Oddělitelnost množin

Jaroslav Morávek (author); Milan Vlach (author): Oddělitelnost množin. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1969.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403674

Terms of use:

© Jaroslav Morávek, 1969
© Milan Vlach, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ODDĚLITELNOST MNOŽIN

23

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROSLAV MORÁVEK - MILAN VLACH

oddělitelnost množin

VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali RNDr. Miroslav Šisler, CSc.
a prof. dr. Karel Havlíček

© Jaroslav Morávek, Milan Vlach, 1969

PŘEDMLUVA

Čtenář již zajisté řešil některé jednoduché rovnice, nerovnosti, soustavy rovnic a pravděpodobně i soustavy nerovností. Značná část této knížky je věnována řešení úloh, jejichž nedílnou součástí je řešení soustav tzv. lineárních nerovností (popřípadě rovnic), tj. soustav nerovností, které lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ &\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m, \end{aligned}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé a $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$, $b_1, b_2, \ldots b_m$ jsou daná čísla[1]). Jedním ze základních teoretických prostředků, které nám umožní dokázat řadu důležitých tvrzení, je věta o oddělitelnosti konvexních mnohostěnů, jejíž obsah můžeme na tomto místě čtenáři přiblížit pouze tím, řekneme-li, že v rovině pro každé dva konvexní mnohoúhelníky, které nemají společné body, existuje taková přímka, že uvažované mnohoúhelníky leží v opačných polorovinách touto přímkou určených, tj., že uvažované mnohoúhelníky jsou touto přímkou odděleny.

Tato věta, kterou uvádíme v obecném případě bez důka-

---

[1]) Všechna čísla, se kterými se v této knížce setkáme, budou čísla reálná, a budeme proto přívlastek reálný vynechávat.

zu, je spolu s dalšími nutnými pojmy vyložena ve 2. kapitole. První kapitola má přípravný charakter — připomínáme v ní některé pojmy a výsledky známé ze středoškolského studia a uvádíme některé nové pojmy, nezbytné k dalšímu výkladu, zvláště pak pojem *n*-rozměrného prostoru. Bohužel v této knížce není možné věnovat se podrobněji geometrii vícerozměrných prostorů; naštěstí můžeme odkázat čtenáře na knížku prof. Karla Havlíčka *Prostory o čtyřech a více rozměrech*, která vyšla jako 12. svazek v edici *Škola mladých matematiků*. Dále se v knížce vyskytl — i když jen okrajově — pojem konvexní množiny. Pro hlubší seznámení s tímto pojmem lze čtenáři vřele doporučit knihu doc. Jana Vyšína *Konvexní útvary*, 9. svazek zmíněné edice.

Poslední, nejrozsáhlejší kapitola je věnována užití získaných teoretických výsledků v různých oblastech matematiky, které již mají velmi blízko k praktickým aplikacím.

Tato knížka je dalším pokusem zařadit do sbírky *Škola mladých matematiků* zpracování tématu, které výrazně přesahuje oblast středoškolské matematiky. Z toho také vyplývá způsob zpracování, který se liší od mnoha předcházejících knížek, které byly většinou sbírkami řešených úloh.

1. kapitola

PŘÍPRAVNÉ ÚVAHY

I.1. Lineární nerovnosti

Nejprve si připomeneme několik známých pojmů a postupů. Řešme například tuto soustavu čtyř nerovností o dvou neznámých x, y:

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

tj. hledejme takovou uspořádanou dvojici čísel x, y, po jejichž dosazení do (1) za neznámé x, y dostaneme platnou soustavu nerovností. Poslední dvě nerovnosti soustavy (1) nám říkají, že čísla x, y mají být nezáporná; proto zpravidla místo o řešení soustavy (1) hovoříme o nezáporném řešení soustavy (2):

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4. \end{aligned} \tag{2}$$

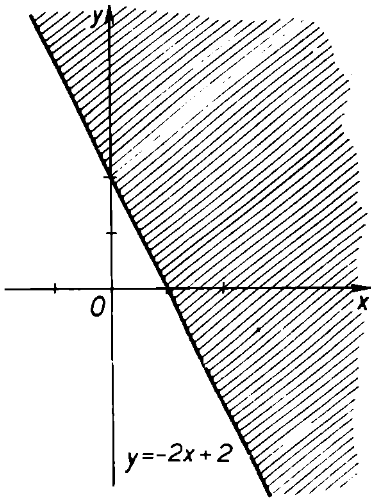
Množinu všech nezáporných řešení soustavy (2) můžeme geometricky znázornit v rovině způsobem, který je běžně znám ze střední školy.

Jsou-li x, y souřadnice bodu v rovině (v pevně zvolené pravoúhlé soustavě souřadnic), pak všechny body (x, y), jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti

$$- 2x - y \leqq - 2, \tag{3}$$

leží na jedné straně od přímky, jejíž rovnice je

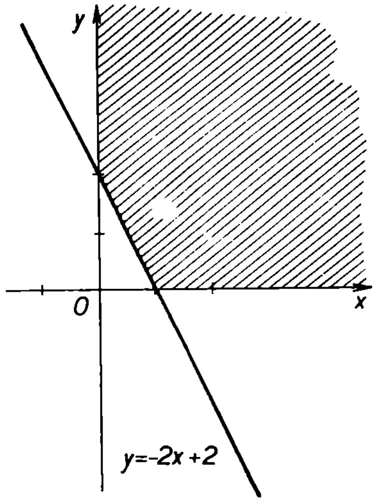
$$y = - 2x + 2. \tag{4}$$



Obr. 1.

Snadno také zjistíme, na které straně; stačí dosadit do (3) souřadnice libovolného bodu roviny, neležícího na přímce (4), např. souřadnice počátku soustavy souřadnic, tj. $x = 0, y = 0$. Odtud vidíme, že první nerovnosti soustavy (2) vyhovují všechny body ležící na přímce (4) a všechny body ležící na opačné straně od přímky (4), než leží počátek soustavy souřadnic.

Množinu všech řešení první nerovnosti soustavy (2) lze tedy znázornit šrafovanou polorovinou (obr. 1). Nezáporná řešení pak budou znázorněna tou částí této poloroviny, která leží v prvním kvadrantu (obr. 2).

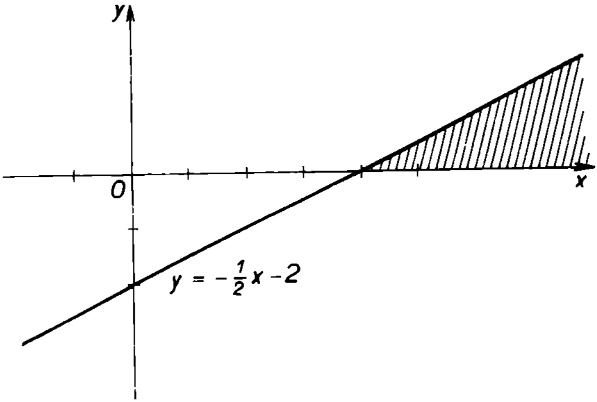


Obr. 2.

Stejným způsobem zjistíme, že body, znázorňující nezáporná řešení druhé nerovnosti soustavy (2), leží na opačné straně od přímky

$$y = \frac{1}{2}x - 2,$$

než leží počátek soustavy souřadnic, nebo na ní (obr. 3). Nezáporná řešení soustavy (2) jsou pak znázorněna body, které znázorňují zároveň nezáporná řešení první nerovnosti i druhé nerovnosti soustavy (2) (tj. body šrafované plochy na obr. 3). Z obr. 3 je patrné, že množina bodů znázorňujících nezáporná řešení soustavy (2) není omezená[1]).



Obr. 3.

Přidáme-li k soustavě (2) nerovnost

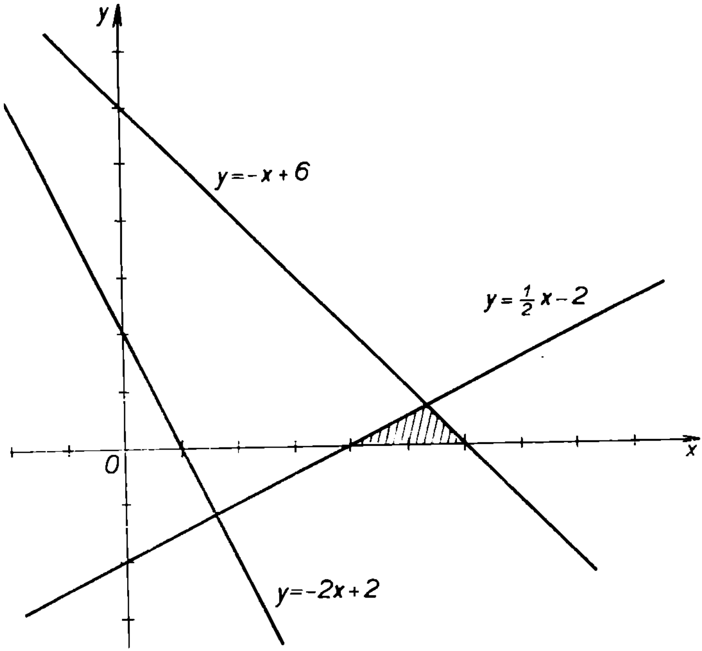
$$-x-y \leqq -6,$$

bude množina znázorňující množinu všech nezáporných řešení této nové soustavy omezená (viz šrafovaná plocha na obr. 4).

[1]) Množinu A bodů roviny nazýváme omezenou, jestliže existují taková čísla a, b, že pro každý bod množiny A o souřadnicích (x, y) platí $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$.

Přidáme-li ještě nerovnost

$$x - 8y \leqq 0,$$



Obr. 4.

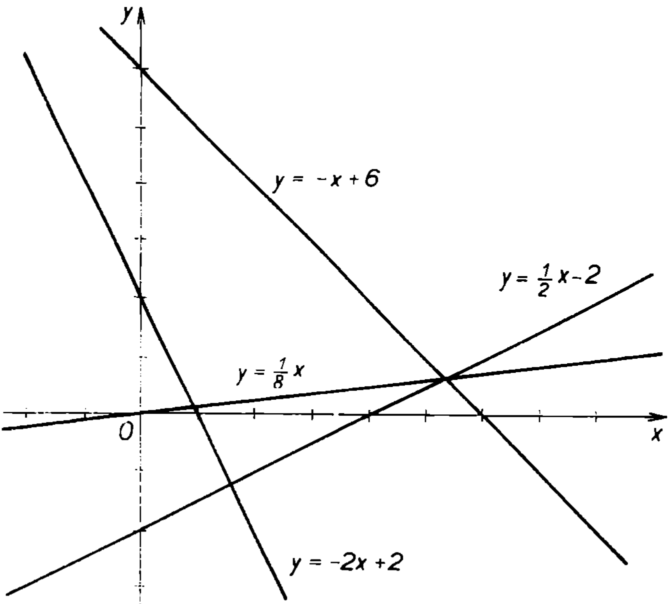
bude mít vzniklá soustava pouze jediné řešení, znázorněné bodem o souřadnicích $\left(\frac{16}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (viz obr. 5).

Přidáme-li nakonec ještě nerovnost

$$2x - y \leqq -2,$$

dostaneme soustavu, která nemá nezáporné řešení.

Zjistili jsme tedy na příkladech, že soustava lineárních nerovností o dvou neznámých (tj. nerovností, které mají



Obr. 5.

tvar $ax + by \leqq c$) nemusí mít žádné nezáporné řešení nebo může mít jediné nezáporné řešení, nebo může mít nekonečně mnoho nezáporných řešení; v posledním případě může být množina bodů roviny znázorňujících tato řešení buď omezená, nebo neomezená.

O tom, že poslední z uvedených soustav, tj. soustava

$$
\begin{aligned}
-2x-y &\leqq -2,\\
-x+2y &\leqq -4,\\
-x-y &\leqq -6,\\
x-8y &\leqq 0,\\
2x-y &\leqq -2,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

nemá nezáporné řešení, jsme se mohli velmi snadno přesvědčit takto: Vynásobíme-li druhou nerovnost třiceti a poslední nerovnost dvaceti, dostaneme soustavu

$$
\begin{aligned}
-2x-y &\leqq -2,\\
-30x+60y &\leqq -120,\\
-x-y &\leqq -6,\\
x-8y &\leqq 0,\\
40x-20y &\leqq -40.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Soustavy (5) a (6) mají zřejmě stejnou množinu nezáporných řešení. Avšak soustava (6) nemá nezáporné řešení, neboť kdyby ho měla, bylo by toto řešení i nezáporným řešením nerovnosti

$$8x+30y \leqq -168, \tag{7}$$

která vznikne sečtením všech nerovností soustavy (6). Nerovnost (7) však zřejmě nemá nezáporné řešení.

Podobného postupu můžeme užít i v případě soustav o jiném počtu rovnic a neznámých. Vyšetřujme např. tuto soustavu čtyř nerovností o třech neznámých x, y, z.

$$
\begin{aligned}
5x-y-z &\leqq 1,\\
-10x+10y-z &\leqq -3,\\
-2x-y+10z &\leqq -4,\\
7x+y+5z &\leqq 2.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Vynásobíme-li první a poslední nerovnost číslem 2, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 10x - 2y - 2z &\leqq 2, \\ -10x + 10y - z &\leqq -3, \\ -2x - y + 10z &\leqq -4, \\ 14x + 2y + 10z &\leqq 4. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme nerovnost

$$12x + 9y + 17z \leqq -1,$$

která zřejmě nemá nezáporné řešení, a tedy ani původní soustava (8) nemá nezáporné řešení.

Pozorný čtenář si ještě všiml, že uvedený postup je speciálním případem obecnějšího postupu. Dříve než tento postup vyložíme pro případ obecné soustavy čtyř tzv. lineárních nerovností o třech neznámých, zavedeme si nové označení, které se nám později v mnohém vyplatí.

Místo abychom označili neznámé písmeny x, y, z, označíme je po řadě symboly x_1, x_2, x_3; pro koeficient, jímž je v první nerovnosti násobena první resp. druhá resp. třetí neznámá, užijeme symbolu se dvěma indexy, např. a_{11}, resp. a_{12} resp. a_{13}; podobně symboly a_{21}, a_{22}, a_{23} budou po řadě označovat koeficienty u neznámých x_1, x_2, x_3 ve druhé nerovnosti; je již zřejmé, jak budou označeny koeficienty v ostatních nerovnostech. Pravou stranu první nerovnosti označíme b_1, druhé nerovnosti b_2, třetí a čtvrté nerovnosti b_3 a b_4.

Na základě této dohody můžeme obecnou soustavu čtyř lineárních nerovností o třech neznámých x_1, x_2, x_3 zapsat takto:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &\leqq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &\leqq b_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &\leqq b_3, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 &\leqq b_4. \end{aligned} \tag{9}$$

Položíme-li např. $a_{11} = 5$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -1$, $b_1 = 1$, dostaneme první nerovnost soustavy (8).

Výše popsaný postup, kterým jsme se přesvědčili, že soustava (8) nemá nezáporné řešení, je obsažen v důkazu tohoto tvrzení:

Věta A. *Existují-li čtyři nezáporná čísla y_1, y_2, y_3, y_4 tak, že platí nerovnosti*

$$\begin{aligned} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + y_3 a_{31} + y_4 a_{41} &\geqq 0, \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + y_3 a_{32} + y_4 a_{42} &\geqq 0, \\ y_1 a_{13} + y_2 a_{23} + y_3 a_{33} + y_4 a_{43} &\geqq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

a že zároveň platí nerovnost

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + y_4 b_4 < 0, \tag{11}$$

pak soustava (9) *nemá nezáporné řešení.*

Důkaz. Kdyby soustava (9) měla nezáporné řešení a kdyby existovala nezáporná čísla y_1, y_2, y_3, y_4 s vlastnostmi uvedenými v předpokladech věty A, bylo by (protože čísla y_1, y_2, y_3, y_4 jsou nezáporná) toto řešení také řešením soustavy

$$\begin{aligned} y_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) &\leqq y_1 b_1, \\ y_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) &\leqq y_2 b_2, \\ y_3 (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) &\leqq y_3 b_3, \\ y_4 (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3) &\leqq y_4 b_4, \end{aligned} \tag{12}$$

a také nezáporným řešením nerovnosti, která vznikne sečtením všech nerovností soustavy (12). Avšak po snadných úpravách (po provedení naznačeného násobení čísly y_1, y_2, y_3, y_4 a po vytknutí neznámých x_1, x_2, x_3) zjistíme, že tato nerovnost má tvar

$$\begin{aligned} & (y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + y_3 a_{31} + y_4 a_{41}) x_1 + \\ + \; & (y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + y_3 a_{32} + y_4 a_{42}) x_2 + \\ + \; & (y_1 a_{13} + y_2 a_{23} + y_3 a_{33} + y_4 a_{43}) x_3 \leqq \\ \leqq \; & y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + y_4 b_4, \end{aligned}$$

ze kterého je patrné, že nemůže mít nezáporné řešení, neboť podle předpokladu jsou koeficienty u neznámých nezáporná čísla, kdežto pravá strana nerovnosti je záporná.

Větu A lze vyslovit v této logicky ekvivalentní formě:

Věta B. *Má-li soustava* (9) *nezáporné řešení, pak platí toto: Jsou-li* y_1, y_2, y_3, y_4 *taková nezáporná čísla, že platí nerovnosti* (10), *pak také platí nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4 \geqq 0.$$

Čtenář si pravděpodobně položí otázku, zda větu A (nebo jí ekvivalentní větu B) lze obrátit. Jak vyplyne z dalšího výkladu, odpověď na tuto otázku je kladná.

1.2. Oddělitelnost množin

Již v předmluvě jsme se zmínili o důležitosti věty o oddělitenosti konvexních mnohostěnů. Myšlenku této věty vyložíme nejdříve v rovině.

Mějme přímku p v rovině ϱ. O přímce p budeme říkat, že **odděluje** navzájem množiny M_1 a M_2 bodů roviny ϱ, jestliže množina M_1 leží v opačné otevřené polorovině, určené přímkou p, než leží množina M_2. O dvou množinách M_1, M_2 bodů roviny ϱ budeme říkat, že jsou navzájem **oddělitelné**, jestliže existuje přímka oddělující množiny M_1 a M_2.

Je zřejmé, že jsou-li množiny M_1 a M_2 oddělitelné, pak množiny M_1 a M_2 nemají společné body, čili, jak často říkáme, jsou disjunktní. Kdyby totiž bod X patřil do množiny M_1 i do množiny M_2, pak pro bod P neležící na přímce p, která odděluje množiny M_1 a M_2, by úsečka XP zároveň měla i neměla společný bod s přímkou p.

Dá se snadno ukázat, že obrácené tvrzení neplatí. Vezmeme-li za M_1 všechny body určité kružnice k a za M_2 množinu ležící uvnitř kruhu určeného kružnicí k, dostaneme množiny M_1, M_2, nemající společný bod. Avšak množiny M_1, M_2 nejsou oddělitelné, neboť pro každou přímku p nastává právě jeden z těchto dvou případů:

1. přímka p nemá s kružnicí k žádný společný bod; v takovém případě leží množiny M_1, M_2 ve stejné polorovině určené přímkou p, a nejsou tedy přímkou p odděleny;

2. přímka p má s kružnicí k společný alespoň jeden bod; v takovém případě množina M_1 neleží (celá) ani v jedné z (otevřených) polorovin určených přímkou p, a nemůže tedy ležet ani v polorovině opačné k polorovině určené přímkou p, ve které leží (leží-li tam vůbec) množina M_2.

Hlavní myšlenka věty o oddělitelnosti konvexních mnohoúhelníků spočívá v tom, že v případě konvexních mnohoúhelníků lze výše uvedené tvrzení obrátit, tj. že každé dva konvexní mnohoúhelníky K_1, K_2 roviny ϱ, které nemají žádný bod společný, lze oddělit. Větu o oddělitelnosti konvexních mnohoúhelníků lze tedy vyslovit takto:

Věta C. *Dva konvexní mnohoúhelníky roviny ϱ jsou oddělitelné právě tehdy, jsou-li disjunktní.*

Jak jsme se již zmínili, obecnou větu o oddělitelnosti konvexních mnohostěnů nebudeme dokazovat; přesto však v tomto speciálním případě uvedeme úvahy naznačující jednu z možných cest vedoucích k důkazu.

Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno výše, stačí dokázat, že jsou-li K_1, K_2 dva disjunktní konvexní mnohoúhelníky, jsou mnohoúhelníky K_1, K_2 oddělitelné.

Nejprve dokážeme, že existuje dvojice bodů X_0, Y_0 taková, že

1. $X_0 \in K_1$, 2. $Y_0 \in K_2$ a 3. $\overline{X_0Y_0} \leqq \overline{XY}$ pro všechny dvojice bodů X, Y takové, že $X \in K_1$ a $Y \in K_2$. Popíšeme konstrukci bodů X_0 a Y_0. Při této konstrukci budeme potřebovat následující jednoduché lemma.

Lemma. *Nechť AB a CD jsou dvě libovolné úsečky ležící v rovině. Potom existují dva body X' a Y' tak, že*

1. $X' \in AB$, 2. $Y' \in CD$ a 3. $\overline{X'Y'} \leqq \overline{XY}$ pro všechny dvojice bodů X, Y takové, že $X \in AB$ a $Y \in CD$.

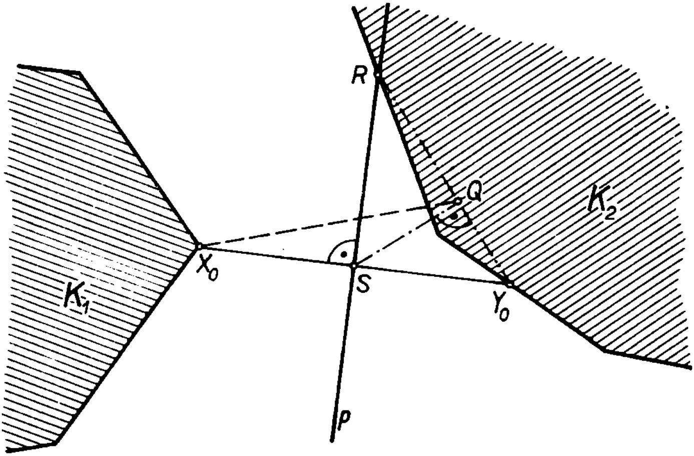
Důkaz lemmatu lze provést snadno rozebráním jednotlivých typických případů vzájemné polohy úseček a přenecháváme jej čtenáři.

Vraťme se nyní k důkazu věty. Nechť obvod mnohoúhelníka K_1 sestává z úseček $u_1, u_2, \ldots, u_r$ ($r \leqq 3$) a obvod mnohoúhelníka K_2 z úseček $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ($s \geqq 3$). Uvažujme nyní všechny možné dvojice úseček u_i a v_j, kde $i = 1, 2, \ldots, r$ a $j = 1, 2, \ldots, s$. Na základě lemmatu existuje ke každé dvojici u_i, v_j dvojice bodů $X(i, j)$ a $Y(i, j)$ tak, že $X(i, j) \in u_i$, $Y(i, j) \in v_j$ a $\overline{X(i,j)\ Y(i,j)} \leqq \overline{XY}$ pro všechny dvojice X a Y takové, že $X \in u_i$ a $Y \in v_j$. Budiž nyní M množina čísel $d_{ij} = \overline{X(i,j)\,Y(i,j)}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, s$). Protože M je konečná, existuje dvojice indexů $i^\star$, $j^\star$, pro kterou je číslo $d_{i^\star j^\star}$ minimální, tj. platí

$$d_{i^\star j^\star} = \overline{X(i^\star, j^\star)\,Y(i^\star, j^\star)} \leqq d_{ij} = \overline{X(i,j)\,Y(i,j)}.$$

(Pokud existuje takových dvojic více než jedna, vybereme některou z nich.) Čtenář snadno sám dokáže, že body $X_0 = X(i^\star, j^\star)$ a $Y_0 = Y(i^\star, j^\star)$ jsou body s nejkratší vzdáleností.

K zakončení důkazu zbývá sestrojit přímku p oddělující K_1 od K_2. Protože mnohoúhelníky K_1 a K_2 nemají společné body, je bod X_0 různý od bodu Y_0; je tedy možné vést středem úsečky X_0Y_0 přímku p kolmou k této úsečce. Ukážeme, že kolmice p odděluje mnohoúhelníky K_1, K_2:



Obr. 6.

Kdyby přímka p mnohoúhelníky K_1, K_2 neoddělovala, existoval by bod R, ležící na přímce p a zároveň náležející jednomu z mnohoúhelníků K_1, K_2. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že bod R náleží mnohoúhelníku K_2 (viz obr. 6). Označíme-li Q patu výšky SQ v pravoúhlém trojúhelníku $\triangle\ Y_0RS$ ($\sphericalangle\ S = 90°$), pak (protože body Y_0, R náleží konvexnímu mnohoúhelníku K_2) bod Q náleží mnohoúhelníku K_2. Avšak

$$\overline{X_0Q} < \overline{X_0Y_0},$$

neboť

$$\overline{X_0Q} < \overline{X_0S} + \overline{SQ} < \overline{X_0S} + \overline{SY_0} = \overline{X_0Y_0}.$$

To je však ve sporu s vlastností dvojice bodů X_0, Y_0.

1.3. Pojem n-rozměrného prostoru

Víme, že polohu bodu na přímce můžeme určit jedním číslem, polohu bodu v rovině uspořádanou dvojicí a polohu bodu v prostoru uspořádanou trojicí čísel. Vyjdeme-li z této skutečnosti, můžeme dospět k této definici n- rozměrného prostoru:

Množinu všech uspořádaných n-tic $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazveme **n-rozměrným prostorem** a označíme symbolem R^n.

Přitom dvě uspořádané n-tice $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ považujeme za stejné (sobě rovné), platí-li $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$. Prvky množiny R^n budeme nazývat **body** prostoru R^n; čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ budeme nazývat **souřadnicemi** bodu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

V případě, že $n = 1, 2, 3$, budeme užívat známého geometrického znázornění prostoru R^n pomocí pevně zvolené pravoúhlé soustavy souřadnic. Na tomto místě chceme čtenáře upozornit na to, že v definicích pojmů, formulacích vět a při provádění důkazů budeme užívat výhradně analytických (volněji řečeno početních) metod, které budou vycházet doslovně z definice prostoru R^n jakožto množiny všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Kdybychom však důsledně odmítli užívat geometrických představ, zbavili bychom výklad veškeré geometrické názornosti a připravili bychom se o možnost porovnávat smysl definic, tvrzení a základních myšlenek důkazů se zkušeností, kterou jsme získali při každodenním vnímání prostorových vlastností světa, v němž žijeme. Z těchto důvodů budeme užívat „geometrické“ terminologie, která umožňuje dávat jednotlivým definicím, větám a myšlenkovým postupům názorný geometrický smysl. Používání geometrických představ někdy umožní i „uhodnout předem“ přesné nebo alespoň „přibližné“ znění věty, popřípadě postup důkazu. Proto v poslední části tohoto odstavce zavedeme geometrické názvy pro podmnožiny prostoru R^n, se kterými se v dalším výkladu budeme setkávat.

Jsou-li a_1, b daná čísla, přičemž $a_1 \neq 0$, pak množinu prvků prostoru R^1, jejichž souřadnice x_1 vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 = b,$$

lze znázornit bodem; je to prostě jednobodová množina.

Jsou-li a_1, a_2, b daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel a_1, a_2 je různé od nuly, pak množinu bodů prostoru R^2, jejichž souřadnice x_1, x_2 vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b,$$

lze znázornit přímkou.

Jsou-li a_1, a_2, a_3, b daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel a_1, a_2, a_3 je různé od nuly, pak množinu bodů prostoru R^3, jejichž souřadnice x_1, x_2, x_3 vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b,$$

lze znázornit rovinou.

Bude užitečné zavést pro podobné množiny (čtenář již tuší jaké) v prostorech R^n speciální název. Dospíváme tak k této definici:

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ jsou daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je různé od nuly. Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n, jejichž souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \tag{13}$$

nazveme **nadrovinou** v prostoru R^n. Rovnici (13) nazýváme rovnicí této nadroviny.

Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leqq b, \tag{14}$$

nazveme **uzavřeným poloprostorem** v prostoru R^n určeným nerovností (14). Množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geqq b, \tag{15}$$

nazveme rovněž uzavřeným poloprostorem, a to uzavřeným poloprostorem určeným nerovností (15).

Uzavřené poloprostory určené nerovnostmi (14), (15) nazýváme také (navzájem) **opačnými uzavřenými poloprostory** určenými nadrovinou o rovnici (13).

Otevřenými (navzájem **opačnými**) poloprostory určenými nadrovinou o rovnici (13) nazýváme množiny bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n < b$$

resp.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n > b.$$

Jsou-li $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ body prostoru R^n, pak **úsečkou** spojující body Y, Z nazýváme množinu těch bodů $X = (x_1 x_2, \ldots, x_n)$, pro jejichž souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda y_1 + (1-\lambda)\, z_1, \\ x_2 &= \lambda y_2 + (1-\lambda)\, z_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \lambda y_n + (1-\lambda)\, z_n, \end{aligned}$$

kde λ může být libovolné číslo, pro které platí $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

O množině bodů prostoru R^n říkáme, že je **konvexní,**[1]) jestliže pro libovolné dva její body do ní patří i celá úsečka tyto body spojující.

Cvičení

1. Dokažte, že má-li soustava lineárních rovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

nezáporné řešení, pak pro každé řešení (y_1, y_2, y_3) (nikoli jen nezáporné!) soustavy lineárních nerovností

$$\begin{aligned} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + y_3 a_{31} &\geqq 0, \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + y_3 a_{32} &\geqq 0, \\ y_1 a_{13} + y_2 a_{23} + y_3 a_{33} &\geqq 0 \end{aligned}$$

platí nerovnost

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 \geqq 0.$$

2. Uzavřeným kruhem se středem S a poloměrem r ($r > 0$) rozumíme množinu bodů X roviny ϱ, pro které platí nerovnost $\overline{SX} \leqq r$; otevřeným kruhem se středem S a poloměrem r ($r > 0$) rozumíme množinu bodů X roviny ϱ, pro které platí $\overline{SX} < r$. Dokažte, že

---

[1]) Na rozdíl od knížek [2] a [3] počítáme prázdnou množinu mezi množiny konvexní.

a) jsou-li K_1 a K_2 uzavřené kruhy, jsou K_1 a K_2 oddělitelné právě tehdy, jestliže kruhy K_1 a K_2 nemají společné body;

b) jsou-li K_1 a K_2 otevřené kruhy, jsou K_1 a K_2 oddělitelné právě tehdy, jestliže kruhy K_1 a K_2 nemají společné body.

Obdobné tvrzení však neplatí, je-li jeden z kruhů K_1, K_2 otevřený a druhý uzavřený.

3. Nechť bod M neleží na přímce p. Které přímky oddělují bod M a přímku p?

4. Ukažte, že může existovat více dvojic s vlastností dvojice (X_0, Y_0) z důkazu tvrzení 3. V takovém případě však existuje takových bodů nekonečně mnoho.

5. Znázorněte v rovině množiny těch bodů $X = (x_1, x_2)$ a prostoru R^2, pro jejichž souřadnice platí:

(a) $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ a zároveň $x_2 \geqq x_1^2$,

(b) $x_1 \leqq 1$ a zároveň $x_1^2 + x_2^2 > 1$,

(c) $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ a zároveň $|x_1| + |x_2| \geqq 1$.

2. kapitola

ODDĚLITELNOST KONVEXNÍCH MNOHOSTĚNŮ

II.1. Konvexní mnohostěny

V tomto odstavci budeme definovat důležitou třídu podmnožin prostoru R^n, které budeme nazývat konvexními mnohostěny. Konvexní mnohostěny budou pro nás důležité tím, že pojem konvexního mnohostěnu zobecňuje v jistém smyslu pojem konvexního mnohoúhelníku v rovině a zároveň i pojem množiny všech řešení soustavy lineárních nerovností (popřípadě rovnic). Při výkladu budeme postupovat takto: Nejprve uvedeme definici konvexního mnohostěnu, potom ukážeme geometrickou interpretaci tohoto pojmu a nakonec uvedeme některé základní vlastnosti konvexních mnohostěnů potřebné v dalším výkladu.

Soustavou m lineárních nerovností o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (kde m, n jsou přirozená čísla), nazýváme soustavu nerovností tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m, \end{aligned} \tag{16}$$

kde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m$ jsou daná čísla.

Množinu všech bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n, jejichž souřadnice vyhovují všem nerovnostem soustavy (16) nazýváme **konvexním**[1]) **mnohostěnem** v prostoru R^n definovaným soustavou (16).

Konvexním mnohostěnem v prostoru R^n je tedy každá taková množina K bodů prostoru R^n, pro kterou existuje taková soustava lineárních nerovností o n neznámých, že množina K představuje množinu všech řešení této soustavy.

Příklad 1. Prázdná množina je konvexním mnohostěnem v prostoru R^n, neboť představuje množinu všech řešení nerovnosti

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n \leqq -1.$$

Příklad 2. Prostor R^n je konvexním mnohostěnem v prostoru R^n, neboť představuje množinu všech řešení soustavy

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n \leqq 1.$$

Příklad 3. V prostoru R^1 jsou konvexními mnohostěny pouze tyto množiny: (a) prázdná množina; (b) prostor R^1; (c) množiny těch bodů $X = (x_1)$ prostoru R^1, pro které platí $a \leqq x_1 \leqq b$, kde a, b jsou čísla, pro která je $a \leqq b$; (d) množiny těch bodů $X = (x_1)$ prostoru R^1, pro které platí $x_1 \leqq b$, kde b je jisté číslo; (e) množiny těch bodů $X = (x_1)$ prostoru R^1, pro které platí $a \leqq x_1$, kde a je jisté číslo.

Podejme si hned důkaz tvrzení obsaženého v příkladu 3. Je-li K konvexní mnohostěn v prostoru R^1, pak K představuje množinu všech řešení jisté soustavy nerovností tvaru:

---

[1]) To, že konvexní mnohostěn je konvexní množina, dokážeme později; viz věta 2.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 &\leqq b_1,\\
a_{21}x_1 &\leqq b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{m1}x_1 &\leqq b_m.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Může nastat právě jedna z těchto dvou možností:

1. Soustava (17) nemá řešení.
2. Soustava (17) má řešení.

Nastává-li první možnost, dostáváme případ (a). Stačí tedy dále vyšetřovat pouze druhou možnost. Nechť je tedy množina K neprázdná. Potom nastává právě jedna z těchto čtyř vzájemně se vylučujících možností:

(2a) $a_{i1} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$;
(2b) existují takové indexy i_0, j_0, že platí $a_{i_01} > 0$, $a_{j_01} < 0$;
(2c) $a_{i1} \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a existuje takový index i_0, že platí $a_{i_01} > 0$;
(2d) $a_{i1} \leqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a existuje takový index i_0, že platí $a_{i_01} < 0$.

Nastává-li případ (2a), musí být $b_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$, neboť podle předpokladu soustava (17) má řešení. Avšak je-li $a_{i1} = 0$ a $b_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$, je řešením soustavy (17) každé reálné číslo; nastává tedy případ (b).

Nastává-li případ (2b), dostáváme případ (c): Nechť $i_0, i_1, \ldots, i_r$ jsou všechny indexy, pro které platí $a_{i_01} > 0$, $a_{i_11} > 0, \ldots, a_{i_r1} > 0$ a nechť $j_0, j_1, \ldots, j_s$ jsou všechny indexy, pro které platí $a_{j_01} < 0$, $a_{j_11} < 0, \ldots, a_{j_s1} < 0$. Označíme-li písmenem a největší z čísel $\frac{b_{j_0}}{a_{j_01}}, \frac{b_{j_1}}{a_{j_11}}, \ldots,$ $\frac{b_{j_s}}{a_{j_s1}}$ a písmenem b nejmenší z čísel $\frac{b_{i_0}}{a_{i_01}}, \frac{b_{i_1}}{a_{i_11}}, \ldots, \frac{b_{i_r}}{a_{i_r1}}$, je množina K tvořena všemi čísly x_1, pro která platí $a \leqq x_1 \leqq b$.

Nastává-li případ (2c) a jsou-li $i_0, i_1, \ldots, i_r$ všechny indexy, pro které platí $a_{i_0 1} > 0, a_{i_1 1} > 0, \ldots, a_{i_r 1} > 0$, dospíváme k případu (d), neboť množina K je tvořena všemi čísly x_1, pro která platí $x_1 \leqq b$, kde b je nejmenší z čísel $\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 1}}, \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 1}}, \ldots, \frac{b_{i_r}}{a_{i_r 1}}$.

Je již zřejmé, jakým způsobem dospějeme k tomu, že možnosti (2d) odpovídá (e).

Poznámka. Získané výsledky můžeme shrnout také takto: Konvexním mnohostěnem v prostoru R^1 je buď prázdná množina, nebo celý prostor R^1, nebo průnik konečného počtu uzavřených poloprostorů prostoru R^1 (uzavřené poloprostory prostoru R^1 je přirozené nazývat uzavřenými polopřímkami).

Příklad 4. Vyšetřujme nyní konvexní mnohostěny v prostoru R^2. Nechť K je konvexní mnohostěn v prostoru R^2 daný soustavou nerovností

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leqq b_m. \end{aligned} \tag{18}$$

Jestliže v nerovnosti $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqq b_i$, kde i je jedno z čísel $1, 2, \ldots, m$, je alespoň jedno z čísel a_{i1}, a_{i2} různé od nuly, pak je touto nerovností určen jistý uzavřený poloprostor prostoru R^2 (v případě prostoru R^2 je přirozené nazývat tento poloprostor uzavřenou polorovinou).

Jestliže je $a_{i1} = a_{i2} = 0$, pak buď tato nerovnost nemá řešení ($b_i < 0$), nebo souřadnice libovolného bodu prostoru R^2 jsou jejím řešením ($b_i \leqq 0$). Vzhledem k tomu, že řešení soustavy (18) jsou představována těmi body prostoru R^2, jejichž souřadnice vyhovují všem nerovnostem soustavy (18), dostáváme, že konvexní mnohostěn v prostoru R^2 je buď množina prázdná, nebo celý prostor R^2, nebo množina, která je průnikem konečně mnoha uzavřených polorovin (tento průnik může být také prázdnou množinou). Všimněme si ještě, že každý průnik konečného počtu uzavřených polorovin je konvexním mnohostěnem v prostoru R^2.

Čtenář již sám nahlédne, že analogická situace nastává v případě konvexních mnohostěnů v prostoru R^3 (pouze místo o průniku uzavřených polorovin musíme hovořit o průniku uzavřených poloprostorů).

Rovněž v případě konvexního mnohostěnu v prostoru R^n zadaného soustavou (16) můžeme říci, že K je buď prázdná množina, nebo celý prostor (viz příklad 1 a příklad 2), nebo průnik konečného počtu poloprostorů určených těmi nerovnostmi $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqq b_i$, ve kterých je alespoň jedno z čísel $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ různé od nuly.

Konvexní mnohostěny mají jednu důležitou vlastnost, kterou uvedeme bez důkazu, ale kterou budeme v dalším výkladu často používat.

Uvažujme zobrazení prostoru R^n do prostoru R^m, které je definováno tím, že bodu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n přiřazuje prvek $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ prostoru R^m podle předpisu

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{m}x_n, \end{aligned} \qquad (*)$$

kde c_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná čísla. Zobrazení tvaru (*) se nazývá *lineární zobrazení.*

Je-li K konvexní mnohostěn v prostoru R^n, pak jeho obrazem při zobrazení definovaném předpisem (*) je jistá množina L bodů prostoru R^m (bod $M = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

prostoru R^m patří do množiny L, existuje-li takový bod $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mnohostěnu K, že pro souřadnice bodů Y, X platí (*)). Dá se dokázat, že platí tato věta:

Věta 1. *Je-li K konvexní mnohostěn v prostoru R^n, je obraz L množiny K při zobrazení určeném předpisem (*) konvexním mnohostěnem v prostoru R^m.*

Na závěr tohoto odstavce dokážeme ještě tuto větu:

Věta 2. *Konvexní mnohostěn v prostoru R^n je konvexní množinou.*

Důkaz. Nechť K je konvexní mnohostěn v prostoru R^n určený soustavou (16) a nechť body $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ prostoru R^n patří do množiny K. Podle definice konvexní množiny stačí dokázat, že pro každé číslo λ, pro které platí $0 \leqq \lambda \leqq 1$, patří bod $X = (\lambda y_1 + (1 - \lambda).z_1, \lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2, \ldots, \lambda y_n + (1 - \lambda z_n)$ do množiny K. Stačí tedy dokázat, že platí

$$\begin{aligned}
&a_{11}(\lambda.y_1 + (1 - \lambda).z_1) + a_{12}(\lambda.y_2 + (1 - \lambda).z_2) + \ldots \\
&\ldots + a_{1n}(\lambda.y_n + (1 - \lambda).z_n) \leqq b_1, \\
&a_{21}(\lambda.y_1 + (1 - \lambda).z_1) + a_{22}(\lambda.y_2 + (1 - \lambda).z_2) + \ldots \\
&\ldots + a_{2n}(\lambda.y_n + (1 - \lambda).z_n) \leqq b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&a_{m1}(\lambda.y_1 + (1 - \lambda).z_1) + a_{m2}(\lambda.y_2 + (1 - \lambda).z_2) + \ldots \\
&\ldots + a_{mn}(\lambda.y_n + (1 - \lambda).z_n) \leqq b_m.
\end{aligned}$$

Protože $b_i = \lambda.b_i + (1 - \lambda).b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, vyplývá platnost poslední soustavy z našich předpokladů násobením každé nerovnosti platné soustavy

$$\begin{aligned}
&a_{11}.y_1 + a_{12}.y_2 + \ldots + a_{1n}.y_n \leqq b_1, \\
&a_{21}.y_2 + a_{22}.y_2 + \ldots + a_{2n}.y_n \leqq b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&a_{m1}.y_1 + a_{m2}.y_2 + \ldots + a_{mn}.y_n \leqq b_m
\end{aligned}$$

číslem λ, každé nerovnosti platné soustavy

$$\begin{array}{l} a_{11}.z_1 + a_{12}.z_2 + \ldots + a_{1n}.z_n \leqq b_1, \\ a_{21}.z_1 + a_{22}.z_2 + \ldots + a_{2n}.z_n \leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}.z_1 + a_{m2}.z_2 + \ldots + a_{mn}.z_n \leqq b_m \end{array}$$

číslem $(1 - \lambda)$ a sečtením odpovídajících si nerovností.

II.2. **Oddělitelnost konvexních mnohostěnů**

Buďte M_1 a M_2 dvě neprázdné podmnožiny prostoru R^n. Budeme říkat, že množiny M_1 a M_2 jsou (vzájemně) *oddělitelné*, jestliže existují taková čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, že alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je různé od nuly a že pro všechny body $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množiny M_1 platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n > b$$

a pro všechny body $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množiny M_2 platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < b.$$

Užijeme-li terminologie zavedené v předchozí kapitole, můžeme právě vyslovenou definici vyjádřit také takto: Dvě neprázdné podmnožiny M_1 a M_2 prostoru R^n nazýváme oddělitelnými množinami, jestliže existuje taková nadrovina prostoru R^n, že množiny M_1 a M_2 leží v opačných otevřených poloprostorech touto nadrovinou určených.

Podle definice je zřejmé, že oddělitelné množiny nemají společné body. Snadno ukážeme, že neprázdné množiny, které nemají společné body, nemusí být oddělitelné. Nechť např. M_1 je sjednocením množin A_1, A_2, A_3, A_4, kde množiny

A_1, A_2, A_3, A_4 jsou definovány takto (znázorněte si uvedené množiny v rovině):

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqq x_1 \leqq 1, \quad x_2 = 0\}, \\ A_2 &= \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqq x_1 \leqq 1, \quad x_2 = 1\}, \\ A_3 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0,\ 0 \leqq x_2 \leqq 1\}, \\ A_4 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 1,\ 0 \leqq x_2 \leqq 1\} \end{aligned}$$

(tj. A_1 je množina bodů, jejichž souřadnice splňují podmínky $0 \leqq x, \leqq 1$ a $x_2 = 0$; způsob zápisu A_2, A_3 a A_4 je zcela analogický. Uvedeného způsobu definice množin se v matematice běžně používá) a nechť množina M_2 je tvořena těmito dvěma body: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Je zřejmé, že množiny M_1 a M_2 jsou neprázdné a nemají společné body. Přitom však množiny M_1 a M_2 nejsou oddělitelné, protože kdyby existovala taková čísla a_1, a_2, b, že alespoň jedno z čísel a_1, a_2 je různé od nuly a že pro každý bod $X = (x_1, x_2)$ množiny M_1 platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 > b$$

a zároveň pro každý bod $X = (x_1, x_2)$ množiny M_2 platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 < b,$$

muselo by platit

$$a_1 + a_2 > 2b,$$

neboť (0,1), (1,0) patří do množiny M_1 a zároveň

$$a_1 + a_2 < 2b,$$

neboť body $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ patří do množiny M_2.

Pro konvexní mnohostěny však platí tato věta (sr. s větou C v předchozí kapitole):

Věta 3. *Dva neprázdné konvexní mnohostěny v prostoru R^n jsou oddělitelné právě tehdy, nemají-li společné body.*

Jak jsme se již zmínili, od důkazu této věty upouštíme, avšak v dalším výkladu si ukážeme některé její aplikace.

Cvičení

1. Dokažte, že konvexní mnohostěn v prostoru R^n je množina buď prázdná, nebo jednobodová, nebo obsahující nekonečně mnoho bodů.

2. Znázorněte tyto konvexní mnohostěny v prostoru R^1:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 &\leqq 4, \\ 2x_1 &\leqq 10, \\ 3x_1 &\leqq 13, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -3x_1 &\leqq -4, \\ -2x_1 &\leqq 10, \\ -3x_1 &\leqq -13, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1 &\leqq 4, \\ -2x_1 &\leqq -1, \\ 0x_1 &\leqq 1, \\ -3x_1 &\leqq 0, \\ 5x_1 &\leqq 8. \end{aligned}$$

3. Dokažte, že průnik dvou konvexních mnohostěnů v prostoru R^n je konvexním mnohostěnem.

4. Ukažte, že sjednocení dvou konvexních mnohostěnů v prostoru R^n nemusí být konvexním mnohostěnem v prostoru R^n.

5. Znázorněte tyto konvexní mnohostěny v prostoru R^2:

$$\begin{aligned} &\text{a)} & 0x_1 + x_2 &\geqq 0; \\ &\text{b)} & x_1 + 0x_2 &\geqq 0, \\ & & 0x_1 + x_2 &\geqq 0; \\ &\text{c)} & x_1 + x_2 &\leqq 1, \\ & & x_2 &\leqq 1, \\ & & x_1 - x_2 &\leqq 1. \end{aligned}$$

3. kapitola

NĚKTERÁ UŽITÍ VĚTY O ODDĚLITELNOSTI

III.1. O řešitelnosti soustav lineárních nerovností

V I. kapitole jsme ve speciálních případech zjistili, že spolu se soustavou lineárních nerovností tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \end{aligned} \tag{19}$$

je užitečné uvažovat ještě soustavu lineárních nerovností tvaru

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &\geqq 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &\geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &\geqq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Platí totiž tato věta (sr. konec odstavce I.1):

Věta 4. *Soustava lineárních nerovností* (19) *má nezáporné řešení právě tehdy, platí-li pro každé nezáporné řešení* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy* (20) *nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m \geqq 0.$$

Důkaz. 1. Předpokládejme, že soustava (19) má nezáporné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a nechť $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je libovolné nezáporné řešení soustavy (20). Za těchto předpokladů je zřejmé, že $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je také řešením soustavy

$$\begin{aligned} y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) &\leqq y_1b_1, \\ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) &\leqq y_2b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n) &\leqq y_mb_m \end{aligned} \tag{21}$$

a tudíž také nerovnosti, která vznikne sečtením všech nerovností soustavy (21). Avšak po provedení naznačeného násobení čísly $y_1, y_2, \ldots, y_m$ a po vytknutí čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zjistíme, že tato poslední nerovnost má tvar

$$\begin{aligned} &(y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})\, x_1 + \\ &+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})\, x_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn})\, x_n \leqq \\ &\leqq y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m. \end{aligned} \tag{22}$$

Z tohoto tvaru je patrné, že platí nerovnost

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m \geqq 0,$$

neboť podle předpokladů na levé straně nerovnosti (22) jde o součet součinů nezáporných čísel.

2. Zbývá dokázat, že podmínka věty je postačující podmínkou existence nezáporného řešení soustavy (19). K tomu však stačí dokázat, že neexistuje-li nezáporné řešení soustavy (19), není splněna zmíněná podmínka. Předpokládejme tedy, že neexistuje nezáporné řešení soustavy (19). Označme symbolem K_1 množinu těch bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ prostoru R^m, pro jejichž souřadnice platí

$$\xi_1 \leqq b_1, \ \xi_2 \leqq b_2, \ \ldots, \ \xi_m \leqq b_m.$$

Dále symbolem K_2 označme množinu bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots,$

ξ_m) prostoru R^m, jejichž souřadnice mají tyto vlastnosti: existuje takový bod $K = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n, že platí

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \xi_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \xi_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&,\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= \xi_m,\\
x_1 &\geqq 0,\\
x_2 &\geqq 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&,\\
x_n &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Jinými slovy: množina K_2 je množina bodů prostoru R^m tvaru

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n),$$

kde $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$.

Množiny K_1 a K_2 jsou neprázdné konvexní mnohostěny. V případě množiny K_1 je to zřejmé, v případě množiny K_2 je to jednoduchý důsledek věty 1. Protože neexistuje nezáporné řešení soustavy (19), nemají množiny K_1 a K_2 společné body a jsou v důsledku věty 3 oddělitelné. Existují tedy taková čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ je různé od nuly, že pro každý bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ množiny K_1 je

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m < b$$

a pro každý bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ množiny K_2 je

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m > b.$$

Odtud však plyne, že číslo b je záporné, neboť bod $(0,0, \ldots, 0)$ patří do množiny K_2, takže platí

$$a_1 0 + a_2 0 + \ldots + a_m 0 > b.$$

Dále dokážeme, že čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou nezáporná: Je-li pro nějaké i_0 $a_{i_0} < 0$ a položíme-li

$$\xi_1 = b_1, \xi_2 = b_2, \ldots, \xi_{i_0-1} = b_{i_0-1}, \xi_{i_0+1} = b_{i_0+1}, \ldots, \xi_m = b_m,$$

$$\xi_{i_0} = \min \left[b_{i_0}, \frac{b - a_1 b_1 - \ldots - a_{i_0-1} b_{i_0-1} - a_{i_0+1} b_{i_0+1} - \ldots - a_m b_m}{a_{i_0}} \right],$$

patří bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ do množiny K_1 (viz zavedení množiny K_1), a musí tedy platit

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_m \xi_m < b.$$

Přímým výpočtem však zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m &= \\ = a_{i_0}\xi_{i_0} + (a_1\xi_1 \ldots + a_{i_0-1}\xi_{i_0-1} + a_{i_0+1}\xi_{i_0+1} + \ldots &+ \\ + a_m\xi_m) &\geqq \\ \geqq b - a_1 b_1 - \ldots - a_{i_0-1} b_{i_0-1} - a_{i_0+1} b_{i_0+1} - \ldots &- \\ - a_m b_m &+ \\ + (a_1 b_1 + \ldots + a_{i_0-1} b_{i_0-1} + a_{i_0+1} b_{i_0+1} + \ldots &+ \\ + a_m b_m) &= b, \end{aligned}$$

takže předpoklad $a_{i_0} < 0$ vede ke sporu.

Dokážeme nyní, že

$$y_1 = a_1, y_2 = a_2, \ldots, y_m = a_m$$

je takové nezáporné řešení soustavy (20), že platí nerovnost

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m < 0,$$

tj. že není splněna podmínka věty 4. Poslední nerovnost však plyne z toho, že číslo b je záporné a že bod $(b_1,$

$b_2, \ldots, b_m)$ patří do množiny K_1. Zbývá tedy dokázat, že $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je řešením soustavy (20).

Předpokládejme, že existuje index j_0 tak, že platí

$$y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \ldots + y_m a_{mj_0} < 0$$

a položme $x_j = 0$ pro $j \neq j_0$,

$$x_{j_0} = \frac{b}{y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \ldots + y_m a_{mj_0}}.$$

Potom bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, kde

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\
\xi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\xi_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

patří do množiny K_2, takže platí

$$y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \ldots + y_m\xi_m > b.$$

Avšak přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že platí

$$\begin{aligned}
&y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \ldots + y_m\xi_m = \\
&= y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
&+ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) = \\
&= y_1 a_{1j_0} \cdot \frac{b}{y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \ldots + y_m a_{mj_0}} + \\
&+ y_2 a_{2j_0} \frac{b}{y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \ldots + y_m a_{mj_0}} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_m a_{mj_0} \frac{b}{y_1 a_{1j_0} + y_2 a_{2j_0} + \ldots + y_m a_{mj_0}} = b.
\end{aligned}$$

Tento spor nám říká, že index j_0 s uvedenou vlastností neexistuje, takže $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ je řešením soustavy (20) a důkaz věty 4 je dokončen.

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil dokázat jako cvičení tyto věty:

Věta 5. *Soustava* (19) *má řešení (nejedná se tedy pouze o nezáporné řešení) právě tehdy, platí-li pro každé nezáporné řešení* $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ *soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \dots + y_ma_{m1} &= 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \dots + y_ma_{m2} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \dots + y_ma_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

nerovnost

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \dots + y_mb_m \geqq 0.$$

Věta 6. *Soustava lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

má nezáporné řešení právě tehdy, platí-li pro každé (nikoliv jen nezáporné) řešení $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ *soustavy* (20) *nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \dots + y_mb_m \geqq 0.$$

Věta 7. *Soustava lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

má řešení právě tehdy, jestliže pro každé řešení $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &= 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

platí

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m = 0.$$

III.2. **O úlohách lineární optimalizace**

Úlohou **lineární optimalizace** nazýváme tuto úlohu: Mezi nezápornými řešeními $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (pokud vůbec existují) soustavy lineárních nerovností tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \end{aligned} \tag{23}$$

nalézt takové, pro které nabývá daná funkce n proměnných

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{24}$$

(kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou daná čísla) své největší hodnoty; stručně to zapisujeme symbolem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max^{1)}. \tag{25}$$

Pro nezáporná řešení soustavy (23) se vžil název **pří-**

[1]) Funkci f nazýváme někdy účelovou funkcí; kromě toho i v případě, že hledáme nejmenší hodnotu funkce f, hovoříme o úloze optimalizace.

pustná řešení úlohy lineární optimalizace a pro přípustná řešení dávající největší hodnotu funkce (24) se vžil název **optimální řešení** úlohy lineární optimalizace.

Uveďme na tomto místě alespoň jeden příklad úlohy z praxe, která vede na úlohu lineární optimalizace. K výrobě různých druhů produkce je potřeba užít jistých technologických postupů a určitých surovin a úlohou je rozhodnout, jaká množství jednotlivých druhů produkce máme vyrobit, abychom při použití daných technologických postupů nepřekročili dané zásoby potřebných surovin a abychom přitom dosáhli co největšího zisku.

Předpokládejme, že se jedná o n druhů produkce a že k výrobě je třeba m druhů surovin. Označme symbolem c_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) zisk z výroby každého jednotkového množství produkce j-tého druhu a symbolem b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) zásobu i-té suroviny. Jsou-li technologické postupy takové, že k výrobě jednotkového množství j-té produkce je potřeba množství a_{ij} i-té suroviny a označíme-li x_j hledané množství produkce j-tého druhu, pak

podmínky nepřekročení zásob jednotlivých surovin lze vyjádřit soustavou (23);
zisk z výroby lze vyjádřit vzorcem (24);
podmínku největšího zisku lze vyjádřit podmínkou (25).

Jak jsme již zjistili v I. kapitole, soustava lineárních nerovností nemusí mít žádné řešení, nemusí tedy existovat ani přípustné řešení úlohy lineární optimalizace. Jako cvičení by si měl čtenář ukázat, že i v případě, kdy soustava (23) má řešení, nemusí mít nezáporné řešení. Ukážeme si, že i v případě, kdy úloha lineární optimalizace má přípustné řešení, nemusí mít optimální řešení.

Můžeme k tomu užít soustavy (2) z I. kapitoly, tj. soustavy

$$-2x_1 - x_2 \leqq -2,$$
$$-x_1 - 2x_2 \leqq -4,$$

jejíž množina řešení je znázorněna na obr. 3, ze kterého je patrné, že tato množina není omezená. Je také zřejmé, že zvolíme-li pevně hodnotu neznámé $x_2 = \hat{x}_2$ tak, že je $\hat{x}_2 > 0$, bude existovat taková hodnota neznámé $x_1 = \hat{x}_1$, že kromě dvojice čísel $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ bude řešením uvažované soustavy i každá dvojice čísel $(\bar{x}_1, \hat{x}_2)$, pro kterou platí $\bar{x}_1 > \hat{x}_1$. Odtud však plyne, že bude-li funkce $f(x_1, x_2)$ mít např. tvar

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2,$$

můžeme vhodnou volbou hodnot proměnných dosáhnout toho, aby funkce $f(x_1, x_2)$ nabývala hodnoty větší než jakékoliv předem zadané číslo a nemůže tedy funkce f nabývat na množině přípustných řešení své největší hodnoty.

Platí však tato věta.

Věta 8. *Existuje-li přípustné řešení úlohy* (23), (24), (25) *a existuje-li takové číslo M, že pro všechna přípustná řešení* $x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *platí*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq M,$$

potom existuje i optimální řešení.

Důkaz. Množina všech nezáporných řešení $(x_1\ x_2, \ldots, \ldots, x_n)$ soustavy (23) je konvexním mnohostěnem K v prostoru R^n. Podle věty 1 je množina $\tilde{K}$ všech bodů $Z = (z_1)$ prostoru R^1, pro které existuje takový bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mnohostěnu K, že platí

$$z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

konvexním mnohostěnem v R^1. Podle příkladu 3 kapitoly II je tedy $\tilde{K}$ buď (a) prázdná množina, nebo (b) prostor R^1, nebo (c) množina bodů (x_1) prostoru R^1, pro které platí $a \leqq x_1 \leqq b$, kde a, b jsou čísla, pro která je $a \leqq b$ nebo (d) množina bodů (x_1) prostoru R^1, pro které platí $x_1 \leqq b$, kde b je jisté číslo nebo (e) množina bodů (x_1) prostoru R^1, pro které platí $a \leqq x_1$, kde a je jisté číslo. Protože však podle předpokladu existuje přípustné řešení, nemůže nastat případ (a), protože kromě toho existuje číslo M tak, že pro všechny body (z_1) množiny $\tilde{K}$ platí $z_1 \leqq M$, nemohou nastat ani případy (b) a (e). Ať již nastává kterýkoliv ze zbývajících případů, optimální řešení existuje; je jím každé řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro které platí

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b,$$

a takové řešení existuje, neboť funkce

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

zobrazuje množinu K na množinu $\tilde{K}$.

Výhodné je studovat spolu s úlohou (23), (24), (25) i tuto úlohu: Mezi nezápornými řešeními $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ soustavy lineárních nerovností tvaru

$$\begin{array}{l} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} \geqq c_1, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} \geqq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} \geqq c_n \end{array} \qquad (23')$$

nalézt takové, pro které nabývá funkce m proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m, \qquad (24')$$

své nejmenší hodnoty; stručně píšeme

$$g(y_1 y_2, \ldots, y_m) \to \min.$$

Úlohu (23′), (24′), (25′) nazýváme úlohou *duální* k úloze (23), (24), (25).

Všimněme si toho, že obě úlohy jsou zadány systémem čísel

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1, \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots\ a_{mn}, b_m, \\ c_1,\ \ c_2\ \ , \ldots, c_n, \end{array}$$

a toho, že duální úloha je úlohou lineární optimalizace stejného typu jako úloha (23), (24), (25), neboť soustavu (23′) můžeme převést na soustavu

$$\begin{array}{l} -a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \ldots - a_{m1}y_m \leqq -c_1, \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m \leqq -c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m \leqq -c_n \end{array}$$

a podmínku (25′) na tvar

$$-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max.$$

Kromě toho čtenář snadno nahlédne, že vytvoříme-li k duální úloze úlohu duální, dostaneme úlohu původní; proto často hovoříme o dvojici *vzájemně duálních* úloh.

Věta 9. *Je-li* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *přípustné řešení úlohy* (23), (24), (25) *a je-li* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *přípustné řešení duální úlohy, pak platí nerovnost*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Důkaz. Užijeme-li postupně nerovností (23′) a (23), dostaneme

$$\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + \ldots + c_nx_n \leqq \\
&\leqq (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})x_1 + \\
&+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})x_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn})x_n = \\
&= y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
&+ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \hat{y}_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq \\
&\leqq y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m.
\end{aligned}$$

Věta 10. *Přípustná řešení* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$, $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \ldots, y_m)$ *vzájemně duálních úloh* (23) — (25) *a* (23′) — (25′), *pro která platí*

$$c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n = b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m$$

jsou optimální.

Důkaz. Ukážeme např., že $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ je optimální řešení úlohy (23) — (25); to, že $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m)$ je optimální řešení úlohy (23′) — (25′), si čtenář zcela analogicky dokáže sám. Máme dokázat, že pro libovolné přípustné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ úlohy (23) — (25) platí nerovnost

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n.$$

Avšak podle věty 9 platí

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m$$

a podle předpokladu věty 10 platí

$$b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m = c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n.$$

Věta 11. *Existují-li přípustná řešení vzájemně duálních úloh* (23) — (25) *a* (23′) — (25′), *pak existují i optimální řešení těchto úloh a je-li* $(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$ *optimální řešení* *úlohy* (23) — (25) *a* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *optimální řešení úlohy* (23′) — (25′), *pak platí*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Důkaz. Je zřejmé, že stačí dokázat existenci takových nezáporných řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ soustav

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqq b_m, \end{array} \tag{26}$$

$$\begin{array}{l} -a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \ldots - a_{m1}y_m \leqq -c_1, \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m \leqq -c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m \leqq -c_n, \end{array} \tag{27}$$

že platí

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{28}$$

Protože však pro každé přípustné řešení platí podle věty 9 nerovnost

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \geqq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

stačí místo (28) požadovat splnění podmínky

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \leqq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

a ta je ekvivalentní s podmínkou

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \leqq \leqq 0. \tag{29}$$

Máme tedy dokázat, že soustava $m + n + 1$ nerovností (26), (27), (29) o $m + n$ neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ má nezáporné řešení.

Předpokládejme, že tato soustava nemá nezáporné řešení, potom podle věty 4 existují taková nezáporná čísla ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \lambda$, že platí

$$\begin{array}{rl}
a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m - c_1\lambda \geqq 0, & \\
a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m - c_2\lambda \geqq 0, & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\
a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m - c_n\lambda \geqq 0, & (30) \\
-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n + b_1\lambda \geqq 0, & \\
-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2n}\eta_n + b_2\lambda \geqq 0, & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\
-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n + b_m\lambda \geqq 0, &
\end{array}$$

a zároveň

$$b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m - c_1\eta_1 - c_2\eta_2 - \ldots - c_n\eta_n < < 0. \qquad (31)$$

Ukážeme nejdříve, že nemůže být $\lambda = 0$. Je-li totiž $\lambda = 0$, dostaneme, na základě (30), soustavu nerovností

$$\begin{array}{rl}
a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m \geqq 0, & \\
a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m \geqq 0, & (32a) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\
a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m \geqq 0, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n \geqq 0, & \\
-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2}\eta_n \geqq 0, & (32b) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\
-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n \geqq 0. &
\end{array}$$

Podle předpokladu věty existuje přípustné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ úlohy (23)—(25) a přípustné řešení $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ úlohy (23')—(25'). Vynásobíme-li j-tou nerovnost soustavy (32a) číslem x_j a vzniklé nerovnosti sečteme, dostaneme

$$
\begin{aligned}
0 \leqq\, & x_1 (a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m) + \\
& + x_2 (a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x_n (a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m = \\
& = \xi_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
& + \xi_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \xi_m (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq \\
& \leqq \xi_1 b_1 + \xi b_2 + \ldots + \xi_m b_m.
\end{aligned}
$$

Vynásobíme-li i-tou nerovnost soustavy (32b) číslem y_i a vzniklé nerovnosti sečteme, dostaneme obdobně

$$
\begin{aligned}
0 \leqq\, & y_1 (-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n) + \\
& + y_2 (-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2n}\eta_n) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + y_m (-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n) = \\
& = \eta_1 (-a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \ldots - a_{m1}y_m) + \\
& \eta_2 (-a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \eta_n (-a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m) \leqq \\
& \leqq -\eta_1 c_1 - \eta_2 c_2 - \ldots - \eta_n c_n.
\end{aligned}
$$

Sečtením takto získaných dvou nerovností dostaneme nerovnost

$$
\begin{aligned}
b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m - c_1\eta_1 - c_2\eta_2 - \ldots - c_n\eta_n \geqq \\
\geqq 0,
\end{aligned}
$$

která je ve sporu s nerovností (31); musí tedy být $\lambda > 0$. Potom však můžeme každou nerovnost soustavy (30) dělit číslem λ a získat tak soustavu

$$
a_{11} \frac{\xi_1}{\lambda} + a_{21} \frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{m1} \frac{\xi_m}{\lambda} \geqq c_1,
$$

$$a_{12}\frac{\xi_1}{\lambda} + a_{22}\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{m2}\frac{\xi_m}{\lambda} \geqq c_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{1n}\frac{\xi_1}{\lambda} + a_{2n}\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{mn}\frac{\xi_m}{\lambda} \geqq c_n,$$

$$a_{11}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{12}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{1n}\frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_1,$$

$$a_{21}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{22}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{2n}\frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{m1}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{m2}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{mn}\frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_m.$$

To však znamená, že $\left(\frac{\eta_1}{\lambda}, \frac{\eta_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\eta_n}{\lambda}\right)$ je přípustné řešení úlohy (23)—(25) a že $\left(\frac{\xi_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\xi_m}{\lambda}\right)$ je přípustné řešení úlohy duální, tj. úlohy (23')—(25'). Pak ovšem podle věty 9 musí platit nerovnost

$$c_1\frac{\eta_1}{\lambda} + c_2\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + c_n\frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_1\frac{\xi_1}{\lambda} + b_2\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots$$
$$\ldots + b_m\frac{\xi_m}{\lambda}.$$

Násobíme-li poslední nerovnost číslem λ, dostaneme nerovnost

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_n\eta_n \leqq b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m,$$

která je ve sporu s nerovností (31). Odtud však plyne, že předpoklad o tom, že soustava nerovností (26), (27), (29) nemá nezáporné řešení, je nesprávný, čímž je věta dokázána.

Věta 11 umožňuje dokázat snadno tuto větu:

Věta 12. *Přípustná řešení* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *vzájemně duálních úloh* (23)—(25), (23')—(25') *jsou optimálními právě tehdy, jestliže jsou splněny tyto podmínky:*

je-li $x_j > 0$, *je* $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m = c_j$;
je-li $y_i > 0$, *je* $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$.

Důkaz. Při důkazu věty 9 jsme ukázali, že platí nerovnosti $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq$

$$\begin{aligned}
&\leqq (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})\, x_1 + \\
&+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})\, x_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn})\, x_n = \\
&= y_1\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
&+ y_2\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq \\
&\leqq b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.
\end{aligned}$$

Přitom však podle vět 10 a 11 jsou přípustná řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ optimální právě tehdy, platí-li

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m,$$

tj. právě tehdy, platí-li

$$\begin{aligned}
&[c_1 - (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})]\; x_1 + \\
+&[c_2 - (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})]\; x_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+&[c_n - (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn})]\; x_n = 0
\end{aligned}$$

a

$$
\begin{aligned}
&[b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)]\; y_1 + \\
&+[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)]\; y_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+[b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)]\; y_m = 0.
\end{aligned}
$$

Protože každý ze sčítanců na levé straně první rovnosti je nekladný a každý ze sčítanců na levé straně druhé rovnosti je nezáporný, musí být pro $j = 1, 2, \ldots, n$

$$[c_j - (y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \ldots + y_ma_{mj})]\; x_j = 0$$

a pro $i = 1, 2, \ldots, m$

$$[b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)]\; y_i = 0.$$

Odtud již snadno plyne tvrzení věty.

Příklad 5. Vyšetřujme tyto vzájemně duální úlohy:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &\leqq 4, \\
2x_1 + x_2 \qquad\qquad &\leqq 3, \\
x_2 + 4x_3 + x_4 &\leqq 3, \\
x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0, x_4 &\geqq 0,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max. \tag{34}$$

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 \qquad &\geqq 2, \\
3y_1 + y_2 + y_3 &\geqq 4, \\
4y_3 &\geqq 1, \\
y_1 + \qquad y_3 &\geqq 1, \\
y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 &\geqq 0,
\end{aligned}
\tag{33'}
$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \to \min. \tag{34'}$$

Snadno se lze přesvědčit, že $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$ je přípustné řešení úlohy (33), (34). Věty 10 a 12 umožňují rozhodnout, zda toto řešení je optimální. Je-li $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$ optimální, musí podle věty 12 platit pro libovolné optimální řešení (y_1, y_2, y_3) úlohy (33'), (34')

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 \qquad &= 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &= 4, \\ 4y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Snadno se lze přesvědčit, že tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení, a to $y_1 = \frac{11}{10}, y_2 = \frac{9}{20}, y_3 = \frac{1}{4}$.

Avšak snadno zjistíme, že pro přípustná řešení $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{11}{10}, \frac{9}{20}, \frac{1}{4}\right)$ úloh (33), (34) a (33') (34') platí

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = \frac{13}{2} = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3,$$

takže podle věty 10 jsou tato přípustná řešení i optimální.

III.3. O prahových funkcích

V tomto odstavci uvedeme jednu aplikaci pojmů z teorie lineárních nerovností a pojmu oddělitelnosti množin, přičemž tato aplikace se vztahuje k teoretické i k technické kybernetice.

Představme si následující situaci. Určitá skupina sestávající z n osob se sešla proto, aby rozhodla hlasováním o přijetí nějakého návrhu. Předpokládáme kvůli jednoduchosti, že se nikdo nemůže zdržet hlasování, tedy každý musí hlasovat buď pro návrh, nebo proti němu. Přitom hlasy jednotlivých účastníků mohou mít různou „váhu“ (např. v závislosti na autoritě, kterou mají podle své odborné způsobilosti, nebo v závislosti na mocenském postavení, které zaujímají v uvažované skupině). Dále budeme předpokládat, že hlasující osoby jsou očíslovány v nějakém pevně zvoleném pořadí a že váhu j-tého člena lze vyjádřit nezáporným číslem A_j. Jeden z používaných způsobů pro zhodnocení výsledku provedeného hlasování spočívá v následujícím: Jestliže j-tý člen skupiny (s vahou hlasu A_j) hlasuje pro návrh, představujeme si, že jeho příspěvek pro přijetí návrhu je A_j; v opačném případě pokládáme jeho příspěvek pro přijetí návrhu za nulový. Po skončeném hlasování sečteme příspěvky jednotlivých členů a získaný součet porovnáme s jistou hodnotou B, kterou považujeme za „celkový počet hlasů“, který je nutný a postačující pro přijetí daného návrhu. Jestliže je součet příspěvků (hlasů) jednotlivých členů větší nebo roven než B, považujeme návrh za přijatý, v opačném případě konstatujeme, že návrh přijat nebyl.

Není těžké si rozmyslet, že lze tuto situaci popsat zavedením jisté funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, přičemž každá proměnná x_j nabývá pouze dvou hodnot 0 a 1. Přitom položíme $x_j = 1$ v tom případě, jestliže j-tá osoba hlasuje pro návrh a $x_j = 0$ jestliže j-tá osoba hlasuje proti návrhu. Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ může nabývat dvou hodnot, a sice hodnoty 1, jestliže návrh byl přijat, a hodnoty 0, jestliže návrh nebyl přijat. Z toho, co bylo řečeno, je patrné, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je definována tímto předpisem:

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 1, \text{ jestliže } A_1 . \xi_1 + \ldots + A_n . \xi_n \geqq B$$

a

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0, \text{ jestliže } A_1 . \xi_1 + \ldots + A_n . \xi_n < B.$$

Příklad 6. Položíme $n = 5$, $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 4$ a $B = 3$. Funkce $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována předpisem:

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 1, \text{ jestliže } \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 \geqq 3 \quad (*)$$
$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0, \text{ jestliže } \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 < 3.$$

Sestrojíme nyní tabulku hodnot této funkce.

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$	$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$	$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$	$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$
0 0 0 0	0	1 0 0 0	0
0 0 0 1	1	1 0 0 1	1
0 0 1 0	1	1 0 1 0	1
0 0 1 1	1	1 0 1 1	1
0 1 0 0	0	1 1 0 0	1
0 1 0 1	1	1 1 0 1	1
0 1 1 0	1	1 1 1 0	1
0 1 1 1	1	1 1 1 1	1

Popíšeme konstrukci tabulky. V levém sloupci jsou zapsány všechny uspořádané čtveřice $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, kde $\xi_j = 0$ nebo $\xi_j = 1$ pro $j = 1, 2, 3$ a 4. Snadno zjistíme, že počet těchto čtveřic je $2^4 = 16$. (Každé ξ_j nabývá dvou hodnot a tedy celkový počet čtveřic je $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.) Celkový počet čtveřic v naší tabulce je 16, přičemž žádná čtveřice se nevyskytuje dvakrát. Z toho tedy vyplývá, že v tabulce se vyskytují všechny čtveřice, přičemž každá právě jednou. Na pořadí, ve kterém vypisujeme čtveřice, sice nezáleží (pokud ovšem odpovídajícím způsobem uspořádáme hodnoty funkce), poznamenejme však pro úplnost, že při konstrukci tabulky jsme použili tzv. **lexikografického uspořádání.** Lexikografické uspořádání je v našem případě definováno takto: Nechť $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ a $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ jsou dvě libovolné čtveřice z nul a jedniček. Čtveřice $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ *je před čtveřicí* $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, jestliže nastává alespoň jeden z těchto případů:

1. $\xi_1 = 0$, $\tau_1 = 1$ (ostatní ξ_j a τ_j mohou být libovolná),
2. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = 0$, $\tau_2 = 1$ (ξ_3, ξ_4, τ_3 a τ_4 mohou být libovolná),
3. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = \tau_2$, $\xi_3 = 0$, $\tau_3 = 1$ (ξ_4 a τ_4 mohou být libovolná) nebo
4. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = \tau_2$ $\xi_3 = \tau_3$, $\xi_4 = 0$ a $\tau_4 = 1$.

Čtenář si snadno ověří, že pořadí čtveřic v tabulce skutečně odpovídá lexikografickému uspořádání 1—4.

Při konstrukci lexikograficky uspořádané posloupnosti čtveřic lze použít následujícího mechanického postupu:

(i) Na první místo v tabulce napíšeme čtveřici (0, 0, 0, 0).

(ii) Předpokládejme, že po jistém počtu kroků jsme přišli k čtveřici (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4). Může nastat právě jeden z těchto pěti případů:

α) $\xi_4 = 0$. V tomto případě za čtveřici (ξ_1, ξ_2, ξ_3, 0) napíšeme čtveřici (ξ_1, ξ_2, ξ_3, 1).
β) $\xi_4 = 1$, $\xi_3 = 0$. V tomto případě za čtveřicí (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4) = (ξ_1, ξ_2, 0, 1) bude následovat čtveřice (ξ_1, ξ_2, 1, 0).
γ) Platí $\xi_4 = 1$, $\xi_3 = 1$, $\xi_2 = 0$. V tomto případě bude za čtveřicí (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4) = (ξ_1, 0, 1, 1) následovat čtveřice (ξ_1, 1, 0, 0).
δ) Platí $\xi_4 = 1$, $\xi_3 = 1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_1 = 0$, tj. daná čtveřice je (0, 1, 1, 1). Za tuto čtveřici napíšeme čtveřici (1, 0, 0, 0).
ε) Platí ξ_1, $= \xi_3 = \xi_2 = \xi_1 = 1$. Čtveřice ($\xi_1$, ξ_2, ξ_3, ξ_4) = = (1, 1, 1, 1) je poslední čtveřicí; proces konstrukce tím končí.

Po této krátké exkurzi do čistě kombinatorických otázek se vrátíme k funkci $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Funkce $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována vztahy (*) a její hodnoty lze přečíst z tabulky. Ze vztahů (*) nebo z tabulky se lze přesvědčit o tom, že v uvažovaném příkladě je návrh přijat při všech možných hlasováních s výjimkou těchto tří případů:

1. Nikdo nehlasuje pro návrh; 2. pro návrh hlasuje pouze první účastník; 3. pro návrh hlasuje pouze druhý účastník. Idealizovaná situace s hlasováním nás přivádí k pojmu tzv. **prahové funkce.** Zatím jsme předpokládali, že čísla A_1, A_2, ... a A_n jsou nezáporná; tento předpoklad souvisel s konkrétní povahou naší „hlasovací" situace. Obecně však tento předpoklad nemá opodstatnění, neboť prahové funkce se vyskytují i v jiných aplikacích matematiky, jako např. v neurofyziologii, v slaboproudé elektrotechnice, při konstrukci počítačů aj.

Definice prahové funkce: Prahovou funkcí n proměnných budeme rozumět funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definovanou na množině všech uspořádaných n-tic z jedniček a nul, a zobrazující tuto množinu do množiny $\{0, 1\}$, přičemž musí být splněna tato podmínka: Existují reálná čísla $A_1, \ldots, A_n$ a B tak, že platí:

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} 1, \textbf{ jestliže } A_1.\xi_1 + \ldots + A_n.\xi_n \geqq B, \\ 0, \textbf{ jestliže } A_1.\xi_1 + \ldots + A_n.\xi_n < B. \end{cases} \tag{35}$$

Čísla $A_1, \ldots, A_n$ se nazývají **vahami** a číslo B **prahem.**

Z definice prahové funkce je patrné, že je to funkce dosti speciální struktury. V matematické logice a jejích aplikacích se definují tzv. **logické funkce.** Uvedeme tuto definici.

Definice logické funkce. Logickou funkcí n proměnných (označení $F(x_1, \ldots, x_n)$), **budeme rozumět zobrazení množiny všech uspořádaných n-tic z nul a jedniček do množiny** $\{0, 1\}$.

Poznámka. Termín logická funkce pochází od toho, že proměnné x_j i hodnotu funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ lze interpretovat jako logické výroky; přitom 1 interpretujeme jako pravdivý výrok „ano" a 0 jako nepravdivý výrok „ne". K ilustraci pojmu logické funkce viz cvičení 8 na konci kapitoly a učebnice pro SVVŠ (8). Srovnáním obou dvou definic dostáváme tuto zřejmou větu:

Věta 13. *Každá prahová funkce je logickou funkcí.*

Obrácené tvrzení však neplatí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

Příklad 7. Mějme logickou funkci $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, definovanou takto: $\varphi(0, 0, 0) = \varphi(1, 1, 1) = 1$, $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, jestliže $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$ a $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (1, 1, 1)$. Dokážeme, že funkce $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ není prahová, tj. že neexistují čísla A_1, A_2, A_3 a B tak, aby platilo

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } A_1 . \xi_1 + A_2 . \xi_2 + A_3 . \xi_3 \geqq B, \\ 0, \text{ jestliže } A_1 . \xi_1 + A_2 . \xi_2 + A_3 . \xi_3 < B. \end{cases}$$

Důkaz provedeme sporem. Kdyby totiž taková čísla existovala, musela by splňovat nerovnosti

$$\begin{array}{rlrl} A_1 + A_2 + A_3 & \geqq B, & & (\varphi(1, 1, 1) = 1), \\ 0 & \geqq B, & & (\varphi(0, 0, 0) = 1), \\ -A_1 & > -B, & & (\varphi(1, 0, 0) = 0), \\ -A_2 & > -B, & & (\varphi(0, 1, 0) = 0), \\ -A_3 & > -B, & & (\varphi(0, 0, 1) = 0). \end{array}$$

Nyní druhou nerovnost vynásobíme dvěma a všecky nerovnosti takto vzniklého systému sečteme. Tím dostáváme nerovnost $0 > 0$, která však znamená spor.

Z příkladu 7 tedy vyplývá, že ne každá logická funkce je prahová. Na druhé straně, jestliže nějaká logická funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová, nejsou koeficienty a pravá strana ve vztazích (35) určeny jednoznačně. Ukážeme si tuto skutečnost na prahové funkci tří proměnných v následujícím příkladu. Důkaz v obecném případě si čtenář lehce provede samostatně.

Příklad 8. Vyšetřujme prahovou funkci tří proměnných $\psi(x_1, x_2, x_3)$ definovanou takto:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \geq 2, \\ 0, \text{ jestliže } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 2. \end{cases}$$

Není těžké ověřit, že funkce $\psi(x_1, x_2, x_3)$ je definována též např. takto:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } 10.\xi_1 + 11.\xi_2 + 12.\xi_3 \geq 20, \\ 0, \text{ jestliže } 10.\xi_1 + 11.\xi_2 + 12.\xi_3 < 20. \end{cases}$$

Poslední dva příklady nás přivádějí k myšlence, že jedna z nejdůležitějších otázek, které vznikají v teorii prahových funkcí, je následující: Je dána logická funkce $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných. Máme rozhodnout, zda tato funkce je prahová, a v kladném případě nalézt alespoň jedno vyjádření ve tvaru (35). Tato otázka je v celé své šíři značně složitá a lze říci, že doposud nebyla ani zdaleka uspokojivě dořešena. V našem výkladu se omezíme na to, že ukážeme, jak poslední otázka souvisí s pojmem oddělitelnosti, a jako důsledek vyslovíme jedno kritérium. Logická funkce je podle definice definována na množině všech uspořádaných n-tic $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, kde $\xi_j = 0$ nebo $\xi_j = 1$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Každá taková n-tice je bodem n-rozměrného prostoru R^n. Všecky tyto body tvoří jistou konečnou množinu v R^n. Označme poslední množinu symbolem B^n [1]). Označme dále symbolem $F^{-1}(0)$ množinu všech bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ z B^n, pro něž platí $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, a symbolem $F^{-1}(1)$ množinu všech bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, pro něž platí $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$, tj. symbolicky (tohoto typu symboliky bylo již použito v odst. II. 2):

[1]) Množina B^n je množinou vrcholů n-rozměrné jednotkové krychle (viz [1] str. 69—70).

$$F^{-1}(0) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B^n \mid F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0\}$$
$$F^{-1}(1) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B_n \mid F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1\}.$$

(Množiny $F^{-1}(0)$ resp. $F^{-1}(1)$ se obvykle nazývají vzory 0 resp. 1 při zobrazení pomocí funkce F.)

Nyní je jasné, že zadáním funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ jsou jednoznačně určeny množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$, a obráceně, ze znalosti množin $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ lze jednoznačně určit funkci F. (K určení funkce F stačí ovšem znát kteroukoliv jednu z množin $F^{-1}(0)$ nebo $F^{-1}(1)$).

Předpokládejme nyní, že $F(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová funkce a nechť platí

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= 1, \text{jestliže } A_1 . \xi_1 + \ldots + A_n . \xi_n \geqq B, \\ F(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= 0, \text{jestliže } A_1 . \xi_1 + \ldots + A_n . \xi_n < B. \end{aligned} \tag{35}$$

Poslední vztahy lze přepsat ekvivalentním způsobem takto:

$$\begin{aligned} (\xi_1, \ldots, \xi_n) &\in F^{-1}(1), \text{jestliže } A_1 . \xi_1 + \ldots + A_n . \xi_n \geqq B, \\ (\xi_1, \ldots, \xi_n) &\in F^{-1}(0), \text{jestliže } A_1 . \xi_1 + \ldots + A_n . \xi_n < B. \end{aligned} \tag{35'}$$

Tím je však dokázána následující

Věta 14. *Funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová právě tehdy, jestliže nastává alespoň jeden z těchto dvou případů:*
a) *alespoň jedna z množin $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ je prázdná,*
b) *množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ jsou neprázdné a oddělitelné.*

Abychom mohli vyslovit zajímavější kritérium pro to, že funkce F je prahová, zavedeme pojem **konvexního obalu** konečné množiny bodů prostoru R^n. V dalším textu používáme často pro součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_r$ symbolického zápisu $\sum_{j=1}^{r} a_j$.

Definice: Nechť A je konečná neprázdná množina

bodů prostoru R^n. Nechť množina A obsahuje body

$$\begin{array}{l} (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \\ (x_2^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}), \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad\quad . \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad\quad . \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad\quad . \\ (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}). \end{array}$$

Konvexním obalem množiny A (označení $K(A)$) **budeme rozumět množinu definovanou takto:** $K(A)$ **obsahuje všechny ty body** $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$**, pro které existuje** k**-tice čísel** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ **tak, že** $\lambda_\varkappa \geqq 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, $x_j = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa . x_j^{(\varkappa)}$ **pro** $j = 1, 2, \ldots, n$ **a** $\sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = 1.$

Příklad 8. Nechť body $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_k, y_k)$ jsou vrcholy konvexního mnohoúhelníka M. Položme $P = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n\, y_n)\}$, takže P je jistá konečná množina. Snadno lze ukázat, že platí

$$K(P) = M.$$

Platí zřejmé

lemma

Platí $K(A) \supset A.$

Důkaz přenecháváme čtenáři. (Návod: Položte $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{\varkappa-1} = 0$, $\lambda_\varkappa = 1$, $\lambda_{\varkappa+1} = 0, \ldots, \lambda_k = 0$ postupně pro $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$).

Věta 15. *Konvexní obal* $K(A)$ *je konvexní mnohostěn v* R^n.

Důkaz. Uvažujme množinu S těch bodů $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in R^k$, pro jejichž souřadnice platí $\lambda_\varkappa \geq 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ a $\sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = 1$. S je zřejmě konvexním mnohostěnem v R^k. Zobrazení definované vzorci

$$x_j = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa . x_j^{(\varkappa)}$$

je lineární zobrazení R^k do R^n, které zobrazuje S na $K(A)$. K zakončení důkazu nyní zbývá použít věty 1.

Nyní jsme schopni zformulovat a dokázat větu:

Věta 16. *Logická funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ je prahovou funkcí právě tehdy, jestliže je splněna následující podmínka: Buď platí $F^{-1}(0) = \emptyset$, nebo $F^{-1}(1) = \emptyset$, nebo množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ jsou obě neprázdné a platí*

$$K(F^{-1}(0)) \cap K(F^{-1}(1)) = \emptyset . \tag{36}$$

Důkaz: A. *Postačitelnost podmínky.* Nechť je splněna podmínka věty. Rozlišíme tyto dvě možnosti:

1. Platí buď $F^{-1}(0) = \emptyset$, nebo $F^{-1}(1) = \emptyset$. V tomto případě je funkce F prahová na základě věty 14.

2. Platí $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ a $F^{-1}(1) \neq \emptyset$ a tedy též vztah (35′). Konvexní mnohostěny $K(F^{-1}(0))$ a $K(F^{-1}(1))$ jsou tedy na základě věty 3 oddělitelné, tj. existují čísla $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a B tak, že platí:

$$\left.\begin{array}{l} A_1.\xi_1 + \ldots + A_n.\xi_n < B \text{ pro } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K(F^{-1}(0)) \\ \text{a} \\ A_1.\xi_1 + \ldots + A_n.\xi_n \geq B \text{ pro } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K(F^{-1}(1)) \end{array}\right\} \tag{37}$$

Jestliže si však uvědomíme, že platí (lemma) $K(F^{-1}(0)) \supset F^{-1}(0)$ a $K(F^{-1}(1)) \supset F^{-1}(1)$, přicházíme k závěru, že množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ jsou také oddělitelné, což bylo třeba dokázat.

B. *Nutnost podmínky*. Nechť funkce F je prahová, tj. nechť existují čísla $A_1, \ldots, A_n$ a B tak, že platí vztahy (35). Jestliže jedna z množin $F^{-1}(0)$ nebo $F^{-1}(1)$ je prázdná, není již co dokazovat. Předpokládejme tedy, že platí $F^{-1}(0) \neq \varnothing$ a $F^{-1}(1) \neq \varnothing$. Dokážeme, že platí nerovnosti (37), čímž bude důkaz dokončen. Dokážeme, že platí první ze vztahů (37). Druhý se dokáže zcela analogicky. Nechť množina $F^{-1}(1)$ obsahuje body

$$(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \ldots, (x_1^{(\varkappa)}, \ldots, x_n^{(\varkappa)}), \ldots, (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).$$

Podle předpokladu platí $A_1 . x_1^{(\varkappa)} + \ldots + A_n . x_n^{(\varkappa)} \geqq B$ (38)

pro $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$. Budiž nyní $(x_1, \ldots, x_n) \in K(F^{-1}(1))$. Z nerovností (38) dostáváme

$$A_1 . x_1 + \ldots + A_n . x_n = A_1 . \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa . x_1^{(\varkappa)} + \ldots +$$

$$+ A_n . \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa . x_n^{(\varkappa)} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa (A_1 . x_1^{(\varkappa)} + \ldots + A_n . x_n^{(\varkappa)}) \geqq$$

$$\geqq \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa . B = B . \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = B,$$

což bylo třeba dokázat.

Z podaného důkazu však vyplývá následující věta, která má daleko obecnější platnost, než pouze v teorii prahových funkcí.

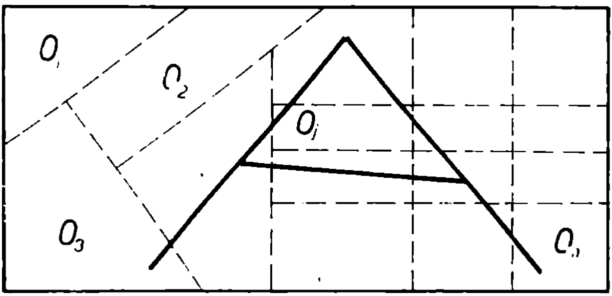
Věta 17. *Nechť A a B jsou dvě neprázdné konečné množiny bodů v prostoru R^n. Potom množiny A a B jsou oddělitelné právě tehdy, jestliže platí*

$$K(A) \cap K(B) = \varnothing .$$

III.4. O rozlišování objektů

Téma tohoto odstavce se úzce přimyká k tématu předcházejícího odstavce. Povíme si něco o klasifikaci údajů. V procesu současné vědeckotechnické revoluce se velká pozornost věnuje výzkumům souvisejícím s perspektivou automatického řešení tzv. intelektuálních úloh, jejichž řešení mohl podle tradičních názorů provádět pouze člověk. Tak např. již byly podniknuty některé více či méně úspěšné pokusy použití samočinných počítačů při hře v šachy, k předpovědím počasí, k rozlišování zvuků řeči, k automatickému čtení rukopisů, k nalézání diagnóz v medicíně aj. Mnohé z těchto úloh vyžadují schopnost klasifikovat (rozlišovat) velké množství údajů, popisujících zkoumané objekty, popřípadě celé situace. Všimněme si např. principu, na kterém pracují smyslové orgány člověka a živočichů. Jestliže pozorujeme nějaký předmět, probíhá v podstatě tento proces: Jednotlivé světelné signály přicházejí na sítnici oka a přinášejí informaci o rozměrech, tvaru, velikosti, vzdálenosti, barvě a prostorovém umístění objektu. Tato informace se přenáší prostřednictvím nervové soustavy do příslušných center a tam se vytváří obraz pozorovaného objektu. Tento mechanismus zrakového vnímání nám umožňuje rozlišovat velmi mnoho navzájem různých objektů (rozlišíme stůl, knihu, člověka atd.). Jako ilustraci matematických metod a problémů, které vznikají v souvislosti s problematikou rozlišování objektů, popíšeme jistý jednoduchý matematický model, který budeme nazývat **klasifikátorem objektů.**

Představme si, že máme k dispozici jistou obdélníkovou destičku a kousek křídy. Křídou můžeme na destičku kreslit různé obrazce — objekty, např. písmena latinské abecedy. Člověk držící křídu napíše nějaké písmeno, potom toto písmeno smaže a napíše nějaké jiné písmeno atd. Naším úkolem je diskutovat existenci zařízení, které by umožňovalo automaticky rozhodovat, které písmeno je na destičce vyobrazeno. Situace je zde totiž komplikována tím, že různí lidé píší např. písmeno *a* různě a dokonce ani týž člověk nenapíše dvakrát za sebou dvě stejná písmena *a*. Zařízení, které chceme navrhnout, musí především „umět číst" napsaná písmena. Každé písmeno na destičce je

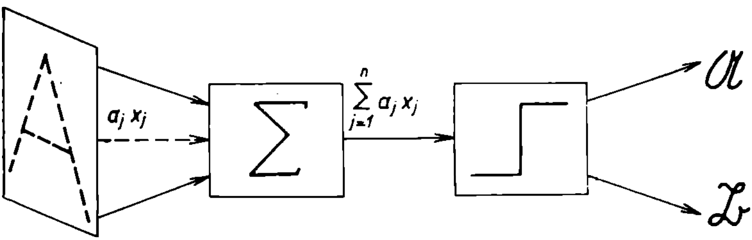


Obr. 7

zobrazeno vlastně tím, že některé body na destičce jsou bílé (leží na nich vrstva křídy), ostatní jsou černé. Dokonalé zařízení by tedy muselo reagovat na jednotlivé body destičky, což je ovšem neuskutečnitelný a zcela fiktivní požadavek, odporující základním fyzikálním faktům.

Abychom nalezli východisko z této situace, rozdělíme obdélníkovou tabulku na konečný počet oblastí, označených řekněme $O_1, O_2, \ldots, O_n$ (viz obr. 7.). Nyní každému objektu na destičce přiřadíme jistou podmnožinu množiny $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$, a sice množinu těch oblastí, jejichž vnitřkem prochází čára objektu. Dále předpokládáme, že oblasti O_j odpovídá jisté zařízení, které vytváří signál hodnoty a_j, jestliže vnitřkem oblasti prochází čára písmene, a vytváří signál nula v opačném případě. Jestliže je tedy na destičce jistý objekt, vznikne jistá množina signálů. Tyto signály, pomocí nichž je objekt zakódován, přicházejí dále do centrálního zařízení, jehož úkolem je provést klasifikaci objektu.

Protože nám jde o pouhé vysvětlení principů, přijmeme dále ještě tento zjednodušující předpoklad: Zařízení bude rozlišovat navzájem pouze dvě třídy objektů, např. typ A od typu B. Nakonec nám tedy zbývá popsat schema práce



Obr. 8

centrálního zařízení. Toto zařízení bude sestávat ze dvou „sériově zapojených" částí: **zařízení na sčítání signálů** a **klasifikující zařízení.** Zařízení na sčítání signálů přijímá jednotlivé signály z destičky a na jeho výstupu se objevuje signál, jehož hodnota je rovna součtu hodnot jednotlivých signálů. Klasifikující zařízení srovnává hodnotu signálu-součtu s jistou danou hodnotou a, nazývanou **práhem:** Jestliže je hodnota signálu větší nebo rovna než práh, patří objekt do jedné třídy, v opačném případě patří objekt do druhé třídy. Schematicky je popsaný klasifikátor znázorněn na obr. 8.

Nyní napíšeme nerovnosti, popisující funkci klasifikátoru. Za tím účelem oblasti O_j přiřadíme dvouhodnotovou proměnnou x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), přičemž položíme $x_j = 1$, jestliže objekt prochází vnitřkem O_j a $x_j = 0$ v opačném případě. Tímto způsobem je tedy objekt na destičce popsán n-ticí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Protože zařízení není schopno rozlišit jemnější rozdíly mezi objekty, můžeme jednoduše ztotožnit objekty na destičce s n-ticemi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Z tohoto důvodu budeme místo „objekt popsaný n-ticí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$" říkat prostě „objekt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$". Objekt nyní patří do první třídy, jestliže platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_j . x_j \geqq a, \tag{39}$$

a patří do druhé třídy, jestliže

$$\sum_{j=1}^{n} a_j . x_j < a. \tag{40}$$

Popsaný klasifikátor tedy rozdělí danou množinu objektů na dvě třídy.

Nyní budeme zkoumat množinu klasifikátorů popsaného typu při pevně zvoleném rozkladu na systém oblastí $\{O_j\}$, avšak při libovolně volitelných hodnotách **vah** a_j a práhu a.

Zformulujeme **problém syntézy klasifikátoru.** Je dána jistá množina objektů $\mathfrak{C} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \subset B^n$ (viz str. 56) a její rozklad na dvě podmnožiny:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B},$$

kde $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \emptyset$. Problém záleží v nalezení vah a_j a práhu a tak, aby odpovídající klasifikátor rozlišoval množinu $\mathfrak{A}$ od $\mathfrak{B}$. (Množina $\mathfrak{C}$ je obvykle vlastní podmnožinou[1]) B^n).

Je zřejmé, že k řešení posledního problému je nutno řešit soustavu lineárních nerovností (39), (40). My se však — podobně jako v předcházejícím odstavci — omezíme na otázku existence. Z věty 17 předchozího odstavce vyplývá následující

Věta 18. *Klasifikátor (tj. koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ a a) rozlišující dvě třídy objektů $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ existuje právě tehdy, jestliže je splněna jedna z těchto dvou podmínek:*

a) alespoň jedna z množin $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ je prázdná,

b) obě dvě množiny jsou neprázdné a platí

$$K(\mathfrak{A}) \cap K(\mathfrak{B}) = \emptyset.$$

Doufáme, že se nám v tomto odstavci alespoň částečně podařilo ukázat, v čem spočívá problematika rozlišování objektů. Poznamenejme, že celá problematika i metody řešení jsou podstatně složitější. Tak především obvykle jde o rozlišení několika tříd objektů, jak jsme ostatně uváděli na začátku tohoto odstavce. Za druhé v uvažovaném nejjednodušším případě se vytváří prostý součet signálů $\sum_{j=1}^{n} a_j . x_j$, zatímco v obecném případě se používá i složi-

[1]) Říkáme, že M je vlastní podmnožinou množiny N, jestliže $M \subset N$ a $M \neq N$.

tějších (nelineárních) závislostí na proměnných x_j, což přirozeně má za následek zvětšení rozlišovacích schopností klasifikátoru.

Nakonec nejdůležitější poznámka. Množina rozlišovaných objektů nebývá zpravidla apriori známa, nebo obsahuje „příliš mnoho" prvků, nebo je složitá apod. V takových případech se k syntéze klasifikátorů obvykle používá metod adaptace (učení). Tyto metody spočívají v tom, že na klasifikátor přichází v nějaké posloupnosti pouze jistá podmnožina „typických" objektů, u nichž je známo předem, do které třídy příslušný objekt patří. Na základě učící posloupnosti objektů se určí parametry klasifikátoru.

Cvičení

Ve cvičeních 1 — 5 je $x_j \geqq 0$.

1. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leqq 3, \\ -3x_1 + 8x_2 &\leqq -5, \\ 3x_1 - 2x_2 &\to \max \end{aligned}$$

nemá přípustné řešení.

2. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leqq -1, \\ x_1 - x_2 &\leqq 2, \\ x_1 + x_2 &\to \max \end{aligned}$$

má přípustná řešení a nemá optimální řešení.

3. Bez přímých výpočtů dokažte, že úloha duální k úloze ze cvičení dvě nemá přípustné řešení.

4. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqq 4, \\ x_3 + x_4 &\leqq 1, \end{aligned}$$

$$x_2 + x_3 \leqq 1,$$
$$x_1 + x_3 \leqq 1,$$
$$x_3 + x_4 \leqq 3,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

má optimální řešení $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$.

5. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$-2x_1 + x_2 \leqq 2,$$
$$x_1 - 2x_2 \leqq 2,$$
$$x_1 + x_2 \leqq 5,$$
$$x_1 - x_2 \to \max$$

má optimální řešení $x_1 = 4, x_2 = 1$.

6. V odstavci I.3 jsme definovali pojem konvexní množiny. Nechť K je libovolná konvexní množina obsahující konečnou a neprázdnou množinu bodů M prostoru R^n. Potom platí $K \supset K(M)$ (tento fakt se též někdy vyjadřuje slovně: Konvexní obal je „nejmenší" konvexní množina obsahující danou množinu).

7.a) Určete počet prvků množiny B^n — viz str. 56. (Odpověď: 2^n).
b) Určete počet všech logických funkcí n proměnných. (Odpověď: 2^{2^n}). (Návod: Všimněte si, že tento počet se rovná počtu prvků množiny B^{2^n}).

8. (Ilustrace pojmu logické funkce). Nechť A, B, C označují libovolné výroky. Těmto výrokům přiřadíme dvouhodnotové proměnné x_A, x_B, x_C definované takto: $x_A = 1$, jestliže výrok **A** platí, $x_A = 0$, jestliže výrok **A** neplatí; zcela analogický je význam proměnných x_B a x_C. Nechť nyní výrok **C** vznikne operací disjunkce (logického součtu), symbolicky to zapisujeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, tj. $\mathbf{C} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ platí právě tehdy, jestliže platí alespoň jeden z výroků **A** nebo **B**. V tomto případě je x_C logickou funkcí proměnných x_A a x_B, položme

$$x_C = \mathrm{f}_{A \vee B}(x_A, x_B).$$

a) Sestrojte tabulku hodnot funkce $\mathrm{f}_{A \vee B}(x_A, x_B)$.

b) Ukažte, že platí

$$x_C = \max(x_A, x_B),$$
$$x_C = 1 - (1 - x_A)(1 - x_B) = x_A + x_B - x_A . x_B.$$

c)[1]) Nalezněte logické funkce odpovídající dalším logickým operacím: konjunkce $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, implikace $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, negace non$\mathbf{A}$ a ekvivalence $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$.

9. Přiřaďme každé uspořádané čtveřici z nul a jedniček $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ číslo

$$d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \xi_1 . 2^3 + \xi_2 2^2 + \xi_3 2^1 + \xi_4.$$

Ukažte, že lexikograficky uspořádané posloupnosti čtveřic odpovídá rostoucí posloupnosti čísel $d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$.

10. Uvažujme množinu všech uspořádaných n-tic $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ z nul a jedniček. Každé n-tici $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ přiřadíme číslo

$$d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1 . 2^{n-1} + \xi_2 . {}^{n-2} + \ldots + \xi_n.$$

Na množině všech n-tic definujeme vztah lexikografického uspořádání: Budeme říkat, že n-tice $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ je před n-ticí $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ a zapíšeme to symbolicky $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, jestliže

$$d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < d(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Ukažte způsob konstrukce lexikograficky uspořádané posloupnosti n-tic, analogický popsanému způsobu uspořádání čtveřic.

[1]) Výrok $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ platí právě tehdy, jestliže platí oba dva výroky **A** a **B** současně;

Výrok $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ platí právě tehdy, jestliže buď **A** neplatí, nebo současně platí **A** i **B**;

Výrok non**A** platí právě tehdy, jestliže neplatí **A**;

Výrok $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ platí právě tehdy, jestliže výroky **A**, **B** buď současně platí, nebo neplatí.

Použitá literatura

[1] K. Havlíček, Prostory o čtyřech a více rozměrech, edice Škola mladých matematiků, sv. 12.

[2] K. Havlíček, Analytická geometrie a nerovnosti, edice Škola mladých matematiků, sv. 18.

[3] J. Vyšín, Konvexní útvary, edice Škola mladých matematiků, sv. 9.

[4] F. Veselý O nerovnostech, edice Škola mladých matematiků, sv. 5.

[5] D. Gale, The Theory of Linear Economic Models, Mc Graw-Hill, 1960, ruský překlad, Moskva 1963.

[6] Linear Inequalities and Related Systems (sborník statí), Princeton 1956, ruský překlad, Moskva, 1959.

[7] N. J. Nilsson, Learning Machines (Foundations of Trainable Pattern-Classifying Systems), Mc Graw-Hill, 1965, ruský překlad, Moskva 1967.

[8] Učebnice algebry pro 3. ročník SVVŠ – větev přírodovědná, SPN, Praha.

OBSAH

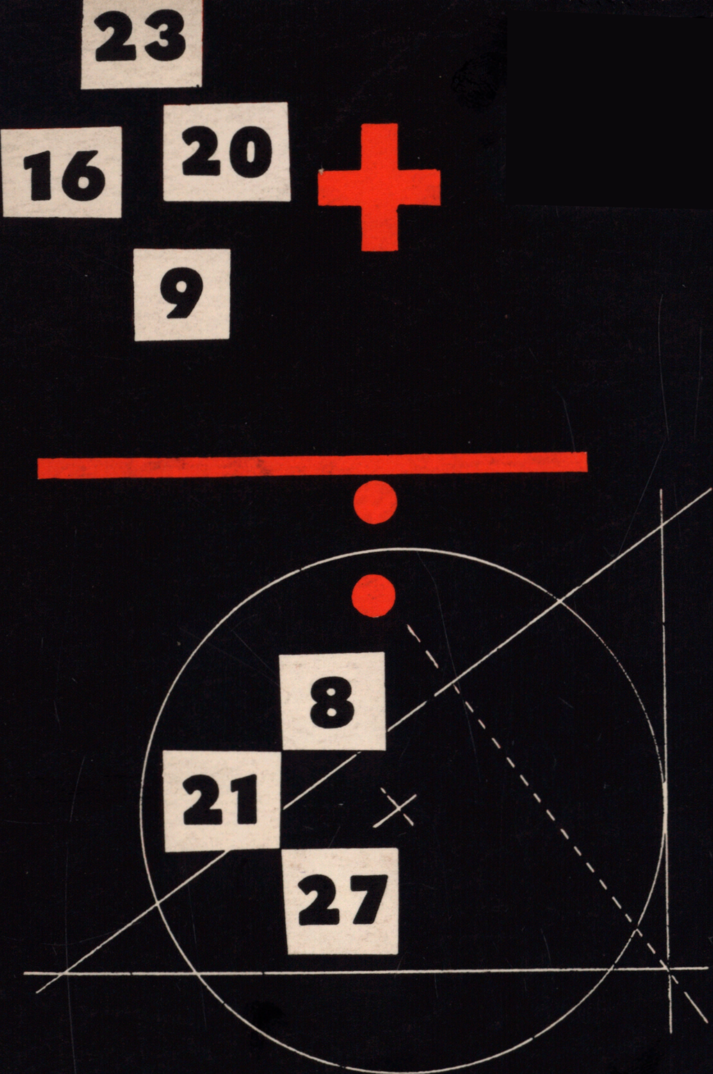
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROSLAV MORÁVEK - MILAN VLACH

oddělitelnost množin

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2768
Edice Škola mladých matematiků, svazek 23
Vytiskl Mír, n. p., závod 6
Praha 2, Legerova 22
3,04 AA, 3,16 VA. Náklad 6000 výtisků
1. vydání. 72 stran. Praha 1969

23-044-69 03/2 Cena brož. výt. Kčs 6,50



[redacted]

23-044-69
03/2
Cena brož.
Kčs 6,50