Úlohy o maximech a minimech funkcí

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ÚLOHY O MAXIMECH A MINIMECH FUNKCÍ

17

Vydal Matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROMÍR HRONÍK

ÚLOHY o maximech a minimech funkcí

PRAHA 1967
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

Recenzovali doc. J. Vyšín a prof. dr. M. Fiedler

PŘEDMLUVA

V technické praxi i v mnoha situacích běžného života často stojíme před rozhodnutím, které z mnoha různých řešení daného problému je z toho či onoho hlediska nejvýhodnější. Přitom podmínky úlohy nebo vůbec fyzikální či jiné zákony předpisují vzájemné vztahy mezi dvěma či více volitelnými prvky, jejichž nejvhodnější hodnoty máme určit.

Nejjednodušší případ nastává, jde-li o jev nebo proces, ve kterém vystupuje jediný volitelný parametr, na jehož volbě závisí výsledek. Stručněji řečeno, máme na mysli případ, kdy výsledná hodnota, kterou chceme získat co největší nebo naopak co nejmenší, je funkční hodnota funkce jedné proměnné.

V knížce, kterou dostáváte do ruky, se seznámíte s metodami, kterými lze v jednoduchých případech takové nejmenší či největší hodnoty funkcí vyhledávat. Studium funkcí je tedy její hlavní náplní. Přesto v druhé kapitole předesíláme několik příkladů, ve kterých je funkční hledisko značně potlačeno. Ve třetí a čtvrté kapitole jsou studovány jednodušší případy funkcí a v poslední kapitole si všimneme poněkud složitějších úloh, které svou podstatou a metodou řešení již přesahují do diferenciálního počtu. Pro čtenáře, kteří jsou alespoň s počátky diferenciálního počtu obeznámeni, nebude obtížné jeho prvky v této kapitole najít. Takové znalosti ovšem nejsou nutným předpokladem pro studium této knížky. Vystačíte se svými znalostmi ze školy, které tato knížka na některých místech doplní a rozšíří. A to je mimo jiné jejím hlavním účelem.

Autor považuje za svou povinnost vyjádřit svůj dík předně akademiku Josefu Novákovi, vědeckému redaktoru edice Škola mladých matematiků, jakož i oběma recenzentům prof. dr. Fiedlerovi a doc. Vyšínovi, kteří se zasloužili o vydání rukopisu. Dále autor děkuje odb. asistentu Jiřímu Rohlíčkovi za vypracování první kapitoly a některých teoretických částí brožury, zvláště páté kapitoly, jakož i za péči, s jakou prostudoval celý spis, a inž. dr. Ottovi Hlínkovi za svědomité vypracování všech obrázků, které přispějí k názornějšímu pochopení látky. Dík patří i všem těm, kteří sebemenší radou přispěli k zlepšení obsahu této knížky.

1. kapitola

ZÁKLADNÍ POJMY A NEJJEDNODUŠŠÍ ÚLOHY

V této knížce se budeme zabývat studiem funkcí. K tomu si nejprve zavedeme řadu pojmů, kterých budeme často používat. Mnoho těchto pojmů zná čtenář ze školy, některé pro něho budou nové. Upozorňujeme čtenáře na brožurku *M. Šislera* a *J. Jarníka O funkcích*, která vyšla v roce 1962 jako 4. svazek *Školy mladých matematiků* a ve které jsou již některé z níže uvedených pojmů zavedeny.

Budeme stále pracovat s reálnými čísly. Reálná čísla zobrazujeme známým způsobem na číselné ose, přičemž dokonce často zaměňujeme při běžném vyjadřování číslo samo s jeho obrazem na číselné ose. Tak třeba hovoříme o „bodu tři" a máme na mysli reálné číslo 3, nebo říkáme, že vzdálenost bodů a a b je d a vyjadřujeme tím, že

$$|a - b| = |b - a| = d.$$

Pro některé množiny reálných čísel, jejichž obrazy vyplňují na číselné ose úsečky nebo polopřímky, zavádíme název intervaly a zvláštní označení.

Uzavřeným intervalem od a do b ($a < b$) rozumíme množinu všech čísel x, pro která je $a \leqq x \leqq b$. Tento interval značíme $<a, b>$. Obrazy všech prvků intervalu $<a, b>$ vyplňují na číselné ose úsečku, jejímiž krajními body jsou obrazy čísel a, b. Proto mluvíme o *krajních* (počátečním a koncovém) *bodech* intervalu. Otevřený interval (a, b) je množina všech čísel x, pro která je $a < x < b$. Pracujeme také s *polouzavřenými* či *polootevřenými* intervaly $<a, b)$ a $(a, b>$.

Všechny tyto intervaly nazýváme *konečné* nebo *vlastní*. *Nekonečné* nebo *nevlastní* jsou tyto intervaly:

Uzavřený (*otevřený*) *interval* od a do nekonečna, tj. množina všech čísel x, pro něž je $x \geqq a$ $(x > a)$, který označujeme $< a, \infty)$ $[(a, \infty)]$;

uzavřený (*otevřený*) *interval* od méně nekonečna do b, tj. množina všech čísel x, pro něž je $x \leqq b$ $(x < b)$, který označujeme $(-\infty, b>$ $[(-\infty, b)]$;

interval od méně nekonečna do nekonečna označujeme $(-\infty, \infty)$ a rozumíme jím množinu všech reálných čísel.

Řekli jsme, co rozumíme krajními body intervalů. Body, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní body* intervalu. Tak např. otevřený interval (a, b) obsahuje vesměs jen vnitřní body.

V našich úvahách bude důležitý pojem *okolí bodu*. Okolím bodu (čísla) a rozumíme kterýkoli otevřený interval obsahující číslo a. Například interval (6, 7,5) je okolím bodu 6,3. Někdy je užitečné rozlišovat mezi levým a pravým okolím bodu. *Levým* (*pravým*) *okolím bodu* a je každý otevřený interval s koncovým (počátečním) bodem a. Všimněme si, že levé a pravé okolí bodu a nedávají dohromady okolí bodu a. Aby vzniklo okolí bodu a, bylo by nutno ještě připojit bod a samotný. Okolí bodu a, ze kterého je vyňat bod a, budeme nazývat *redukované okolí bodu a*.

A nyní si připomeneme *definici funkce*. Nechť je dána množina reálných čísel M. Předpis, který každému číslu x z množiny M přiřazuje jisté (jediné) reálné číslo y, nazýváme funkce. Množina M je *definiční obor funkce*, jednotlivá čísla z definičního oboru jsou *argumenty*, čísla přiřazená funkcí argumentům se nazývají *funkční hodnoty*. Funkce označujeme písmeny f, g, φ, F, G apod., nebo zvláštními znaky jako sin, log, $\sqrt{\ }$ atd. To, že funkce f přiřazuje argumentu x funkční hodnotu y, zapisujeme

$$y = f(x)$$

a říkáme, že *funkce f nabývá v bodě (čísle) x hodnoty y.*

Všimněme si, že při definici funkce jsme vyšli z definičního oboru. Je důležité uvádět pro každou funkci vedle samotného předpisu vždy i definiční obor, i když se na to, zejména je-li dán předpis rovnicí, často zapomíná. V našich úvahách bude definiční obor vždycky hrát důležitou úlohu.

Dobrou pomůckou pro studium funkcí je jejich *grafické znázornění*, krátce *graf*.

Zavedeme v rovině známým způsobem souřadnice, tj. sestrojíme dvě navzájem kolmé číselné osy protínající se v bodě 0, který nazveme *počátek*. Jednu osu volíme obvykle vodorovnou a budeme ji většinou značit x. Druhá číselná osa je osa y. Nyní je možno každému bodu v rovině přiřadit dvě čísla, *souřadnice*, takto: Vedeme bodem P kolmice na obě číselné osy (souřadnicové osy x a y). Je-li pata kolmice na ose x obrazem čísla a, pata kolmice na ose y obrazem čísla b, řekneme, že bod P má souřadnice a, b, což značíme $P = [a; b]$. První souřadnice bodů ležících na ose y je nula stejně jako druhá souřadnice bodů ležících na ose x. Počátek 0 má obě souřadnice nulové, tj. $0 = [0; 0]$.

Je-li nyní dána funkce f a sestrojíme-li pro každé číslo x z jejího definičního oboru bod $[x; f(x)]$, nazýváme množinu všech takových bodů *grafem funkce f*. Ve všech případech, kterými se zde budeme zabývat, budou grafy funkcí určité čáry nebo křivky.

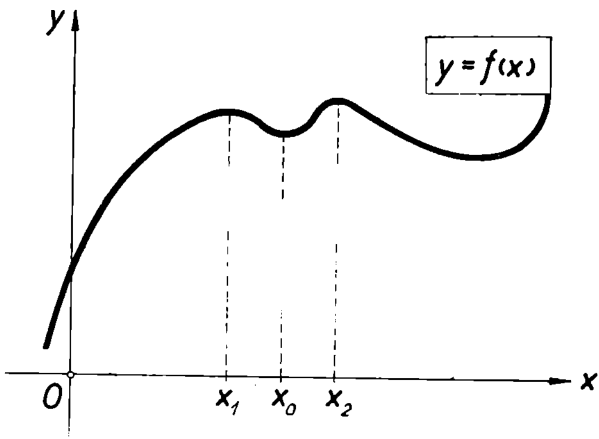
Na grafu funkce existují body, které mají pro nás zvláštní důležitost. Jsou to body, ve kterých graf dosahuje největší či nejmenší ypsilonové souřadnice. Zde je však třeba uvést přesnou definici, která se nemůže opírat jen o názornou představu. Zavedeme proto „početně“ pojem tzv. extrémů a lokálních extrémů funkce. Začněme s *lokálními extrémy.*

Říkáme, že *funkce f nabývá v bodě x_0 ostrého lokálního minima (maxima), existuje-li takové redukované okolí bodu x_0, že pro všechny argumenty x z tohoto okolí je*

$$f(x) > f(x_0) \, (f(x) < f(x_0)).$$

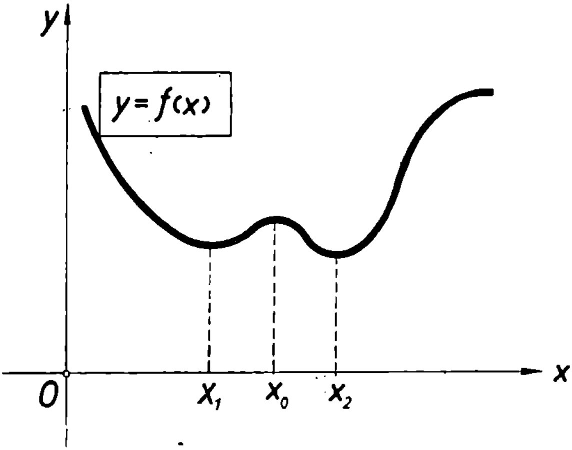
Pro lokální minimum nebo maximum zavádíme souhrnný název *lokální extrém.*

Je vidět, že k tomu, aby se mohlo mluvit o lokálním extrému funkce v bodě x_0, je nutné, aby funkce byla definována v jistém okolí bodu x_0. Toto okolí ovšem může být libovolně malé. Je třeba si dobře uvědomit, že naše definice popisuje skutečně jen jistou lokální vlastnost funkce. To snad dobře vyniká na připojených dvou obrázcích. Na obr. 1 je znázorněna funkce, mající v bodě x_0 ostré lokální minimum, ačkoli její hodnota v bodě x_0 je, celkově vzato,



Obr. 1.

jedna z největších. Body x_1, x_2 na ose x jsou krajní body okolí, v němž jsou funkční hodnoty $f(x)$ v definici požadovaném vztahu k číslu $f(x_0)$. (Podobně na obr. 2 pro ostré lokální maximum.)



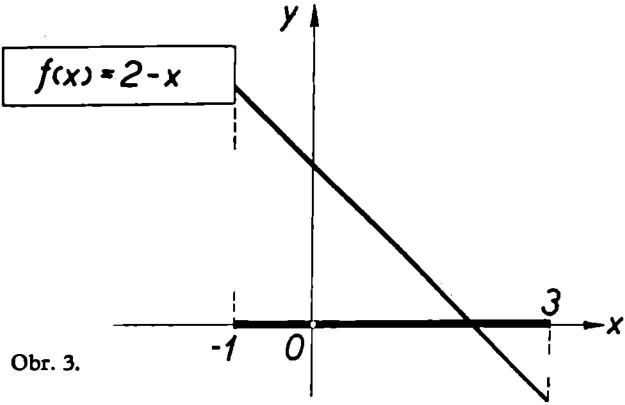
Obr. 2.

Tyto lokální extrémy budou mít v našich úvahách místo jako pomůcka k vyhledávání takových funkčních hodnot, které jsou v uvažovaném definičním oboru vůbec největší nebo nejmenší. Definujeme je takto:

Funkční hodnota $f(x_0)$ je ostrým maximem (minimem) funkce f v oboru M, platí-li pro každé x z oboru M nerovnost $f(x_0) > f(x)$, $(f(x_0) < f(x))$.

Užíváme také poněkud méně přehledné formulace „*funkce f nabývá v bodě x_0 ostrého maxima (minima) v oboru* M“, nebo „*funkce f má v bodě x_0 ostré maximum (minimum) vzhledem k oboru* M“.

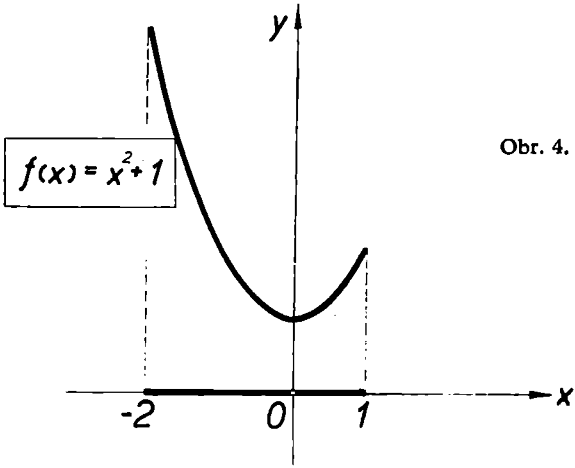
Například funkce $f(x) = 2-x$ definovaná v intervalu $\langle -1, 3 \rangle$ (obr. 3) nabývá ostrého maxima vzhledem k tomuto intervalu v bodě -1, ostrého minima v bodě 3.



Obr. 3.

Funkce $f(x) = x^2 + 1$ definovaná v intervalu $\langle -2, 1 \rangle$ (obr. 4) nabývá v bodě -2 ostrého maxima a v bodě 0 ostrého minima vzhledem k tomuto intervalu. V bodě 0 má také ostré lokální minimum. Kdybychom definovali $f(x) = x^2 + 1$ pouze pro otevřený interval $(-2; 1)$, neměla by tato funkce v intervalu $(-2; 1)$ vůbec ostré maximum. Žádné z čísel menších než 5 totiž nemůže být jejím maximem v $(-2; 1)$, neboť ke každému takovému číslu existuje v $(-2; 1)$ funkční hodnota větší. Číslo 5 pak maximem také není, neboť v $(-2; 1)$ funkce f této hodnoty nedosahuje. Tento příklad ukazuje, jak je důležité vedle funkčního předpisu brát v úvahu i definiční obor.

V posledním příkladu jsme dospěli k momentu, kdy v jistém bodě (byl to bod 0) nabývá funkce současně lokálního extrému i extrému vzhledem k intervalu. Než uvedeme věty týkající se souvislostí mezi lokálními extrémy a extrémy vzhledem k intervalu, je nutno zavést pojem spojité funkce. *Funkcí spojitou v intervalu I budeme* — zhruba řečeno — *rozumět takovou funkci, jejíž graf v tomto intervalu lze nakreslit nepřerušovaným tahem.**) Příkladem spojitých funkcí jsou třeba všechny mnohočleny

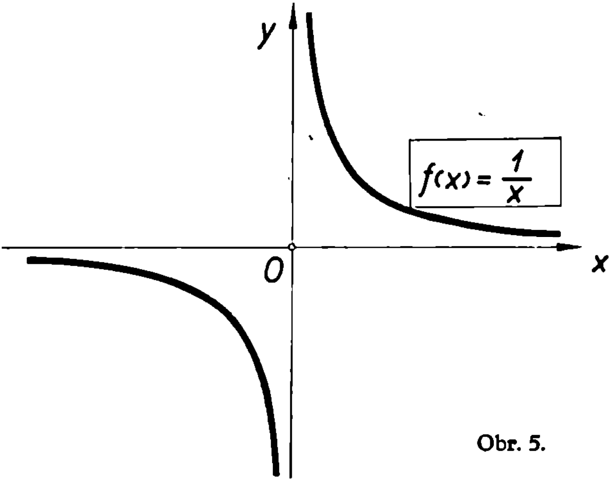


Obr. 4.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, goniometrické funkce sin x a cos x apod. Tyto funkce jsou spojité v intervalu $(-\infty, \infty)$. Ale už třeba funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není spojitá

*) Definice zní takto: *Funkce f je spojitá v bodě x_0, když ke každému kladnému číslu ε existuje takové okolí o_{x_0} bodu x_0, že pro všecky argumenty x z tohoto okolí je* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. (To znamená, že lze dosáhnout toho, aby se funkční hodnota libovolně málo změnila, pokud volíme dost malou změnu argumentu.) Dále definujeme: *Funkce f je spojitá v otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém jeho bodě. Spojitost funkce v uzavřeném intervalu* se definuje obdobně, zavede-li se ještě pojem *spojitosti v bodě zleva* a *zprava*.

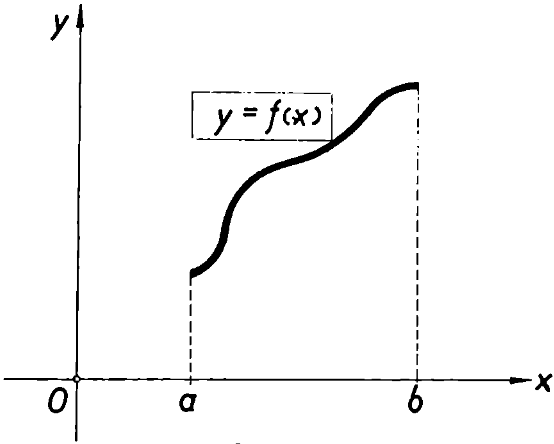
v intervalu $(-\infty, \infty)$, nýbrž jen v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. V bodě $x = 0$ je graf přerušen, funkce v něm není definována (obr. 5). Nyní můžeme vyslovit tyto věty:



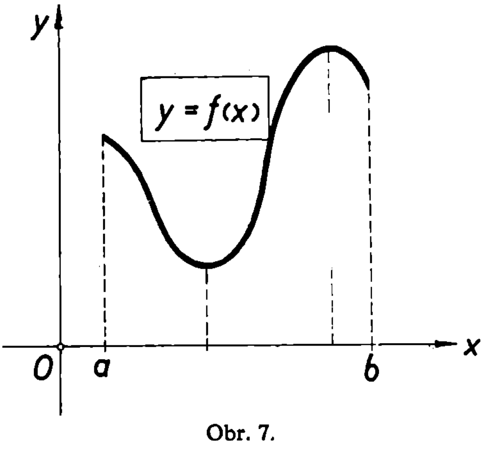
Obr. 5.

Věta 1. *Funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá svého minima (maxima) vzhledem k tomuto intervalu v bodě x_0, který je buďto krajním bodem intervalu $\langle a, b \rangle$, nebo v němž funkce f nabývá také lokálního minima (maxima).* Důkaz věty podávat nebudeme, připojujeme alespoň pro lepší pochopení dva obrázky (obr. 6 a 7).

Věta 1 má tento význam pro určování extrému funkce vzhledem k uzavřenému intervalu: Zjistíme-li nějakým způsobem, že třeba lokální maxima této funkce nastávají v bodech $x_1, \ldots, x_n$ z uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$, stačí už jen porovnat čísla $f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. To, které je z nich největší, je maximum funkce f vzhledem k $\langle a, b \rangle$.



Obr. 6.



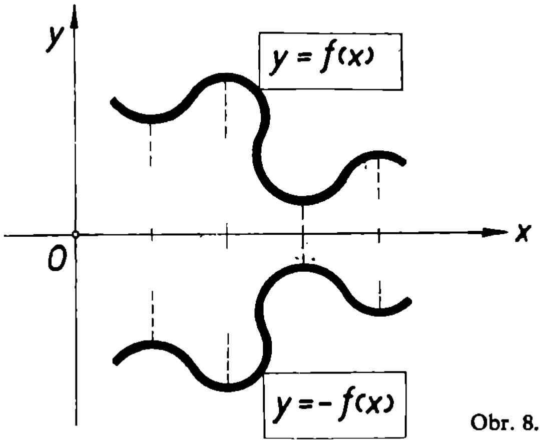
Obr. 7.

Ještě jednodušší situace nastává, jde-li o otevřený interval. (Tento případ je v úlohách z praxe častější.) Platí totiž tato věta:

Věta 2. *Nabývá-li spojitá funkce f v otevřeném intervalu (a, b) svého maxima (minima) vzhledem k (a, b) v bodě x_0, nabývá v bodě x_0 také lokálního maxima (minima).*

Oč je tu situace jednodušší, je zřejmé. Přečtěte si, ale pozorně, začátek věty 2. Na rozdíl od uzavřeného intervalu nemusí totiž vůbec existovat maximum (minimum) spojité funkce vzhledem k otevřenému intervalu. Tak tomu je třeba u funkce $f(x) = x^2 + 1$ v intervalu $(-2, 1)$. (Viz str. 11, obr. 4.) S příklady na užití věty 2 se setkáte zejména v poslední kapitole. Na závěr této úvodní části uvedeme ještě jednu užitečnou větu, jejíž platnost je ihned zřejmá:

Věta 3. *Nechť funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima (minima) příp. maxima (minima) vzhledem k intervalu I. Pak*



Obr. 8.

funkce $k.f$ nabývá v bodě x_0 opět lokálního maxima (minima) příp. maxima (minima) vzhledem k I, je-li $k > 0$. Je-li $k < 0$, nabývá funkce $k.f$ v bodě x_0 lokálního minima (maxima) příp. minima (maxima) vzhledem k I.

Případ $k > 0$ je ihned jasný. Pro $k < 0$ stačí uvážit, že grafy funkcí $f(x)$ a $-f(x)$ jsou souměrné podle osy x (viz obr. 8). Z definice extrému funkce vzhledem k intervalu plyne bezprostředně tato věta:

Věta 4. *Nechť interval I_1 je obsažen v intervalu I. Budiž f funkce definovaná v intervalu I (a tím i v intervalu I_1). Je-li x_0 číslo z intervalu I_1 a je-li $f(x_0) = M$ maximum (minimum) funkce f vzhledem k I, je M také maximem (minimem) funkce f vzhledem k I_1.*

Tím uzavíráme teoretickou část našeho výkladu k příkladům. Další doplňky z teorie si probereme až v poslední kapitole.

2. kapitola

KDY JE SOUČIN DVOU ČÍSEL S KONSTANTNÍM SOUČTEM NEJVĚTŠÍ?

Zvolme si pevné kladné číslo, např. 10. Víme, že existuje nesčíslně mnoho dvojic kladných reálných čísel, jejichž součet dává právě 10. Taková dvojice jsou např.:

$$1, 9; 2, 8; 3, 7; \frac{7}{2}, \frac{13}{2}; \frac{14}{3}, \frac{16}{3}; 5, 5; \ldots \text{ atd.}$$

Utvořme nyní součiny čísel uvedených dvojic. Dostáváme tyto výsledky:

$$9; 16; 21; 22\frac{3}{4}; 24\frac{8}{9}; 25.$$

Naskýtá se nám tu otázka, která z těchto dvojic čísel má tu vlastnost, že dává největší součin?

Z uvedených výsledků se dá usuzovat, že *maximální součin bude* patrně *při rovnosti obou čísel.* Vskutku důkaz, který následuje, nám správnost předběžného úsudku potvrdí.

Důkaz. Uvažujme libovolnou dvojici kladných čísel x, y, jejichž součet je pevné číslo a. Za předpokladu, že $x \geqq y$, můžeme položit

$$x = \tfrac{1}{2}a + d, \qquad y = \tfrac{1}{2}a - d,$$

kde d je nějaké reálné číslo, splňující nerovnost $0 \leqq d < \frac{1}{2}a$. Utvořme součin:

$$xy = \tfrac{1}{4}a^2 - d^2.$$

Z tohoto vztahu je ihned vidět, že součin xy bude tím větší, čím menší bude číslo d. Tedy největší hodnoty nabude součin, když číslo d bude rovno nule. V tom případě pak

$$x_0 = y_0 = \tfrac{1}{2}a.$$

Výsledek důkazu můžeme vyslovit větou:

Věta 5. *Ze všech dvojic kladných reálných čísel x, y, jejichž součet je konstantní a roven číslu a, má největší součin dvojice $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a$.*

Na základě této poučky se dají poměrně snadno řešit mnohé příklady z geometrie i fyziky. Uveďme si některé z nich.

Příklad 1. *Je dán obvod kruhové výseče l. Určete poloměr a příslušný oblouk výseče tak, aby její plošný obsah byl maximální.*

Označíme-li poloměr r, oblouk výseče s a příslušný středový úhel α, pak obvod

$$l = 2r + s = 2r + r \, . \operatorname{arc} \alpha.$$

Z tohoto vztahu určíme

$$\operatorname{arc} \alpha = \frac{l - 2r}{r},$$

kde r splňuje nerovnost

$$0 < r < \frac{l}{2}.$$

Obsah výseče je

$$S = \tfrac{1}{2}r^2 \, . \operatorname{arc} \alpha,$$

čili

$$S = \tfrac{1}{2}r\,(l - 2r),$$

$$S = r\left(\frac{l}{2} - r\right).$$

Vidíme, že obsah výseče je roven součinu dvou činitelů r a $\frac{l}{2} - r$, jejichž součet je roven $\frac{l}{2}$ a to je konstanta. Podle věty 5 nabude tudíž uvažovaný součin největší hodnoty právě tehdy, když si budou oba činitelé rovni. Tedy

$$r = \frac{l}{2} - r$$

neboli

$$r = \frac{l}{4}.$$

Oblouk výseče pak je

$$s = \frac{l}{2}$$

a maximální obsah hledané výseče

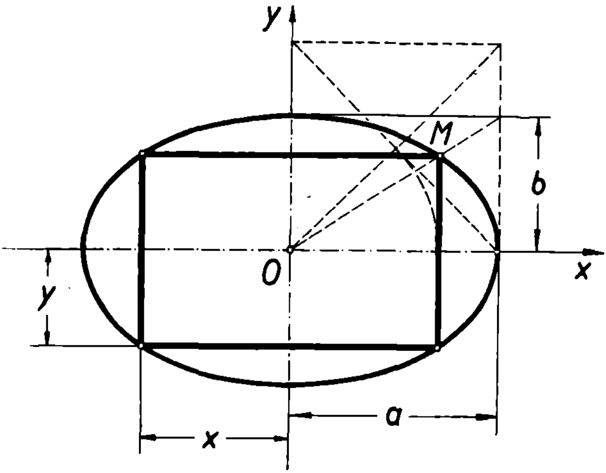
$$S_{max} = \frac{1}{16} l^2.$$

Výsledek ovšem nezávisí na poloměru výseče, nýbrž na jejím tvaru, tj. na poměru $l : r$.

Příklad 2. (Obr. 9.) *Do elipsy o daných poloosách a, b vepište obdélník největšího obsahu.*

Obsah obdélníka označme $S = 4xy$, kde x, y jsou souřadnice vrcholu M, které splňují nerovnosti $0 < x < a$, $0 < y < b$ (obr. 9). Poněvadž vrchol M leží na elipse, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Obr. 9.

Z této rovnice vyplývá, že

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Obsah obdélníka je tedy

$$S = 4\frac{b}{a} \cdot x\sqrt{a^2 - x^2}$$

neboli

$$S = 4\frac{b}{a}\sqrt{x^2 (a^2 - x^2)}.$$

Pro vyšetření maximálního obsahu obdélníka je rozhodující výraz $\sqrt{x^2 (a^2 - x^2)}$, neboť koeficient $4\frac{b}{a}$ je konstanta. Jestliže součin pod odmocnítkem bude maximální, bude největší i jeho odmocnina. Proto můžeme zkoumat jen výraz

$$x^2(a^2 - x^2).$$

Tento součin se skládá ze dvou činitelů, jejichž součet je roven a^2 a tudíž konstantní. Podle věty 5 nabude uvažovaný součin největší hodnoty právě tehdy, když

$$x^2 = a^2 - x^2,$$

čili když

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Z rovnice elipsy vypočteme

$$y = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Rozměry hledaného obdélníka budou tedy v poměru

$$x : y = a : b$$

a jeho obsah

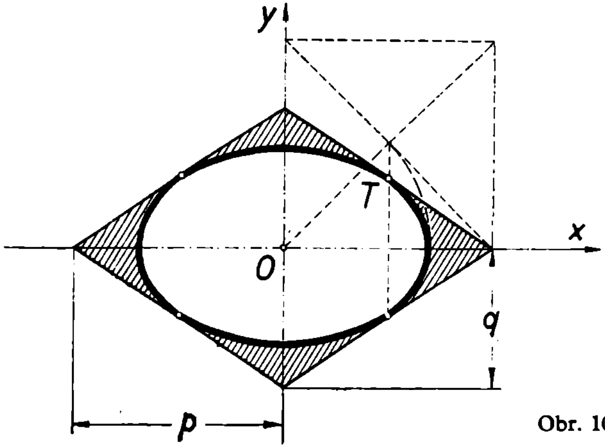
$$S_{max} = 2ab.$$

Nastane-li zvláštní případ, že elipsa přejde v kružnici ($a = b$), vyplývá z uvedené úměry, že hledaným výsledkem bude čtverec. Konstrukce výsledného obdélníku (pro $a \neq b$) je znázorněna na obr. 9.

Příklad 3. (Obr. 10.) *Z kosočtverce o daných úhlopříčkách délek $2p$, $2q$, kde $2p > 2q$, vykrojte elipsu o největším plošném obsahu.*

Obsah elipsy je $S = \pi ab$, kde a je hlavní poloosa elipsy, b vedlejší poloosa.

Strany kosočtverce budou ležet v tečnách hledané elipsy.



Obr. 10.

Položme delší úhlopříčku kosočtverce do osy x a kratší úhlopříčku do osy y, takže polovina úhlopříčky p bude právě úsek tečny na ose x, q pak bude úsek na ose y. Strana kosočtverce tedy leží v přímce o rovnici

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \tag{1}$$

Tečna k elipse v bodě $T = [x_0, y_0]$ má rovnici

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Poněvadž se jedná o dvojí analytické vyjádření téže přímky, určíme porovnáním příslušných členů z obou rovnic (1), (2) souřadnice dotykového bodu:

$$x_0 = \frac{a^2}{p}, \quad y_0 = \frac{b^2}{q}.$$

Jelikož dotykový bod $[x_0, y_0]$ leží jak na elipse, tak i na její tečně, obdržíme po dosazení jeho souřadnic, např. do rovnice (1) vztah

$$\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} = 1,$$

z něhož určíme

$$b = \frac{q}{p} \sqrt{p^2 - a^2}, \text{ kde } (0 < a < p).$$

Obsah elipsy je tedy

$$S = \pi ab = \frac{\pi q}{p} \,.\, a\sqrt{p^2 - a^2} = \frac{\pi q}{p} \sqrt{a^2 (p^2 - a^2)}.$$

Stačí opět zkoumat jen výraz pod odmocnítkem, neboť koeficient $\frac{\pi q}{P}$ je konstanta. Součin $a^2 (p^2 - a^2)$ se skládá z činitelů, jejichž součet je roven p^2 a tudíž konstantní. Proto součin nabude maximální hodnoty, když

$$a^2 = p^2 - a^2$$

čili pro

$$a = \frac{p}{2} \sqrt{2}.$$

Pro vedlejší poloosu pak vychází

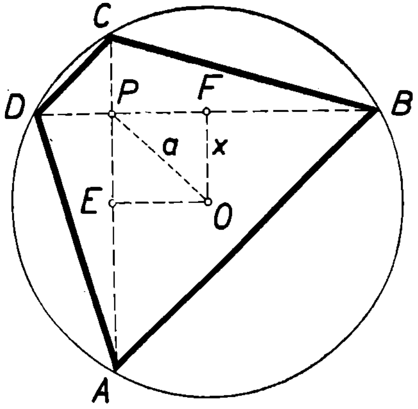
$$b = \frac{q}{2} \sqrt{2},$$

takže obsah hledané elipsy bude

$$S_{max} = \tfrac{1}{2} \pi pq.$$

Na obr. 10 je naznačena konstrukce hlavní poloosy hledané elipsy. Nad polovinou delší úhlopříčky kosodélníka je sestrojen čtverec; poloviční délka jeho úhlopříčky je velikost poloosy elipsy.

Příklad 4. (Obr. 11.) *Uvnitř kružnice o poloměru r je dán bod P, různý od jejího středu. Tímto bodem veďte dvě na sebe kolmé tětivy AC a BD tak, aby čtyřúhelník ABCD, sestrojený spojením koncových bodů tětiv, měl maximální obsah.*



Obr. 11.

Označme vzdálenost bodů O, P $a = OP$ $(0 < a < r)$ a vzdálenost středu kružnice od tětivy BD $x = OF$ (viz obr. 11).
Obsah čtyřúhelníka *je*

$$S = \tfrac{1}{2}\, AC . BD = 2BF . AE,$$

kde E je střed tětivy AC a F střed tětivy BD.

Podle Pythagorovy věty platí

$$BF = \sqrt{r^2 - x^2},\ AE = \sqrt{r^2 - \overline{OE}^2} = \sqrt{r^2 - (a^2 - x^2)}.$$

Obsah čtyřúhelníka je pak

$$S = 2\sqrt{(r^2 - x^2) \cdot (r^2 - a^2 + x^2)},$$

kde x splňuje nerovnosti $0 \leqq x < r$. Jelikož součinitelé pod odmocnítkem mají opět konstantní součet, maximum nastane, když

$$r^2 - x^2 = r^2 - a^2 + x^2,$$

čili pro

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,.$$

Čtenáři se mohou lehko přesvědčit, že v tomto případě budou obě tětivy téže délky a hledaný čtyřúhelník bude tedy rovnoramenným lichoběžníkem o obsahu

$$S_{max} = 2r^2 - a^2.$$

Při řešení jsme mlčky předpokládali, že žádná z úhlopříček čtyřúhelníka neprochází středem kružnice, tj. že $x > 0$. Připustíme-li možnost $x = 0$, je vzniklý čtyřúhelník deltoid o obsahu

$$S = 2r\sqrt{r^2 - a^2}.$$

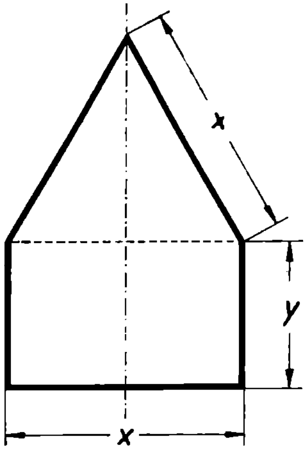
Lze však snadno dokázat, že pro každé $a \neq 0$ je

$$2r^2 - a^2 > 2r\sqrt{r^2 - a^2},$$

takže výsledek zůstává v platnosti.

Příklad 5. (Obr. 12.) *Obrazec skládající se z obdélníka o rozměrech x, y a rovnostranného trojúhelníka o délce stran*

x má předepsaný obvod l. Určete rozměry obrazce tak, aby jeho plošný obsah byl maximální.



Obr. 12.

Obvod obrazce je

$$l = 3x + 2y,$$

z čehož

$$y = \frac{l - 3x}{2}.$$

Obsah obrazce pak je

$$S = xy + \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = x\left(y + \frac{x}{4}\sqrt{3}\right) =$$

$$= x\left(\frac{l - 3x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{3}\right)$$

tj.

$$S = \frac{x}{4}[2l - (6 - \sqrt{3})\,x];$$

číslo x je z intervalu $\left(0, \frac{l}{3}\right)$ a proto tím spíše pro ně platí

$$0 < x < \frac{2l}{6 - \sqrt{3}},$$

čehož hned použijeme. Vytkneme-li totiž výraz $6 - \sqrt{3}$, obdržíme

$$S = \frac{6 - \sqrt{3}}{4} \,.\, x\left(\frac{2l}{6 - \sqrt{3}} - x\right),$$

kde oba poslední činitelé jsou kladní. Jelikož jejich součet $x + \dfrac{2l}{6 - \sqrt{3}} - x$ je opět konstantní, maximum součinu nastane, když

$$x = \frac{2l}{6 - \sqrt{3}} - x,$$

čili

$$x = \frac{l}{6 - \sqrt{3}};$$

pak

$$y = \frac{l(3 - \sqrt{3})}{2(6 - \sqrt{3})} = \frac{x}{2}(3 - \sqrt{3})$$

a

$$S_{max} = \frac{l^2}{4(6 - \sqrt{3})}.$$

Příklad 6. *Určete rozměry rotačního kužele, který má při daném konstantním povrchu S největší objem.*

Označíme-li písmenem x poloměr podstavy kužele, písmenem y výšku kužele, je povrch (podstava + plášť)

$$S = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Objem kužele je

$$V = \tfrac{1}{3} \pi x^2 . y.$$

Ze vztahu pro povrch plyne

$$y = \sqrt{\frac{(S - \pi x^2)^2}{\pi^2 x^2} - x^2} = \frac{\sqrt{S (S - 2\pi x^2)}}{\pi x} \cdot \qquad (3)$$

Aby výraz pod odmocnítkem byl při $x > 0$ kladný, musí x vyhovovat podmínce

$$0 < x < \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \cdot$$

Dosadíme-li do výrazu pro objem za y podle (3), obdržíme

$$V = \tfrac{1}{3} . x \sqrt{S (S - 2\pi x^2)} = \frac{\sqrt{S}}{3} \sqrt{x^2 . (S - 2\pi x^2)}.$$

Pro vyšetření maximálního objemu kužele je rozhodující výraz $x^2 (S - 2\pi x^2)$, který lze dále upravit na tvar

$$2\pi x^2 \left(\frac{S}{2\pi} - x^2\right).$$

Jelikož součin $x^2 \left(\dfrac{S}{2\pi} - x^2\right)$ má konstantní součet činitelů rovný $\frac{S}{2\pi}$, nastane maximum, když bude

$$x^2 = \frac{S}{2\pi} - x^2,$$

tj.

$$2x^2 = \frac{S}{2\pi},$$

odkud

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Pro výšku y pak vychází

$$y = \sqrt{\frac{2S}{\pi}} = 2x\sqrt{2}.$$

Ze všech rotačních kuželů daného povrchu S má tedy maximální objem kužel, pro jehož průměr podstavy $2x$ a výšku y platí

$$2x : y = 1 : \sqrt{2};$$

jeho objem je

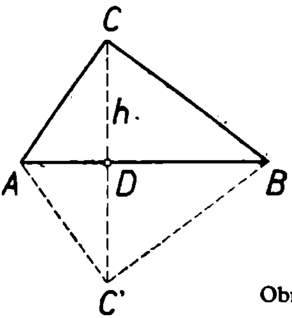
$$V_{max} = \frac{\sqrt{2\pi}}{12\pi} S\sqrt{S}.$$

Příklad 7. (Obr. 13.) *V trojúhelníku je dán obvod $a + b + c = 2s$. Určete délky stran tohoto trojúhelníka tak, aby rotací trojúhelníka kolem jedné z nich vzniklo těleso největšího objemu.*

Úlohu si rozdělíme na dvě části.

Označme c stranu, kolem které trojúhelník rotuje a předpokládejme nejprve, že její délka je pevná. Určíme délky zbývajících stran tak, aby těleso vzniklé rotací mělo (při daném c) největší objem V. Označíme-li $h = CD$ (viz obr. 13) výšku příslušnou ke straně c, vychází pro objem tělesa vzniklého rotací

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2 . AD + \tfrac{1}{3}\pi h^2 . DB = \tfrac{1}{3}\pi h^2 . c^*)$$



Obr. 13.

Poněvadž délka strany c je podle předpokladu konstantní, bude mít uvažované rotační těleso největší objem tehdy, když výška h bude nejdelší. V tomto případě musí býti rovněž obsah uvažovaného trojúhelníka maximální. Hledáme tedy podmínku, při které bude míti trojúhelník o daném obvodě $2s$ a délce jedné strany c největší obsah.

Podle Heronova vzorce platí, že obsah trojúhelníka je

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Jelikož s, $s-c$ jsou konstanty, hledáme maximum součinu

$$(s-a)(s-b).$$

*) Na obr. 13 leží pata D výšky CD mezi body A, B a tomu odpovídá náš výpočet objemu rotačního tělesa. Rozvažte sami, že kdyby pata D výšky CD padla do některého z bodů A, B nebo vně úsečky AB, zda by vyšlo pro objem V opět $V = \frac{1}{3}\pi h^2 c$.

Poněvadž součet jeho činitelů

$$s-a + s-b = 2s - (a + b) = c$$

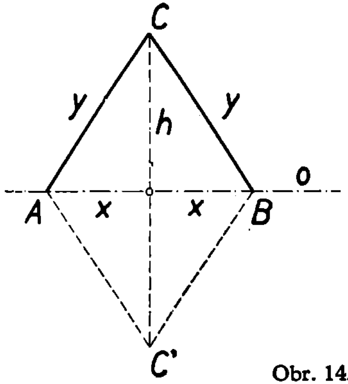
je konstantní, nastane maximum součinu při rovnosti

$$s - a = s - b$$

čili pro

$$a = b.$$

Hledaný trojúhelník bude rovnoramenný.



Obr. 14.

Přikročme nyní k druhé části úlohy. Z první části víme, že zvolíme-li si stranu c, ležící v ose rotace, musí zbývající dvě strany býti téže délky, takže trojúhelník ABC je rovnoramenný. Zavedeme-li v něm označení podle obr. 14, dostáváme pro obvod $2s$

$$2s = 2x + 2y$$

a z toho

$$y = s - x.$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$h^2 = y^2 - x^2,$$

takže pro objem V rotačního tělesa vyjde

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 2x = \frac{2}{3}\pi h^2 . x = \frac{2}{3}\pi x (y^2 - x^2) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi x \, [(s-x)^2 - x^2],$$

neboli

$$V = \frac{4}{3}\pi sx \left(\frac{s}{2} - x\right).$$

Jelikož $\frac{4}{3}\pi s$ je kladná konstanta, hledáme maximum součinu

$$x\left(\frac{s}{2} - x\right).$$

Poněvadž součin má opět konstantní součet činitelů, nastává maximum, když

$$x = \frac{s}{2} - x$$

čili pro

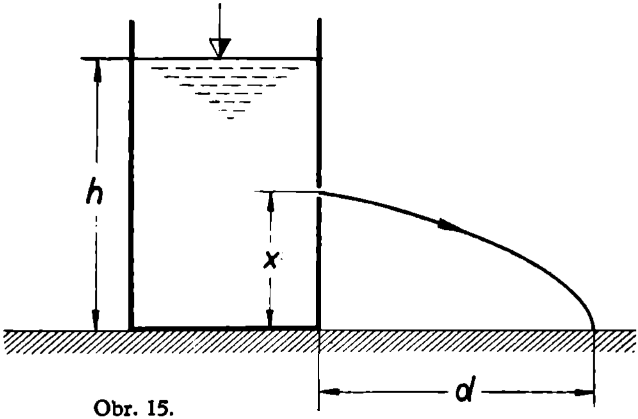
$$x = \frac{s}{4}.$$

Hledané velikosti stran jsou tedy

$$AB = \frac{s}{2}, \qquad AC = BC = \frac{3}{4}s.$$

Jinými slovy: Aby rotací trojúhelníka daného obvodu $2s$ kolem jedné jeho strany vzniklo těleso maximálního objemu, je třeba volit trojúhelník rovnoramenný, jehož délky stran jsou v poměru 2 : 3 : 3, přičemž kratší strana leží v ose rotace. Objem V_{max} vzniklého rotačního tělesa pak je

$$V_{max} = \frac{1}{12} \pi s^3.$$



Obr. 15.

Příklad 8. (Obr. 15.) *Nádoba tvaru rotačního válce je postavena na vodorovné podložce a naplněna kapalinou do výšky h. V jaké výšce x je třeba navrtat otvor do stěny nádoby, má-li kapalina, která jím bude vytékat, dopadnout na podložku co nejdále od stěny nádoby?* (Tloušťku dna při výpočtu zanedbejte!)

Z Torricelliova vzorce plyne pro výtokovou rychlost vztah

$$v = \sqrt{2g\,(h - x)} \quad \left[\frac{m}{s}\right],$$

kde $g\left[\frac{m}{s^2}\right]$ je gravitační zrychlení. Podle vzorce pro dráhu volného pádu trvá pád kapaliny $\sqrt{\frac{2x}{g}}$ vteřin. Vzdálenost d místa dopadu kapaliny od stěny nádoby je dána součinem výtokové rychlosti a času potřebného k dopadu kapaliny, tj.

$$d = \sqrt{2g(h-x)} \cdot \sqrt{\frac{2x}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)}.$$

Poněvadž vzdálenost d bude největší, když i její čtverec bude největší, stačí proto zkoumat jen součin

$$x(h-x).$$

Jelikož jeho činitelé mají opět konstantní součet, nastane maximum součinu při

$$x = h - x,$$

tj. pro

$$x = \frac{h}{2}.$$

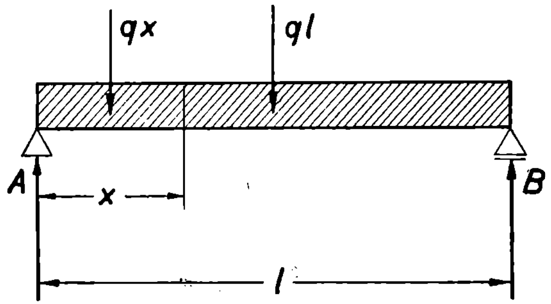
Pro tento případ vyjde vzdálenost d_{max} místa dopadu od stěny nádoby rovná výchozí výšce hladiny v nádobě:

$$d_{max} = h.$$

V mechanice se shledáváme s úlohami, které jsou rozřešeny v příkladech 9 a 10.

Příklad 9. (Obr. 16.) *Určete největší ohybový moment rovnoměrně zatíženého prostého nosníku délky l, který spočívá svými konci na dvou podporách.*

Ohybový moment $M(x)$ na nosníku v určitém řezu je dán algebraickým součtem jednotlivých momentů



Obr. 16.

$M(x) = \sum_{1}^{n} P_i a_i$ od vnějších sil P_i, které působí po jedné straně řezu. (Symbol a_i značí rameno síly P_i k řezu x.)

Celkové zatížení uvažovaného nosníku je $Q = ql$, kde q je zatížení na jednotku délky nosníku včetně vlastní váhy.

Určíme nejdříve podporové tlaky, tzv. podporové reakce. Jsou to síly, které splňují statickou podmínku rovnováhy ve svislém směru.

$$A = B = \tfrac{1}{2}\, ql.$$

Označme x vzdálenost roviny řezu od levé podpory, kde x splňuje nerovnost

$$0 < x < l.$$

Ohybový moment je dán vztahem

$$M(x) = Ax - qx\frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\, qlx - q\,.\,\frac{x^2}{2} = \tfrac{1}{2} qx\,(l - x).$$

Jelikož $\frac{1}{2}q$ je konstanta, soustředíme své úvahy jen na součin

$$x\,.\,(l - x).$$

Podle úvah z předcházejících příkladů nastane maximum zmíněného součinu, když

$$x = l - x$$

čili

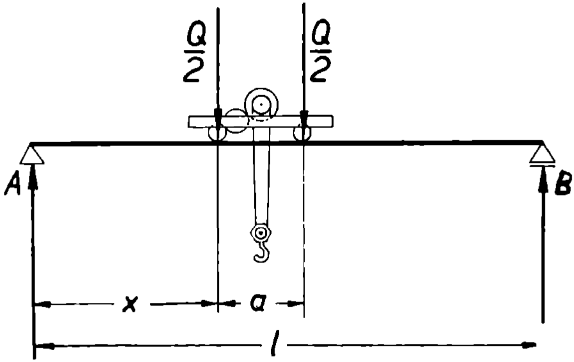
$$x = \frac{l}{2}.$$

Pak největší ohybový moment rovnoměrně zatíženého prostého nosníku je uprostřed jeho délky a rovná se

$$M_{max} = \tfrac{1}{2}q \cdot \frac{l}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8}\,ql^2.$$

Nosník se dimenzuje na maximální ohybový moment.

Příklad 10. (Obr. 17.) *Určete polohu jeřábového vozíku (kočky) na prostém nosníku, při které bude nosník namáhán největším ohybovým momentem, jaký může vzniknout pod levým z obou břemen.*



Obr. 17.

Označme A, B reakce v podporách, l délku nosníku, a vzdálenost os jeřábového vozíku (tzv. rozvor), x libovolnou vzdálenost bližšího kola vozíku od levé podpory a $\frac{Q}{2}$ podporové tlaky jeřábové kočky.

Z podmínek rovnováhy vypočteme podporovou reakci A.

$$A\,l = \frac{Q}{2}(l - x) + \frac{Q}{2}(l - x - a)$$

čili

$$A = \frac{Q}{2\,l}(2\,l - 2\,x - a), \quad \text{kde} \quad 0 < x < l - a.$$

Ohybový moment ve vzdálenosti x od levé podpory je vyjádřen vztahem

$$M(x) = Ax = \frac{Q}{2l}\,x\,(2\,l - a - 2x) =$$

$$= \frac{Q}{4l}\,2x\,(2l - a - 2x).$$

Jelikož součin $2x\,(2\,l - a - 2x)$ má konstantní součet roven $2\,l - a$, dosáhne uvažovaný součin největší hodnoty, když

$$2x = 2\,l - a - 2x$$

neboli

$$x = \tfrac{1}{2}\left(l - \frac{a}{2}\right).$$

Maximální ohybový moment je

$$M_{max} = \frac{Q}{4}\left(l - a + \frac{a^2}{4l}\right).$$

Nevznikne tedy, jak bychom očekávali, největší ohybový moment uprostřed nosníku, nýbrž v bodě, který je vzdálen o čtvrtinu rozvoru od středu nosníku.

Při řešení předešlých deseti úloh jsme se opírali o větu 5 uvedenou na str. 17, přičemž — v souladu s tím, co bylo řečeno v předmluvě — zcela ustoupilo do pozadí „funkční hledisko". Nepoužívali jsme ani termínů „maximum funkce" nebo „lokální extrém", které již byly zavedeny; kdybychom chtěli citovanou větu a rozřešení úlohy formulovat s použitím pojmu funkce a pojmu extrému, zněla by tato věta takto:

Funkce $y = x(s - x)$, kde $s > 0$, má v intervalu $(0, s)$ maximum v bodě $x = \dfrac{s}{2}$.

Předně uvažme, že omezení definičního oboru na interval $(0, s)$ tu není podstatné. Souviselo to — v původním znění věty — s tím, že jsme se při vyhledávání sčítanců s konstantním kladným součtem (zde s) a maximálním součinem již předem omezili jen na sčítance kladné. Projdete-li si však postup na str. 16, shledáte, že na výsledku se nic nezmění, připustíme-li jako sčítance libovolná reálná čísla. Dokonce ani předpoklad $s > 0$ tu není nutný.*) Platí tedy:

Věta. *Funkce $y = x(s - x)$ má v intervalu $(-\infty, \infty)$ maximum v bodě $x = \dfrac{s}{2}$.*

Funkce $y = x(s - x)$ je jen zvláštním případem kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Nyní určíme extrémy této funkce v intervalu $(-\infty, \infty)$. Pro zjednodušení zápisu budeme vyšetřovat funkci $f(x) = y - c =$

*) Předpoklad $s > 0$ odpovídá předpokladu $a > 0$ na str. 16, který zřejmě není podstatný.

$= ax^2 + bx$, která má zřejmě extrémy v týchž bodech jako funkce $y = ax^2 + bx + c$, a rozdělíme vyšetřování na 3 případy:

I. Nechť $a > 0$, $b \neq 0$. Pišme

$$f(x) = ax^2 + bx = ax\left(x + \frac{b}{a}\right).$$

Činitelé ax i $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ mají pro každé x o dostatečně velké absolutní hodnotě $\left(|x| > \left|\frac{b}{a}\right|\right)$ stejné znaménko, takže jejich součin je kladný a rostoucí prostou hodnotou argumentu x může nabývat libovolně velké hodnoty. Funkce f (a tím i funkce $ax^2 + bx + c$) tudíž nemá v intervalu $(-\infty, \infty)$ maximum.

Pro vyhledání minima této funkce použijme vyjádření

$$f(x) = -a . x\left(-x - \frac{b}{a}\right).$$

Lehko odvodíte, že součin $x\left(-x - \frac{b}{a}\right)$ nabývá pro vhodné argumenty x kladných hodnot.*) Existují tedy argumenty, pro které jsou funkční hodnoty $f(x)$ záporné. Proto má-li funkce f v intervalu $(-\infty, \infty)$ minimum, je to číslo záporné a funkce ho nabývá v tom bodě, ve kte-

*) Je-li $\frac{b}{a} > 0$, jsou to argumenty x z intervalu $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, je-li $\frac{b}{a} < 0$, jsou to argumenty x z intervalu $\left(0, -\frac{b}{a}\right)$.

rém je součin $x\left(-x - \frac{b}{a}\right)$ největší. Jde tu však o součin s konstantním součtem činitelů $x + \left(-x - \frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}$, jehož maximum nastává podle věty 5 pro $x = -\frac{b}{2a}$. V bodě $-\frac{b}{2a}$ má tedy funkce f a tím i funkce $ax^2 + bx + c$ $(a > 0,\ b \neq 0)$ minimum.

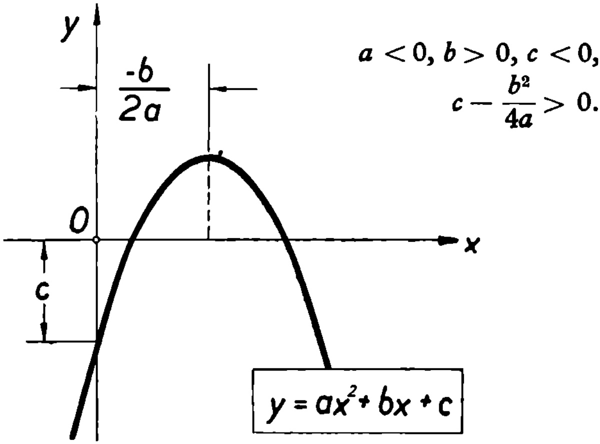
II. Nechť $a < 0$, $b \neq 0$. Všimněme si funkce $-f(x) = -ax^2 - bx$. Koeficient kvadratického členu je zde opět kladný, takže podle předešlého odstavce nemá funkce $-f(x)$ $(a < 0,\ b \neq 0)$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ minimum a nabývá maxima v bodě $-\frac{-b}{-2a} = -\frac{b}{2a}$. Podle věty 3 na str. 14 to znamená, že pro $a < 0$, $b \neq 0$ nemá v intervalu $(-\infty, \infty)$ funkce $f(x) = ax^2 + bx$ (a tím i funkce $ax^2 + bx + c$) minimum, ale nabývá v bodě $x = -\frac{b}{2a}$ maxima.

III. Nechť $b = 0$, $a \neq 0$. Tu je $f(x) = ax^2$. Protože funkce $y = x^2$ zřejmě nemá v intervalu $(-\infty, \infty)$ maximum a minima nabývá v bodě $x = 0$, platí pro extrémy funkce $ax^2 + bx + c$ $(b = 0)$ stejné závěry jako v bodech I a II. O tom se lehko sami přesvědčíte.

Můžeme tedy shrnout:

Věta 6. *Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$ nemá pro $a > 0$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ maximum. Minima nabývá v bodě $-\frac{b}{2a}$. Pro $a < 0$ nemá funkce $y = ax^2 + bx + c$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ minima a nabývá maxima v bodě $-\frac{b}{2a}$.*

Oba případy ($a < 0$, $a > 0$) jsou znázorněny na obr. 18a, b; grafem funkce $y = ax^2 + bx + c$ je — jak víte — parabola.



Obr. 18a.

Příklad 11. *Kladné číslo a rozložte na dva sčítance tak, aby součet druhých mocnin těchto čísel byl nejmenší.*

Označíme-li obě hledaná čísla x, z musí platit, že

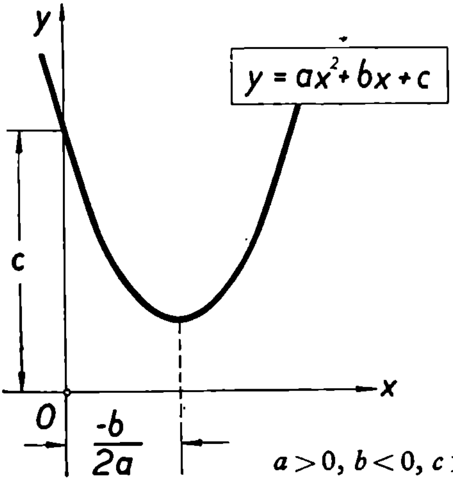
$$x + z = a, \tag{1}$$

přičemž číslo

$$y = x^2 + z^2 \tag{2}$$

má být minimální. Poněvadž

$$z = a - x,$$



Obr. 18b.

$$a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ c - \frac{b^2}{4a} > 0.$$

obdržíme po dosazení do rovnice (2)

$$y = x^2 + (a - x)^2$$

čili

$$y = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Tato funkce nabývá podle věty 6 v intervalu $(-\infty, \infty)$ minima pro

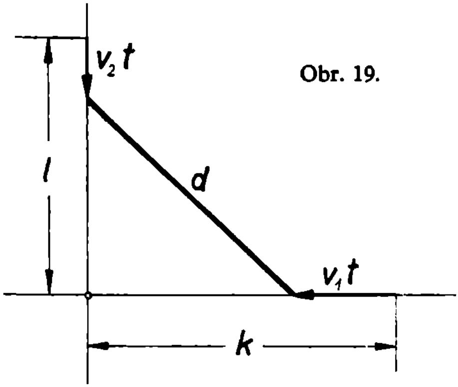
$$x = -\frac{-2a}{2.2} = \frac{a}{2}.$$

Součet druhých mocnin sčítanců pak je

$$y_{min} = \tfrac{1}{2} \cdot a^2.$$

P o z n á m k a. Úloha rozložit kladné číslo a na dva sčítance tak, aby součet druhých mocnin sčítanců byl maximální, je podle věty 6 neřešitelná.

Příklad 12. (Obr. 19.) *Po dvou přímých silnicích, které se kolmo protínají, se pohybují konstantními rychlostmi dvě vozidla směrem ke křižovatce. Za jaký čas t budou obě vozidla sobě nejblíže, jsou-li jejich vzdálenosti od křižovatky v okamžiku t po řadě k a l?*



Obr. 19.

Rychlost prvého vozidla je v_1, druhého v_2. Vzdálenost $d(t)$ obou vozidel v okamžiku $t_0 + t$ lze vyjádřit podle Pythagorovy věty vztahem

$$d(t) = \sqrt{(k - v_1 t)^2 + (l - v_2 t)^2}.$$

Bude-li d nejmenší, bude i dvojmoc d^2 nejmenší. Stačí proto zkoumat jen funkci

$$f(t) = (k - v_1 t)^2 + (l - v_2 t)^2$$

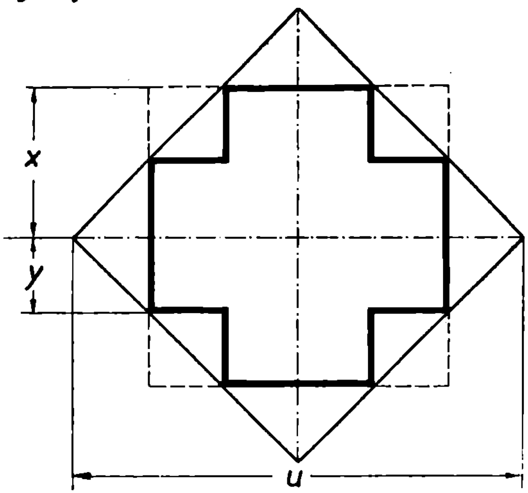
neboli

$$f(t) = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(kv_1 + lv_2)t + k^2 + l^2.$$

Obdrželi jsme kvadratickou funkci argumentu t, jejíž koeficient $v_1^2 + v_2^2$ při kvadratickém členu je kladný. Podle věty 6 má tato funkce minimum v bodě

$$t = \frac{kv_1 + lv_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Příklad 13. (Obr. 20.) *Do čtverce o dané úhlopříčce u vepište obrazec tvaru kříže složeného ze dvou stejně širokých pruhů, souměrných podle úhlopříček tak, aby plošný obsah kříže byl největší.*



Obr. 20.

Obsah kříže S je při označení podle obr. 20.

$$S = 4x^2 - 4(x - y)^2,$$

přičemž

$$y = \frac{u}{2} - x$$

a argument x splňuje nerovnost

$$\frac{u}{6} < x < \frac{u}{2}.$$

Vyloučíme-li y, obdržíme pro obsah vztah

$$S = 4x^2 - 4\left(2x - \frac{u}{2}\right)^2$$

čili

$$S = -12x^2 + 8ux - u^2.$$

Tato kvadratická funkce nabývá podle věty 6 maximální hodnoty pro

$$x = \frac{u}{3},$$

pak

$$y = \frac{u}{6},$$

takže obsah hledaného obrazce je

$$S_{max} = \frac{1}{3} \cdot u^2.$$

Dosadíme-li do výsledného obsahu stranu čtverce podle vztahu $u = a\sqrt{2}$ vychází, že obsah kříže zaujímá dvě třetiny obsahu daného čtverce

$$S_{max} = \frac{2}{3} \cdot a^2.$$

P o z n á m k a. Příklady 1—10 z této kapitoly můžeme též řešit právě uvedeným způsobem. To je zřejmé, neboť věta

5, o kterou se opírala podaná řešení příkladů 1—10, je jen důsledkem věty 6, o kterou se opírají řešení příkladů 11, 12 a 13.

Cvičení

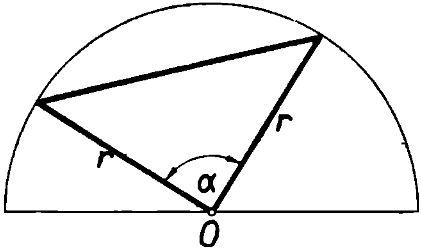
1. Do rovnoramenného trojúhelníka o základně z a k ní příslušné výšce h vepište obdélník největšího obsahu. [$x = \frac{1}{2}z$; $y = \frac{1}{2}h$]
2. Do kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $2\alpha < \pi$ vepište symetricky dle osy výseče rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem ve středu oblouku tak, aby obsah trojúhelníka byl maximální. [a) Je-li $\alpha \leqq 60°$, pak výška $h = \frac{1}{2} \cdot r$; b) pro $\alpha \geqq 60°$ je $h = r\,(1 - \cos\alpha)$.]
3. Do rotačního kužele o poloměru r a výšce h vepište rotační válec o největším plášti. [Poloměr $x = \frac{1}{2}r$; výška $v = \frac{1}{2}.h$]
4. Do koule o poloměru r vepište rotační válec největšího pláště. $\left[\text{Rovnostranný válec o poloměru } \frac{r}{2}\sqrt{2}\right]$
5. Výkon turbíny N je funkcí počtu obrátek n. Určete počet obrátek tak, aby výkon turbíny byl maximální, jestliže výkon je vyjádřen vztahem $N = \alpha n - \beta n^2$. Koeficienty jsou např. $\alpha = 0{,}45543 \left[\frac{\mathrm{m^2kg}}{s^2}\right]$, $\beta = 0{,}0010344 \left[\frac{\mathrm{m^2kg}}{s}\right]$. $\left[n = \frac{\alpha}{2\beta} \doteq 220.\right]$

3. kapitola

EXTRÉMY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

V této kapitole se budeme zabývat úlohami, jejichž řešení spočívá v podstatě v určení extrémů goniometrických funkcí. Předpokládáme, že čtenáři vědí, že funkce $\sin x$ nabývá lokálního maxima v bodech $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, kde k je číslo celé a lokálního minima nabývá v bodech $x = (4k - 1)\frac{\pi}{2}$ (k celé). Funkce $\cos x$ nabývá lokálního maxima v bodech $x = 2k\pi$ (k celé) a lokálního minima v bodech $x = (2k + 1)\pi$ (k celé). Tyto známé vlastnosti funkcí sinus a kosinus, jakož i věty 1 a 2 (str. 12—14) zcela postačí k řešení následujících příkladů této kapitoly.

Příklad 14. (Obr. 21.) *Do půlkruhu o poloměru r vepište trojúhelník s vrcholem ve středu kružnice tak, aby jeho obsah byl maximální.*



Obr. 21.

Obsah trojúhelníka je

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 \sin \alpha.$$

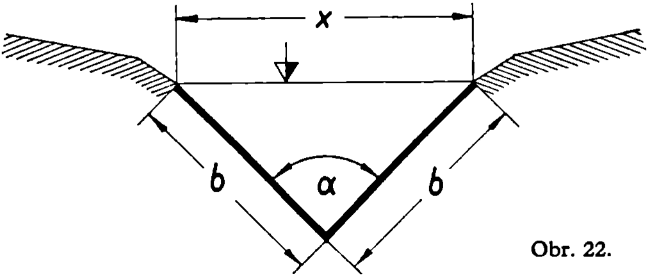
Poněvadž poloměr r je konstantní, závisí obsah trojúhelníka jen na velikosti středového úhlu α, který se může měnit v intervalu

$$0 < \alpha < \pi.$$

Jelikož funkční hodnota $\sin \alpha$ je v uvažovaném intervalu největší pro $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, je hledaný trojúhelník pravoúhlý.

Jeho obsah bude

$$S_{max} = \tfrac{1}{2} r^2.$$



Obr. 22.

Příklad 15. (Obr. 22.) *Určete rozměry a úhel stěn vodního příkopu, jehož profil má tvar rovnoramenného trojúhelníka o předepsaném obsahu S tak, aby součet bočních stran byl minimální* (tzv. nejmenší omočený obvod).

Poznámka. Takovým profilům, které mají při konstantním plošném obsahu nejmenší omočený obvod, říkáme v hydraulice *hydraulicky nejvýhodnější profily.*
Obsah trojúhelníka je

$$S = \tfrac{1}{2} b^2 \sin \alpha,$$

odkud pro stranu b vyplývá

$$b = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$$

a pro omočený obvod dostáváme

$$O = 2b = 2\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}.$$

Funkce $O = 2\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$ nabývá minima, když zlomek $\frac{2S}{\sin\alpha}$ je minimální. To – při konstantním čitateli $2S$ – nastane, bude-li jmenovatel $\sin\alpha$ roven jedné, tj. pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$. (Musí totiž zřejmě být $0 < \alpha < \pi$.) Tím je úloha rozřešena a uvažovaný profil bude tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka. Pro šířku příkopu x vyjde

$$x = 2\sqrt{S}$$

a omočený obvod má délku

$$O_{min} = 2\sqrt{2S}.$$

Příklad 16. (Obr. 23.) *Který z obdélníků má při dané délce úhlopříčky u největší* a) *obsah* b) *obvod*?

a) Označíme-li strany obdélníka a, b, pak platí (při označení podle obr. 23)

$$a = u.\cos\varphi, \quad b = u.\sin\varphi,$$

kde úhel φ splňuje nerovnost

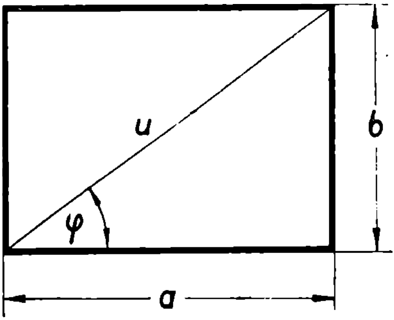
$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Obsah obdélníku je

$$S = a . b = u^2 . \sin \varphi \cos \varphi .$$

Poněvadž $\sin \varphi . \cos \varphi = \frac{1}{2} . \sin 2 \varphi$, upravíme obsah obdélníka na tvar

$$S = \tfrac{1}{2} . u^2 . \sin 2 \varphi .$$



Obr. 23.

Obsah obdélníka bude největší, když funkce $\sin 2\varphi$ bude maximální.
Položme tedy

$$\sin 2 \varphi = 1,$$

čili

$$\varphi = \frac{\pi}{4} .$$

Hledaný obdélník bude čtvercem o obsahu

$$S_{max} = \tfrac{1}{2} . u^2 .$$

b) Obvod obdélníka je

$$O = 2(a + b) = 2u(\cos\varphi + \sin\varphi) =$$

$$= 2u\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\varphi\right].$$

Výraz v lomené závorce upravíme podle vzorce

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

takže pro obvod obdržíme

$$O = 2u\left[2\sin\frac{\pi}{4} \,.\, \cos\frac{\pi - 4\varphi}{4}\right].$$

Jelikož hodnota $\sin\frac{\pi}{4}$ je konstantní, nastane maximum pro

$$\cos\frac{\pi - 4\varphi}{4} = 1,$$

čili pro

$$\frac{\pi - 4\varphi}{4} = 0,$$

tj. pro

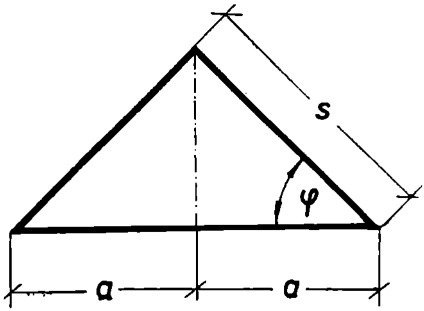
$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Pak

$$O_{max} = 2u\sqrt{2}.$$

Výsledný obrazec je opět čtverec.

Příklad 17. (Obr. 24.) *Je dána šířka štítu domu 2a. Jakou odchylku φ mají mít střešní roviny od vodorovné roviny, aby dešťové kapky stékaly od hřebene střechy k okapu v nejkratším čase.*



Obr. 24.

(Poznámka. Nebudeme hledět na tření a odpor vzduchu.)

Jak známo, je zrychlení tělesa pohybujícího se po nakloněné rovině dáno součinem $g \sin\varphi$, kde g $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ je gravitační zrychlení a φ velikost úhlu, který svírá nakloněná rovina s rovinou vodorovnou. Pro dráhu s, kterou urazí těleso při tomto pohybu za dobu t, platí

$$s = \tfrac{1}{2} g \sin\varphi \,.\, t^2.$$

Odtud pro dobu t, potřebnou k vykonání dráhy s vychází

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin\varphi}} = \sqrt{\frac{2a}{g \sin\varphi \,.\, \cos\varphi}}\,,$$

neboť při našem označení je $s = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, kde $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Zavedeme-li ještě do posledního výrazu funkci dvojnásobného úhlu, vychází pro dobu t, která má být minimální,

$$t = \sqrt{\frac{4a}{g \sin 2\varphi}}\,.$$

Podobně, jako v předešlém příkladě, nastává tu minimum pro $\sin 2\varphi = 1$, tj. pro

$$\varphi = \frac{\pi}{4}\,,$$

pak

$$t_{min} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\,.$$

Jak je vidět, nezávisí volba nejvhodnější odchylky na šířce štítu.

Příklad 18. (Obr. 25.) *Z plechu tvaru kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $2\alpha < \pi$ vykrojte souměrně dle osy výseče obdélník tak, aby odpad materiálu byl minimální.*

Zaveďme označení r, x, y, z, φ, α podle obr. 25. Pak řešení úlohy spočívá v určení velikosti úhlu φ $(0 < \varphi < \alpha)$, při kterém bude mít hledaný obdélník maximální obsah. Při našem označení je

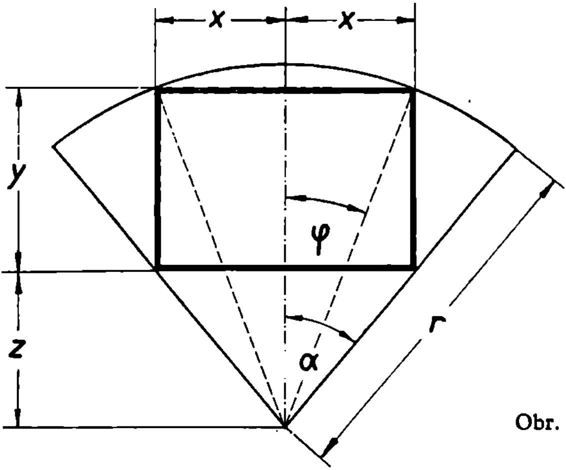
$$x = r \sin\varphi, \quad z + y = r\cos\varphi \text{ a } z = x \operatorname{cotg}\alpha,$$

odkud

$$y = r\cos\varphi - z = r\,(\cos\varphi - \sin\varphi \operatorname{cotg}\alpha).$$

Pro obsah $S = 2xy$ vyšetřovaného obdélníka tedy máme

$$S = 2r^2 . \sin\varphi . \left(\cos\varphi - \sin\varphi \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$



Obr. 25.

čili
$$S = \frac{2r^2}{\sin\alpha} \sin\varphi \sin(\alpha - \varphi).$$
Užitím vzorce
$$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]$$
lze výraz pro S ještě upravit na tvar
$$S = \frac{r^2}{\sin\alpha}[\cos(2\varphi - \alpha) - \cos\alpha].$$

Poněvadž α a r jsou dané konstanty, bude obsah obdélníka největší, když funkce $\cos(2\varphi - \alpha)$ nabude největší hodnoty.
Položíme tedy
$$\cos(2\varphi - \alpha) = 1,$$
odkud
$$2\varphi - \alpha = 2k\pi \quad (k \text{ celé}).$$

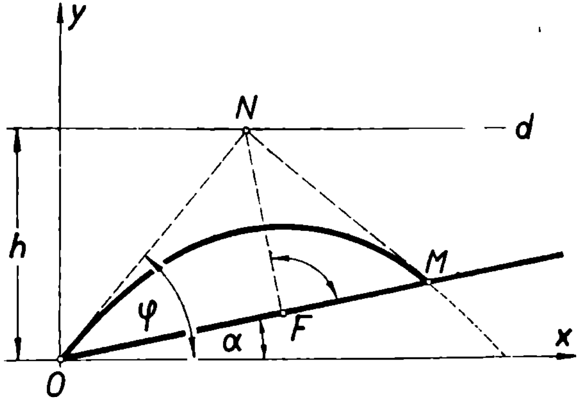
Vzhledem k podmínkám $0 < 2a < \pi$, $0 < \varphi < a$ má předešlá rovnice jediné řešení

$$\varphi = \frac{a}{2}.$$

Obsah hledaného obdélníka je

$$S_{max} = r^2 \frac{1 - \cos a}{\sin a} = r^2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

Příklad 19. (Obr. 26.) *Z bodu O je vymrštěno pod úhlem φ těleso počáteční rychlostí v_0. Určete elevační úhel φ tak, aby těleso dopadlo co nejdále od bodu O.*



Obr. 26.

Úlohu budeme řešit za předpokladu, že dráha tělesa leží ve svislé rovině (při střelbě tomu tak není) a že rovina, na kterou těleso dopadne, je kolmá k rovině dráhy, ale nikoli nutně vodorovná. Velikost její odchylky od vodorovné roviny označme a. Na obr. 26 je situace znázorněna v řezu svislou rovinou. Rovina dopadu je znázorněna přímkou OM. Vodorovná a svislá přímka procházejí bodem O jsou na obr. 26 označeny po řadě písmeny x a y a můžeme je dále považovat za osy souřadného systému. Poloha vymrštěného tělesa v okamžiku t je určena souřadnicemi

$$x = v_0\, t \cos\varphi, \quad y = v_0\, t \sin\varphi - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

kde $g \left[\frac{m}{s^2}\right]$ značí gravitační zrychlení. Vyloučením proměnné t z těchto rovnic dostáváme rovnici křivky, po které se těleso pohybuje:

$$y = x \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \,.\, \cos^2\varphi}\,. \tag{1}$$

Vidíme, že je to rovnice paraboly procházející počátkem, jejíž osa je rovnoběžná s osou y. Stanovme nyní souřadnice bodu dopadu M. Bod M leží — v našem znázornění — na parabole a na přímce, která nám znázorňuje rovinu dopadu a má rovnici

$$y = x \,.\, \mathrm{tg}\, a.$$

Dosadíme-li odtud do rovnice (1), dostáváme po úpravě rovnici

$$x\left(\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\,\varphi + \frac{g x}{2\, v_0^2 \,.\, \cos^2\varphi}\right) = 0.$$

Jeden kořen této rovnice je $x_1 = 0$, což je souřadnice bodu O výchozího bodu dráhy vymrštěného tělesa. Druhý kořen x_2 určíme anulováním výrazu v závorce:

$$\mathrm{tg} a - \mathrm{tg}\varphi + \frac{g x}{2\, v_0^2 \cos^2\varphi} = 0,$$

odkud

$$x_2 = \frac{2\,v_0^2 \cos^2\varphi\,(\sin\varphi \cos a - \cos\varphi \sin a)}{g \,.\cos a \cos\varphi}$$

čili

$$x_2 = \frac{2\,v_0^2}{g \,.\cos a} \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin(\varphi - a).$$

Tento výraz se dá ještě výhodně upravit podle vzorce

$$\cos a_1 \sin a_2 = \tfrac{1}{2}\,[\sin(a_1 + a_2) - \sin(a_1 - a_2)]$$

na konečný tvar

$$x_2 = \frac{v_0^2}{g \,.\cos a}\,[\sin(2\,\varphi - a) - \sin a].$$

Je patrno, že první souřadnice bodu M závisí na velikosti úhlu φ a na konstantách a, v_0. Poněvadž hledáme nejvzdálenější bod na nakloněné rovině, kterého můžeme dosáhnout při téže počáteční rychlosti v_0, musíme najít maximum funkce

$$d(\varphi) = \sin(2\,\varphi - a).$$

Položme proto

$$\sin(2\,\varphi - a) = 1.$$

Z této rovnice a ze samozřejmých podmínek $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < a < \varphi$ pak vyjde jediné řešení

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}.$$

Zkoumáme-li dopad na vodorovnou rovinu, pak $a = 0$, takže hledaný elevační úhel je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Poznamenejme, že v balistice jsou pro případy $a > 0$, $a < 0$ zavedeny termíny *přivrácený* a *odvrácený svah.*

Konstrukce řešení. Jsou sestrojeny osy x, y a polopřímka OM. Sestrojíme osu úhlu, jehož rameny jsou polopřímka OM a kladná část osy y. V horní polorovině vyťaté osou x vedeme ve vzdálenosti h*) rovnoběžku d s osou x. Její průsečík se zmíněnou osou úhlu označme N a veďme jím kolmici na polopřímku OM. Pata F této kolmice je ohniskem a přímka d řídící přímkou paraboly, která znázorňuje dráhu vymrštěného tělesa.

Příklad 20. *Určete délky stran pravoúhlého trojúhelníka, který má při konstantním součtu odvěsen nejkratší přeponu.*

Označme velikosti odvěsen trojúhelníka a, b velikost přepony c. Má-li jeden z ostrých úhlů trojúhelníka velikost φ, je (při označení $a + b = k$)

$$c(\cos\varphi + \sin\varphi) = k,$$

tj.

$$c\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\varphi\right] = k.$$

Užitím stejné úpravy jako v příkladě 16 dostáváme rovnici

$$2c \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi - 4\varphi}{4} = k$$

čili

$$c\sqrt{2}\cos\frac{\pi - 4\varphi}{4} = k,$$

*) h je maximální výška, kterou by dosáhlo těleso vymrštěné kolmo vzhůru $\left(h = \frac{v_0^2}{2g}\right)$.

odkud

$$c = \frac{k}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}.$$

Minimum pro funkci c nastává, je-li $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ maximální, tj. pro

$$\frac{\pi}{4} - \varphi = 0,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Je tedy

$$c_{min} = \frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{k\sqrt{2}}{2}.$$

a hledaný trojúhelník je rovnoramenný.
Danou úlohu je možno řešit i užitím věty 6. Je totiž

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (k - a)^2 = 2a^2 - 2\,ka + k^2.$$

Minimum pro $c > 0$ nastane právě když c^2 bude minimální, tj. bude-li kvadratický trojčlen

$$2a^2 - 2ka + k^2$$

minimální.

4. kapitola

EXTRÉMY NĚKTERÝCH FUNKCÍ LOMENÝCH

V této kapitole rozřešíme několik úloh, v nichž v podstatě ponejvíce půjde o určení extrémů funkce tvaru $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$. Proto nejprve najdeme extrémy této funkce v obecném případě (pro různé koeficienty k, A) a při řešení jednotlivých úloh využijeme věty 7, která je uvedena později, a do které shrneme výsledky zkoumání uvedené funkce.

Pro naše úvahy bude užitečná nerovnost

$$|a + b| \geq 2\sqrt{ab}, \quad (ab \geq 0) \tag{1}$$

jejíž správnost si ověříme.

Předpokládejme nejprve, že nerovnost (1) platí. Předpoklad $ab \geq 0$, uvedený v nerovnosti (1) je ovšem nutný k tomu, aby její pravá strana měla (v oboru reálných čísel) smysl.

Umocněním dostáváme z nerovnosti (1) nerovnost

$$(a + b)^2 \geq 4\,ab,$$

tj. nerovnost

$$a^2 + 2\,ab + b^2 \geq 4\,ab,$$

neboli

$$a^2 - 2\,ab + b^2 \geq 0,$$

kterou lze zapsat ve tvaru

$$(a - b)^2 \geq 0. \tag{2}$$

Platnost nerovnosti (2) je zřejmá; právě tak je zřejmé, že rovnost

$$(a - b)^2 = 0$$

nastává právě, když $a = b$.

Protože v případě $ab \geqq 0$ plyne také obráceně ze vztahu (2) vztah (1), je správnost nerovnosti (1) ověřena a navíc je zřejmé, že rovnost

$$|a + b| = 2\sqrt{ab}$$

dostaneme právě tehdy, když $a = b$.

Všimněme si ještě předpokladu $ab \geqq 0$, který jsme museli učinit. Případ $ab = 0$ není zajímavý a nerovnost $ab > 0$ platí ve dvojím případě:

a) Je-li $a > 0$ i $b > 0$,
b) je-li $a < 0$ i $b < 0$.

Označíme-li pro druhý případ $-a = c$, $-b = d$, nabývá nerovnost (1) tvaru

$$(-c - d) \geqq 2\sqrt{cd},$$

tj.

$$-|-c-d| \geqq 2\sqrt{cd}$$

čili

$$c + d \geqq 2\sqrt{cd}. \tag{3}$$

Dosazením za $c = -a$, $d = -b$ dostaneme

$$a + b \leqq -2\sqrt{ab}.$$

Můžeme tedy shrnout:
Jsou-li a, b libovolná kladná čísla, je

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab}, \tag{4}$$

přičemž rovnost nastává právě v případě $a = b$; jsou-li a, b libovolná záporná čísla, je

$$a + b \leqq -2\sqrt{ab}, \tag{5}$$

přičemž rovnost nastává opět právě jen v případě $a = b$.

Těchto závěrů nyní použijeme k vyšetřování extrémů funkce $f(x) = x + \frac{A}{x}$ $(A > 0)$ nejdříve v intervalu $(0, \infty)$. Nechť $A > 0$. Položme $a = x, b = \frac{A}{x}$. Utvořme funkci

$$f(x) = x + \frac{A}{x}.$$

Tato funkce má v intervalu $(0, \infty)$ podle nerovnosti (4) minimum právě, když

$$x = \frac{A}{x},$$

tj. pro

$$x = \sqrt{A}.^{*)}$$

Jelikož součet $x + \frac{A}{x}$ zřejmě může nabývat v $(0, \infty)$ libovolně velkých hodnot, nemá funkce f v tomto intervalu maximum.

V intervalu $(-\infty, 0)$ je $x < 0$ a $\frac{A}{x} < 0$, takže funkce f má v tomto intervalu podle nerovnosti (5) maximum pro

$$x = \frac{A}{x},$$

*) Řešení $x = -\sqrt{A}$ rovnice $x = \frac{A}{x}$ tu nepřichází v úvahu, neboť předpokládáme $x > 0$.

tj. pro

$$x = -\sqrt{A}.$$

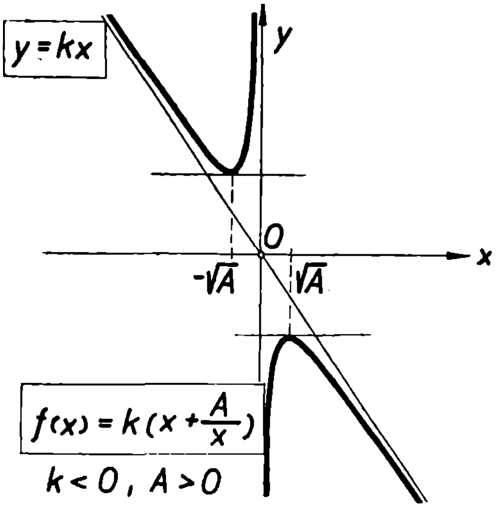
Jelikož součet $x + \frac{A}{x}$ zřejmě může nabývat v $(-\infty, 0)$ libovolně malých záporných hodnot (tj. v absolutní hodnotě libovolně velkých hodnot), nemá funkce f v tomto intervalu minimum.

K odvození věty 7, která konečně hovoří o extrémech funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$, stačí již jen použít věty 3 (str. 14).

Věta 7. *Je-li $k > 0$, má funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)(A > 0)$ v intervalu $(-\infty, 0)$ maximum v bodě $x = -\sqrt{A}$ a nemá v tomto intervalu minimum. V intervalu $(0, \infty)$ nemá maximum a má minimum v bodě $x = \sqrt{A}$.*

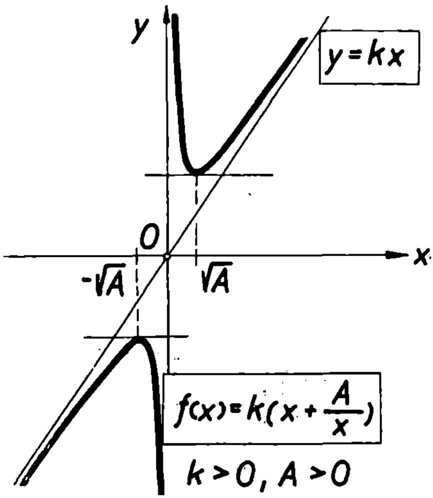
Je-li $k < 0$, má funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$ $(A > 0)$ v intervalu $(-\infty, 0)$ minimum v bodě $-\sqrt{A}$ a nemá v tomto intervalu maximum. V intervalu $(0, \infty)$ nemá minimum a má maximum v bodě $\sqrt{A}$.

Na obrázcích 27 a 28 jsou grafy funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$ pro případy $k < 0$, $A > 0$ a $k > 0$, $A > 0$. Přesvědčte se sami, že funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$ nemá v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ extrémy, je-li A záporné.



$y = kx$
y
O
x
$-\sqrt{A}$
$\sqrt{A}$
$f(x) = k(x + \frac{A}{x})$
$k < 0,\ A > 0$

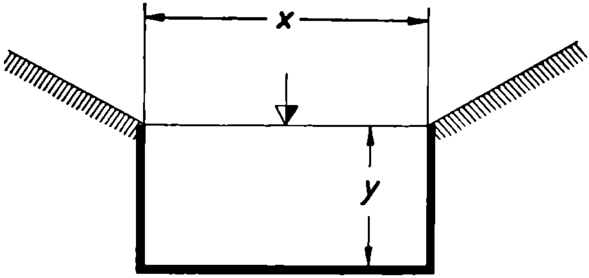
Obr. 27.



y
$y = kx$
O
x
$-\sqrt{A}$
$\sqrt{A}$
$f(x) = k(x + \frac{A}{x})$
$k > 0,\ A > 0$

Obr. 28.

Příklad 21. (Obr. 29.) *Určete rozměry vodního náhonu, jehož průtočný profil je obdélník o daném obsahu S tak, aby jeho omočený obvod byl co nejmenší.*



Obr. 29.

Obsah profilu je

$$S = xy$$

a omočený obvod má délku

$$O = x + 2y.$$

Vyloučením y z těchto rovnic obdržíme pro omočený obvod vztah

$$O = x + \frac{2S}{x}.$$

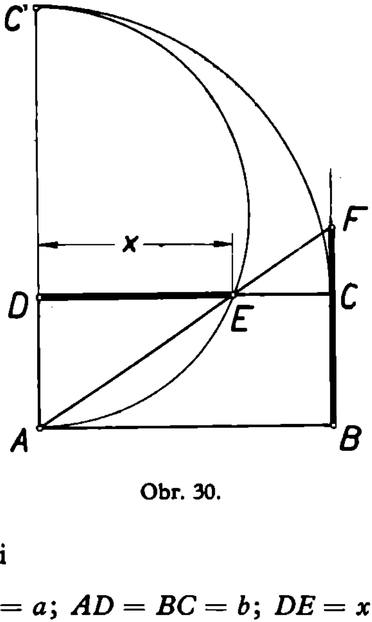
Podle věty 7 má tato funkce minimum pro $x = \sqrt{2S}$. Pro druhý rozměr y vychází $y = \frac{1}{2}\sqrt{2S}$.
Rozměry náhonu navrhneme tedy v poměru

$$x : y = 2 : 1.$$

Přitom omočený obvod bude

$$O_{min} = 2\sqrt{2S}.$$

Příklad 22. (Obr. 30.) *Vrcholem A daného obdélníka ABCD veďte polopřímku, která stranu CD seče v bodě E a prodlouženou stranu BC protíná v bodě F tak, aby součet úseček DE + BF byl nejmenší.*



Obr. 30.

Označíme-li

$$AB = CD = a;\ AD = BC = b;\ DE = x;\ CF = z,$$

pak

$$DE + BF = x + b + z.$$

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle AED$ a $\triangle FEC$ vyplývá vztah

$$x : b = (a - x) : z;$$

z toho

$$z = \frac{b.(a - x)}{x},$$

takže

$$DE + BF = x + b + \frac{b.(a - x)}{x} = x + \frac{ab}{x}.$$

Podle věty 7 nabývá tato funkce své nejmenší hodnoty v čísle

$$x = \sqrt{ab},$$

z čehož

$$(DE + BF)_{min} = 2\sqrt{ab}.$$

Tím je úloha rozřešena a úsečka x se dá snadno sestrojit podle Euklidovy věty. (Viz obrázek!)

Příklad 23. *Olověný akumulátor má elektromotorické napětí U [V] a vnitřní odpor R [Ω]. Jaký nutno zapojit vnější odpor x, abychom získali největší výkon ve vnějším proudovém okruhu?*

Podle Jouleova zákona je výkon N měřený ve Wattech ve vnějším okruhu dán vztahem

$$N = x.I^2 \quad [W],$$

kde x je hledaný odpor a proud I je vyjádřen podle Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{x + R} \quad [A].$$

Výkon je tudíž vyjádřen

$$N = \frac{U^2 \, . \, x}{(x + R)^2} = \frac{U^2}{\dfrac{(x + R)^2}{x}} .$$

Výkon bude největší, když výraz ve jmenovateli bude nejmenší (U je dáno). Hledejme tedy minimum funkce

$$f(x) = \frac{(x + R)^2}{x}$$

čili

$$f(x) = x + \frac{R^2}{x} + 2R$$

v intervalu $(0, \infty)$.

Jelikož $2R$ je konstanta, stačí zkoumat jen funkci

$$f(x) = x + \frac{R^2}{x} .$$

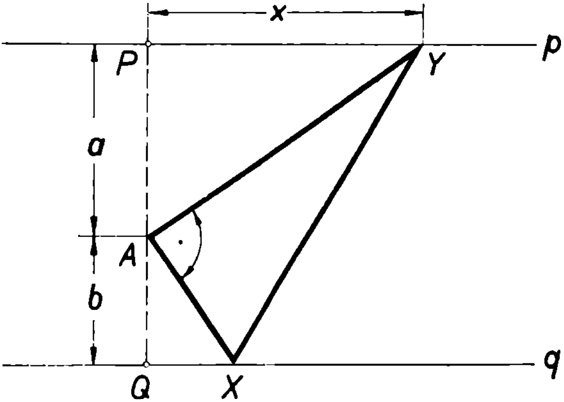
Podle věty 7 má tato funkce v intervalu $(0, \infty)$ minimum pro $x = R$.

Výkon N bude největší, když vnější odpor bude roven vnitřnímu. V tom případě bude

$$N_{max} = \frac{U^2}{4R} .$$

Řešení dalších úloh spočívá v stanovení lokálního minima obecnější funkce $f(x) = k \left(x + \dfrac{A}{x} \right)$, kde výrazy k a A jsou kladné konstanty.

Příklad 24. (Obr. 31.) *Uvnitř pásu roviny omezeného rovnoběžkami p, q leží bod A, jehož vzdálenost od přímky p je a, od přímky q je b. Určete pravoúhlý trojúhelník AXY s přeponou XY tak, aby jeho vrchol X byl na přímce q a Y na přímce p, a aby jeho obsah byl minimální.*



Obr. 31.

Obsah S hledaného trojúhelníka AXY je

$$S = \frac{AX.AY}{2}.$$

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle\ AQX$ a $\triangle\ YPA$ vyplývá

$$AX = \frac{b.AY}{x},$$

kde $x = PY$. Dále je podle Pythagorovy věty

$$AY = \sqrt{x^2 + a^2},$$

takže

$$S = \frac{bAY^2}{2x} = \frac{b}{2x}(x^2 + a^2)$$

čili

$$S = \frac{b}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right).$$

Poněvadž $\frac{b}{2} > 0$, má funkce S v intervalu $(0, \infty)$ minimum pro

$$x = a.$$

Je-li $x = a$, je

$$QX = b,$$

čímž je určen zbývající vrchol trojúhelníka. Pro obsah nalezeného trojúhelníka vychází

$$S_{min} = a.b.$$

Trojúhelník AXY bude mít minimální obsah, když osa pravého úhlu u vrcholu A bude rovnoběžná s přímkami p, q.

Příklad 25. (Obr. 32.) *Jaké rozměry má mít profil okna složený z obdélníka a přilehlého půlkruhu, aby při daném plošném obsahu S byl minimální obvod?*

Zavedeme-li označení podle obr. 32, je obvod profilu

$$O = 2x + 2y + \pi x$$

a jeho obsah je

$$S = 2xy + \tfrac{1}{2}\pi x^2.$$

Vyloučením proměnné y z výrazu pro obvod obdržíme

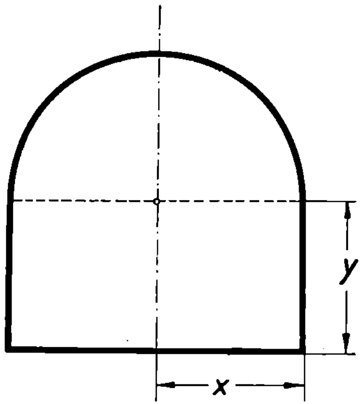
$$O = 2x + \tfrac{1}{2}\pi x + \frac{S}{x}$$

čili

$$O = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x + \frac{S}{x}.$$

Vytknutím dvojčlenu při x upravíme funkční předpis na tvar

$$O = \frac{4 + \pi}{2} \left(x + \frac{\frac{2S}{4 + \pi}}{x} \right).$$



Obr. 32.

Dostáváme opět funkci typu $f(x) = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$, která nabývá svého minima v oboru $(0, \infty)$ pro

$$x = \sqrt{\frac{2S}{4 + \pi}}.$$

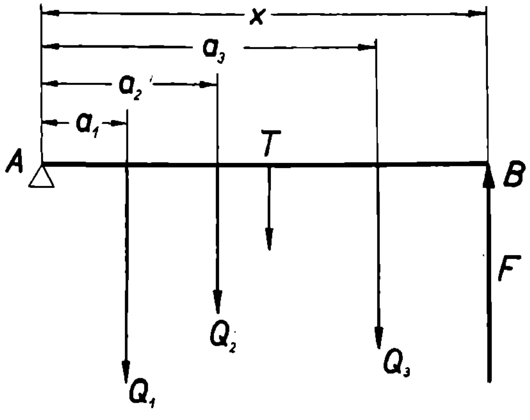
Z podmínky, že $y > 0$, vyplývá omezení definičního oboru funkce na interval $\left(0, \sqrt{\frac{2S}{\pi}}\right)$. Číslo $\sqrt{\frac{2S}{4+\pi}}$ je tedy z tohoto intervalu, takže řeší naši úlohu. Minimální obvod je

$$O_{min} = \sqrt{2S\,(4+\pi)}.$$

Druhý rozměr okna, y, vychází přitom

$$y = \sqrt{\frac{2S}{4+\pi}} = x.$$

Příklad 26. (Obr. 33.) *Na vodorovné jednozvratné páce visí ve vzdálenosti a_1, a_2, a_3 od osy páky postupně břemena Q_1, Q_2, Q_3. Hmotnost páky připadající na jednotkovou délku páky je q. Páka se udržuje v rovnováze v bodě B svisle vzhůru působící silou F. Určete délku páky tak, aby síla F byla nejmenší.*



Obr. 33.

Podle momentové věty, která říká, že moment výslednice se rovná algebraickému součtu momentů jednotlivých složek, platí

$$F.x = a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3 + qx.\frac{x}{2},$$

z čehož

$$F = \tfrac{1}{2}\,qx + \frac{a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3}{x},$$

kde x je hledaná délka páky. Vytkneme-li konstantu $\frac{q}{2}$, obdržíme

$$F = \frac{q}{2}\left[x + \frac{\dfrac{2(a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3)}{q}}{x}\right].$$

Je vidět, že F je opět funkce typu $k\left(x + \frac{A}{x}\right)$. V intervalu $(0, \infty)$ má minimum pro

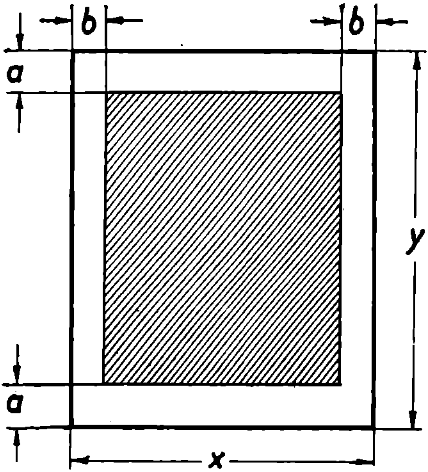
$$x = \sqrt{\frac{2\,(a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3)}{q}}.$$

Pro toto x vychází minimální síla

$$F_{min} = \sqrt{2q\,(a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3)}.$$

Obdobně by se řešila úloha, kdyby byl na páce zavěšen libovolný počet břemen Q.

Příklad 27. (Obr. 34.) *Na stránce knihy má zaujímat text obsah S cm². Horní a dolní okraj stránky má mít šířku a cm, pravý i levý okraj b cm. Jaké mají být nejvýhodnější rozměry stránky, aby se na vytištění knihy spotřebovalo co nejméně papíru?*



Obr. 34.

Označíme-li šířku stránky x, výšku stránky y, pak obsah textu na jedné stránce je

$$S = (x - 2b)(y - 2a);$$

odtud vyplývá

$$y = \frac{S}{x - 2b} + 2a.$$

Obsah celé stránky je

$$P = xy = x\left(\frac{S}{x - 2b} + 2a\right).$$

Na vytištění knihy se spotřebuje nejméně papíru tehdy, když obsah P bude za uvedených předpokladů minimální. Položíme-li $x - 2b = z$, je

$$P = (z + 2b)\left(\frac{S}{z} + 2a\right) = S + \frac{2bS}{z} + 2az + 4ab.$$

Funkce P má minimum, má-li minimum funkce

$$f(z) = 2az + \frac{2bS}{z} = 2a\left(z + \frac{\frac{bS}{a}}{z}\right).$$

Podle věty 7 má tato funkce minimum pro

$$z = \sqrt{\frac{bS}{a}}.$$

Pak rozměry stránky jsou

$$x = 2b + \sqrt{\frac{bS}{a}}, \qquad y = 2a + \sqrt{\frac{aS}{b}}.$$

Poznámka. Z významu argumentu z odvoďte sami definiční obor funkce f a ověřte si, že číslo $\sqrt{\frac{bS}{a}}$ je jeho prvkem.

Závěrem této kapitoly si odvodíme ještě lokální minimum funkce $g(x) = \frac{x^2}{x - f}$, kde f je kladná konstanta. Z odvozeného výsledku pak vyslovíme řešení příkladu č. 28.

Pro naše úvahy bude potřebné ověřit si nejdříve správnost nerovnosti

$$x + y \geqq \frac{4xy}{x + y}, \tag{6}$$

kde $x + y > 0$. Snadno se přesvědčíme, že rovnost nastane jen v tom jediném případě, když $x = y$.

Důkaz. Po vynásobení nerovnosti dvojčlenem $x + y$ obdržíme

$$(x + y)^2 \geqq 4xy$$

neboli

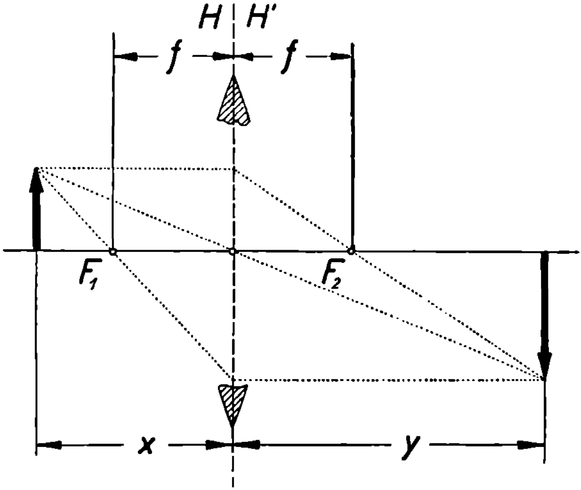
$$x^2 - 2xy + y^2 \geqq 0$$

čili

$$(x - y)^2 \geqq 0. \tag{7}$$

Dospěli jsme tedy k témuž závěru jako u nerovnosti (1) (str. 59). Protože v případě $x + y > 0$ vyplývá též obráceně ze vztahu (7) vztah (6), je správnost nerovnosti ověřena.

Příklad 28. (Obr. 35.) *Jak daleko je třeba umístit předmět od tenké čočky (spojky) o ohniskové délce f, aby vzdálenost jeho skutečného obrazu od předmětu byla nejkratší?*



Obr. 35.

Vzdálenost předmětu od obrazu označme

$$l = x + y,$$

kde x je vzdálenost předmětu od čočky a y je vzdálenost čočky od obrazu. Z optiky je známo, že pro tenkou čočku platí vztah

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \tag{8}$$

čili

$$y = \frac{x \,.\, f}{x - f}.$$

Hledáme tedy lokální minimum funkce

$$l = g(x) = x + y = x + \frac{x \,.\, f}{x - f}$$

neboli

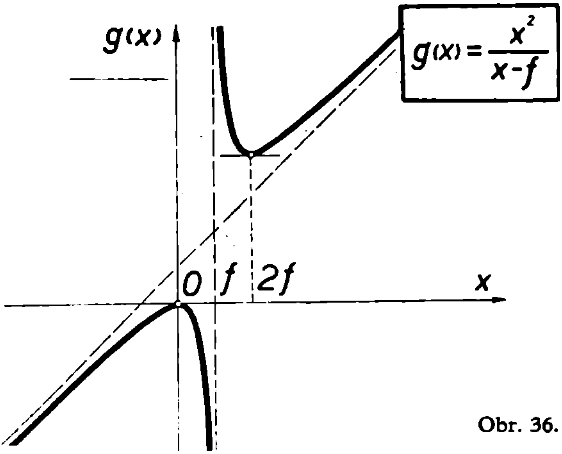
$$g(x) = \frac{x^2}{x - f},$$

která je obecně definována v intervalech $(-\infty, f), (f, \infty)$ (viz obr. 36).

Poznámka. Pro naši úlohu má však význam jen interval (f, ∞), ve kterém nabývá funkce $g(x)$ kladných hodnot. Pro tyto hodnoty $x > f$ vytváří totiž čočka skutečný obraz, který můžeme zachytit na stínítku.

Nyní stanovíme lokální minimum funkce $g(x)$ v intervalu (f, ∞). Z rovnice (8) vypočteme ohniskovou délku f:

$$f = \frac{xy}{x + y}.$$



Obr. 36.

Užijeme-li nerovnost (6), obdržíme

$$x + y \geqq 4f.$$

Za předpokladu $0 < f < x$ bude součet $x + y$ nejmenší, když nastane rovnost, to znamená, když $x = y$.
Potom

$$x = 2f \quad \text{rovněž} \quad y = 2f$$

a pak

$$l_{min.} = 4f.$$

Cvičení

1. Rozložte dané kladné číslo A na dva činitele x, y tak, aby jejich součet byl minimální. $[x = y = \sqrt{A}]$
2. Najděte minimum funkce $y = \dfrac{4 + \log^2 x}{\log x}$. $[\log x = 2]$

3. Rychlost šíření vlnění ve vodě je úměrna vztahu $\sqrt{\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{\lambda}}$, kde a je konstanta. Určete vlnovou délku λ tak, aby rychlost šíření byla minimální. $[\lambda = a]$

4. Celkový výkon W vyzářený každým kilometrem elektrického vedení je $W = I^2 R + \frac{t^2}{R} + b$, kde I je proud v A, R je odpor v Ω na 1 km délky, t, b jsou veličiny nezávislé na I a R. Jaký odpor vodiče musíme zvolit, aby tento ztrátový výkon daný uvedeným vztahem byl co nejmenší? $\left[R = \frac{t}{I}\right]$

5. Do dané elipsy o poloosách a, b vepište rovnoramenný trojúhelník s vrcholem v koncovém bodě hlavní osy tak, aby obsah trojúhelníka byl maximální! $\left[\text{Výška trojúhelníka } \frac{3}{2}a\right]$

5. kapitola

EXTRÉMY KUBICKÉ A BIKVADRATICKÉ FUNKCE

V poslední kapitole rozřešíme několik úloh, které vedou k vyhledávání extrému kubické funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ a funkce $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$. Předem je nutno říci, že u těchto funkcí už nevystačíme s tak elementárními prostředky jako v předešlých kapitolách. Úvahy o extrémech těchto funkcí nás nakonec vždy přivedou k obratům vlastním tzv. diferenciálnímu počtu. Nechceme to čtenáři zastírat, naopak, upozorňujeme ho na tuto okolnost. Existují dost populární publikace, ve kterých jsou začátky diferenciálního počtu vyloženy přístupnou formou*) a je jen užitečné, podnítí-li četba těchto stránek aspoň některé mladé čtenáře k tomu, aby po takových publikacích sáhli. Na druhé straně však je nutno uvážit, že cíle i prostředky této knížečky jsou jen skromné, takže v dalším textu nelze očekávat víc než náznak jisté metody a výsledků, které přináší. V závěru ještě upozorníme na otázky, které tu nebudou dořešeny nebo dokonce ani položeny.

Hned na začátku předložíme čtenáři jednu větu, jejíž platnost je snad sice očividná, ale jejíž důkaz neuvádíme na tomto místě pro jeho obtížnost.

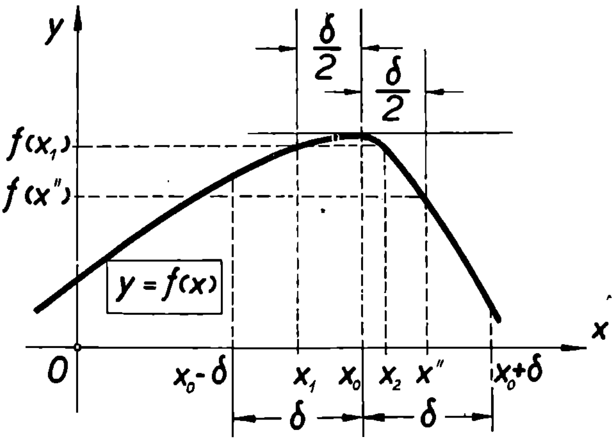
Věta 8. *Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu*

*) Z mnoha takových jmenujeme aspoň *Havlíčkův Diferenciální počet pro začátečníky*.

$\langle a, b\rangle$. *Funkce f nabývá v intervalu $\langle a, b\rangle$ všech hodnot ležících mezi čísly $f(a), f(b)$.*

Věta 8 v podstatě říká, že přecházíme-li *„spojitě"* od čísla $f(a)$ k číslu $f(b)$, nemůžeme přitom vynechat žádné číslo ležící mezi nimi. Jde o jednu ze základních vět diferenciálního počtu, ze které vyplývá další věta, mající pro nás velkou důležitost:

Věta 9. *Nechť funkce f je spojitá v jistém okolí O_{x_0} bodu x_0, ve kterém nabývá lokálního extrému. Pak v levém okolí bodu x_0 existuje aspoň jeden bod x_1 a v pravém okolí aspoň jeden bod x_2 tak, že $f(x_1) = f(x_2)$.*



Obr. 37.

Provedeme důkaz (který můžete sledovat na obr. 37) pro případ, že funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima. Podle definice lokálního maxima existuje takové okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ bodu x_0, že v intervalech

$(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ jsou funkční hodnoty $f(x)$ vesměs menší než číslo $f(x_0)$. Vezměme čísla $x' = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $x'' = x_0 + \frac{\delta}{2}$.

I. Je-li $f(x') \geqq f(x'')$, označíme $x'' = x_1$. Protože je $f(x'') \leqq f(x') < f(x)$, nabývá funkce f podle věty 7 aspoň v jednom bodě x_2 z intervalu (x_0, x''), který je částí intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$, hodnoty $f(x') = f(x_1)$. Je tedy $f(x_1) = f(x_2)$.

II. V případě $f(x') < f(x'')$ bychom označili $x' = x$ a analogicky bychom dokázali existenci bodu x_1 v intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$, pro který $f(x_1) = f(x_2)$.

Tím je důkaz proveden, ale z dokázané věty plyne ještě daleko silnější tvrzení. Funkce f nabývá podle věty 8 v intervalu (x_1, x_0), který je částí okolí $(x_0 - \delta, x_0)$, všech hodnot mezi čísly $f(x_1)$ a $f(x_0)$. Všech těchto hodnot však také nabývá v pravém okolí $(x_0, x_0 + \delta)$, neboť v tomto okolí leží číslo x_2, pro které $f(x_2) = f(x_1)$. Můžeme tedy považovat za dokázanou i následující větu.

Věta 10. *Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0, ve kterém nabývá svého lokálního extrému. Pak existuje nekonečně mnoho dvojic čísel x_1, x_2 (x_1 z levého, x_2 z pravého okolí bodu x_0), pro které $f(x_1) = f(x_2)$.*

Vezměme nyní kubickou funkci $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ a předpokládejme, že v bodě x_0 nabývá lokálního extrému. Pak v jistém okolí bodu x_0 existuje nekonečně mnoho dvojic čísel x_1, x_2 $(x_1 < x_0 < x_2)$, pro které je $f(x_1) = f(x_2)$, tj. pro které

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d,$$

čili

$$a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$$

a po vytknutí

$$(x_1 - x_2)\,[a\,(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b\,(x_1 + x_2) + c] = 0.$$

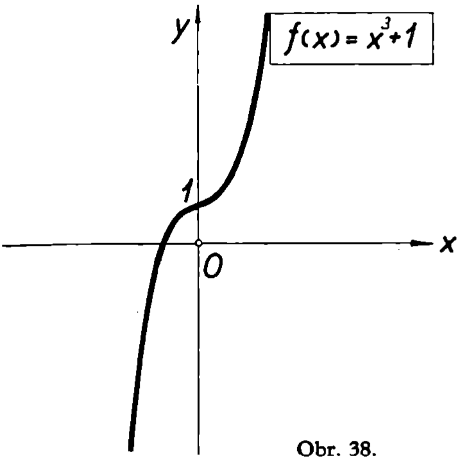
Protože je $x_1 \neq x_2$, plyne odtud pro nekonečně mnoho dvojic x_1, x_2, že

$$a\,(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b\,(x_1 + x_2) + c = 0.$$

Představme si nyní, že zvolíme dvojici x_1, x_2 čísel stále bližších a bližších číslu x_0. Dojdeme tak k závěru, že poslední rovnost platí v i případě, že v ní čísla x_1 a x_2 nahradíme číslem x_0, tj. že platí

$$3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0. \tag{I}$$

Tím jsme odvodili podmínku, která musí být splněna, nabývá-li funkce f v bodě x_0 lokálního extrému, tj. nutnou podmínkou pro extrém.



Obr. 38.

Jednoduchý příklad však ukazuje, že podmínka (I) není postačující. Pro funkci $f(x) = x^3 + 1$ (obr. 38) je levá strana rovnice (I) rovna $3x_0^2$. Pro $x_0 = 0$ splňuje tedy funkce $f(x) = x^3 + 1$ podmínku (I), ale přesto v tomto bodě — jak je vidět z obrázku a jak lze také početně ukázat — neexistuje ani lokální maximum, ani lokální minimum. Proto hledáme podmínku, která by doplnila podmínku (I) na postačující k tomu, aby kubická funkce měla v bodě x_0 lokální extrém. Naznačíme již jen stručně odvození takové doplňující podmínky.

Učiníme nyní ještě určitější předpoklad. Nechť funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima. (Podmínka (I) se týkala obou případů — maxima i minima.) Podle definice existuje takové redukované okolí bodu x_0, v němž pro všechny argumenty x je

$$f(x) < f(x_0),$$

tj.

$$a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0) < 0.$$

Vyjdeme-li z této nerovnosti, pak po několika úpravách (mezi něž patří užití podmínky (I) a po té dělení kladnou mocninou $(x - x_0)^2$) dostaneme nerovnost

$$a(x + 2x_0) + b < 0.$$

Z ní po podobné úvaze, jaká byla provedena při odvození podmínky (I) (x se neomezeně blíží k x_0 a je jím nahrazeno) vychází podmínka

$$3ax_0 + b < 0. \qquad \text{(IIa)}$$

Lze ukázat, že podmínky (I) a (IIa) jsou již postačující pro to, aby funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nabývala v bodě x_0 lokálního maxima. Zcela obdobně bychom došli k podmínce (IIb), o které hovoří věta 11, shrnující výsledky těchto úvah.

Věta 11. *Kubická funkce* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *může nabývat lokálního extrému jedině v takovém bodě* x_0, *pro který je*

$$3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0. \qquad \text{(I)}$$

Je-li splněna podmínka (I) *a platí-li ještě*

$$3ax_0 + b < 0 \quad \text{(IIa)} \quad \text{nebo} \quad 3ax_0 + b > 0 \quad \text{(IIb)},$$

nabývá funkce f *v bodě* x_0 *lokálního maxima, případně minima.*

Příklad 29. *Vyhledejte (pokud existují) lokální extrémy funkce* $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 5$.

Podmínky (I) věty 11 zní pro danou funkci takto:

$$6x_0^2 - 30x_0 - 36 = 0,$$

tj.

$$x_0^2 - 5x_0 - 6 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice zjistíme, že funkce f může mít extrémy jedině v bodech $x_0 = 2$ nebo $x_0 = 3$. Pro $x_0 = 2$ je tu

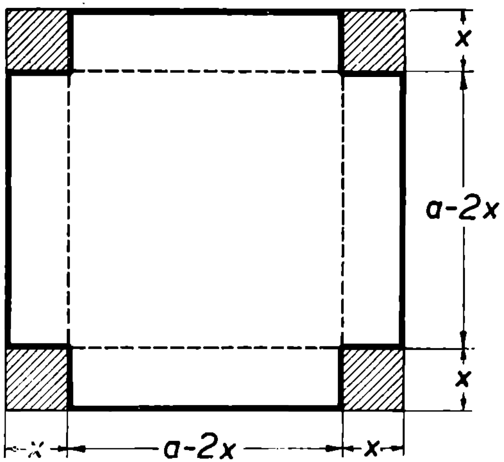
$$6x_0 - 15 = -3 < 0,$$

je tedy splněna podmínka (IIa) z věty 11 a funkce f nabývá v bodě 2 lokálního maxima. Pro $x_0 = 3$ je

$$6x_0 - 15 = 3 > 0,$$

takže je splněna podmínka (IIb) věty 11 a funkce f nabývá v bodě 3 lokálního minima.

Příklad 30. (Obr. 39.) *Ze čtverce plechu o straně a máme v rozích vystřihnout čtverečky tak, aby nádoba vzniklá ohnutím okrajů zbytku* (jak je naznačeno na obr. 39) *měla maximální objem.*



Obr. 39.

Je-li x délka strany vystřižených čtverečků, je objem nádoby

$$V = (a - 2x)^2 . x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

Jde tedy o určení maxima kubické funkce $V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$ vzhledem k intervalu $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

Hledejme nejprve maximum vzhledem k intervalu $\left\langle 0, \frac{a}{2} \right\rangle$. Lokální maximum funkce $V(x)$ nastane podle věty 11 v bodě x_0, pro který jsou splněny podmínky (I) a (II. a), tj. pro který je

$$12x_0^2 - 8ax_0 + a^2 = 0$$

a

$$12x_0 - 4a < 0.$$

Tyto podmínky jsou splněny pro

$$x_0 = \frac{a}{6},$$

přičemž

$$V_{max} = V(x_0) = \frac{2}{27} a^3.$$

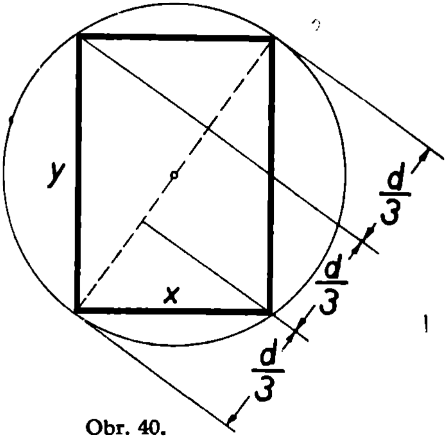
Dále je $V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$. Proto je číslo $V(x_0) > 0$ maximem funkce V vzhledem k intervalu $\left\langle 0, \frac{a}{2} \right\rangle$ (podle věty 1) a toto číslo je podle věty 4 také jejím maximem vzhledem k intervalu $\left(0, \frac{a}{2}\right)$. Číslo $x_0 = \frac{a}{6}$ je tedy jediným řešením dané úlohy.

Řekli jsme již, že probírané úlohy povedou většinou k vyhledávání extrémů vzhledem k otevřeným intervalům (jako v posledním příkladě). Právě použitého postupu (vyhledání extrému vzhledem k „širšímu" intervalu a aplikace věty 4) budeme v dalších příkladech užívat již bez podrobného zdůvodnění.

Příklad 31. (Obr. 40.) *Stanovte rozměry x, y obdélníkového trámu vytesaného z válcového kmene o konstantním průměru d tak, aby jeho únosnost byla maximální.*

Únosností trámu zde rozumíme maximální ohybový moment, který může trám přenést při zachování předepsané bezpečnosti. Tento maximální ohybový moment je podle nauky o pružnosti a pevnosti dán vzorcem

$$M_{max} = \sigma \,.\, W,$$



Obr. 40.

kde σ je dovolené napětí užitého materiálu (v našem případě dřeva) a

$$W = \frac{1}{6} \cdot xy^2$$

je tzv. průřezový modul. V našem případě hledáme tedy maximální hodnotu veličiny W.
Podle Pythagorovy věty platí

$$y^2 = d^2 - x^2,$$

takže

$$W = \frac{1}{6} x (d^2 - x^2) = \frac{1}{6} (d^2 x - x^3).$$

Hledáme maximum funkce $f(x) = -x^3 + d^2 x$, jejíž definiční obor je zde interval $(0, d)$.
Funkce f má podle věty 11 lokální maximum v bodě x_0, pro který je

$$-3x_0{}^2 + d^2 = 0$$

a

$$-3\, x_0 < 0.$$

To je bod

$$x_0 = \frac{d}{3}\sqrt{3},$$

který patří do intervalu $(0, d)$.
Dále je

$$f(0) = f(d) = 0, \quad f(x_0) = \frac{2}{9} d^3 \sqrt{3} > 0,$$

takže číslo

$$x_0 = \frac{d}{3}\sqrt{3}$$

je jediným řešením naší úlohy. Pro druhý rozměr obdélníka y_0 vychází

$$y_0 = \frac{d}{3}\sqrt{6} = x_0 \sqrt{2},$$

takže rozměry hledaného obdélníka budou v poměru

$$x_0 : y_0 = 1 : \sqrt{2}$$

a pak

$$W_{max} = \frac{d^3}{27}\sqrt{3}.$$

Ze vztahu

$$x_0^2 = d \, . \, \frac{d}{3}$$

vyplývá konstrukce řešení, při které užijeme Euklidovy věty.

Příklad 32. (Obr. 41.) *Od světelného bodu A je ve vzdálenosti a střed koule o poloměru x, který je menší než a. Jak velký má být tento poloměr, aby z bodu A osvětlený kulový vrchlík měl největší obsah?*

Zaveďme označení podle obr. 41. Pak obsah vrchlíku je

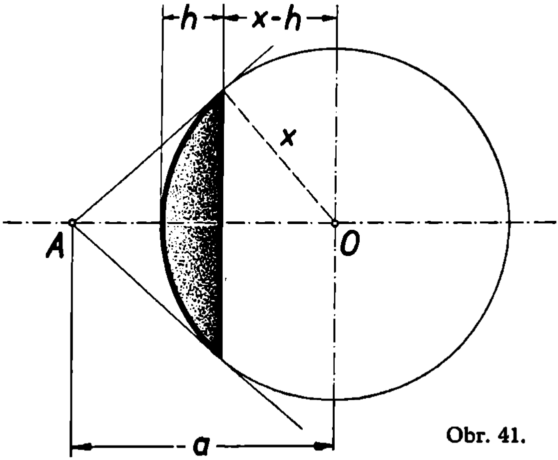
$$S = 2\pi xh$$

a podle Euklidovy věty platí

$$x^2 = a(x - h),$$

z čehož

$$h = \frac{ax - x^2}{a}.$$



Obr. 41.

Vyloučením h z výrazu pro vrchlík obdržíme

$$S = \frac{2\pi}{a}(ax^2 - x^3)$$

a hledáme maximum funkce $f(x) = ax^2 - x^3$ v intervalu $(0, a)$. Věta 11 dává pro lokální maximum této funkce podmínky

$$2ax_0 - 3x_0^2 = 0,$$

a

$$a - 3x_0 < 0.$$

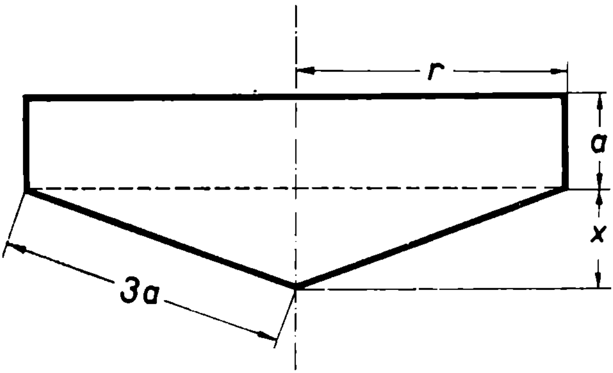
Ty jsou splněny pro

$$x_0 = \frac{2}{3} a.$$

Je $f(0) = f(a) = 0, f(x_0) = \frac{4}{27} a^3 > 0$. V bodě $x_0 = \frac{2}{3} a$ má tedy funkce f a tím i funkce $S = \frac{2\pi}{a} f$ maximum vzhledem k intervalu $(0, a)$. Pro obsah vrchlíku dostáváme

$$S_{max} = S(x_0) = \frac{8\pi}{27} a^2.$$

Příklad 33. (Obr. 42.) *Nádrž na vodárenské věži se skládá ze svislého kruhového válce o dané výšce a, dole ukončeného kuželem o témže poloměru podstavy a o straně délky 3a. Určete výšku kužele a poloměr tak, aby nádrž měla maximální objem.*



Obr. 42.

Objem nádrže je

$$V = \pi r^2 a + \frac{\pi}{3} r^2 x = \pi r^2 \left(a + \frac{1}{3} x\right),$$

kde x je výška kužele.
Podle Pythagorovy věty platí $r^2 = 9a^2 - x^2$, takže po vyloučení r^2 dostáváme objem jako funkci argumentu x,

$$V = \pi (9a^3 + 3a^2 x - ax^2 - \tfrac{1}{3} x^3).$$

Dostáváme opět kubickou funkci, jejíž definiční obor je interval $(0, 3a)$ a která má lokální maximum v bodě x_0, splňujícím podmínky

$$x_0^2 + 2ax_0 - 3a^2 = 0, \quad -x_0 - a < 0$$

tj. v bodě

$$x_0 = a.$$

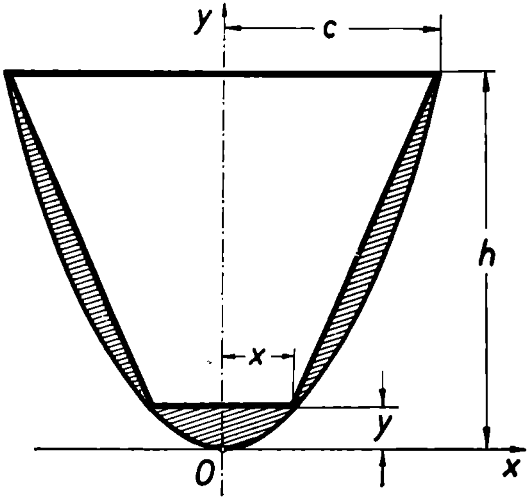
Je $V(0) = 9\pi a^3$, $V(3a) = 0$, $V(x_0) = \frac{32}{3} \pi a^3$, takže $V(x_0) > V(0)$ i $V(x_0) > V(3a)$ a funkce $V(x)$ nabývá v bodě $x_0 = a$ maxima

$$V_{max} = \frac{32}{3} \pi a^3$$

vzhledem k intervalu $(0, 3a)$. Pro poloměr nádrže vychází

$$r = 2a\sqrt{2}.$$

Příklad 34. (Obr. 43.) *Do parabolické úseče vytvořené parabolou $2py = x^2$ a přímkou $y = h$ vepište rovnoramenný lichoběžník se základnami rovnoběžnými s osou x o největším obsahu.*



Obr. 43.

Zvolíme-li označení jako na obr. 43, je obsah lichoběžníka

$$S = (c + x)(h - y).$$

Z rovnice paraboly vypočteme y a dosadíme:

$$S = (c + x)\left(h - \frac{x^2}{2p}\right) = hc + hx - \frac{cx^2}{2p} - \frac{x^3}{2p}.$$

Funkce S nabývá lokálního maxima v bodě x_0, je-li

$$-\frac{3}{2p}x_0^2 - \frac{c}{p}x_0 + h = 0, \qquad -\frac{3x_0}{p} - \frac{c}{p} < 0,$$

tj., je-li

$$x_0 = \frac{c}{3}.$$

Při výpočtu jsme užili vztahu $2ph = c^2$, který plyne z rovnice paraboly. Úloha omezuje definiční obor funkce S na interval $(0, c)$. Je

$$S(0) = hc,\ S(c) = 0,\quad S(x_0) = \frac{16\,c^3}{27p} = \frac{32}{27}hc.$$

Z čísel $S(0)$, $S(c)$, $S(x_0)$ je $S(x_0)$ největší, takže vskutku nabývá funkce $S(x)$ v bodě $x_0 = \frac{c}{3}$ maxima vzhledem k intervalu $(0, c)$; hledaný lichoběžník má obsah

$$S_{max} = S(x_0) = \frac{16c^3}{27p} = \frac{32}{27}hc.$$

V příkladech, které uvádíme nakonec, je třeba najít extrémy funkce $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$. K tomu použijeme funkce $y = ax^4 + bx^3 + dx + e$. Úvahy zcela obdobné úvahám, které nás dovedly k vyslovení věty 11, umožňují dokázat tuto větu:

Věta 12. 1) *Bikvadratická funkce* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ *může nabývat lokálního extrému jedině v takovém bodě* x_0, *pro který je*

$$4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d = 0. \qquad \text{(III)}$$

2) *Je-li splněna podmínka* III *a platí-li ještě* $6ax_0^2 + 3bx_0 + c < 0$ (IVa) nebo $6ax_0^2 + 3bx_0 + c > 0$ (IVb), *nabývá funkce* f *v bodě* x_0 *lokálního maxima případně minima.*

Příklad 35. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x) = (1 - x^2)(1 + x)^2$ *v intervalu* $(0, 1)$.

Je

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1.$$

Podmínka III věty 12 tedy pro funkci f zní

$$-4x_0^3 - 6x_0^2 + 2 = 0,$$

tj.

$$2x_0^3 + 3x_0^2 - 1 = 0.$$

Snadno zjistíme, že jedním kořenem této rovnice je číslo -1, takže ji lze napsat ve tvaru

$$(x_0 + 1)(2x_0^2 + x_0 - 1) = 0,$$

nebo ještě lépe ve tvaru

$$(x_0 + 1)^2 (2x_0 - 1) = 0.$$

V intervalu $(0, 1)$ má tato rovnice jediné řešení

$$x_0 = \tfrac{1}{2};$$

pro ně je také splněna nerovnost

$$-6x_0^2 - 6x_0 < 0,$$

tj. podmínka IVa z věty 12.
V intervalu $(0, 1)$ má tedy funkce $f(x) = (1 - x^2)(1 + x)^2$ jediný lokální extrém a to lokální maximum v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$.

Pro t z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ položme

$$\cos t = x.$$

Pak

$$f(x) = (1 - x^2)(1 + x)^2 = (1 - \cos^2 t)(1 + \cos t)^2,$$

čili

$$f(x) = (1 - x^2)(1 + x)^2 = [\sin t\,(1 + \cos t)]^2.$$

V předešlém příkladu jsme ukázali, že funkce $f(x)$ má pro x z intervalu $(0, 1)$ jediný lokální extrém, a to lokální maximum pro $x = \frac{1}{2}$. Odtud plyne, že funkce

$\bar{y} = [\sin t\,(1 + \cos t)]^2$ má pro t z intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jediný extrém a to lokální maximum v bodě $t = \frac{\pi}{3}$, (neboť $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$). Totéž však můžeme tvrdit o funkci $y = \sin t\,(1 + \cos t)$, vzhledem k tomu, že tato funkce nabývá v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vesměs kladných hodnot. Pro $t = 0$ je $\sin t\,(1 + \cos t) = 0$, pro $t = \frac{\pi}{3}$ je $\sin t\,(1 + \cos t) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ a pro $t = \frac{\pi}{2}$ je funkce $\sin t\,(1 + \cos t) = 1$.
Platí tedy věta 13:

Věta 13. *Funkce* $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$ *má v bodě* $x = \frac{\pi}{3}$ *maximum vzhledem k intervalu* $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

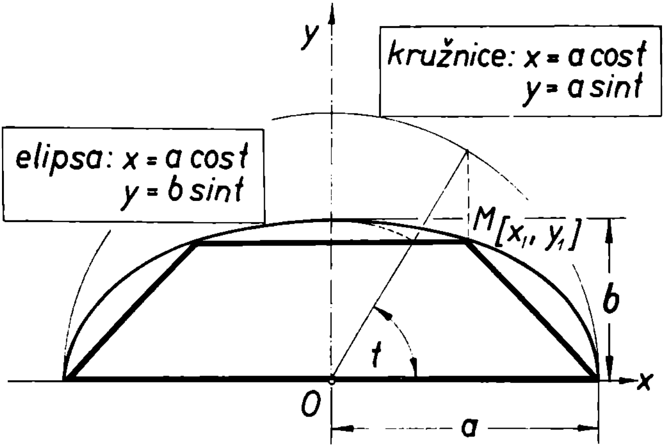
Příklad 36. (Obr. 44.) *Do obrazce omezeného polovinou elipsy a její hlavní osou vepište rovnoramenný lichoběžník největšího obsahu.*

Vyjádříme horní polovinu elipsy v parametrickém tvaru

$$x = a . \cos t, \quad y = b . \sin t,$$

kde parametr t probíhá interval $< 0, \pi >$.
Obsah hledaného lichoběžníka je (při označení podle obr. 44)

$$S = (a + x_1)\,y_1.$$



Obr. 44.

Jelikož x_1, y_1 jsou souřadnice bodu M, který leží na elipse, musí platit

$$x_1 = a . \cos t, \quad y_1 = b . \sin t,$$

kde velikost úhlu t vyhovuje v tomto případě nerovnosti $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

Obsah lichoběžníka můžeme napsat ve tvaru

$$S = ab . \sin t \, (1 + \cos t).$$

Hledáme tedy maximum funkce

$$f(t) = \sin t \, (1 + \cos t)$$

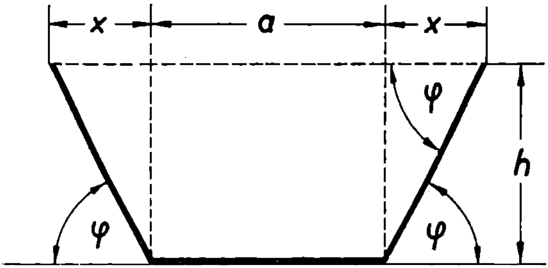
(neboť a, b jsou dané poloosy elipsy), které podle věty 13 nastane pro $t = \frac{\pi}{3}$. Je tedy

$$x_1 = a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}, \qquad y_1 = b \sin \frac{\pi}{3} = b\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{max} = (a + x_1)\, y_1 = \frac{3}{4}\, ab\sqrt{3}.$$

V případě $a = b = r$, kdy polovina elipsy přejde v půlkružnici o poloměru r, je hledaný vepsaný lichoběžník maximálního obsahu polovina pravidelného šestiúhelníka o obsahu $S_{max} = \frac{3}{4} \cdot r^2\sqrt{3}$.

Příklad 37. (Obr. 45.) *Ze tří desek o téže šířce a se má zhotovit vodní náhon o lichoběžníkovém průřezu. Určete úhel, který budou svírat boční stěny se dnem tak, aby průtočný profil měl maximální obsah.*



Obr. 45.

Při označení zavedeném na obr. 45 je obsah profilu S

$$S = (a + x) \cdot h,$$

kde

$$h = a \sin \varphi, \quad x = a \cos \varphi.$$

Dosadíme-li odtud, vychází

$$S = a^2 \sin \varphi . (1 + \cos \varphi),$$

kde ovšem je

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Je vidět, že řešení úlohy spočívá podobně jako v předcházejícím příkladu v nalezení maxima funkce

$$f(\varphi) = \sin \varphi \, (1 + \cos \varphi).$$

Podle věty 13 má tato funkce maximum vzhledem k intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pro

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Maximální obsah profilu je

$$S_{max} = \frac{3}{4} \cdot a^2\sqrt{3}.$$

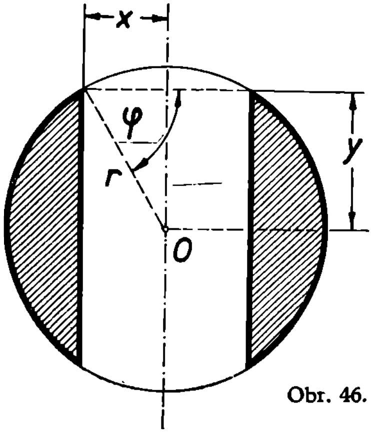
Příklad 38. (Obr. 46.) *Z koule o poloměru r se má odstranit část omezená rotační válcovou plochou, jejíž osa prochází středem koule. Určete poloměr tohoto válce tak, aby povrch tělesa vzniklého z koule po odstranění vnitřní části omezené rotační válcovou plochou byl co největší.*

Označíme-li x poloměr vyvrtaného válce a y polovinu jeho výšky, pak povrch uvažovaného tělesa je

$$S = 4\,\pi r^2 - 4\,\pi r\,(r - y) + 4\,\pi\,xy.$$

Při označení podle obr. 46 je

$$x = r\,.\cos\varphi, \qquad y = r\,.\sin\varphi,$$



Obr. 46.

takže povrch uvažovaného tělesa lze vyjádřit vztahem

$$S = 4\,\pi r^2\,.\sin\varphi\,(1 + \cos\varphi).$$

Jelikož tato funkce argumentu φ má zřejmě v naší úloze definiční obor $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, má úloha jediné řešení, a to

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Hledaný poloměr kruhového otvoru bude

$$x = \frac{r}{2}$$

a povrch uvažovaného tělesa

$$S_{max} = 3\pi r^2\sqrt{3}.$$

Cvičení

1. Do rotačního kužele o poloměru r a výšce h vepište rotační válec největšího objemu. $\left[x = \frac{2}{3}\, r,\ v = \frac{1}{3}\, h\right]$
2. Do koule o poloměru r vepište rotační kužel o největším plášti. $\left[\text{výška } h = \frac{4}{3}\, r\right]$
3. Určete výšku rotačního kužele, který má při dané straně s největší objem. $\left[\text{výška } h = \frac{s\sqrt{3}}{3}\right]$
4. Z parabolické úseče vytvořené parabolou $2py = x^2$ a přímkou $y = h$ vyřízněte obdélník největšího obsahu. $\left[\text{výška obdélníka } \frac{2}{3}\, h\right]$
5. Určete rozměry kulové úseče, která má při daném obsahu vrchlíku $18\,\pi$ největší objem. [polokoule $r = 3$]
6. Určete rozměry rotačního válce, který má při daném povrchu maximální objem. [rovnostranný válec]

DOSLOV

V poslední kapitole této knížky jsme naznačili na příkladu kubické funkce $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *postup, kterého se v diferenciálním počtu užívá k vyhledávání lokálních extrémů funkcí. Chceme upozornit, že jde jednak jen o náznak myšlenkového postupu, a jednak že příklad kubické funkce je dost speciální. V obecném případě bychom se například neobešli bez vyšetřování tzv. neostrých lokálních extrémů. Omezení na ostré lokální extrémy nám ušetřilo mnoho práce a umožnilo velmi jednoduše formulovat věty v páté kapitole. Tím vším však nechceme říci, že počátky diferenciálního počtu jsou pro čtenáře nedostupné. Žáci posledních tříd střední školy se s nimi mohou docela dobře seznámit z dobré populární literatury a získat tak možnost řešit snadno i komplikovanější úlohy než ty, které jsme zde rozřešily. Seznam literatury, který je zde uveden, může k tomu být vodítkem.*

Výběr z literatury

I. P. Natanson: Jednoduché úkoly na maxima a minima (TVV, Praha 1952).

Eduard Čech: Co je a nač je vyšší matematika?

Karel Havlíček: Diferenciální počet pro začátečníky (SNTL, Praha 1962).

Karel Hruša: Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu (ČSAV, Praha 1959).

J. B. Abelson: Maksimum i minimum, ONTI 1935.

S. I. Zetel: Zadači na maksimum i minimum, Gostechizdat 1948.

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROMÍR HRONÍK

úlohy o maximech a minimech funkcí

Pro účastníky Matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2484
Edice Škola mladých matematiků, svazek 17
Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provoz 22
Praha 2, Legerova 22
3,81 AA, 3,95 VA. D–12*70055
Náklad 6400 výtisků. 1. vydání
104 strany. Praha 1967. 507/21/8.5

23-044-67 03.2 Cena brož. výt. Kčs 3,–

[redacted]

23-044-67 03.2 Cena brož. Kčs 3,—