach. Ukážeme, že takáto situácia nie je možná. Nech A, B, C sú tieto tri čísla. Čísla A a B sa líšia aspoň na troch miestach a čísla B, C tiež aspoň na troch miestach. Odtiaľ vyplýva, že existujú aspoň dve miesta, na ktorých sa zároveň líši A od B a B od C. Keďže sú k dispozícii iba dve cifry, toto nie je možné.

Úloha 44. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 8 šesťciferných čísel pomocou cifier 1, 2 tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na troch miestach. Zostrojte 8 takých čísel!

Úloha 45. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 16 sedemciferných čísel pomocou dvoch cifier tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na troch miestach!

Príklad 23. Treba dokázať, že nemožno nájsť viac než 28 osemciferných čísel zostavených z cifier 1, 2 tak, aby sa každé dve líšili aspoň na troch miestach.

Riešenie. Predpokladajme, že takých čísel máme 29, nech sú to $A_1, A_2, \ldots, A_{28}, A_{29}$. Nech G_i je množina, ktorá pozostáva z čísla A_i a všetkých tých osemciferných čísel, ktoré sa líšia od A_i práve na jednom mieste pre $i = 1, 2, \ldots, 29$. Žiadne dve rôzne G_i nemajú spoločné prvky, pretože A_i sa od A_j $(i \neq j)$ líši aspoň na troch miestach. Všetkých osemciferných čísel je $2^8 = 256$, teda podľa (D_3) aspoň jedna množina G_i má najviac $\frac{256}{29} < 9$ prvkov. Ale zrejme všetky množiny G_i majú po 9 prvkov.

Úloha 46. Podľa vzoru príkladu 22. znovu riešte úlohu 45!

Úloha 47. Dokážte, že nemožno nájsť viac než $\left[\frac{2^n}{n+1}\right]$ n-ciferných čísel zostavených z dvoch cifier tak, aby sa každé dve líšili aspoň na troch miestach!

Príklad 24. Dokážte, že nemožno nájsť viac než 4 šesťciferné čísla zostavené z dvoch cifier tak, aby sa ľubovoľné dve líšili aspoň na štyroch miestach!

Riešenie. Predpokladajme, že máme aspoň 5 šesťciferných čísel, ktoré sa líšia medzi sebou aspoň na štyroch miestach. Rozdelíme ich na dve skupiny. V prvej skupine budú tie, ktoré začínajú cifrou 1, v druhej tie, ktoré začínajú cifrou 2. Podľa (D) aspoň v jednej z týchto skupín budú aspoň tri čísla. Ak vynecháme z nich prvú cifru (tá je pre všetky tri rovnaká), dostaneme tri päťciferné čísla, ktoré sa líšia aspoň na štyroch miestach. Ukážeme, že táto situácia nie je možná. Nech A, B, C sú tieto päťciferné čísla. Čísla A a B sa líšia aspoň na štyroch miestach a čísla B a C tiež aspoň na štyroch miestach. Odtiaľ vyplýva, že existujú aspoň tri miesta, na ktorých sa zároveň A líši od B a zároveň B od C. Ale A od C sa tiež líši aspoň na štyroch miestach. Preto musí byť aspoň jedno miesto, na ktorom sa aj A líši od B, aj B od C a zároveň A od C. Keďže sú k dispozícii iba dve cifry, toto nie je možné.

Poznámka. Všimnite si, že riešenie príkladu 24 sa temer zhoduje s riešením príkladu 22.

Úloha 48. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 8 sedemciferných čísel z dvoch cifier tak, aby sa každé dve líšili aspoň na štyroch miestach! Zostrojte 8 takých čísel!

Úloha 49. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 16 osemciferných čísel z dvoch cifier tak, aby sa každé dve líšili aspoň na štyroch miestach! Zostrojte 16 takých čísel!

Úloha 50. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 2^{n-4} n-ciferných čísel z dvoch cifier tak, aby sa každé dve líšili aspoň na štyroch miestach!

Príklad 25. Pomocou štyroch cifier (napr. 1, 2, 3, 4) nemožno zostrojiť viac než 16 takých trojciferných čísel, aby sa každé dve líšili aspoň na dvoch miestach. Treba dokázať toto tvrdenie a ukázať, že 16 takých čísel sa dá zostrojiť.

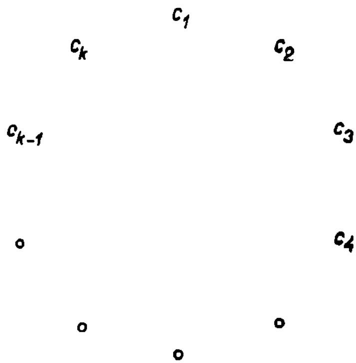
Riešenie. Pripusťme, že máme viac než 16 takých čísel. Rozdelíme ich na 4 skupiny podľa toho, aká je prvá cifra. Podľa (D) aspoň v jednej z nich bude najmenej 5 čísel. Ak z nich vyškrtneme prvú cifru, dostaneme 5 (alebo viac) dvojciferných čísel, ktoré sa líšia na obidvoch miestach. Tieto dvojciferné čísla zasa rozdelíme do 4 skupín podľa prvej cifry. Keďže ich je viac než 4, v jednej skupine by museli byť aspoň dve. Teda dve z našich čísel by mali rovnakú prvú cifru. To je spor s tým, že čísla sa líšia na oboch miestach.

Nasledujúce čísla sú trojciferné, každé dve sa líšia najmenej na dvoch miestach a sú zostrojené pomocou štyroch cifier: 111, 122, 133, 144, 221, 232, 243, 214, 331, 342, 313, 324, 441, 412, 423, 434.

V nasledujúcich úlohách budeme stále hovoriť o cifrách a n-ciferných číslach i keď cifier bude viac než 10. Môžeme mať pritom na mysli iné než dekadické (desatinné) číselné sústavy. Ešte lepšia možnosť je vidieť pod ciframi signály (znaky) a pod n-cifernými číslami n-členné skupiny signálov (zakódované zprávy) a pod.

Úloha 51. Pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než k^2 trojciferných čísel tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na dvoch miestach. Dokážte!

Udáme teraz návod na zostrojenie k^2 trojciferných čísiel pomocou k cifier, z ktorých ľubovoľné dve sa líšia najmenej na dvoch miestach.



Obr. 4.

Nech cifry sú $c_1, c_2, \ldots, c_k$ (žiadna z cifier nie je nula, prípadne čísla tvaru 001, 023 a pod. považujeme tiež za trojciferné). Napíšme si cifry $c_1, c_2, \ldots, c_k$ do kruhu (obr. 4). Zostrojíme k skupín trojciferných čísel tak, že v každej skupine bude k čísel. Prvá skupina bude mať na prvom mieste cifru c_1. Budú ju tvoriť čísla $c_1c_1c_1$, $c_1c_2c_2$, $c_1c_3c_3$, $\ldots$, $c_1c_kc_k$. Druhá skupina bude mať na prvom mieste cifru c_2. Budú ju tvoriť čísla $c_2c_2c_1$, $c_2c_3c_2$, $c_2c_4c_3$, $c_2c_5c_4$, $\ldots$, $c_2c_kc_{k-1}$, $c_2c_1c_k$. Túto skupinu zostrojíme z prvej tak, že v i-tom čísle prvej skupiny prvú cifru (t. j. c_1) nahradíme cifrou c_2, druhú cifru nahradíme nasledujúcou cifrou podľa poradia na obr. 4, t. j. ak $i < k$, miesto c_i píšeme c_{i+1}, ak $i = k$, miesto c_k píšeme c_1. Cifry na tretích miestach nemeníme. Tretiu skupinu zostrojíme z druhej podobne ako druhú sme zostrojili z prvej. Na prvom mieste bude cifra c_3. Cifru na druhom mieste zase nahradíme cifrou nasledujúcou v poradí podľa obr. 4. Cifry na tretích miestach nemeníme. Teda tretiu skupinu budú tvoriť čísla $c_3c_3c_1$, $c_3c_4c_2$, $c_3c_5c_3$, $\ldots$, $c_3c_kc_{k-2}$, $c_3c_1c_{k-1}$, $c_3c_2c_k$. Podobne zostrojíme ďalšie skupiny čísel začínajúce postupne ciframi c_4, c_5, atď. až c_k. Napr. skupina k-ta bude pozostávať z cifier $c_kc_kc_1$, $c_kc_1c_2$, $c_kc_2c_3$, $\ldots$, $c_kc_{k-2}c_{k-1}$, $c_kc_{k-1}c_k$.

Overenie, že každé dve z takto zostrojených k^2 trojciferných čísel sa líšia aspoň na dvoch miestach, prenechávame čitateľovi. Ak by vám to robilo potiaže, je užitočné zostrojiť si ich pre $k = 5,6$ prípadne viac.

Úloha 52. Pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než k^3 štvorciferných čísel tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na dvoch miestach. Dokážte!

Úloha 53. Pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než k^{n-1} n-ciferných čísel tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na dvoch miestach. Dokážte!

Príklad 26. Treba dokázať, že nemožno pomocou k cifier zostrojiť viac než $\frac{k^5}{(5k-4)}$ päťciferných čísel, z ktorej každé dve by sa líšili aspoň na troch miestach.

Riešenie. Pripusťme, že máme m päťciferných čísel, z ktorých každé dve sa líšia aspoň na troch miestach, ďalej že používame iba k cifier a že $m > \frac{k^5}{(5k-4)}$. Nech sú to čísla $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Uvažujme o množinách $G_1, G_2, \ldots, G_m$, pričom každá množina G_i pozostáva z čísla A_i a zo všetkých päťciferných čísel, ktoré sa od A_i líšia práve na jednom mieste. Žiadne dve z týchto množín nemajú spoločné body (lebo čísla A_i od A_j sa líšia aspoň na troch miestach). Nech l_i je počet prvkov množiny G_i. Teda $\sum_{i=1}^{m} l_i \leqslant k^5$, pretože k^5 je počet všetkých päťciferných čísel.

Teda podľa (D_3) aspoň pre jedno i je $l_i \leqslant \frac{k^2}{m} < \frac{k^5}{\frac{k^5}{(5k-4)}} = 5k - 4$.

To však nie je možné, pretože každá množina G_i má práve $5k - 4$ členov.

Úloha 54. Dokážte, že pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než $\left[\frac{k^n}{(nk + 1 - n)}\right]$ n-ciferných čísel, z ktorých každé dve sa líšia aspoň na troch miestach!

Úloha 55. Dokážte, že pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než a) $\frac{k^n}{\left(1 + n(k-1) + \binom{n}{2}(k-1)^2\right)}$,

b) $\frac{k^n}{\left(1 + n(k-1) + \binom{n}{2}(k-1)^2 + \binom{n}{3}(k-1)^3\right)}$

n-ciferných čísel, z ktorých ľubovoľné dve by sa líšili a) aspoň na piatich, b) aspoň na siedmich miestach!

Zrejme odhad získaný v úlohe 54 nie je najlepší. V príklade 22 a úlohe 44 sme získali lepšie odhady. Ovšem, aj metódy boli zložitejšie.

Všeobecná úloha: koľko je maximálne n-ciferných čísiel napísaných pomocou k cifier s vlastnosťou, že každé dve sa líšia aspoň na h miestach, je pre prax (konkrétne pre kybernetiku) veľmi dôležitá. Dodnes nie je úplne vyriešená, i keď riešenie pre niektoré konkrétne (a malé) hodnoty parametrov k, n, h je známe (niektoré sme vyriešili v predchádzajúcej kapitole).

5. kapitola

EŠTE KOMBINATORICKÁ TÉMA

Dirichletov princíp formulovaný v tvare (D) je svojou povahou kombinatorický, preto možno očakávať, že bude vhodný na riešenie úloh kombinatorického charakteru. Úlohy takého typu boli uvedené v predchádzajúcej kapitole. Ako ukážeme v nasledujúcich úlohách, (D) vedie k cieľu v mnohých prípadoch, keď nemáme k dispozícii prakticky žiadne iné prostriedky.

Príklad 27. Je dané 6 priamok v priestore, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom. Potom sa dajú nájsť tri z nich tak, že ležia v jednej rovine, alebo tri, ktoré sú navzájom mimobežné.

Riešenie. Označme dané priamky p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. Priamky p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 rozdelíme do dvoch skupín. Do prvej dáme tie, ktoré sa s priamkou p_6 pretínajú a do druhej tie, ktoré sú s p_6 mimobežné. Podľa (D) aspoň jedna z týchto skupín obsahuje tri priamky. Nech sú to napr. p_1, p_2, p_3 (na ich označení zrejme nezáleží).

Povedzme, že sú to priamky prvej skupiny. Teda p_6 pretína p_1, p_2, p_3. Ak sa žiadne dve z priamok p_1, p_2, p_3 nepretínajú máme tri priamky, ktoré sú navzájom mimobežné. Ak sa dve z nich pretínajú a pridáme k nim priamku p_6, máme tri priamky, ktoré ležia v jednej rovine (nepretínajú sa v jednom bode, to je podmienka úlohy).

Ak sú p_1, p_2, p_3 z druhej skupiny, uvažujeme podobne.

Teraz je priamka p_6 mimobežná s každou z nich. Ak sa každé dve z priamok p_1, p_2, p_3 pretínajú, máme tri priamky v jednej rovine. Ak sa dve z nich nepretínajú, pridáme k nim p_6 a máme tri priamky navzájom mimobežné.

Úloha 56. V šachovom turnaji, ktorého sa zúčastňuje 6 hráčov, sa vždy nájde trojica hráčov, ktorí medzi sebou hrali už každý s každým, alebo trojica, v ktorej žiaden so žiadnym ešte nehral. Dokážte!

Úloha 57. Máme v rovine 6 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke, pospájaných navzájom modrými alebo červenými úsečkami (t. j. niektoré dva sú spojené modrou, niektoré dva červenou úsečkou, ale každé dva sú spojené). Dokážte, že potom na tejto schéme sa dá nájsť aspoň jeden jednofarebný trojuholník, ktorého vrcholy sú niektoré z daných bodov.

Príklad 28. 17 vedcov si navzájom dopisuje (každý s každým), pritom v celej korešpondencii sa vyskytujú iba tri témy. Dokážte, že existujú traja z nich, ktorí si medzi sebou dopisujú na rovnakú tému.

Riešenie. Vyberme jedného z vedcov (ľubovoľne) a ostatných 16 rozdeľme do troch skupín tak, že do každej skupiny dáme všetkých tých, ktorí si s týmto zvoleným píšu na tú istú tému. Podľa (D) aspoň v jednej skupine sa nájdu šiesti. Teda máme šesť vedcov, ktorí si so zvoleným píšu na rovnakú tému. Nazvime ju *témou* č. 1. Ak si spomedzi týchto šiestich dvaja píšu na tému č. 1, pridáme k nim zvoleného a máme troch, ktorí si píšu na tému č. 1. V opačnom prípade máme 6 vedcov, ktorí si medzi sebou píšu iba na tému č. 2 a tému č. 3.

Medzi týmito šiestimi si zvoľme jedného. Zbývajúcich piatich rozdelíme na dve skupiny. Skupinu tých, čo si so zvoleným píšu na tému č. 2 a skupinu tých, čo si píšu na tému č. 3. Podľa (D) aspoň v jednej skupine sa nájdu traja.

Títo traja si buď všetci píšu na rovnakú tému a riešenie je hotové, alebo sa nájdu dvaja, ktorí si píšu na tému rovnakú so zvoleným. Potom máme znovu troch, ktorí si píšu na rovnakú tému.

Úloha 58. V priestore je dané 17 priamok. Dokážte, že sa medzi nimi dajú nájsť tri, ktoré sú buď všetky navzájom rovnobežné, alebo všetky navzájom rôznobežné, alebo navzájom mimobežné.

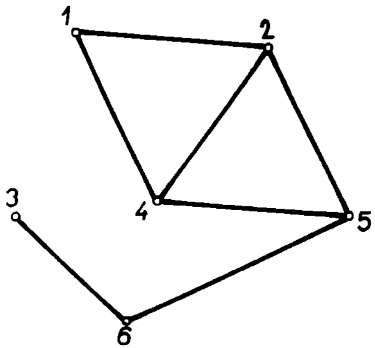
Úloha 59. V škole, ktorá má 17 tried, sa hrá futbalový medzitriedny turnaj systémom „každý s každým". Turnaj probieha počas troch dní. Dokážte, že existujú tri triedy, ktoré všetky zápasy medzi sebou zohrajú v ten istý deň.

Úloha 60. V rovine je dané 17 bodov navzájom pospájaných úsečkami farby čiernej, červenej a modrej, pritom žiadne tri neležia na jednej priamke a každé dva sú spojené. Dokážte, že v tejto schéme existuje jednofarebný trojuholník s vrcholmi vybranými spomedzi daných 17 bodov.

Skúsený riešiteľ si určite všimol, že príklad 27 a úlohy 56 a 57 sa riešia rovnako. Podobne príklad 28 a úlohy 58 až 60 znamenajú len rôzne modifikácie rovnakého problému. Takéto úlohy môžeme riešiť spoločne, t. j. všetky naraz, ak sa postavíme na dosť všeobecné, abstraktné stanovisko. V matematike sa často postupuje tak, že úlohy, ktoré majú v jadre spoločnú myšlienku, sa snažia matematici riešiť naraz. Na to zavádzajú nové abstraktné pojmy. Úlohy, o ktorých sme hovorili, možno úspešne riešiť pomocou pojmu *graf*.

Pod grafom rozumieme nejakú množinu, ktorej prvky voláme *vrcholmi grafu*, pričom niektoré dvojice vrcholov grafu sú v istom vzťahu (relácii). Napr. taký graf môže predstavovať istý okamžik šachového turnaja. Jeho vrcholy budú hráči (účastníci turnaja). Niektoré dvojice hráčov už zápas odohrali. Vzťah, o ktorý tu pôjde spočíva v tom, že dvaja hráči odohrali zápas. Ak dvojica vrcholov grafu je v danom vzťahu, hovoríme, že tie dva vrcholy sú spojené *hranou* (v tom grafe).

Graf obyčajne znázorňujeme tak, že vrcholy grafu sú body v rovine (vyznačené napr. krúžkom) a ak sú dané dva vrcholy spojené hranou (sú vo vzťahu), tak príslušné body jednoducho spojíme úsečkami alebo inými čiarami. Pritom sa môže stať, že tieto čiary sa pretínajú aj v iných bodoch, než sú vrcholy grafu. Preto treba pri náčrtoch vrcholy



Obr. 5.

starostlivo vyznačiť. Na obr. 5 je znázornený graf šachového turnaja v istom okamžiku. Z neho možno vyčítať, že hráč č. 2 a hráč č. 5 už zohrali medzi sebou zápas, kdežto hráči č. 4 a č. 6 nie.

Úplným grafom nazývame taký graf, ktorého každé dva vrcholy sú spojené hranou. Taký je napr. graf šachového turnaja po jeho skončení. Všetky zápasy sú už odohrané, teda každá dvojica hráčov už svoj zápas odohrala, t. j. každé dva body na príslušnom grafe sú spojené hranou.

V ďalšom sa budeme zaoberať väčšinou úplnými grafmi. Aby sme zachytili na úplnom grafe také prípady, ako je šachový turnaj, ktorý ešte neskončil (t. j. nie všetky zápasy sú odohrané), budeme používať dva druhy vzťahov. Dva vrcholy grafu (hráči) budú v prvom vzťahu, ak už odohrali zápas a budú v druhom vzťahu, ak ešte zápas neodohrali. Pri znázorňovaní takých grafov používame viac farieb. Napr. ak dvaja hráči zápas odohrali, tak vrcholy ktoré ich predstavujú spojíme modrou, ak neodohrali, spojíme ich červenou čiarou. Vo všeobecnosti hovoríme, že *graf* je *sfarbený dvomi farbami* (je dvojfarebný), ak v ňom vystupujú dva rôzne vzťahy.

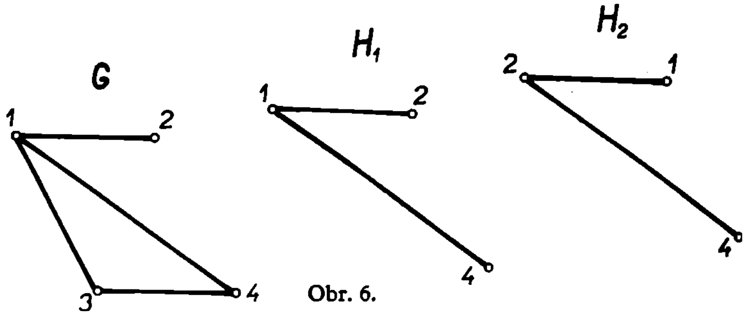
Uveďme niekoľko príkladov. Dvojfarebný graf môže byť napr. nejaká množina bodov v rovine pospájaných úsečkami dvoch farieb. V tomto príklade dva vzťahy sú naozaj dané dvomi farbami. Alebo graf znázorňujúci príklad 27. Jeho vrcholy budú predstavovať dané priamky. Dva vrcholy budú spojené červenou úsečkou, ak dané priamky sú rôznobežné a budú spojené modrou úsečkou, ak dané priamky sú mimobežné.

Je samozrejmé, že sa nemusíme obmedziť iba na dva vzťahy (dve farby). Budeme sa zaoberať i viacfarebnými grafmi. Napr. graf znázorňujúci príklad 28. je trojfarebný. Vrcholmi budú naši vedci. Dva vrcholy spojíme čiernou farbou, ak si príslušní vedci dopisujú na prvú tému, spojíme červenou, ak si píšu na druhú tému a spojíme modrou, ak si píšu na tretiu tému. Podobne úlohu 58. možno znázorniť trojfarebným grafom. Vrcholy budú dané priamky. Dva vrcholy spojíme napr. čiernou hranou, ak sú priamky rovnobežné, červenou, ak sú rôznobežné a modrou, ak sú mimobežné.

Je už iste jasné, ako vyzerajú viacfarebné grafy. Ak budeme hovoriť o *k-farebnom grafe*, budeme mať na mysli graf, v ktorom nevystupuje viac ako k farieb.

V ďalšom slovom *n-graf* budeme označovať úplný graf, ktorý má *n* vrcholov.

Aby sme mohli sformulovať naše úlohy, ešte povieme, čo je to podgraf. Graf H nazývame podgrafom grafu G, ak každý vrchol grafu H je aj vrcholom grafu G a ak dva vrcholy grafu H sú spojené hranou práve vtedy, keď sú spojené hranou v grafe G a ak sú spojené, tak hranou rovnakej farby ako v G. Napr. H_1 na obr. 6 je podgraf grafu G (príslušné rovnako označené vrcholy považujme za totožné, kreslíme ich znovu len kvôli prehľadnosti), ale H_2 nie je podgraf grafu G.



Obr. 6.

Teraz je zrejmé, že príklad 27. a úlohy 56. a 57. možno sformulovať takto:

V každom dvojfarebnom 6-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný úplný podgraf s tromi vrcholmi (krátko: existuje jednofarebný trojuholník).

Podobne abstraktná formulácia príkladu 28. a úloh 58.—60. môže znieť:

V každom trojfarebnom 17-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný trojuholník.

Úloha 61. Dokážte tieto dve tvrdenia!

Príklad 29. Dokážte, že v každom štvorfarebnom 66-grafe existuje jednofarebný trojuholník!

Riešenie. Vyberieme si jeden vrchol 66-grafu ľubovoľne. Zbývajúcich 65 vrcholov rozdelíme do štyroch skupín podľa farby hrany spájajúcej tieto vrcholy s vybraným. V aspoň jednej skupine musí podľa (D) byť 17 vrcholov. Ak sú dva z nich medzi sebou spojené hranou tej istej farby ako s vybraným vrcholom, potom máme jednofarebný trojuholník. V opačnom prípade máme 17 vrcholov pospájaných medzi sebou iba tromi farbami. Podľa úlohy 61. medzi nimi existujú tri pospájané iba jednou farbou.

Úloha 62. Dokážte, že v každom päťfarebnom 327-grafe existuje jednofarebný trojuholník!

Úloha 63. Ak v každom k-farebnom m-grafe existuje jednofarebný trojuholník, potom v každom $(k + 1)$-farebnom $(km + m - k + 1)$-grafe existuje jednofarebný trojuholník. Dokážte!

Je jasné, že v každom dvojfarebnom 7-grafe, 8-grafe atď. existuje jednofarebný trijuholník (z čoho to vyplýva?). Môžeme očakávať, že ich bude viac ako v 6-grafe. Nevieme však, ani koľko jednofarebných trojuholníkov minimálne musí byť v dvojfarebnom 6-grafe. Túto otázku rozriešime pomocou nasledujúceho príkladu.

Príklad 30. Ak v úplnom grafe sfarbenom dvomi farbami existuje takých 5 vrcholov A, B, C, D, E, že jednofarebný trojuholník s vrcholmi A, B, C je inej farby ako hrana spájajúca body D, E, potom v tomto grafe okrem trojuholníka A, B, C existuje ešte aspoň jeden iný jednofarebný trojuholník. Dokážte!

Riešenie. Nech je trojuholník ABC biely a hrana DE čierna. Z hrán DA, DB, DC musia byť podľa (d) aspoň dve jednej farby. Keby boli biele, už máme druhý jednofarebný trojuholník (biely). Podobne, buď dve z hrán EA, EB, EC sú čierne, alebo máme biely trojuholník.

Uvažujme prípad, keď nemáme (ďalší) biely trojuholník. Potom z uvedených hrán sú aspoň štyri čierne. Z jedného z vrcholov A, B, C podľa (d) vychádzajú teda aspoň dve čierne. Tieto dve čierne hrany spolu s hranou DE dajú čierny trojuholník.

Príklad 31. V dvojfarebnom 6-grafe existujú aspoň dva jednofarebné trojuholníky.

Riešenie. Vieme, že v dvojfarebnom 6-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný trojuholník. Označme vrcholy 6-grafu A, B, C, D, E, F tak, že A, B, C sú vrcholy tohoto jednofarebného trojuholníka (povedzme bieleho). Ak sú všetky hrany spájajúce body D, E, F tiež biele, máme dva biele trojuholníky v našom 6-grafe. Ak je niektorá z nich čierna, podľa príkladu 30 existuje v našom grafe ešte ďalší jednofarebný trojuholník.

Úloha 64. Zostrojte dvojfarebný 6-graf, v ktorom neexistujú tri jednofarebné trojuholníky.

Príklad 32. V každom dvojfarebnom 7-grafe existujú aspoň 4 jednofarebné trojuholníky.

Riešenie. V 7-grafe existujú aspoň dva (pozri príklad 31) jednofarebné trojuholníky. Vynecháme z daného 7-grafu vrchol jedného jednofarebného trojuholníka, i všetky hrany, ktoré vychádzajú z tohto vrchola. Dostaneme 6-graf, v ktorom podľa príkladu 31 existujú aspoň dva jednofarebné trojuholníky. Keď teraz vrátime vynechaný vrchol a hrany, zistíme, že v našom 7-grafe sú aspoň tri jednofarebné trojuholníky. Aspoň dva z týchto musia mať spoločný vrchol, pretože tri trojuholníky majú 9 vrcholov a na grafe máme k dispozícii iba 7 bodov. Teraz vynechajme tento vrchol a všetky hrany z neho idúce. Tým dostaneme 6-graf, ktorý má aspoň o dva jednofarebné trojuholníky menej ako daný 7-graf. Podľa príkladu 31 v ňom existujú aspoň dva jednofarebné trojuholníky, teda v pôvodnom 7-grafe sú aspoň štyri.

Úloha 65. Dokážte, že v dvojfarebnom a) 8-grafe; b) 9-grafe; c) 10-grafe; d) 11-grafe existuje aspoň a) 7; b) 11; c) 16; d) 22 jednofarebných trojuholníkov.

Príklad 33. Treba dokázať, že v dvojfarebnom n-grafe ($n \geq 10$) existuje aspoň $\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61$ jednofarebných trojuholníkov.

Riešenie. Tvrdenie dokážeme indukciou podľa n.

1) Pre $n = 10$ tvrdenie vyplýva z úlohy 65.

2) Predpokladajme, že v dvojfarebnom n-grafe je aspoň $\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61$ jednofarebných trojuholníkov. Dokážeme, že v dvojfarebnom $(n + 1)$-grafe je najmenej $\frac{1}{2}(n + 1)^2 - \frac{19}{2}(n + 1) + 61$ jednofarebných trojuholníkov.

Vezmime ľubovoľný dvojfarebný $(n + 1)$-graf. Je v ňom aspoň toľko jednofarebných trojuholníkov, ako v dvojfarebnom n-grafe, teda podľa indukčného predpokladu aspoň $\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61$. Tieto majú dohromady $3\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61\right)$ vrcholov. Teda aspoň $\left[\frac{3}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61\right)\right]$ trojuholníkov musí mať podľa (D) spoločný vrchol. Pre každé n je

$$\left(n - \frac{39}{2}\right)^2 + 386 - \left(\frac{39}{2}\right)^2 > 0,$$

odkiaľ postupne

$$n^2 - 39n + 386 > 0,$$

$$3n^2 - 3.19n + 3.122 > 2n^2 - 18n - 20,$$

$$3\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61\right) > (n + 1)(n - 10),$$

a teda

$$\frac{3}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61\right) > n - 10.$$

To znamená, že aspoň n-9 trojuholníkov má spoločný vrchol. Keď tento vynecháme, dostaneme n-graf, ktorý má o n-9 trojuholníkov menej, než náš $(n + 1)$-graf. Teda podľa indukčného predpokladu v $(n + 1)$-grafe je aspoň

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61 + (n - 9) =$$

$$= \frac{1}{2}(n + 1)^2 - \frac{19}{2}(n + 1) + 61$$

jednofarebných trojuholníkov.

Príklad 34. Treba dokázať, že v dvojfarebnom 24-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný 4-graf.

Riešenie. Zvolíme si vrchol A na 24-grafe. Podľa (D) existuje aspoň 12 vrcholov, ktoré sú s vrcholom A spojené hranami rovnakej farby, nech je to napr. biela farba. Zpomedzi týchto 12 vrcholov zvoľme vrchol B. Tento je spojený podľa (D) aspoň so šiestimi zpomedzi týchto dvanástich hranami rovnakej farby. Táto môže byť a) biela, b) čierna.

Ak týchto 6 vrcholov je spojené navzájom hranami rovnakej farby, je príklad doriešený, lebo tam existuje dokonca jednofarebný 6-graf. Predpokladajme, že týchto 6 vrcholov nie je pospájaných hranami rovnakej farby.

Ak nastane prípad a), sme hotoví, pretože 4-graf s vrcholmi A, B, ku ktorým sú pridané dva vrcholy zpomedzi posledných 6-tich spojené bielou hranou, je jednofarebný a to biely.

Ak nastane prípad b), použijeme skutočnosť, že v dvojfarebnom 6-grafe existuje jednofarebný trojuholník. Medzi poslednými 6-timi vrcholmi existujú 3 pospájané jednou farbou. Ak je biela, pridáme k nim vrchol A a dostaneme biely 4-graf. Ak je čierna, pridáme k nim vrchol B a dostaneme čierny 4-graf.

Úloha 66. Dokážte, že v dvojfarebnom 24-grafe existujú aspoň dva jednofarebné 4-grafy!

Úloha 67. Dokážte, že v dvojfarebnom 192-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný 5-graf!

Poznámka. Je známe, že v dvojfarebnom 18-grafe určite existuje jednofarebný 4-graf, ale v 17-grafe už nemusí existovať. Teda najmenšie číslo n také, že v dvojfarebnom n-grafe už určite existuje jednofarebný 4-graf je 18. Najmenšie číslo n také, aby v dvojfarebnom n-grafe určite existoval jednofarebný 5-graf dodnes nie je známe. Vieme, že je menšie ako 70.

Podobne nie je známe, či tvrdenie príkladu 29 možno dokázať pre 65-graf, t. j. či v každom štvorfarebnom 65-grafe existuje jednofarebný trojuholník.

6. kapitola

NÁVOD NA RIEŠENIE NIEKTORÝCH ÚLOH

V tejto časti uvedieme riešenie niektorých úloh. Podrobnosť riešenia závisí od toho, ako sa nám zdá daná úloha obtiažna. V niektorých prípadoch uvedieme úplné riešenie a v niektorých len krátky návod.

Čísla udávajú číslo úlohy podľa číslovania v kapitolách I až V.

3. Aspoň 6. Rozdelíme ich do skupín podľa farby. Podľa d aspoň v jednej skupine budú aspoň dve, teda nájdu sa dve rovnakej farby. Keby vybral 5, mohlo by sa stať, že každá bude inej farby.

4. Všetky možné súčty sú: $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, \ldots, 6 + 6 = 12$, t. j. 11 rôznych súčtov. Stačí teda hodiť 12krát.

5. Všetky možné súčty sú $1 + 1 + 1 = 3, 1 + 1 + 2 = 4, \ldots, 6 + 6 + 6 = 18$, t. j. 16 rôznych súčtov. Stačí hodiť 49 krát.

7. Na základe *Eulerovho vzťahu* (pozri príklad 3) má daný sedemsten $7 - 2 + 6 = 11$ hrán. Nech i-ta stena je n_i-uholník. Súčet $n_1 + n_2 + \ldots + n_7 = 22 =$ dvojnásobku počtu hrán. Podľa D aspoň jedno $n_i \geq 4$. Keďže každá stena je aspoň trojuholník, tak nutne práve jedna je štvoruholník.

9. Označme $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ dané čísla. Môžeme predpokladať $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{11} < 100$. Označme $b_i = \log a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 11$ (desiatkový logaritmus). Zrejme platí $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{11} < 2$. Rozdelíme interval $(0,2)$ na desať rovnako veľkých častí. Podľa (d) aspoň v jednej časti budú dve čísla, nech sú to b_i, b_j, $i \neq j$. Platí teda $|b_i - b_j| < \frac{2}{10}$, t. j. $\left|\log \frac{a_i}{a_j}\right| < \frac{2}{10}$ a odtiaľ vyplýva tvrdenie.

10. Áno, použite (d)!

11. Rozdeľte štvorec na pravouhlé trojuholníky o stranách dĺžky 1, 2, $\sqrt{5}$!

14. Štvorec rozdelíme na 25 štvorcov o strane $\frac{1}{5}$. Aspoň v jednom sa nachádzajú tri body. Polomer kružnice opísanej štvorcu o strane $\frac{1}{5}$ je $\frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{2}{10 . \sqrt{2}} < \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

16. Uvažujte $n + 1$ čísel 1, 11, 111, ..., 11...11 a použite úlohu 15!

17. Podľa úlohy 16 existuje číslo tvaru 11...1100...00 deliteľné číslom p. Ale 11...1100...00 = 11...11 × × 100...00. Druhý súčiniteľ nie je deliteľný číslom p, lebo je podľa predpokladu rôzny od 2,5.

19. Označme $a_1, a_2, \ldots, a_{33}$ počet úloh, ktoré Ignác vyrieši prvý, druhý, ..., tridsiaty tretí deň. Takou istou úvahou ako v riešení príkladu 7 možno dokázať, že existuje niekoľko po sebe idúcoch dní, keď počet riešených úloh je deliteľný číslom 33. Ale 33 dní je menej ako 5 kalendárnych týždňov, teda počet riešených úloh je menší ako $5 . 13 = 65$ a teda rovná sa 33.

20. Riešenie rovnaké ako u príkladu 8.

21. Podľa úlohy 15, medzi číslami $a_i = 1 + q + q^2 + + \ldots + q^i$, $i = 1, 2, \ldots, p + 1$, existujú dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom p. Nech sú to čísla a_i, a_j, $i < j$. Ale $a_j - a_i = q^{i+1} + \ldots + q^j = q^{i+1}(1 + q + \ldots + + q^{j-i-1})$. Keďže p a q sú nesúdeliteľné, p delí $1 + q + q^2 + \ldots + q^{j-i-1}$.

Druhé tvrdenie vyplýva z rovnosti $1 + q + q^2 + \ldots +$

$+ q^{kn+k-1} = (1 + \ldots + q^n) + q^{n+1}(1 + \ldots + q^n) + + \ldots + q^{(k-1)(n+1)}(1 + \ldots + q^n)$.

22. Uvažujme čísla $1, p, p^2, \ldots, p^{100\,000}$. Podľa úlohy 15 existujú $i < j \leqslant 100\,000$ také, že 100 000 delí číslo $p^j - p^i = p^i(p^{j-i} - 1)$. Keďže p a 100 000 sú nesúdeliteľné, potom 100 000 delí $p^{j-i} - 1$ a teda dekadický zápis tohoto čísla končí požadovanou skupinou cifier.

23. Úloha je zovšeobecnením úlohy 22.

24. Pre x prirodzené, $x \leqslant 1\,000\,000$ je $0 \leqslant [\sqrt{x} \log x] \leqslant \leqslant 6\,000$ $(0 \leqslant [\sqrt[3]{x} \log x] \leqslant 600)$. Podľa (D) existuje $k \leqslant 6\,000$ $(k \leqslant 600)$ také, že daná rovnica má aspoň 160 (1600) riešení.

25. Pozorne si prezrite riešenie príkladu 11 a poznámku!

29. Ak označíme prvočísla medzi a, b ako $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tak $(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \ldots + (p_k - p_{k-1}) \leqslant b - a$. Ak x je počet párov dvojičiek, máme $b - a \geq 2x + h + + (k - x - 2)4 = 4k - 8 + h - 2x$ a teda $x \geq [2(k-2) - - \frac{b - a - h}{2}]$.

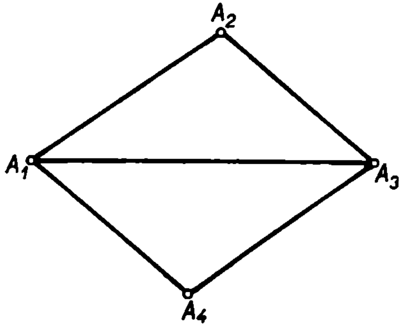
31. Rozoznávame dva prípady. Ak dané tri body ležia na priamke, tak jeden uhol nimi určený je π. Ak body neležia na priamke, potom uvažujeme vnútorné uhly trojuholníka, ktorý určujú. Keďže ich súčet je π, podľa (D_1) dostávame tvrdenie.

32. Označíme dané body $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Ak tri z nich ležia na priamke, tak je úloha riešená. Ak žiadne tri z nich neležia na priamke, budeme rozoznávať tri prípady.

a) Body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 tvoria vrcholy vypuklého päťuholníka. Tvrdenie plynie podľa príkladu 13.

b) Body A_4, A_5 ležia vnútri trojuholníka $A_1A_2A_3$ (v prípade potreby body preznačíme). Keďže $\sphericalangle A_1A_4A_2 + + \sphericalangle A_2A_4A_3 + \sphericalangle A_3A_4A_1 = 2\pi$, podľa D aspoň jeden z nich je väčší alebo sa rovná $\frac{2}{3}\pi$.

c) Bod A_5 leží vnútri vypuklého štvoruholníka $A_1A_2A_3A_4$ (v prípade potreby body preznačíme). Potom bod A_5 leží vnútri práve jedného z trojuholníkov $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ (pozri obr. 7) a pokračujeme ako v časti b).



Obr. 7.

33. Ak tri z nich ležia na priamke, úloha je riešená. Ak dané body tvoria vypuklý šesťuholník, tvrdenie vyplýva podľa príkladu 13. V ostatných prípadoch nájdeme trojuholník a bod v jeho vnútri (porovnaj riešenie úlohy 32).

34. Rovnako ako úlohy 32 a 33. Diskusia je však zložitejšia.

36. Pozri nasledujúcu úlohu!

37. Predpokladajme, že máme umiestené n bodov v obdĺžniku o rozmeroch a, b tak, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch je väčšia než ε. Okolo každého bodu opíšeme kružnicu o polomere $\frac{\varepsilon}{2}$. Máme teda n kruhov, ktoré ležia vnútri obdĺžnika o rozmeroch $a + \varepsilon$, $b + \varepsilon$ a žiadne dva z nich nemajú spoločný bod. Keby $n > \dfrac{4(a + \varepsilon)(b + \varepsilon)}{\pi\varepsilon^2}$, tak aspoň jeden z uvedených kruhov by mal plošný obsah $\leqslant \frac{(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)}{n} < \frac{\pi\varepsilon^2(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)}{4(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)} = \frac{\pi\varepsilon^2}{4}$, čo je spor.

38. Rozdelíme obdĺžnik na štvorce o strane $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ a obdiaľniky o stranách nie väčších. Všetkých ich bude

$$\left(\left[\frac{\sqrt{2}a}{\varepsilon}\right]+1\right)\left(\left[\frac{\sqrt{2}b}{\varepsilon}\right]+1\right) < \frac{2ab}{\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(a+b)+1.$$

Kružnica opísaná každému z nich má priemer nie väčší než ε.

39. Označíme šírky pásov $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Uvažujme o guľovej ploche polomeru R, ktorej stred leží v strede daného kruhu. Rovnako ako v riešení príkladu 19 utvoríme časti guľovej plochy. Plošný obsah i-tej časti bude menší alebo rovný $2\pi Rh_i$. Plošný obsah celej guľovej plochy je $4\pi R^2$, teda $\sum_{i=1}^{n} 2\pi Rh_i \geq 4\pi R^2$ a podľa (D_1) existuje i také, že $h_i \geq \frac{2R}{n}$.

40. a **41.** Rovnako, ako príklad 20.

42. Dokážeme len časť, týkajúcu sa štvorciferných čísel. Napr. nasledovných osem čísel má požadované vlastnosti: 1111, 1122, 2211, 2222, 1212, 2121, 1221, 2112. Predpokladajme, že existuje deväť štvorciferných čísel tak, že ľubovoľné dve sa líšia aspoň na dvoch miestach. Rozdelíme ich do dvoch skupín podľa toho, či začínajú cifrou 1 alebo 2. Aspoň jedna skupina obsahuje aspoň päť čísel. Vynechajme z nich prvú cifru, ktorá je u všetkých rovnaká. Dostaneme päť trojciferných čísel, z ktorých ľubovoľné dve sa líšia aspoň na dvoch miestach. To je však spor s príkladom 21.

43. Dokazujeme matematickou indukciou. Indukčný krok sa robí podobne, ako sme previedli riešenie úlohy 42 pomocou príkladu 21.

Udáme návod na konštrukciu. Dokážeme dokonca nasledujúce silnejšie tvrdenie.

Pre každé $n \geq 2$ existujú dve skupiny A_n, B_n n-ciferných čísel, utvorených pomocou cifier 1, 2 s nasledovnými vlastnosťami:

a) každá zo skupín A_n, B_n má práve 2^{n-1} prvkov,

b) ľubovoľné dve čísla, ktoré buď obidve patria do skupiny A_n, alebo obidve patria do skupiny B_n, sa líšia aspoň na dvoch miestach,

c) ľubovoľné dve čísla, jedno zo skupiny A_n, druhé zo skupiny B_n, sa líšia aspoň na jednom mieste.

Pre $n = 2$ je tvrdenie pravdivé, nech napr. skupina A_2 obsahuje čísla 11, 22, skupina B_2 čísla 12, 21. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n. Zostrojíme skupiny A_{n+1}, B_{n+1} s uvedenými vlastnosťami.

Do skupiny A_{n+1} dáme čísla, ktoré vzniknú z čísel skupiny A_n pripísaním na koniec cifry 1 a z čísel skupiny B_n pripísaním na koniec cifry 2. Podobne, do skupiny B_{n+1} dáme čísla, ktoré vznikli pripísaním na koniec cifry 2 ku číslam skupiny A_n a cifry 1 ku číslam skupiny B_n. Teda napr. B_3 obsahuje čísla 112, 222, 121, 211. Podmienky a), b), c) sa overia bezprostredne.

44. Predpokladajme, že je možné zostrojiť 9 čísel s uvedenými vlastnosťami. Rozdelíme ich do dvoch skupín, podľa toho, či začínajú cifrou 1 alebo 2. Podľa (D) aspoň jedna skupina obsahuje aspoň 5 čísel. Vynechaním prvej cifry, ktorá je u všetkých rovnaká, dostaneme 5 päťciferných čísel, z ktorých ľubovoľné dve sa líšia aspoň na troch miestach. To je však spor s príkladom 22.

47. Predpokladajme, že máme $k > \left[\dfrac{2^n}{n+1}\right]$ čísel s uvedenými vlastnosťami. Označíme ich $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Nech G_i je množina všetkých tých n-ciferných čísel, ktoré sa od A_i líšia najviac na jednom mieste. Všetkých n-ciferných čísel je 2^n. Dve rôzne G_i nemajú spoločný prvok. Nech k_i je počet čísel v množine G_i. Potom $\sum_{i=1}^{k} k_i \leqslant 2^n$, teda aspoň jedno $k_i \leqslant \frac{2^n}{k} < n + 1$. Ale to je spor, lebo každá G_i má práve $n + 1$ prvkov.

48—50. Pozri úlohy 42, 43!

51. Predpokladajme, že je možné zostrojiť $k^2 + 1$ čísel s uvedenými vlastnosťami. Rozdelíme ich do k skupín podľa prvej cifry. Aspoň jedna skupina obsahuje $k + 1$ čísel. Tieto všetky majú rovnakú prvú cifru. Rozdelíme ich znovu do k skupín podľa druhej cifry. Aspoň v jednej skupine budú dve čísla. Tieto čísla majú rovnakú prvú a druhú cifru, čo nie je možné, lebo podľa predpokladu sa líšia aspoň na dvoch miestach.

54. Predpokladajme, že je možné zostrojiť $h > \frac{k^n}{(nk + 1 - n)}$ čísel s uvedenými vlastnosťami. Označíme ich $A_1, A_2, \ldots, A_h$. Nech G_i je množina tých čísel, ktoré sa od čísla A_i líšia najviac na jednom mieste. Ak d_i je počet prvkov množiny G_i, nutne $\sum_{i=1}^{h} d_i \leqslant k^n$. Stačí použiť ($D_3$) a fakt, že $d_i = n(k - 1) + 1$.

55. Postupujeme podobne ako v riešení úlohy 54, ale do G_i dáme tie čísla, ktoré sa od A_i líšia najviac na a) dvoch miestach, b) troch miestach.

56—57. Pozri príklad 27!

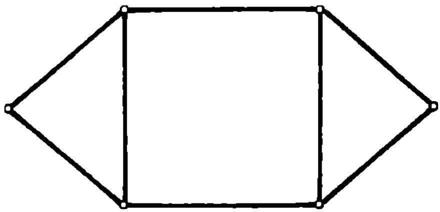
58—60. Pozri príklad 28!

62. Rovnako ako príklad 29. Nepoužijeme však úlohu 61, ale príklad 29.

63. Matematickou indukciou.

64. Na obr. 8. Vyznačená je len jedna farba.

65. a) Podľa príkladu 32 v dvojfarebnom 8-grafe existujú aspoň 4 jednofarebné trojuholníky. Aspoň dva z nich majú spoločný vrchol. Ak ho vynecháme, dostaneme dvojfarebný 7-graf, ktorý má aspoň o dva jednofarebné trojuholníky menej, ako náš 8-graf. Keďže má aspoň 4 jednofarebné trojuholníky, tak náš 8-graf má aspoň 6 jednofarebných



Obr. 8.

trojuholníkov. Tieto majú spolu 18 vrcholov, tedy aspoň jeden vrchol nášho 8-grafu je spoločný aspoň trom jednofarebným trojuholníkom. Ak ho vynecháme, dostaneme 7-graf, ktorý má aspoň o tri jednofarebné trojuholníky menej, ako 8-graf. Znovu použijeme príklad 32, tedy 8-graf má aspoň 7 jednofarebných trojuholníkov.

d) Podľa c) v 11-grafe existuje aspoň 16 jednofarebných trojuholníkov. Tieto majú spolu 48 vrcholov, teda aspoň jeden vrchol 11-grafu je spoločný piatim jednofarebným trojuholníkom. Keď ho vynecháme dostaneme 10-graf, ktorý má aspoň o 5 jednofarebných trojuholníkov menej, ako 11-graf. Postupujeme ďalej rovnako, ako v prípade a).

66. Postupujeme rovnako ako v riešení príkladu 34. Ak uvedených 6 vrcholov je spojené jednou farbou, alebo všetky hrany okrem jednej sú rovnakej farby, je úloha riešená.

Predpokladajme teda, že existujú aspoň dve hrany biele. V prípade a) stačí ku každej z bielych hrán pridať vrcholy A a B a máme dva biele 4-grafy.

Ak nastane prípad b), postupujeme nasledovne. V danom 6-grafe existujú aspoň dva jednofarebné trojuholníky (pozri príklad 31!). K bielemu (ak existuje) pridáme vrchol A, k čiernemu (ak existuje), pridáme vrchol B. V každom prípade máme dva jednofarebné 4-grafy.

67. Podobne ako príklad 34, ale zostrojíme tri vrcholy A, B, C.

OBSAH

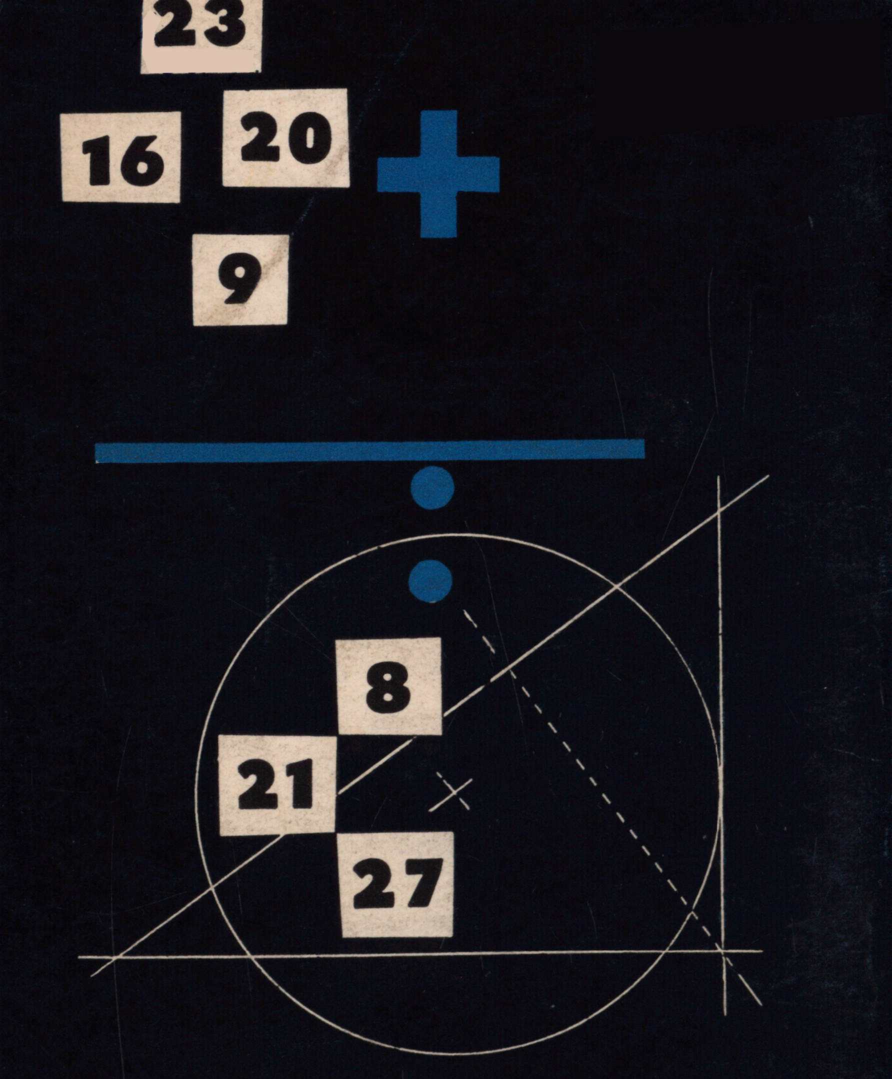
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

Dirichletov princíp

L. BUKOVSKÝ - I. KLUVÁNEK

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2904
Edice Škola mladých matematiků, svazek 25
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 6, Praha 2, Legerova 22
2,60 AA, 2,71 VA. 60 stran
Náklad 6000 výtisků. 1. vydání
Praha 1970. 507/21/8.5

23-027-70 03-2 Cena brož. výt. Kčs 6,—



23-027-70
03/2
Cena brož.
Kčs 6,—