Kružnice

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

KRUŽNICE

16

Vydal ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

kružnice

STANISLAV HORÁK

PRAHA 1966
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

Odbornou recenzi provedli prof. dr. M. Fiedler a doc. dr. Zb. Nádeník

1. kapitola

OBVODOVÉ ÚHLY V KRUŽNICI

Definice. Obvodový úhel v kružnici je úhel, jehož vrchol leží na kružnici a obě jeho ramena jsou sečnami kružnice.

V obr. 1a, b, c je znázorněn obvodový úhel s vrcholem C. Jeho ramena protínají kružnici k kromě v C ještě v bodech A, B. Úhel ASB se nazývá středový. O obvodovém úhlu ACB říkáme, že je sestrojen nad obloukem AB nebo nad tětivou AB. Přitom musíme být opatrní. Nad tětivou AB, která není průměrem, jsou dvojí obvodové úhly; v jedné polorovině, vyťaté sečnou AB, jsou úhly ostré, v opačné polorovině úhly tupé. Jestliže AB je průměrem, pak obojí úhly jsou pravé.

Věta 1. *Obvodové úhly nad týmž kruhovým obloukem jsou shodné a rovnají se polovině příslušného středového úhlu.*

Důkaz. a) Nejprve provedeme důkaz pro případ, že jedno rameno obvodového úhlu prochází středem S dané kružnice (obr. 1a). Máme dokázat, že

$$\sphericalangle ASB = 2 \,.\, \sphericalangle ACB.$$

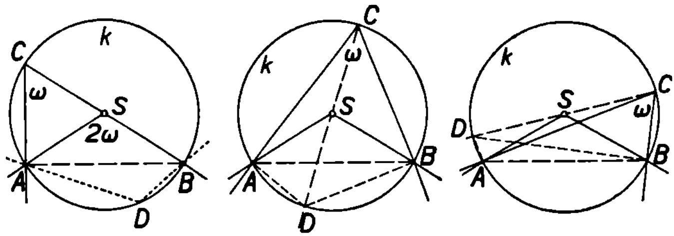
Pro jednoduchost označíme 2ω velikost středového úhlu ASB. Všimněme si, že trojúhelník ACS je rovnoramenný a proto proti jeho ramenům leží shodné úhly. Jejich součet je roven vnějšímu úhlu při vrcholu S, a to je právě náš středový úhel. Proto

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACS + \sphericalangle CAS = \omega + \omega = 2\omega,$$

jak jsme měli dokázat.

b) V obr. 1b je znázorněna poloha, kde střed S je vnitřním bodem úhlu ACB. Přímka CS protne kružnici ještě v bodě D a rozdělí obvodový i středový úhel na dvě části. Jsou to obvodové úhly ACD, DCB a středové úhly ASD, DSB. Z odst. a) již víme, že

$$\sphericalangle ASD = 2 \,.\, \sphericalangle ACD \text{ a } \sphericalangle DSB = 2 \,.\, \sphericalangle DCB \,.$$



Obr. 1a, b, c

Sečtením těchto dvou rovnic obdržíme výsledek

$$\sphericalangle ASB = 2 \,.\, \sphericalangle ACB \,.$$

c) V obr. 1c je vyznačena další možnost; střed S je vnějším bodem úhlu ACB. I zde spojíme body C, S a tato přímka protne kružnici ještě v bodě D. Podle odst. a) tu opět platí

$$\sphericalangle DSB = 2 \,.\, \sphericalangle DCB, \qquad \sphericalangle DSA = 2 \,.\, \sphericalangle DCA.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

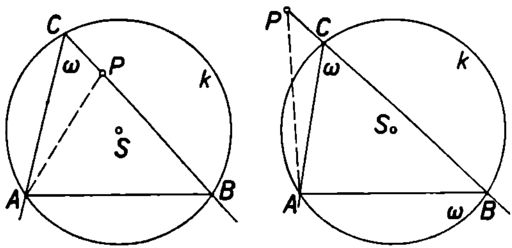
$$\sphericalangle ASB = 2 \,.\, \sphericalangle ACB \,.$$

Tím jsme s důkazem hotovi.

Snad bychom si mohli ještě připomenout: jestliže AB je průměr kružnice, potom $\sphericalangle\, ASB = 180°$ a $\sphericalangle\, ACB = 90°$ a věta 1 nám v tomto případě dává známou *Thaletovu větu.*

Větu 1 doplníme ještě následující větou:

Věta 2. *Jestliže bod P je vnitřním bodem kružnice (vnějším bodem kružnice), pak $\sphericalangle\, APB$ je větší (menší) než obvodový úhel ACB, přičemž body C, P leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB.*



Obr. 2a, b

D ů k a z. a) Mějme nejprve případ, že bod P je vnitřním bodem kružnice (obr. 2a). Přímka BP protne kružnici ještě v bodě C. Víme, že součet dvou vnitřních úhlů trojúhelníka je roven vnějšímu úhlu při třetím vrcholu. Pro trojúhelník APC z toho plyne

$$\sphericalangle\, ACP + \sphericalangle\, CAP = \omega + \sphericalangle\, CAP = \sphericalangle\, APB.$$

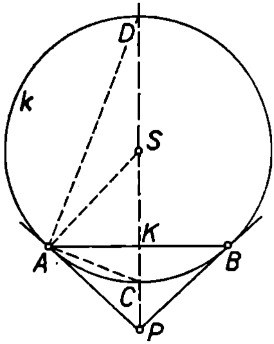
Z toho už máme

$$\omega < \sphericalangle\, APB,$$

jak jsme měli dokázat.

b) Bod P je vnějším bodem kružnice (obr. 2b). Přímka BP protne kružnici ještě v bodě C. Podle věty o součtu dvou vnitřních úhlů v trojúhelníku platí pro trojúhelník APC

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CAP = \\ = \sphericalangle ACB = \omega.$$



Obr. 2c

Odtud

$$\sphericalangle APB < \omega.$$

c) Může se však stát, že přímka BP je tečnou kružnice. Potom bychom bod P spojili s bodem A a důkaz provedli jako předtím. Kdyby i přímka AP byla tečnou (obr. 2c), spojili bychom bod P se středem S. Tato přímka protne kružnici k v bodech C, D. Jestliže bod C leží s bodem P v téže polorovině o hraniční přímce AB, pak podle výsledku odst. b) platí i zde $\sphericalangle ACB > \sphericalangle APB$.

Až dosud jsme uvažovali o obvodových úhlech v polorovině ABS. Obvodové úhly v opačné polorovině mají velikost $180° - \omega$, neboť podle věty 1 je jejich velikost rovna polovině příslušného středového úhlu, tj. polovině vypuklého úhlu ASB.

Z vět 1 a 2 vyplývá, že jen body kružnice mají tu vlastnost, že $\sphericalangle ACB = \omega$. Říkáme také, že z bodu C vidíme úsečku AB pod úhlem ω. Podle toho lze vyslovit větu: množina všech bodů poloroviny ABS, z nichž úsečku AB vidíme pod úhlem ω ($0° < \omega < 180°$), je kruhový oblouk. Ještě širší věta je

Věta 3. *Množina všech bodů v rovině, z nichž danou úsečku AB vidíme pod úhlem* ω $(0° < \omega < 180°)$, *jsou dva kruhové oblouky souměrně sdružené podle přímky AB. Do množiny však nemůžeme počítat samy body A, B.*

Z této věty je patrné, že kružnici můžeme sestrojit bodově pomocí obvodových úhlů.

Věta 4. *Ostrý (tupý) úhel sevřený tětivou AB, jež není průměrem a tečnou v jejím krajním bodě, je roven ostrému (tupému) obvodovému úhlu nad tětivou AB.* (Je to tzv. úsekový úhel.)

Důkaz (obr. 2c). Střed tětivy AB označme K. Trojúhelníky SAK, APK jsou podobné a z toho vyplývá platnost věty o ostrých úhlech. Platí-li však věta o ostrých úhlech, platí nutně i o tupých.

Poznámka. Věta platí přirozeně i v případě, že AB je průměr, ale pak je samozřejmá.[1])

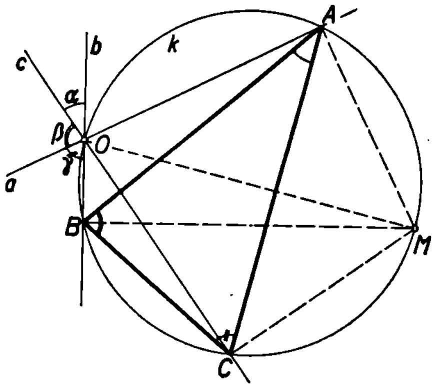
Příklady

1. Jsou dány tři přímky a, b, c procházející bodem O tak, že $\sphericalangle\, bc = \alpha$, $\sphericalangle\, ca = \beta$, $\sphericalangle\, ab = \gamma$ a přitom se úhly nepřekrývají a platí o nich $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Z libovolného bodu M, který neleží na žádné z daných přímek, spusťme na tyto přímky kolmice a paty označme po

[1]) Úvahy můžeme zakončit pomocnou větou: *Obvodové úhly nad shodnými kruhovými oblouky jsou shodné a obráceně, shodné obvodové úhly vytínají na kružnici shodné oblouky.* Důsledkem této věty je věta: *Osa obvodového úhlu prochází středem kruhového oblouku, nad nímž je obvodový úhel sestrojen.*

řadě A, B, C. Body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníka, jehož vnitřní úhly jsou α, β, γ a kružnice jemu opsaná obsahuje body M, O. Dokažte.

Důkaz (obr. 3). Trojúhelníky MOA, MOB, MOC jsou pravoúhlé a mají společnou přeponu MO. Musí mít tudíž společnou i opsanou kružnici. Poněvadž body A, B, C jsou vesměs různé a leží na kružnici, tvoří trojúhelník a jemu opsaná kružnice prochází body M, O.



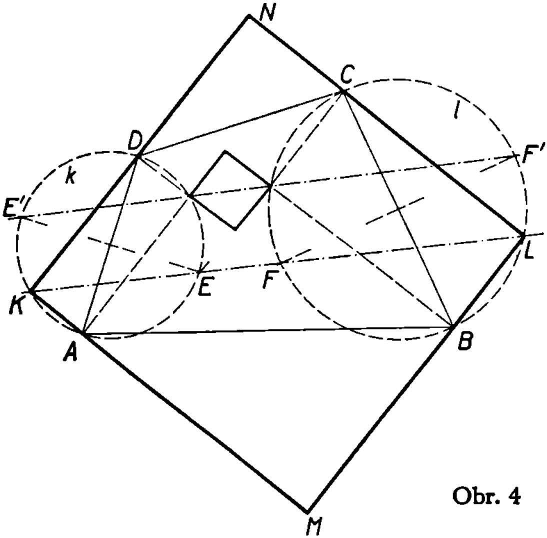
Obr. 3

Ještě vypočteme velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka ABC. Víme, že $\sphericalangle BOC = \alpha$ je obvodový nad tětivou BC. Ale nad touto tětivou je také úhel obvodový BAC a platí tedy

$$\sphericalangle BAC = \alpha .$$

Poněvadž se totéž dá dokázat pro úhel β, je tím dokázána i druhá část tvrzení. Je k tomu však třeba ještě něco podotknout.

Obr. 3 byl narýsován tak, že body A, B, C ležely vždy v téže polorovině, vyťaté kteroukoliv z přímek a, b, c. Je však myslitelný i případ, že např. bod A je vnitřním bodem jedné poloroviny, vyťaté přímkou b, a bod C je vnitřním bodem poloroviny opačné. Avšak vyslovená věta platí i v tomto případě, jak se snadno přesvědčíte.



Obr. 4

A ještě něco. Při důkazu jsme mlčky předpokládali, že body A, B, C, O, M jsou vzájemně různé. Může se však stát, že $A \equiv O$. Ale i pak platí vyslovená věta.

2. Danému různoběžníku $ABCD$ opište čtverec.

Řešení (obr. 4). Hledaný čtverec označme $KMLN$. Vrchol K leží pak na kružnici k sestrojené nad průměrem

AD. Protější vrchol L leží podobně na kružnici l opsané nad průměrem BC. Poněvadž úhlopříčka KL půlí vnitřní úhly čtverce, musí procházet bodem E, který půlí tu půlkružnici AD, na níž neleží bod K. Z téhož důvodu musí tato úhlopříčka procházet bodem F, který půlí tu půlkružnici BC, na níž neleží bod L. Tedy přímka EF je úhlopříčkou hledaného čtverce.

Konstrukce vyplývá z provedeného rozboru. Sestrojíme přímku EF a ta protne kružnice k, l v bodech K, L různých od bodů E, F. Strany čtverce procházejí pak vrcholy A, B, C, D.

Nalezený čtyřúhelník je skutečně čtverec, neboť $\sphericalangle K = \sphericalangle L = 90°$ a přitom je souměrný podle úhlopříčky KL.

Rozpůlením půlkružnice AD získáme dva různé body E, E' a podobně na kružnici l obdržíme dva body F, F'. Za předpokladu $E \not\equiv F$ má úloha čtyři různá řešení, neboť můžeme spojovat body E, F nebo E', F, nebo E, F', nebo E', F'. K tomu je ovšem nutné rozšířit pojem „opsaný čtverec“ na každý čtverec, jehož strany třeba v prodloužení procházejí vrcholy A, B, C, D.

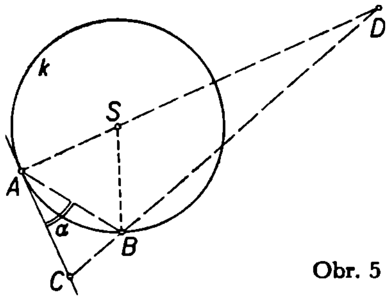
V případě, že $E \equiv F$, existuje nekonečně mnoho opsaných čtverců, neboť každou přímku, jdoucí bodem $E \equiv F$, můžeme považovat za úhlopříčku KL hledaného čtverce.

3. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a v ní libovolná tětiva AB, která není průměrem. Na tečně v bodě A určíme bod C tak, aby $AB = AC$ a aby $\sphericalangle BAC < 90°$. Jestliže přímky AS, BC se protnou v bodě, který označíme D, pak platí $\sphericalangle ADB = \frac{1}{4} \sphericalangle ASB$. Dokažte toto tvrzení.

Důkaz (obr. 5). Úsekový úhel CAB označme α.

Poněvadž trojúhelník ABC je rovnoramenný, platí

$$\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD = \sphericalangle CBA = \tfrac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha .$$



Obr. 5

Úhel ASB je středový a přísluší úsekovému úhlu CAB a proto

$$\sphericalangle ASB = 2\alpha .$$

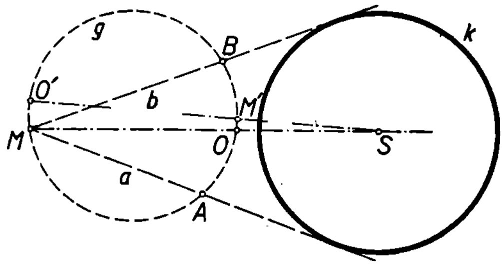
Nyní již můžeme počítat velikost úhlu ADC:

$$\sphericalangle ADC = 90° - \sphericalangle ACD = \tfrac{1}{2}\alpha ,$$

což je skutečně čtvrtina středového úhlu ASB, jak bylo v úloze tvrzeno.

4. Jsou dány tři body A, B, S neležící v přímce. Kolem bodu S opište kružnici k té vlastnosti, že tečny k ní vedené z bodů A, B svírají úhel dané velikosti ω.

Řešení (obr. 6). Sestrojíme množinu všech bodů, z nichž je úsečku AB vidět pod úhlem ω. Tím jsou, jak víme, dva kruhové oblouky. Uvažujme zatím pouze jeden z nich, který leží na kružnici g, a mysleme si, že úloha je již rozřešena, takže bod M je průsečík hledaných tečen a, b. Přímka MS je pak osou tečen a, b a prochází středem O toho oblouku $\widehat{AB}$ kružnice, který nenáleží naší množině bodů.

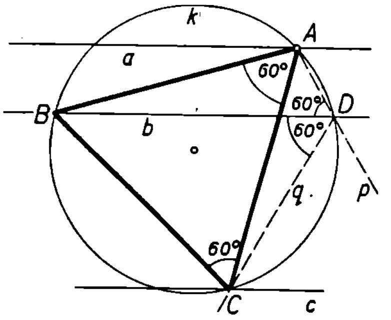


Obr. 6

Z toho dostáváme tuto konstrukci. Nejdříve sestrojíme kružnici g. Ten oblouk $\widehat{AB}$, který nenáleží do naší množiny bodů, rozpůlíme bodem O. Přímka SO protne kružnici g ještě v bodě M. Přímky $a \equiv MA$, $b \equiv MB$ jsou tečny hledané kružnice k, kterou již snadno sestrojíme.

Kružnice k takto sestrojená skutečně vyhovuje požadavkům úlohy. Má střed v bodě S, dotýká se přímek a, b, z nichž první prochází bodem A a druhá bodem B. Obě tečny svírají úhel předepsané velikosti.

Úloha má nejvýše čtyři různá řešení, pokud $O \not\equiv S$. Bod O' na kružnici g, který půlí delší oblouk $\widehat{AB}$, vede k dalšímu řešení. V tomto případě však kružnice k', jež je řešením naší úlohy, leží v tupém úhlu tečen a', b'. K uvažované množině bodů náleží ještě kruhový oblouk na kružnici g_1, souměrně sdružený s kružnicí g podle AB, a to nás přivádí k druhým dvěma řešením. Jestliže kružnice g nebo g_1 prochází bodem S, zmenší se počet řešení o jedno. Jestliže posléze $O \equiv S$, má úloha nekonečně mnoho řešení.



Obr. 7

5. Jsou dány tři různé rovnoběžky a, b, c a na přímce a bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol B ležel na přímce b a vrchol C na přímce c.

Řešení (obr. 7). Mysleme si, že úloha je rozřešena a opišme trojúhelníku ABC kružnici k. Označení přímek lze provést tak, že přímka b leží mezi přímkami a, c. Pak přímka b protne kružnici k kromě vrcholu B ještě v bodě D. Je patrno, že

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 60°, \tag{a}$$

a také

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = 60°. \tag{b}$$

Z toho pak plyne tato konstrukce. Bodem A proložíme přímku p, svírající s přímkou b úhel 60°. Průsečík přímek b, p je D. Bodem D proložíme přímku $q \not\equiv p$, která s přímkou b svírá úhel 60° a ta protne přímku c v bodě C. Kružnice opsaná trojúhelníku ACD protne přímku b v bodě B.

Sestrojený trojúhelník ABC je skutečně rovnostranný, neboť podle rovnic (a), (b) jsou velikosti jeho úhlů 60°.

Úloha má dvě řešení, neboť bodem A lze sestrojit dvě přímky p, p', které s přímkou b svírají úhel 60°.

Kdyby přímka a ležela mezi přímkami b, c, řešila by se úloha obdobným způsobem. (Viz cvič. 24.)

6. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a její pevná tečna t v bodě T. Na kružnici zvolíme libovolný bod $M \not\equiv T$, jehož vzdálenost od tečny t je $PM = d$ a vzdálenost od bodu T je $MT = a$. Dokažte, že platí $a^2 = 2dr$.

Řešení. a) Jestliže body M, T jsou krajní body téhož průměru, potom přímky MT, t jsou k sobě kolmé a platí

$$a = 2r, \qquad d = 2r$$

a vyslovená věta je správná.

b) Předpokládejme tedy, že body M, T neleží na tomtéž průměru (obr. 8). Bod diametrálně protilehlý bodu M označme N. Z něho i z bodu M spusťme na tečnu t kolmice a paty označme po řadě Q, P. I platí

$$\sphericalangle QTN = \sphericalangle TMN = \alpha,$$
$$\sphericalangle PTM = \sphericalangle TNM = \beta.$$

O těchto úhlech však víme, že

$$\alpha + \beta = 90°$$

a proto

$$\Delta\, TPM \sim \Delta\, NTM.$$

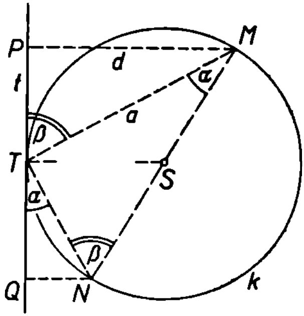
Odtud

$$TM : PM = MN : TM,$$

což zapsáno jinak dá

$$a : d = 2r : a.$$

To je však daná rovnice.



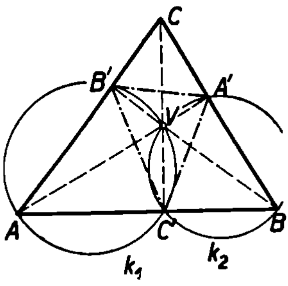
Obr. 8

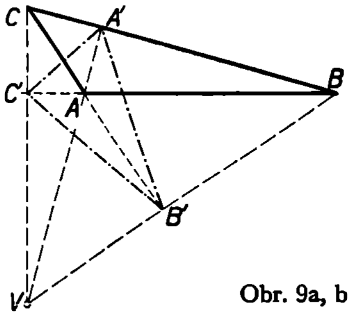
7. Paty výšek libovolného kosoúhlého trojúhelníka jsou vrcholy nového trojúhelníka, tzv. ortického. Dokažte, že jeho úhly jsou půleny výškami trojúhelníka daného.

D ů k a z provedeme nejprve pro trojúhelník ostroúhlý (obr. 9a). Paty výšek jsou po řadě označeny A' (na straně BC), B', C'. Výšky se protínají v bodě V, který nazýváme *ortocentrem*. Bod V je v tomto případě vnitřním bodem trojúhelníka. Trojúhelníky AVC', AVB' jsou pravoúhlé se společnou přeponou a proto mají i společnou opsanou kružnici k_1. Z týchž důvodů mají společnou opsanou kružnici k_2 pravoúhlé trojúhelníky BVA', BVC'.

V kružnici k_1 máme shodné obvodové úhly:

$$90° - \gamma = \sphericalangle CAA' \equiv \sphericalangle B'AV = \sphericalangle B'C'V.$$





Obr. 9a, b

Podobně o obvodových úhlech v kružnici k_2 platí

$$90° - \gamma = \sphericalangle CBB' \equiv \sphericalangle A'BV = \sphericalangle A'C'V.$$

Z toho vidíme, že výška CC' je osou (vnitřního) úhlu $B'C'A'$ ortického trojúhelníka. Stejně bychom postupovali při důkaze o výškách BB', AA' a proto můžeme důkaz věty pro ostroúhlý trojúhelník považovat za provedený.

V tupoúhlém trojúhelníku leží ortocentrum vně trojúhelníka. V obr. 9b je tupý úhel při vrcholu A. Všimněme si zde trojúhelníku VBC. Ten je ostroúhlý, neboť v něm (α, β, γ jsou vnitřní úhly daného trojúhelníka)

$$\sphericalangle VBC = 90° - \gamma, \ \sphericalangle VCB = 90° - \beta,$$

a úhel δ při vrcholu V je dán rovnicí

$$\delta + (90° - \gamma) + (90° - \beta) = 180°,$$
$$\delta = \beta + \gamma < 90°,$$

neboť $\alpha > 90°$.

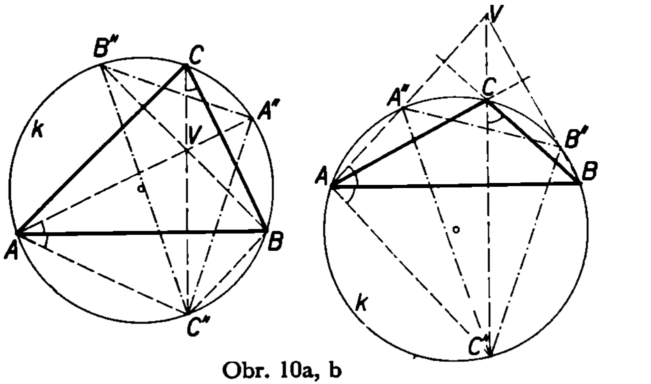
Pro ostroúhlý trojúhelník VBC platí věta odvozená v odst. předcházejícím. Jeho ortický trojúhelník je však trojúhelník $A'B'C'$ a ortocentrum je A. Přímka CB' půlí proto vnitřní úhel $C'B'A'$ ortického trojúhelníka $A'B'C'$ a přímka BB', tj. výška daného trojúhelníka, půlí (vnější) úhel zmíněného ortického trojúhelníka. Tím jsme v podstatě s důkazem vyslovené věty hotovi.

Poznámka. Vyloučili jsme pravoúhlý trojúhelník. V něm totiž ortocentrum splývá s vrcholem pravého úhlu, a ortický trojúhelník se redukuje na výšku jdoucí vrcholem pravého úhlu.

8. Výšky trojúhelníka protnou opsanou kružnici v bodech, které jsou souměrně sdružené s ortocentrem podle stran daného trojúhelníka. Dokažte.

Důkaz. Vyloučíme opět pravoúhlý trojúhelník, neboť vyslovené tvrzení je v tomto případě samozřejmé.

a) Je-li dán ostroúhlý trojúhelník ABC (obr. 10a), potom jeho ortocentrum je vnitřní bod trojúhelníka. Další průsečíky výšek s kružnicí k, která je danému troj-



Obr. 10a, b

úhelníku opsána, označme A'', B'', C''. Podle věty o obvodových úhlech platí

$$\sphericalangle BAC'' = \sphericalangle BCC'' = 90° - \beta.$$

Ale také $$\sphericalangle VAB = 90° - \beta$$

a poněvadž $VC'' \perp AB$, je trojúhelník AVC'' rovnoramenný se základnou VC''. Z toho pak vyplývá správnost vyslovené věty pro ortocentrum a bod C''. Poněvadž stejným způsobem se dá věta dokázat i o bodech A'', B'', je tím podán důkaz věty pro ostroúhlý trojúhelník.

b) Mějme dán tupoúhlý trojúhelník ABC (obr. 10b) s tupým úhlem při vrcholu C. Ortocentrum V je vnější bod trojúhelníka. Druhé průsečíky výšek VA, VB, VC s opsanou kružnicí označme po řadě A'', B'', C''. Opět můžeme psát

$$\sphericalangle BAC'' = \sphericalangle BCC'' = 90° - \beta.$$

Avšak také

$$\sphericalangle BAA'' = 90° - \beta.$$

Z toho opět plyne, že trojúhelník VAC'' je rovnoramenný a body V, C'' jsou souměrně sdružené podle strany AB. Poněvadž se dá totéž dokázat i o bodech A'', B'', je tím důkaz vyslovené věty proveden.

9. Dvě dané kružnice k, k' mají společné dva různé body A, B. Bodem A proložme libovolnou přímku $a \neq AB$, která dané dvě kružnice protne v dalších bodech P, P'. V nich sestrojme ke kružnicím k, k' tečny. Dokažte, že velikost úhlu těchto dvou tečen nezávisí na poloze přímky a, tj. pro dané dvě kružnice je konstantní.

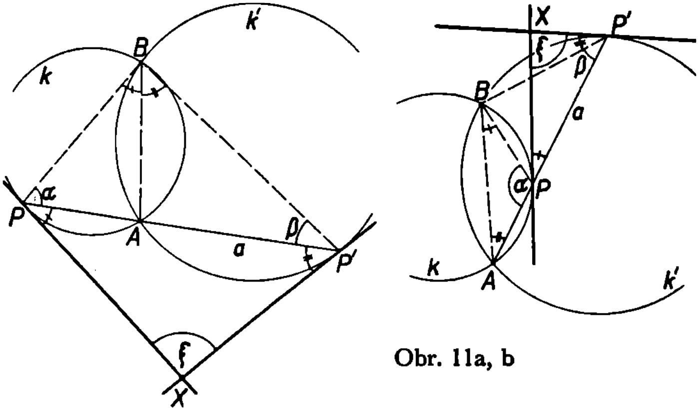
D ů k a z. a) Uvažujme nejprve případ, kdy bod A odděluje body P, P' (obr. 11a). Body B, P, P' jsou vrcholy trojúhelníka. V něm $\sphericalangle APB = \alpha$ a $\sphericalangle AP'B = \beta$ mají velikost nezávislou na poloze přímky a. Proto

$$\gamma = \sphericalangle PBP' = 180° - (\alpha + \beta)$$

má taky velikost nezávislou na poloze přímky a.

Přímka BA jej dělí na dva úhly ABP, ABP', o nichž tedy platí

$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle ABP' = 180° - (\alpha + \beta).$$



Obr. 11a, b

Víme však, že (X je průsečík tečen)

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle APX, \quad \sphericalangle ABP' = \sphericalangle AP'X.$$

Dosadíme-li, obdržíme

$$\sphericalangle APX + \sphericalangle AP'X = 180° - \gamma.$$

Z toho je patrno, že bod X leží v polorovině opačné k polorovině aB.

b) Bod A leží vně úsečky PP' (obr. 11b). Poněvadž je důkaz obdobný, nebudeme jej provádět.

2. kapitola

TĚTIVOVÝ ČTYŘÚHELNÍK

Definice. Konvexní čtyřúhelník, který je vepsán do kružnice, se nazývá tětivový.

Čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník jsou zvláštní případy tětivových čtyřúhelníků. Na obr. 12 je narýsován obecný případ.

Věta 5. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby daný konvexní čtyřúhelník ABCD byl tětivový, je: součet protějších úhlů je 180°.*

Důkaz (obr. 12). Úhel $\beta = \sphericalangle ABC$ je obvodový nad jedním z oblouků AC kružnice k, která je opsána čtyřúhelníku $ABCD$. Protější úhel $\delta = \sphericalangle ADC$ je obvodový nad druhým obloukem AC. Proto

$$\beta + \delta = 180°.$$

O druhých dvou úhlech α, γ platí potom nutně totéž.

Mějme obráceně čtyřúhelník $ABCD$, o jehož protějších úhlech α, γ platí

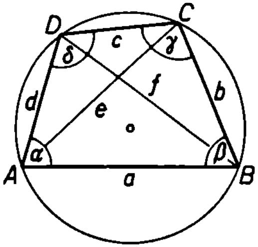
$$\alpha + \gamma = 180°.$$

Trojúhelníku ABD opišme kružnici k. Úhel $\alpha = \sphericalangle BAD$ je v ní obvodovým úhlem nad obloukem $\widehat{BD}$. Obvodový úhel nad druhým obloukem $\widehat{BD}$ má velikost $180° - \alpha = \gamma$ a proto vrchol C je nutně bodem tohoto druhého oblouku. To však znamená, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

Věta 6. *O úhlopříčkách e, f tětivového čtyřúhelníka platí tzv. Ptolemaiova věta:*

$$ef = ac + bd,$$

kde a, b, c, d jsou délky stran uvažovaného čtyřúhelníka.



Obr. 12

D ů k a z (obr. 12). Nechť je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a označme $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = e$, $BD = f$ a úhly při vrcholech A, B, C, D po řadě α, β, γ, δ. Na trojúhelníky ABD, BCD použijeme kosinové věty:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha, \tag{1}$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma.$$

Poněvadž však

$$\gamma = 180° - \alpha,$$

změní se druhá rovnice na

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha. \tag{2}$$

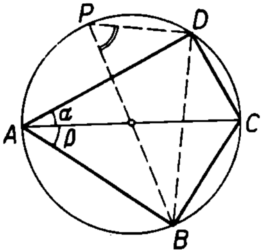
Vyloučením $\cos\alpha$ z rovnic (1) a (2) dojdeme k rovnici

$$f^2(ad + bc) = (ab + cd)(ac + bd). \tag{3}$$

Podobným způsobem z trojúhelníků ABC, ACD dostaneme

$$e^2 (ab + cd) = (ad + bc)(ac + bd)\,. \qquad (4)$$

Vynásobením rovnic (3), (4) obdržíme již Ptolemaiovu větu.



Obr. 13

Ptolemaiův vzorec může být východiskem k odvození mnoha jiných vzorců rovinné geometrie. Jako doklad pro toto tvrzení odvodíme vzorec pro $\sin(\alpha + \beta)$, jestliže úhly α, β i jejich součet jsou ostré úhly.

V obr. 13 je narýsován tětivový čtyřúhelník $ABCD$ tak, že úhlopříčka AC je průměrem opsané kružnice. Označme

$$\sphericalangle\, CAD = \alpha, \quad \sphericalangle\, CAB = \beta$$

a položme ještě $AC = 1$. Potom z pravoúhlého trojúhelníka ACD máme

$$\sin\alpha = CD : AC = CD, \quad \cos\alpha = AD. \qquad (1)$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ACB

$$\sin\beta = BC : AC = BC, \quad \cos\beta = AB. \qquad (2)$$

Jestliže BP je průměr kružnice, je

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BPD = \alpha + \beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = BD : BP = BD. \qquad (3)$$

Pro čtyřúhelník platí Ptolemaiova věta:

$$AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD.$$

Do ní dosadíme z rovnic (1), (2), (3) a dostaneme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

což je žádaný vzorec.

Příklady

1. Je dán kosoúhlý trojúhelník ABC. Jeho ortocentrum je V a pata výšky z vrcholu C je D. Z bodu D spusťme kolmice na stranu BC, na výšku BV a AV a na stranu AC; jejich paty po řadě označme K, N, M, L. Dokažte, že tyto paty leží v přímce.

Řešení (obr. 14). Čtyřúhelník $BDNK$ je tětivový. Kružnice jemu opsaná má průměr BD. Proto

$$\sphericalangle KNB = \sphericalangle KDB = 90° - \beta. \qquad (1)$$

Čtyřúhelník $DNVM$ je také tětivový (proč?) a tudíž

$$90° - \beta = \sphericalangle MDV = \sphericalangle MNV. \qquad (b)$$

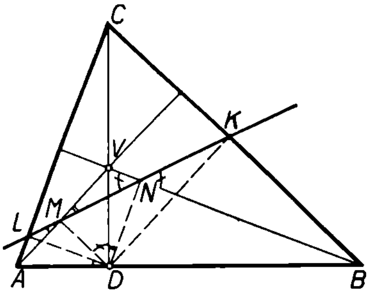
Porovnáním s rovnicí (a) dostáváme

$$\sphericalangle KNB = \sphericalangle MNV,$$

což znamená, že body K, N, M leží v přímce.

Podobně se dá ukázat, že i body L, M, N leží v přímce.

Poněvadž obě získané přímky mají společné dva různé body M, N, splývají. Všechny čtyři body leží tedy v přímce, jak jsme měli dokázat.



Obr. 14

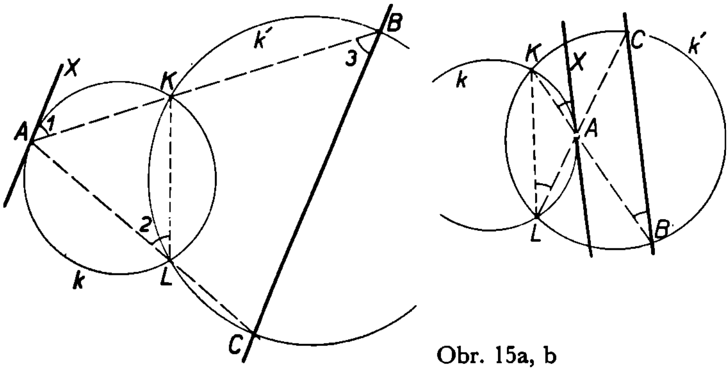
Sami už proveďte důkaz pro tupoúhlý trojúhelník s tupým úhlem při vrcholu A nebo B.

2. Jsou dány dvě kružnice k, k', které mají společné dva různé body K, L. Libovolný bod $A \neq K$, L kružnice k spojme s body K, L. Tyto dvě přímky protnou kružnici k' v dalších dvou bodech B, C. Dokažte, že přímka BC je rovnoběžná s tečnou, sestrojenou v bodě A ke kružnici k.

Důkaz (obr. 15a). a) Předpokládejme nejprve, že bod K leží mezi body A, B a bod L mezi body A, C. Čtyřúhelník $BCLK$ je tětivový a tudíž

$$\sphericalangle KBC = \sphericalangle KLA = \sphericalangle KAX,$$

kde X je libovolný bod tečny v bodě A kružnice k, neležící v polorovině ABC. (Tyto tři úhly jsou v obr. 15a označeny po řadě 3, 2, 1.) Ale úhly KBC, KAX jsou střídavé při přímkách BC, AX a poněvadž jsou shodné, plyne z toho, že přímky AX, BC jsou vzájemně rovnoběžné.



Obr. 15a, b

b) Předpokládejme nyní, že bod A leží mezi body B, K a mezi C, L (obr. 15b). Znovu platí (X je bod tečny kružnice k v bodě A, ležící v polorovině ABC):

$$\sphericalangle KBC = \sphericalangle KLC = \sphericalangle KAX.$$

Důsledek toho je tentýž jako v případě a).

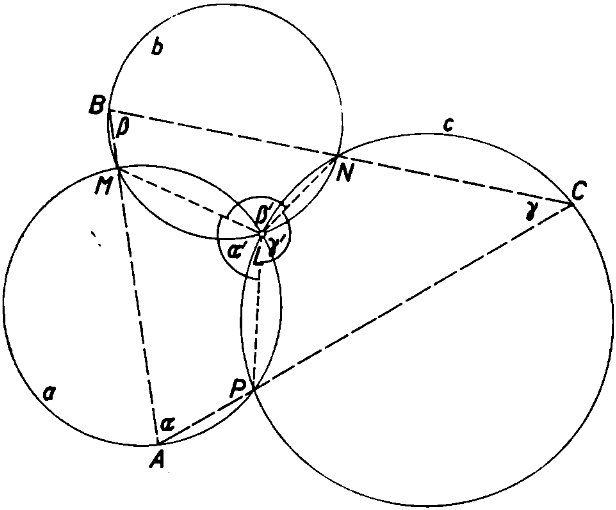
c) Případ, kdy bod B leží mezi body A, K a L mezi A, C (nebo K mezi A, B a C mezi A, L), přenechávám čtenáři.

3. Jsou dány tři různé kružnice a, b, c, které procházejí bodem L. Jejich další průsečíky jsou $M = a \,.\, b$, $N = b \,.\, c$, $P = a \,.\, c$. Na kružnici a zvolme libovolný bod A. Přímka AM protne kružnici b ještě v bodě B a přímka

BN protne kružnici *c* v bodě *C*. Dokažte, že přímka *AC* prochází bodem *P*.

Důkaz (obr. 16). Sestrojme přímky *PL*, *ML*, *NL*. Čtyřúhelník *AMLP* je tětivový a proto o jeho protějších úhlech α, α' platí

$$\alpha + \alpha' = 180°.$$



Obr. 16

Totéž se dá říci o protějších úhlech β, β' v tětivovém čtyřúhelníku *BMLN* a o úhlech γ, γ' v tětivovém čtyřúhelníku *CNLP*. Tedy

$$\beta + \beta' = 180°,$$
$$\gamma + \gamma' = 180°.$$

Napsané tři rovnice sečteme:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540°.$$

Poněvadž

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°,$$

dostáváme

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

což znamená, že body A, P, C leží v přímce.

Dokažte už sami, že věta platí, i když bod P leží vně úsečky AC.

Poznámka. Jiný důkaz spočívá v tom, že

$$\sphericalangle APL + \sphericalangle CPL = 180°.$$

4. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a na kružnici jemu opsané bod M různý od vrcholů. Součin vzdáleností bodu M od dvou protějších stran je roven součinu vzdáleností téhož bodu od druhých dvou protějších stran. Dokažte.

Důkaz (obr. 17). Sestrojme z bodu M kolmice na strany AB, BC, CD a AD a jejich paty postupně označme E, F, G, H. Spojme ještě bod M s body B, D. Pro stručnější vyjadřování označme

$$ME = e,\ MF = f,\ MG = g,\ MH = h,$$
$$MB = p,\ MD = q.$$

Všimněme si, že

$$\sphericalangle MBA = \sphericalangle MDA$$

a proto

$$\triangle MEB \sim \triangle MHD.$$

Z podobnosti obou trojúhelníků pak plyne

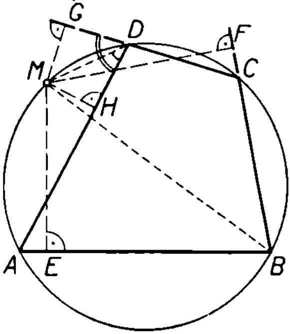
$$ME : MB = MH : MD,$$

což jinak zapsáno dá

$$e : p = h : q \quad \text{čili} \quad p : q = e : h. \tag{1}$$

Z týchž důvodů jako prve je

$$\Delta\, MDG \sim \Delta\, MBF.$$



Obr. 17

O stranách těchto trojúhelníků potom platí

$$MD : MG = MB : MF,$$

což jinak psáno dá

$$q : g = p : f \quad \text{čili} \quad p : q = f : g. \tag{2}$$

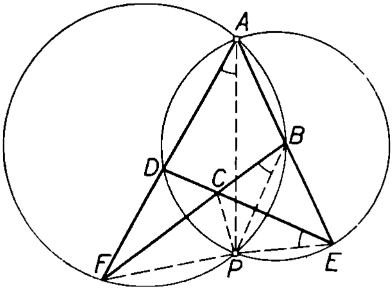
Spojením rovnic (1), (2) získáme žádaný vztah

$$eg = fh.$$

5. Je dán různoběžník $ABCD$. Jeho protější strany se (v prodloužení) protínají v bodech $E \equiv AB \,.\, CD$, $F \equiv \equiv AD \,.\, BC$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABF, CDF, ADE, BCE procházejí jediným bodem.

Důkaz (obr. 18). Nejprve si uvědomíme, že body A, B, C, D leží v téže polorovině vyťaté přímkou EF. Trojúhelníkům ABF, ADE opišme kružnice, jejichž další společný bod označme $P \not\equiv A$. (Kružnice se nemohou dotýkat.) I platí

$$\sphericalangle PBF = \sphericalangle PAF \equiv \sphericalangle PAD = \sphericalangle PED,$$



Obr. 18

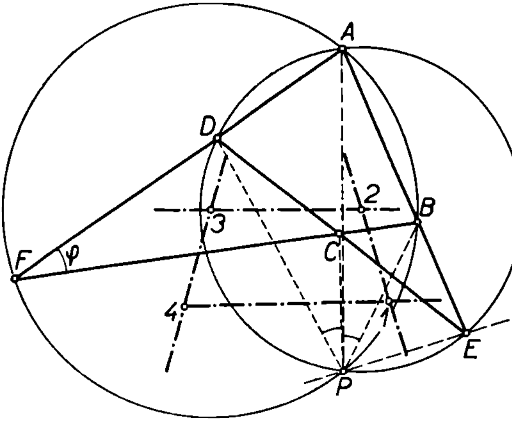
neboť tu jde vesměs o úhly obvodové buď v první, nebo v druhé kružnici. Mimoto vrcholy uvažovaných úhlů leží v téže polorovině vyťaté příslušnou sečnou. Napsaný výsledek můžeme též zapsat

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PEC.$$

Proto kružnice proložená body B, C, E nutně prochází i bodem P. Jinak řečeno: kružnice opsaná trojúhelníku BCE prochází též bodem P.

Poněvadž totéž můžeme dokázat i o kružnici opsané trojúhelníku CDF, je tím vyslovená věta dokázána.

6. Středy čtyř kružnic, o nichž jsme mluvili v předchozím příkladě, leží na kružnici (říkáme, že tyto čtyři body jsou koncyklické).



Obr. 19

D ů k a z (obr. 19). Označme *1*, *2*, *3*, *4* středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům *BCE*, *ADE*, *ABF*, *CDF*. Tyto středy dostaneme, jestliže sestrojíme symetrály úseček *AE*, *BE*, *CE*, *DE*, *AF*, *BF*, *CF*, *DF*, ale také symetrály úseček *AP*, *BP*, *CP*, *DP*, *EP*, *FP* (vzhledem k větě dokázané v příkl. 5). Ze sestrojení je patrno, že středy *1*, *2* leží na ose souměrnosti úsečky *PE*; středy *2* a *3* leží na ose souměrnosti úsečky *AP* atd. Čtyřúhelník *1234* má tu vlastnost, že každá jeho strana i úhlopříčka je osou souměrnosti nějaké úsečky dříve jmenované.

Označme nyní

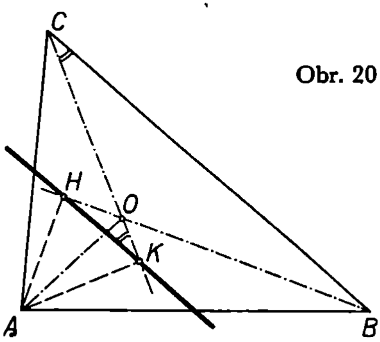
$$\sphericalangle AFB = \varphi.$$

Je patrno, že platí

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle APB \text{ (obvodové úhly v kružnici } ABF\text{)},$$
$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle DPC \text{ (obvodové úhly v kružnici } CDF\text{)}.$$

Potom také

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle 231,$$
$$\sphericalangle DPC = \sphericalangle 241.$$



Obr. 20

Nad úsečkou *12* jsou tudíž sestrojeny dva shodné úhly a proto kružnice opsaná trojúhelníku *123* prochází i bodem *4*, a to jsme měli dokázat.

7. Jsou-li H, K paty kolmic, spuštěných z vrcholu A trojúhelníka ABC na osy vnitřních úhlů β, γ, je přímka HK rovnoběžná se stranou BC.

Důkaz (obr. 20). Průsečík os vnitřních úhlů označme O. Pak čtyřúhelník $AKOH$ je tětivový, neboť trojúhelníky AOH, AOK jsou pravoúhlé se společnou přeponou AO a mají tudíž společnou opsanou kružnici. Proto je

$$\sphericalangle HKO = \sphericalangle HAO = 90° - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Vidíme, že střídavé úhly (v obr. jsou dvakrát zatržené) při přímkách BC, HK jsou shodné a proto přímky BC, HK jsou vzájemně rovnoběžné, jak jsme měli dokázat.

8. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Přímky AD, BC se protínají v bodě E. Kružnice opsaná trojúhelníku ACE protne přímky AB, CD po druhé v bodech P, Q. Dokažte, že $EP = EQ$.

Řešení. a) Jestliže $P \equiv Q$, je věta triviální.

b) Předpokládejme tedy, že body A, P, Q, E tvoří čtyřúhelník $APQE$. Ten je tětivový a platí tudíž

$$\sphericalangle QPE = \sphericalangle QCE = 180° - \gamma = \alpha,$$

kde α, γ jsou vnitřní úhly daného čtyřúhelníku při vrcholech A, C. Podobně platí

$$\sphericalangle PQE = 180° - \sphericalangle PAE = \alpha\,.$$

Z toho plyne, že trojúhelník PQE je rovnoramenný a tudíž $EP = EQ$.

c) Může se stát, že jmenované čtyři body tvoří tětivový čtyřúhelník $APEQ$ nebo $AQPE$. Potom jsou přirozeně při důkaze jiné rovnice, ale věta stejně platí. Proveďte už sami.

9. Střed kružnice opsané danému trojúhelníku ABC označme S. Je-li $\sphericalangle ASP = \beta - \gamma$ $(\beta > \gamma)$, kde P je bod poloroviny opačné k polorovině ACB, jsou přímky SP, BC k sobě kolmé. Dokažte.

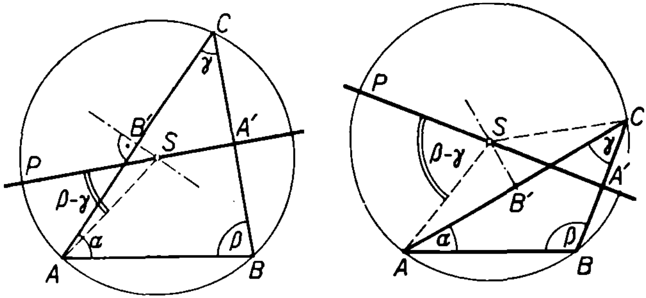
Řešení. Je nutné rozlišovat několik případů.

a) Trojúhelník ABC je ostroúhlý (obr. 21a). Střed strany AC označme B' a počítejme velikosti úhlů ve čtyřúhelníku $SB'CA'$, kde A' je průsečík přímky SP se stranou BC.

$$\sphericalangle SB'C = 90°, \quad \sphericalangle B'CA' = \gamma,$$
$$\sphericalangle ASB' = \beta, \quad \sphericalangle ASP = \beta - \gamma$$

a z toho

$$\sphericalangle PSB' = \beta - (\beta - \gamma) = \gamma.$$



Obr. 21a, b

Dále je

$$\sphericalangle B'SA' = 180° - \gamma.$$

Čtyřúhelník $SB'CA'$ je tudíž tětivový a poněvadž

$$\sphericalangle SB'C = 90°, \quad \text{je i} \ \sphericalangle SA'C = 90°,$$

tj. přímky SP, BC jsou vzájemně kolmé.

b) Trojúhelník ABC je tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu B (obr. 21b). Při stejném označení jako v případě a) platí

$$\sphericalangle SA'C = 90°.$$

Poněvadž

$$\sphericalangle ASC = 360° - 2\beta,$$

je

$$\sphericalangle CSA' = 360° - 2\beta - (180° - \beta + \gamma) = \alpha.$$

Dále

$$\sphericalangle SCB' = \sphericalangle SAB' = 90° - \tfrac{1}{2}(360° - 2\beta) = \beta - 90°,$$

takže

$$\sphericalangle SCA' = \sphericalangle SCB' + \gamma = 90° - \alpha.$$

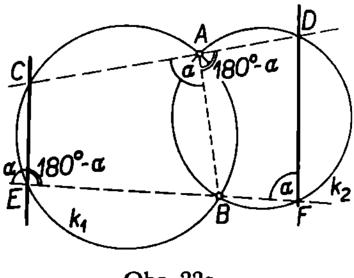
Trojúhelník SCA' je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A', čímž je důkaz proveden.

c) Jestliže trojúhelník ABC je tupoúhlý s tupým úhlem třeba při vrcholu A, dokazuje se vyslovená věta stejným způsobem.

10. Dvě různé kružnice k_1, k_2 mají společné dva různé body A, B. Bodem A proložme libovolnou přímku, která protne podruhé kružnici k_1 v bodě C a kružnici k_2 v bodě D. Proložme ještě libovolnou přímku bodem B a ta protne kružnice k_1, k_2 po řadě v bodech E, F. Dokažte, že přímky CE, DF jsou navzájem rovnoběžné.

Důkaz. a) Předpokládejme, že body E, F leží v téže polorovině určené přímkou CD (obr. 22a). Potom čtyřúhelník $ABFD$ je tětivový. Označíme-li $\sphericalangle BFD = \alpha$, musí být

$$\sphericalangle BAD = 180° - \alpha.$$

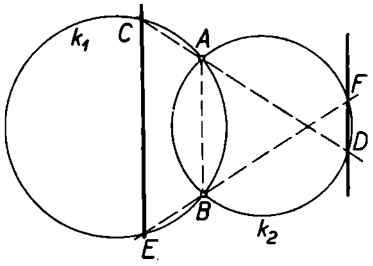


Obr. 22a

Poněvadž i čtyřúhelník $ABEC$ je tětivový, máme

$$\sphericalangle CAB = \alpha \quad \text{a} \quad \sphericalangle CEB = 180° - \alpha.$$

Je vidět, že přilehlé úhly $\sphericalangle BFD$, $\sphericalangle CEB$ při přímkách CE, DF jsou výplňkové, a to znamená, že přímky CE, DF jsou rovnoběžné, jak jsme měli dokázat.



Obr. 22b

b) Předpokládejme dále, že body E, F leží v opačných polorovinách, vyťatých přímkou CD (obr. 22b), a to tak, že body F, D leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB a body C, E v polorovině opačné. Potom buď čtyřúhelník $ABDF$, nebo čtyřúhelník $ABFD$ je tětivový. Všimněme si prvního případu. Označíme-li opět $\sphericalangle BFD = \alpha$, můžeme dojít postupně k těmto vztahům:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BFD &= \sphericalangle BAD = \alpha, \\ \sphericalangle BAC &= 180° - \alpha, \\ \sphericalangle CEB &= \sphericalangle CEF = \alpha, \end{aligned}$$

neboť čtyřúhelník $ABEC$ je tětivový. Přímka EF tvoří při přímkách CE, FD shodné střídavé úhly a proto přímky CE, FD jsou vzájemně rovnoběžné.

Případ tětivového čtyřúhelníku $ABFD$ se řeší podobně.

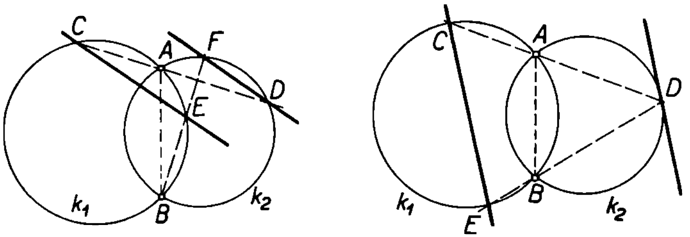
c) Předpokládejme, že body E, F leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou CD a současně body D, E, F leží v téže polorovině, vyťaté přímkou AB, zatímco bod C leží v polorovině opačné (obr. 22c). Pak platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle BED &= \sphericalangle BAD = \alpha, \\ \sphericalangle CAB &= \sphericalangle CEB = 180° - \alpha, \\ \sphericalangle CEF &= \alpha \end{aligned}$$

a z toho již plyne, že přímky CE, FD jsou navzájem rovnoběžné.

d) Jiná možnost je ta, že všechny čtyři body C, D, E, F leží v téže polorovině, vyťaté přímkou AB. A opět tu můžeme rozlišovat, kdy body na oblouku $\overset{\frown}{AB}$ kružnice k_1 jsou v pořadí A, C, E, B a přitom pořadí bodů na oblouku $\overset{\frown}{AB}$ kružnice k_2 je A, F, D, B nebo obě skupiny jsou v jiném pořadí. Nebudeme všechny možnosti uvádět, přenecháme to píli čtenářů. Avšak vždy platí, že přímky CE, DF jsou navzájem rovnoběžné.

e) Všimněme si ještě případu, kdy body D, F (nebo body E, C) splynou. Mohli bychom si všimnout toho, na kterém oblouku kružnic k_2 (nebo k_1) jsou splynuvší body.



Obr. 22c, d

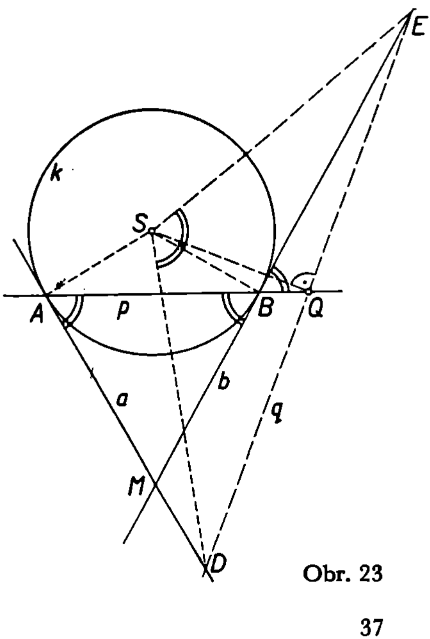
V obr. 22d je nakreslen případ, že $D \equiv F$ a přitom tento bod je od bodů C, E oddělen přímkou AB. Potom přímka DF přejde v tečnu $t \equiv DM$ kružnice k_2 v bodě $D \equiv F$. I platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle MDA &= \sphericalangle ABD = \alpha, \\ \sphericalangle ABE &= 180° - \alpha, \\ \sphericalangle ECA &= \alpha \end{aligned}$$

a přímky t, CE jsou opět rovnoběžné.

f) Za zmínku stojí i případ, kdy přímka CD nebo přímka EF, nebo obě současně se stanou tečnou kružnice k_1 (kružnice k_2). I potom platí vyslovená věta.

11. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její sečna p, která není průměrem. V průsečících A, B přímky p s danou kružnicí jsou sestrojeny tečny a, b dané kružnice. Na prodloužení tětivy AB za bod B je dán bod Q. Přímka q, která prochází bodem Q kolmo na přímku SQ, protne tečny a, b po řadě v bodech D, E. Dokažte, že $QD = QE$.



Obr. 23

Řešení (obr. 23). Čtyřúhelník $SBQE$ je tětivový, neboť

$$\sphericalangle SBE = \sphericalangle SQE = 90°,$$

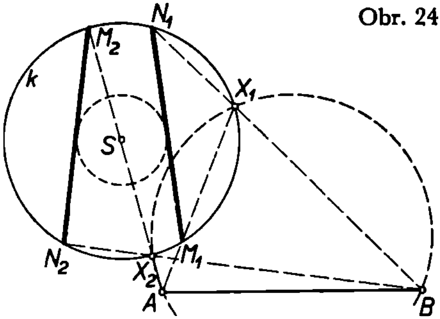
a proto

$$\sphericalangle QSE = \sphericalangle QBE.$$

Také čtyřúhelník $SADQ$ je tětivový, neboť dva jeho protější úhly jsou pravé. Z toho plyne shodnost úhlů a důs-

$$\sphericalangle DAQ = \sphericalangle DSQ = \sphericalangle MBA = \sphericalangle EBQ = \sphericalangle ESQ$$

ledkem toho je, že trojúhelník DES je rovnoramenný a vyslovená věta je pravdivá.



Obr. 24

12. Je dána kružnice k a dva různé body A, B vně kružnice. Na kružnici k najděte bod X tak, aby přímky AX, BX proťaly kružnici k v bodech M, N té vlastnosti, že tětiva MN má danou délku $d \neq 0$.

Řešení (obr. 24). Je-li dána délka tětivy MN v kružnici k, je tím dán v této kružnici i obvodový úhel MXN. Ale tu

buď $\sphericalangle MXN = \sphericalangle AXB$ $(= \omega)$,

neboť to jsou úhly vrcholové,

nebo $\sphericalangle MXN = 180° - \sphericalangle AXB$ $(= 180° - \omega)$,

neboť to jsou úhly vedlejší.

Z toho pak máme tuto konstrukci. Nad úsečkou AB sestrojíme kruhový oblouk, z jehož bodů je úsečku AB vidět pod úhlem ω (nebo pod úhlem $180° - \omega$). Body společné tomuto oblouku a dané kružnici jsou hledané body.

Správnost konstrukce plyne z předešlého.

Úloha má nejvýše čtyři různá řešení, neboť množina všech bodů, z nichž úsečku AB je vidět pod úhlem ω, jsou dva kruhové oblouky a ty mohou mít s danou kružnicí k společné nejvýše čtyři různé body. Mohou však být také jen tři, dva nebo pouze jeden. Avšak je také možné, že neexistuje žádný společný bod, a pak úloha nemá žádné řešení.

Kdyby $MN = AB$ a body A, B byly zvoleny na kružnici k, potom by úloha měla nekonečně mnoho řešení. Každý bod kružnice k, vyjma body $A \equiv M$, $B \equiv N$, by splňoval podmínky dané úlohy.

13. Danému rovnostrannému trojúhelníku ABC je opsána kružnice a na ní je zvolen libovolný bod M různý od vrcholů A, B, C. Je-li M na kratším oblouku AC, dokažte, že platí $MB = MA + MC$.

Řešení (obr. 25). a) Čtyřúhelník $ABCM$ je tětivový a proto o něm platí Ptolemaiova věta:

$$AC.MB = AB.CM + BC.AM.$$

Poněvadž však

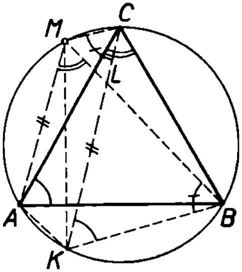
$$AC = BC = AB,$$

přejde po zkrácení napsaná rovnice v rovnici

$$MB = MA + MC,$$

což je žádaný vztah.

b) Uvedeme zde ještě jeden důkaz, v němž budeme užívat jen vlastností obvodových úhlů nad týmž obloukem.



Obr. 25

Bodem C vedená rovnoběžka s přímkou MA protne znovu kružnici v bodě K. Čtyřúhelník $AMCK$ je rovnoramenný lichoběžník. Jeho úhlopříčky jsou shodné a proto i obvodové úhly nad oběma úhlopříčkami jsou shodné (mají-li ovšem svůj vrchol oba na delším kruhovém oblouku nebo na kratším). Proto, je-li obvodový úhel nad úhlopříčkou AC roven 60°, je i obvodový úhel nad úhlopříčkou KM roven 60°.

Všimněme si, že

$$\begin{aligned} \sphericalangle CAB &= \sphericalangle CKB = \sphericalangle CMB = 60^\circ, \\ \sphericalangle ACB &= \sphericalangle AMB = 60^\circ, \\ \sphericalangle KBM &= \sphericalangle KCM = \sphericalangle ABC = 60^\circ \end{aligned}$$

a tudíž trojúhelník CML — kde L je průsečík přímek MB, CK — je rovnostranný. Z toho

$$MC = ML.$$

Avšak také trojúhelník BKL je rovnostranný a tedy

$$BL = BK.$$

K tomu ještě dodejme, že

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle KMB,$$

neboť to jsou obvodové úhly nad shodnými tětivami, a proto

$$MA = BK.$$

Máme tedy

$$MB = ML + LB = MC + BK = MC + MA,$$

a to jsme měli dokázat.

Cvičení

1. Je dána úsečka AB a přímka $p \not\equiv AB$. Na přímce p najděte bod, z něhož je úsečku AB vidět pod úhlem 75°.

2. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její průměr MN. Najděte bod X, z něhož je danou kružnici vidět pod úhlem $\alpha = 98°$ a její průměr MN pod úhlem $\beta = 45°$.

3. Jsou dány úsečky $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm, svírající spolu úhel 90°. Sestrojte bod X, z něhož je první úsečku vidět pod úhlem 75° a druhou pod úhlem 60°.

4. Vypočtěte vnitřní úhly ortického trojúhelníka. Dokažte, že je-li daný trojúhelník ABC ostroúhlý a jeden jeho úhel menší než 45°, pak ortický trojúhelník je tupoúhlý.

5. Podívejte se na obr. 9a, b. Ukažte, že vrchol A půlí oblouk $B''C''$, vrchol B oblouk $A''C''$ a vrchol C oblouk $A''B''$. Dokažte dále, že trojúhelník $A''B''C''$ je stejnolehlý s ortickým trojúhelníkem.

6. Na základě výsledku předchozího cvičení sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány body A'', B'', C''.

7. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho trojúhelník ortický.

8. Dvě různé kružnice k, k' mají společné právě dva různé body A, B. Bodem A veďme libovolnou přímku, která kružnice protne kromě bodu A ještě v bodech P, P', různých od bodu B. Ukažte, že trojúhelníky BPP' takto získané lze roztřídit do tří skupin tak, že každé dva trojúhelníky téže skupiny jsou navzájem podobné.

9. Jsou dány dvě různé přímky m, n a číslo $r > 0$. Sestrojte kružnici poloměru r, která má střed na přímce m a přímku n protíná pod úhlem $\alpha = 60°$.

10. Jsou dány dvě kružnice, které nemají žádný společný bod a každá leží vně druhé. Kružnice opsaná nad jejich střednou jako nad průměrem obsahuje všechny čtyři průsečíky vnitřních tečen s vnějšími.

11. Jsou dány dvě kružnice k, k', které mají společné právě dva různé body K, L. Libovolný bod $A \neq K, L$ kružnice k spojme s body K, L a tyto dvě přímky protnou kružnici k' v bodech B, C. Dokažte, že přímka BC je rovnoběžná s tečnou sestrojenou ke kružnici k v bodě A.

12. Na dané kružnici k jsou dány dva různé body A, B. Jimi jsou proloženy libovolné různé a vzájemně rovnoběžné tětivy AA', BB'. Body A', B' jsou proloženy opět libovolné, různé (a jiné než jsou AA', BB') tětivy $A'A''$, $B'B''$. Ukažte, že tětiva AA'' je rovnoběžná s tětivou BB''.

13. Danému různostrannému trojúhelníku ABC opište rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby strana KL byla rovnoběžná s danou přímkou s, která není rovnoběžná se žádnou stranou daného trojúhelníka, a aby vrchol A ležel mezi body L, M, vrchol B mezi K, M a vrchol C mezi body K, L.

14. Sestrojte tětivový čtyřúhelník, je-li dáno $a = 8$, $b = 6$, $d = 5$, $\beta = 60°$.

15. Z rovnic (3) a (4) na str. 21-22 odvoďte vztah

$$e : f = (ab + cd) : (ad + bc).$$

16. Z Ptolemaiovy věty vyvoďte vzorec pro cos $(\alpha - \beta)$ opět za předpokladu, že $\alpha < 90°$, $\beta < 90.°$ (Označte $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$.)

17. Je dán libovolný trojúhelník ABC. Na straně BC zvolme libovolný bod A', na straně AC libovolný bod B' a na straně AB libovolný bod C'. Zvolené body jsou vesměs různé od vrcholů A, B, C. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ procházejí jediným bodem.

18. Střed O vepsané kružnice danému trojúhelníku ABC, střed O_c kružnice vně vepsané (která se strany AB dotýká ve vnitřním bodě) a vrcholy A, B leží na téže kružnici.

19. Kružnice opsaná danému trojúhelníku ABC a kružnice opsaná trojúhelníku, jehož dva vrcholy jsou A, B a třetí vrchol je ortocentrum, jsou shodné. Dokažte.

20. Je dána kružnice k a její pevná tečna t s bodem dotyku T. Libovolné dvě různé a vzájemně rovnoběžné tečny $a \not\equiv t \not\equiv b$ kružnice k vytnou na tečně t dva body A, B. Dokažte, že součin $AT.BT$ je nezávislý na směru tečen a, b.

21. K danému trojúhelníku ABC je trojúhelník DEF ortický (D leží na BC, E na AC, F na AB). Dokažte, že $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Najděte ještě další dva trojúhelníky podobné danému.

22. Je dána kružnice k a na ní bod P. Bodem P narýsujme čtyři různé polopřímky a, b, c, d tak, aby každé

dvě sousední svíraly úhel 45°. Tyto polopřímky protnou kružnici k v bodech A, B, C, D, jež jsou vrcholy čtverce.

23. Trojúhelník ABC má pevnou stranu AB a úhel této straně protilehlý má konstantní velikost. Paty výšek z vrcholů A, B označme po řadě D, E. Ukažte, že velikost úsečky DE je pro všechny trojúhelníky ABC, které vyhovují daným dvěma podmínkám, konstantní.

24. Příklad 5 řešte ještě jednou, a to pro případ, že přímka a leží mezi přímkami b, c.

3. kapitola

MOCNOST BODU KE KRUŽNICI

Mocnost bodu ke kružnici je pojem v elementární geometrii velmi důležitý a užitečný.

Věta 7. *Je dána kružnice k a mimo ni bod P. Bodem P proložme libovolnou sečnu, která má s danou kružnicí společné body A, B. Číslo*

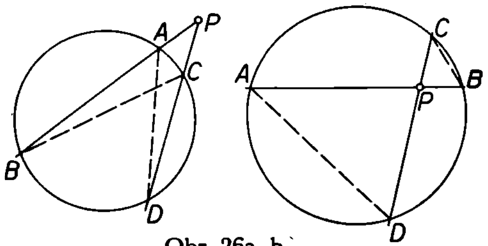
$$M_P = PA.PB$$

je nezávislé na poloze sečny a nazývá se mocnost bodu P ke kružnici k.

Důkaz (obr. 26a, b) provedeme tak, že narýsujeme ještě sečnu $CD \neq AB$ (jdoucí bodem P) a dokážeme, že $PA.PB = PC.PD$.

Za tím účelem spojme ještě body A, D a B, C. Obdržíme tak dva vzájemně podobné trojúhelníky

$$\triangle PAD \sim \triangle PCB.$$



Obr. 26a, b

Jsou podobné proto, že se shodují ve dvou úhlech:

$$\sphericalangle PDA = \sphericalangle PBC, \qquad \sphericalangle APD \equiv \sphericalangle CPB.$$

O stranách těchto trojúhelníků proto platí

$$PA : PD = PC : PB$$

a z toho

$$PA . PB = PC . PD.$$

Tím jsme dokázali, že součin $PA . PB$ je skutečně nezávislý na poloze sečny; pro daný bod P je tento součin konstanta. Později uvidíme, že je závislý na vzdálenosti bodu P od středu kružnice a na poloměru kružnice.

Platí však mnohem víc:

Věta 7'. *Mějme dvě různoběžné přímky a, b; jejich průsečík označme P.*

a) *Jestliže dva různé body A, B leží na téže polopřímce přímky a s počátkem P a jestliže body C, D jsou body téže polopřímky přímky b s počátkem P a přitom platí*

$$PA . PB = PC . PD,$$

jsou body A, B, C, D koncyklické (tj. leží na téže kružnici).

b) *Jestliže body A, B jsou body ležící na opačných polopřímkách přímky a s počátkem P a jestliže body C, D leží na opačných polopřímkách přímky b s počátkem P a přitom platí*

$$PA . PB = PC . PD,$$

pak body A, B, C, D jsou koncyklické.

Důkaz. Daný vztah lze psát takto:

$$PA : PC = PD : PB.$$

Připíšeme-li k této rovnici ještě shodnost úhlů

$$\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD,$$

vidíme z toho, že

$$\triangle APC \sim \triangle DPB$$

a tudíž

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle DBP.$$

Opíšeme-li tedy trojúhelníku ACD kružnici, musí na ní ležet i bod B, neboť úhly ACP, DBP jsou obvodové úhly v uvažované kružnici nad týmž obloukem.

Poznámky. 1. Z důkazu je patrno, že větu o mocnosti bodu ke kružnici jsme dokázali užitím věty o obvodových úhlech nad týmž obloukem. Ukazuje se však, že tato věta a věta o obvodových úhlech nad týmž obloukem jsou věty ekvivalentní.

2. Mocnost bodu ke kružnici je číslo. Je opatřeno znaménkem +, je-li bod P vně kružnice; je opatřeno znaménkem —, leží-li bod P uvnitř kružnice. Bod na kružnici má mocnost rovnou nule. Nejmenší mocnost, kterou bod může mít, je $-r^2$ a náleží středu kružnice.

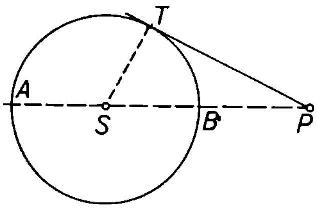
Věta 8. *Mocnost vnějšího bodu je rovna čtverci délky tečny, sestrojené z tohoto bodu ke kružnici.*

Důkaz (obr. 27). Bod P spojme se středem S dané kružnice. Tato přímka protne kružnici v bodech A, B. Mocnost bodu P je:

$$\begin{aligned} M_P &= PA \, . \, PB = (PS + SA)\,(PS - SB) = \\ &= (PS + SA)\,(PS - SA) = PS^2 - SA^2 = \\ &= PS^2 - ST^2 = PT^2, \end{aligned}$$

kde T je bod dotyku tečny sestrojené z bodu P k dané kružnici. Tím je důkaz proveden.

Poznámka. Tím je také prokázáno, že mocnost bodu ke kružnici skutečně závisí na vzdálenosti bodu P od středu kružnice a na poloměru kružnice.



Obr. 27

Takřka samozřejmá je věta následující, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 9. *Množina všech bodů, které mají k dané kružnici $k \equiv (S; r)$ danou mocnost $M > -r^2$, je kružnice soustředná o poloměru $r'^2 = M + r^2$.*

Příklady

1. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a přímka p. Na přímce p najděte bod, který má vzhledem ke kružnici k danou mocnost $M > -r^2$ (např. $M = 5r^2$).

Řešení (obr. 28). Na kružnici k zvolíme libovolný bod T, v něm sestrojíme tečnu t a na ní určíme bod U, aby jeho mocnost $M_U = M$. To znamená, že $TU = \sqrt{M}$.

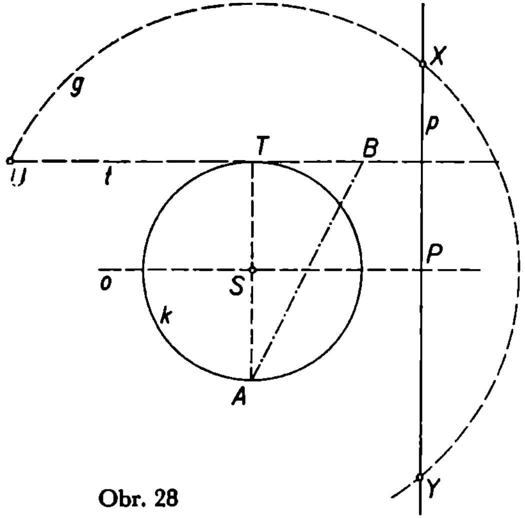
K sestrojení délky TU pro případ $M = 5r^2$ bylo použito Pythagorovy věty. Příslušný pravoúhlý trojúhelník je TAB, v němž odvěsna $TA = 2r$, $TB = r$ a potom přepona je

$$AB^2 = TA^2 + TB^2 = 5r^2 = M.$$

Je patrno, že

$$TU = AB.$$

Kružnice $g \equiv (S;\ SU)$ je množinou všech bodů, které mají vzhledem ke kružnici k tutéž mocnost M $(= 5r^2)$. Body X, Y společné přímce p a kružnici g jsou žádané body.



Obr. 28

Abychom mohli diskusi provést pohodlněji, spusťme ze středu S kolmici na přímku p a její patu označme P. Položme ještě $PS = d$. Pak můžeme říci:

a) Jestliže $d < \sqrt{M}$, úloha má dvě různá řešení;

b) jestliže $d = \sqrt{M}$, úloha má právě jedno řešení;

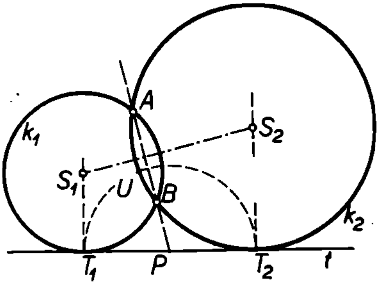
c) jestliže $d > \sqrt{M}$, úloha nemá žádné řešení.[1])

[1]) Kdyby $M = 0$, pak by řešení existovalo právě tehdy, jestliže by přímka p měla s kružnicí k společné body.

2. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky t a prochází přitom dvěma různými body A, B.

Řešení (obr. 29). Předpokládejme, že přímka AB protíná tečnu t v bodě P. Mocnost bodu P k hledané kružnici označme M a pak platí

$$M = PA . PB = PT^2, \qquad \text{(a)}$$



Obr. 29

kde T je bod dotyku kružnice k s tečnou t. Z rovnice (a) lze např. užitím Euklidovy věty sestrojit délku úsečky PT. Známe-li bod T, umíme pak sestrojit i kružnici k.

Úloha má řešení jedině tenkrát, když body A, B leží v téže polorovině vyťaté tečnou t. Jestliže to jsou vnitřní

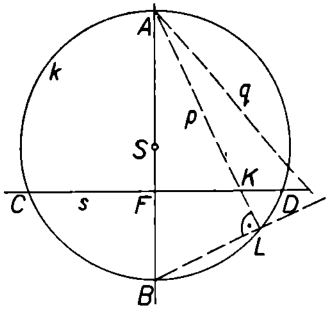
Kdyby $-r^2 < M < 0$ $\left(\text{např. } -\frac{1}{2}r^2\right)$, sestrojili bychom úsečku délky

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

a potom bychom sestrojili v kružnici k tětivu délky $2a$. Kružnice g', která se této tětivy dotýká, je množinou všech bodů, které mají ke kružnici k tutéž mocnost $M \left(= -\frac{1}{2}r^2\right)$. Body X', Y', společné přímce p a kružnici g', jsou žádané body.

body téže poloroviny a jestliže ještě kromě toho jsou různě vzdáleny od tečny t, jsou dvě různé kružnice vyhovující dané úloze. Jestliže to jsou vnitřní body téže poloroviny, ale mají od tečny t shodné vzdálenosti, vyhovuje úloze jediná kružnice. V tomto případě bod P neexistuje a příklad se dá řešit jednodušeji. Jestliže právě jeden z bodů A, B leží na přímce t, má úloha jediné řešení a jestliže oba body leží na přímce t, úloha nemá řešení.

3. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její sečna $s \equiv CD$ kolmá k danému průměru AB. Bodem A veďme libovolnou přímku p, která tětivu CD protne v bodě K a kružnici k v dalším bodě L. Dokažte, že $AK . AL$ = konst.



Obr. 30

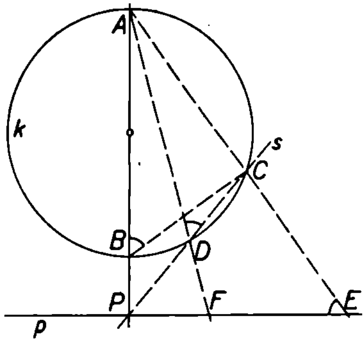
Řešení (obr. 30). a) Průsečík přímek AB, CD označme F. Jestliže přímka p splyne s přímkou AB, pak $K \equiv F$, $L \equiv B$ a podle Euklidovy věty je

$$AK . AL = AF . AB = AC^2 = AD^2 = \text{konst.}$$

b) Předpokládejme, že $p \not\equiv AB$ a bod K leží mezi body D, F. Je zřejmé, že čtyřúhelník $BLKF$ je tětivový, neboť dva jeho protější úhly jsou pravé. Lze mu proto opsat kružnici. Mocnost bodu A vzhledem k této kružnici je

$$M_A = AK.AL = AF.AB = AD^2 = \text{konst.}$$

a tím je důkaz vyslovené věty proveden.



Obr. 31

4. Je dána kružnice k a v ní průměr AB. Dále je dána přímka p kolmá k AB a nemající s kružnicí k žádný společný bod. Průsečíkem P přímek p, AB je proložena sečna $s \neq AB$, která kružnici k protíná v bodech $C \neq D$. Přímky AC, AD protnou přímku p v bodech E, F. Dokažte, že platí $PE.PF$ = konst.

Řešení (obr. 31). Předpokládejme, že označení bodů C, D je zvoleno tak, že body A, C jsou sousední a že bod B leží mezi body A, P. Potom

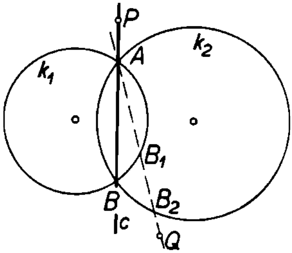
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC,$$
$$\sphericalangle BAC = 90° - \sphericalangle ABC,$$
$$\sphericalangle PEA = 90° - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC.$$

Shrneme:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle PEA.$$

Potom však čtyřúhelník $CDFE$ je tětivový. Mocnost M bodu P vzhledem ke kružnici opsané tomuto čtyřúhelníku je

$$M = PE.PF = PD.PC = PB.PA.$$



Obr. 32a

Avšak posledně napsaný součin je nezávislý na poloze sečny s a tudíž je konstantní; tím je vyslovené tvrzení dokázáno.

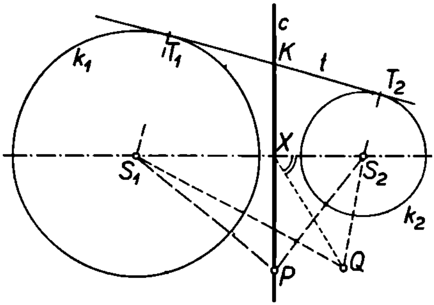
V dalším si všimneme mocností bodů vzhledem k dvěma nesoustředným kružnicím.

Věta 10. *Množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím k_1, k_2, je přímka zvaná chordála, kolmá na střednou daných kružnic.*

Důkaz. a) Jestliže dané kružnice mají společné dva různé body A, B (obr. 32a), je chordála přímka AB. Skutečně, mocnosti bodů A, B vzhledem k oběma kružnicím jsou stejné, rovné nule.

$$M_A = M_B = 0.$$

Body A, B náležejí proto hledané množině bodů. Zvolme nyní na přímce AB libovolný bod P, ale tak, aby nesplýval se žádným z bodů A, B. Jeho mocnost k oběma kružnicím k_1, k_2 je táž a je rovna součinu $PA \cdot PB$. Z toho je vidět, že všechny body přímky AB mají stejnou mocnost k oběma kružnicím.



Obr. 32b

Mějme nyní bod $Q \not\equiv A$ o němž předpokládáme, že má tutéž mocnost k oběma daným kružnicím. Bod Q spojme s bodem A. Další průsečíky této spojnice s kružnicemi k_1, k_2 označme po řadě B_1, B_2. Mocnosti bodu Q vzhledem k uvažovaným kružnicím jsou

$$M_1 = QA \cdot QB_1, \qquad M_2 = QA \cdot QB_2.$$

Podle předpokladu však platí

$$QA \cdot QB_1 = QA \cdot QB_2,$$

ale to není jinak možné, než že

$$B_1 \equiv B_2 \equiv B,$$

tj. bod Q musí ležet na přímce AB.

b) Jestliže se kružnice vzájemně dotýkají v bodě A, chordála je tečna ve společném bodě. Důkaz se provádí jako v předešlém případě.

c) Jestliže kružnice nemají žádný společný bod a každá leží vně druhé, půlí chordála délku společné tečny t obou kružnic (obr. 31b). Body dotyku tečny t s oběma kružnicemi označme T_1, T_2 a střed úsečky T_1T_2 označme K. Jeho mocnost ke kružnicím k_1, k_2 je po řadě (X je průsečík středné a chordály)

$$M_1 = KT_1^2 = KS_1^2 - r_1^2 = KX^2 + XS_1^2 - r_1^2, \tag{1}$$

$$M_2 = KT_2^2 = KS_2^2 - r_2^2 = KX^2 + XS_2^2 - r_2^2. \tag{2}$$

Poněvadž obě mocnosti jsou stejné, plyne z toho

$$XS_1^2 - r_1^2 = XS_2^2 - r_2^2. \tag{3}$$

Zvolme nyní na přímce c libovolný bod $P \neq X$, který neleží na žádné společné tečně kružnic k_1, k_2. Jeho mocnosti k daným kružnicím jsou

$$M_P = PS_1^2 - r_1^2 = PX^2 + XS_1^2 - r_1^2,$$
$$M'_P = PX^2 + XS_2^2 - r_2^2.$$

S ohledem na rovnici (3) dostaneme

$$M'_P = PX^2 + XS_1^2 - r_1^2 = M_P.$$

Mějme obráceně bod Q, který má tutéž mocnost ke kružnicím k_1, k_2. Tedy

$$M_Q = M'_Q. \tag{4}$$

Označme $\sphericalangle QXS_1 = \omega$. Potom (používáme kosinové věty)

$$M_Q = QS_1^2 - r_1^2 = QX^2 + XS_1^2 - 2 \,.\, QX \,.\, XS_1 \,.\, \cos\omega - r_1^2,$$
$$M'_Q = QS_2^2 - r_2^2 = QX^2 + XS_2^2 + 2 \,.\, QX \,.\, XS_2 \,.\, \cos\omega - r_2^2.$$

Ale platí rovnice (4) a proto

$$XS_1^2 - 2 . QX . XS_1 . \cos\omega - r_1^2 =$$
$$= XS_2^2 + 2 . QX . XS_2^2 . \cos\omega - r_2^2.$$

S ohledem na rovnici (3) se právě napsaná rovnice ještě zjednoduší

$$(XS_1 + XS_2)\cos\omega = 0.$$

Avšak

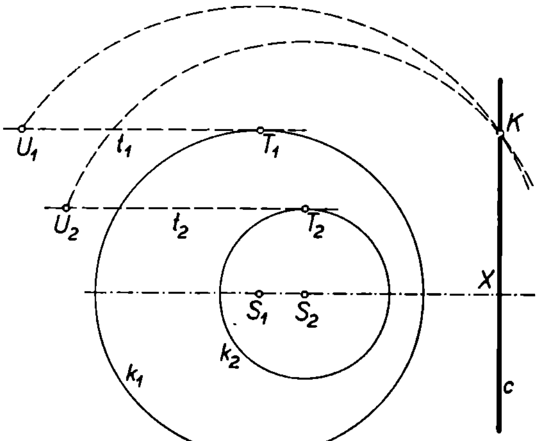
$$XS_1 + XS_2 \neq 0,$$

a proto

$$\cos\omega = 0, \quad \text{tj. } \omega = 90°$$

a bod Q leží na chordále c.

d) Zbývá ještě případ naznačený v obr. 32c, kdy kružnice k_1, k_2 nemají žádný společný bod a jedna leží uvnitř druhé. Na základě příkladu 1 sestrojíme bod U_1, který



Obr. 32c

má danou, ale jinak libovolnou mocnost ke kružnici k_1, a bod U_2, který má tutéž mocnost ke kružnici k_2. Kružnice $(S_1; S_1U_1)$, $(S_2; S_2U_2)$ se protnou v bodě K. (Jestliže kružnice k_1, k_2 nejsou soustředné a jestliže mocnost bodu U_1 je dostatečně velká, pak průsečík K vždy existuje.) Přímka c, jdoucí bodem K kolmo na střednou S_1S_2, je chordála daných dvou kružnic. Důkaz se provede jako v případě c.

Vyloženou teorii zakončíme větou, jejíž důkaz si můžete provést sami. (Viz cvičení 4.)

Věta 11. *Mějme tři kružnice k_1, k_2, k_3, z nichž žádné dvě nejsou soustředné. Chordály kružnic k_1, k_2; k_1, k_3; k_2, k_3 procházejí buď jediným bodem, nebo jsou rovnoběžné. Tento druhý případ nastane právě tehdy, leží-li středy uvažovaných kružnic v přímce.*

Příklady

5. Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2, které mají společné právě dva různé body M, N. Libovolná kružnice k, která se v bodě M dotýká přímky MN, protne dané kružnice ještě v bodech K, L. Dokažte, že přímka KL prochází středem O tětivy MN.

Důkaz (obr. 33). Bod O spojme s průsečíkem K. Tato spojnice protne kružnici k ještě v bodě L'' a kružnici k_1 ještě v bodě L'. Počítejme nyní mocnost bodu O ke kružnici k a ke kružnici k_1.

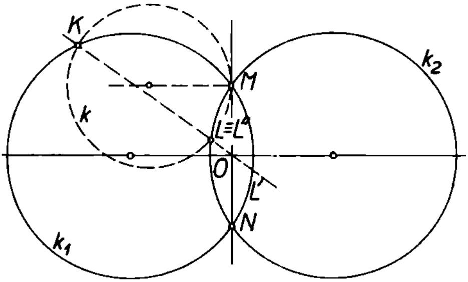
$$M_O = OM^2 = OK \cdot OL'',$$

$$M'_O = -OM^2 = -OK \cdot OL'.$$

Je vidět, že obě mocnosti jsou stejné, až na znaménko, a proto můžeme psát

$$OK \cdot OL' = OK \cdot OL'',$$

tj. $OL' = OL''$. Kružnice k_1, k_2 jsou souměrně sdružené podle středu O a proto bod L'' — který je souměrně sdružený s bodem L' — leží na kružnici k_2 a je to tedy společný bod L kružnic k, k_2, jak jsme měli dokázat.

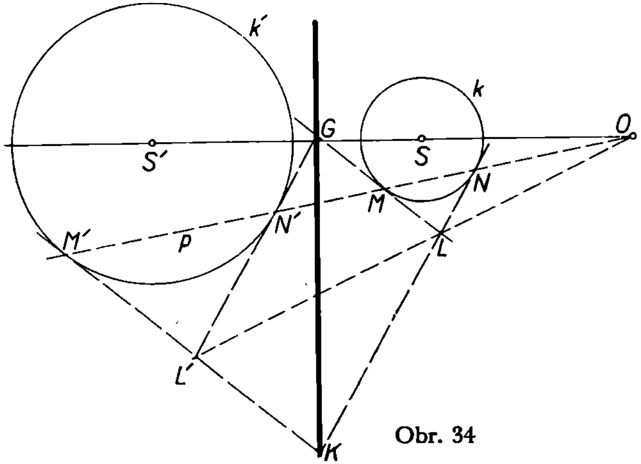


Obr. 33

6. Jsou dány dvě kružnice $k \equiv (S; r)$, $k' \equiv (S'; r')$ různých poloměrů, z nichž každá leží vně druhé. Jejich vnější střed stejnolehlosti je O. Jím je proložena přímka $p \not\equiv SS'$, která dané kružnice protíná v bodech M, N; M', N'. Tečny sestrojené v těchto bodech tvoří rovnoběžník, jehož jedna úhlopříčka prochází bodem O a druhá leží na pevné přímce. Dokažte.

Řešení (obr. 34). Uvažované tečny tvoří čtyřúhelník $KLGL'$. Poněvadž tečny v bodech M, M' jsou rovnoběžné (jsou to přímky, z nichž jedna je obrazem druhé ve zmíněné stejnolehlosti) a tečny v bodech N, N' jsou také rovnoběžné z téhož důvodu, omezují tyto čtyři tečny rovnoběžník. Tím je první část tvrzení dokázána.

V uvažované stejnolehlosti si odpovídají i body L, L' a proto jejich spojnice prochází středem stejnolehlosti O, jak jsme měli dokázat.



Obr. 34

A posléze, trojúhelníky LMN, $KM'N$ jsou také stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě N. Poněvadž platí

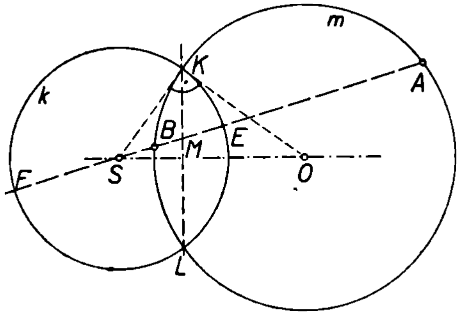
$$LM = LN,$$

musí také platit

$$KN = KM'.$$

To však znamená, že bod K má stejnou mocnost k oběma kružnicím a leží proto na chordále daných dvou kružnic. Ale totéž se dá dokázat i pro bod G a odtud je již patrno, že úhlopříčka KG leží na chordále daných dvou kružnic.

7. Je dána pevná kružnice $k \equiv (S; r)$ a pevný bod A neležící na kružnici k. Bodem A proložme libovolnou kružnici m, která danou kružnici protíná pravoúhle. Tato kružnice prochází dalším pevným bodem $B \not\equiv A$, nezávislým na volbě kružnice m. Dokažte. (Jinak formulováno, máme dokázat, že všechny kružnice m tvoří svazek.)



Obr. 35

D ů k a z (obr. 35). Uvažujme nejprve případ, že bod A leží vně kružnice k. Zvolme libovolnou kružnici m uvedené vlastnosti. Ta protne kružnici k v bodech K, L a přímku SA v bodě B. Mocnost M_S bodu S vzhledem ke kružnici m je

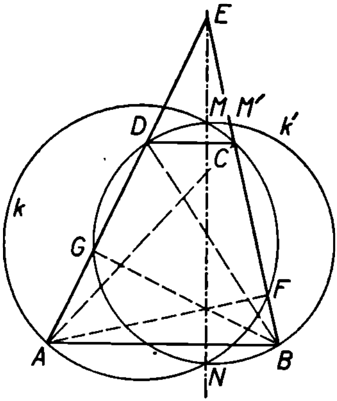
$$M_S = SK^2 = r^2 = SA.SB.$$

Z toho

$$SB = r^2 : SA.$$

Ale napsaný výraz je konstantní, nezávislý na volbě kružnice m, a bod B leží nutně na polopřímce SA (neboť mocnost bodu S je kladná) a proto bod B je neproměnný, pevný, jak jsme měli dokázat.

Kdyby bod A ležel uvnitř kružnice k, vyměnila by se úloha bodů A, B; důkaz by se prováděl stejným způsobem.



Obr. 36

8. Nad úhlopříčkami daného lichoběžníka $ABCD$ jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice. Jejich společná tětiva MN prochází (v prodloužení) průsečíkem různoběžných stran. Dokažte.

Řešení (obr. 36). Označme F průsečík kružnice k, sestrojené nad úhlopříčkou AC, s ramenem BC, a G průsečík kružnice k', sestrojené nad průměrem BD, s ramenem AD. Je patrno, že

$$\sphericalangle AGB = \sphericalangle AFB = 90^\circ,$$

a proto body F, G leží na kružnici opsané nad průměrem AB. (Čtyřúhelník $ABFG$ je tětivový.)

Jeden z průsečíků kružnic k, k' označme N. Přímka EN protne kružnici k v bodě M a kružnici k' v bodě M'. Ukážeme, že $M \equiv M'$, a tím bude důkaz proveden.

Mocnosti bodu E ke kružnicím k, k' po řadě jsou:

$$M_E = EM.EN = EC.EF, \tag{a}$$

$$M'_E = EM'.EN = ED.EG. \tag{b}$$

Mocnost M bodu E vzhledem k pomocné kružnici nad průměrem AB je

$$M = EA.EG = EB.EF. \tag{c}$$

Poněvadž strany AB, CD jsou rovnoběžné, lze psát

$$EC : EB = ED : EA,$$

tj.

$$EA.EC = EB.ED. \tag{d}$$

Z rovnic (c), (d) lze dostat rovnici

$$EG : EC = EF : ED$$

čili

$$EG.ED = EC.EF.$$

Avšak součiny v této rovnici jsou mocnosti M_E, M'_E. Tedy

$$M_E = M'_E$$

a po dosazení

$$EM.EN = EM'.EN \quad \text{čili} \quad EM = EM'.$$

Avšak body M, M' leží na polopřímce EN a tudíž $M \equiv \equiv M'$, jak jsme měli dokázat.

Zde platí i věta obrácená.

9. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Jestliže společná tětiva kružnice k sestrojené nad průměrem AC a kružnice k'

sestrojené nad průměrem BD prochází průsečíkem E stran AD, BC, je daný čtyřúhelník lichoběžníkem.

Důkaz. Mocnost bodu E, který leží na chordále kružnic k, k', je

$$M_E = EM.EN = EC.EF = ED.EG.$$

Z toho máme úměru

$$ED : EC = EF : EG.$$

Z toho usuzujeme, že čtyřúhelník $CDGF$ je tětivový. Ale čtyřúhelník $ABFG$ je také tětivový, neboť

$$\sphericalangle GAB = 180° - \sphericalangle GFB = \sphericalangle GFC = 180° - \sphericalangle GDC,$$

což znamená, že strany AB, CD jsou vzájemně rovnoběžné, jak jsme chtěli dokázat.

Cvičení

1. Co vyplňují všechny body, jejichž mocnost k dané kružnici je stále táž?

2. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$. Sestrojte množinu všech bodů, které mají k této kružnici mocnost r^2; $2r^2$; $-\frac{1}{2}r^2$; $-\frac{1}{4}r^2$.

3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$. Najděte bod, jehož mocnost k první kružnici je r_2^2 a k druhé $2r_1^2$. Proveďte diskusi.

4. Jsou dány tři kružnice, z nichž žádné dvě nejsou soustředné a každá protíná druhé vždy ve dvou různých bodech. Ukažte, že chordály první a druhé kružnice, druhé a třetí, první a třetí procházejí jediným bodem.

Platí věta i tehdy, když všechny tři kružnice mají své středy v přímce?

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod A ležící vně této kružnice. Nechť MN je libovolný průměr kružnice k, a to takový, že body A, M, N jsou vrcholy trojúhelníka. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhleníku AMN prochází kromě bodu A ještě dalším pevným bodem, který nezávisí na volbě průměru MN. (Návod: Uvažujte mocnost bodu S ke kružnici opsané trojúhelníku AMN.)

Poznámka. Dá se ukázat, že $AM^2 + AN^2 = $ konst. (Viz partii o těžnici.)

6. Je dána pevná kružnice $k \equiv (S, r)$ a na ní pevný bod A. V něm je ke kružnici sestrojena tečna t a na ní zvolen bod B tak, aby $AB = d \neq 0$. Pak je sestrojena libovolná kružnice $k' \equiv (S', r')$ dotýkající se v bodě B přímky t a protínající kružnici k v různých bodech C, D. Předpokládáme, že útvary k, A, d jsou nepromĕnné.

a) Dokažte, že přímka CD prochází pevným bodem.
b) Najděte množinu všech středů úseček SS'.
c) Najděte množinu všech průsečíků přímek SS', CD.
d) Zjistěte, jaký je vztah mezi poloměry uvažovaných kružnic a délkou d, jestliže se kružnice protínají kolmo.

7. Je dán trojúhelník ABC. Nad těžnicemi AA', BB' jako nad průměry jsou opsány kružnice. Dokažte, že jejich chordála je výška daného trojúhelníka, jdoucí vrcholem C.

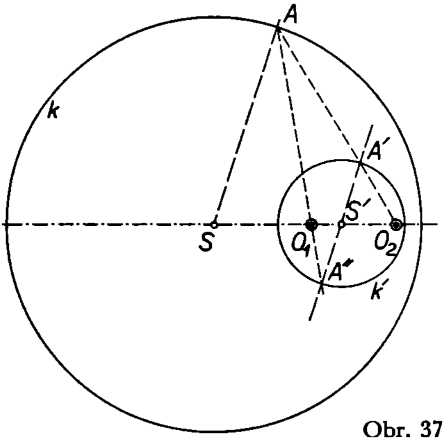
8. V dané kružnici $k \equiv (S, r)$ jsou dány dvě tětivy kolmo se protínající v bodě E, který je vnitřním bodem kružnice. Tím je jedna tětiva rozdělena na dva úseky, jejichž délky jsou a, b a druhá na dva úseky délek c, d. Ukažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2.$$

4. kapitola

PŘÍKLADY ŘEŠENÉ JINAK, ZEJMÉNA STEJNOLEHLOSTÍ

Víme, že každé dvě kružnice různých poloměrů mají dva středy stejnolehlosti. Jestliže obě kružnice nemají žádný společný bod a jedna leží vně druhé, pak jeden střed stejnolehlosti je průsečík vnějších tečen a druhý je průsečík vnitřních tečen. Rozumí se, že oba leží na středné. Jestliže kružnice mají vnější nebo vnitřní dotyk, je jedním středem stejnolehlosti společný bod. Jestliže kružnice nemají žádný společný bod a jedna leží uvnitř druhé, dostaneme oba středy stejnolehlosti známou kon-



Obr. 37

strukcí, která je provedena v obr. 37. K tomu jen připomeneme, že přímka SA je rovnoběžná s přímkou $A'A''$.

Příklady

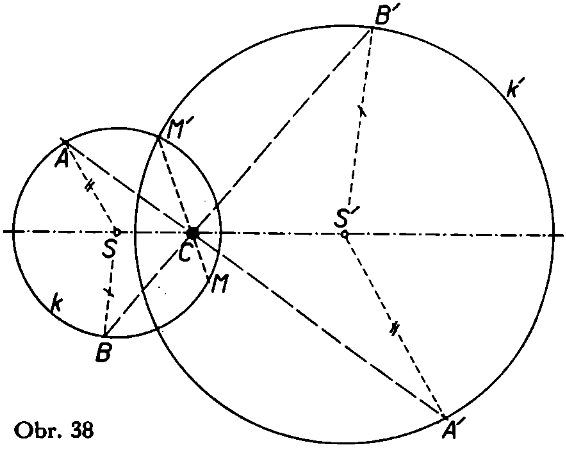
1. K dané kružnici k sestrojte kružnici k' s ní stejnolehlou pro střed stejnolehlosti v bodě C a pro koeficient stejnolehlosti λ.

Řešení (obr. 38). O středu S' hledané kružnice k' platí

$$CS' = |\lambda| . CS, \quad \lambda \neq 0.$$

Je-li $\lambda > 0$, bod S' leží na polopřímce CS; je-li $\lambda < 0$, bod S' leží na opačné polopřímce. Poloměr hledané kružnice je

$$r' = |\lambda| r.$$



Obr. 38

Podle toho kružnici k' snadno sestrojíme. (V obr. 38 je $\lambda = -2$.)

V obr. 38 si všimněme ještě jedné věci. Libovolnému bodu A na kružnici k odpovídá v naší stejnolehlosti bod A' na kružnici k', a to tak, že

$$CA' = |\lambda| . CA$$

a přitom současně $SA \| S'A'$. Obráceně, bodu B' na kružnici k' odpovídá bod B na kružnici k, a to tak, že

$$|\lambda| . CB = CB'$$

a současně platí $SB \| S'B'$. To platí i pro bod M', který je průsečíkem kružnic k, k'. Jemu, jakožto bodu kružnice k', v naší stejnolehlosti odpovídá bod M na kružnici k tak, že

$$CM' = |\lambda| CM.$$

Tato okolnost nás přivádí k řešení následujícího příkladu.

2. Je dána kružnice k a uvnitř ní bod C. Bodem C veďte sečnu tak, aby o jejích průsečících X, X' s danou kružnicí platilo

$$CX' = 2 . CX.$$

Řešení. Daný bod C považujme za střed stejnolehlosti, jejíž koeficient je 2. V této stejnolehlosti sestrojme kružnici k' jako obraz kružnice k. Průsečíky X', Y' kružnic k, k' jsou krajní body žádaných tětiv.

Důkaz správnosti popsané konstrukce provedeme takto. Přímka CX' protne kružnici k v bodě X, který je vzorem bodu X' v uvažované stejnolehlosti. Proto platí

$$2 . CX = CX',$$

jak bylo úlohou požadováno. Totéž platí i o druhé tětivě YY'.

Příklad má dvě různá řešení právě tehdy, když $SC > \frac{1}{3} r$. Jestliže $SC = \frac{1}{3} r$, kružnice k, k' se vzájemně dotýkají a je pouze jedno řešení. Jestliže posléze $SC < \frac{1}{3} r$, řešení neexistuje.

3. Jsou dány dvě kružnice k k', mající vnější dotyk v bodě T. Bodem T je vedena libovolná přímka, která kružnice k, k' protne po řadě v bodech $A \neq T$, $A' \neq T$. Tečna kružnice k v bodě A a tečna kružnice k' v bodě A' jsou navzájem rovnoběžné. Dokažte.

Řešení. Bod T je střed stejnolehlosti obou kružnic. Bod A' je obrazem bodu A v této stejnolehlosti a proto obě zmíněné tečny jsou vzájemně rovnoběžné.

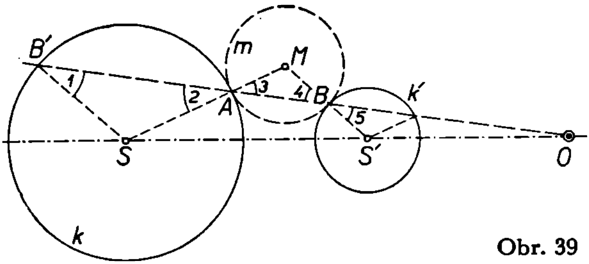
4. Jsou dány dvě kružnice k, k' v takové poloze, že každá z nich leží vně druhé. Sestrojme kružnici m o středu M, která se jich dotýká po řadě v bodech A, B. Jestliže kružnice m má s oběma danými vnější dotyk nebo s oběma vnitřní dotyk, prochází přímka AB pevným bodem O nezávislým na volbě kružnice m. Má-li kružnice m právě s jednou z daných kružnic vnitřní dotyk, prochází přímka AB pevným bodem $O' \neq O$. Dokažte. Jak se toto tvrzení změní, jsou-li kružnice k, k' shodné?

Řešení (obr. 39). Zvolme libovolnou kružnici m, která s oběma danými má vnější dotyk. Přímka AB protne kružnici k ještě v bodě B' a střednou SS' daných kružnic v bodě O. Nyní platí

$$\sphericalangle SB'A = \sphericalangle SAB' = \sphericalangle MAB = \sphericalangle ABM = \sphericalangle OBS'$$

a proto přímky BS', SB' jsou vzájemně rovnoběžné a přímka BB' prochází vnějším středem O stejnolehlosti kružnic k, k'.

Sami si už narýsujte obrázek a dokažte, že v druhém případě bod O' je vnitřní střed stejnolehlosti kružnic k, k'.



Obr. 39

Jestliže dané kružnice k, k' jsou shodné, potom vnější střed stejnolehlosti O neexistuje a přímka AB je rovnoběžná se střednou SS' nezávisle na zvolené kružnici m, která má s oběma danými kružnicemi buď vnější, nebo vnitřní dotyk. Vnitřní střed stejnolehlosti ovšem existuje a jím prochází každá přímka AB, kterou dříve popsaným způsobem dostaneme z kružnice m, mající právě s jednou z daných kružnic vnitřní dotyk.

5. Nechť dvě kružnice k, k' mají společné právě dva různé body A, B. Bodem A veďme přímku tak, aby v obou kružnicích vytínala shodné tětivy.

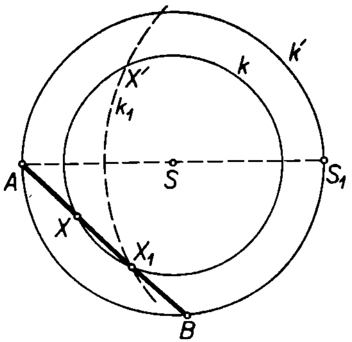
Řešení. Sestrojme kružnici k_1, která je souměrně sdružená s kružnicí k podle středu souměrnosti A. Kružnice k_1 protne kružnici k' v bodě X'. Přímka AX' je hledaná přímka.

Kružnice k_1, k' mají skutečně společné dva různé body A, X'. Kdyby totiž měly společný pouze bod A, kružnice k_1, k' by se vzájemně dotýkaly, ale potom by se dotýkaly i kružnice k, k', což by bylo proti předpokladu.

Popsaná konstrukce je skutečně správná. Bodu X' jako bodu kružnice k' odpovídá v užité středové souměrnosti bod X na kružnici k a na přímce AX'. Proto také $AX = AX'$.

Tak, jak je příklad formulován, existuje právě jedno řešení.

6. Jsou dány dvě soustředné a různé kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S, r')$. Na vnější je zvolen bod A. Tímto bodem se má proložit přímka p tak, aby její tětiva ve větší kružnici byla menší kružnicí rozdělena na tři stejné díly.



Obr. 40

Řešení (obr. 40). Ke kružnici k (je to vnitřní kružnice) sestrojme kružnici k_1 stejnolehlou podle středu A a o koeficientu 2. Kružnice k_1 protne kružnici k v bodě X_1.

Přímka AX_1 vyhovuje naší úloze. Skutečně, bodu X_1 na kružnici k_1 odpovídá ve zmíněné stejnolehlosti bod X na přímce AX_1 a na kružnici k, a to tak, že

$$AX_1 : AX = 2 : 1.$$

Tedy

$$AX = XX_1,$$

a ze souměrnosti obou kružnic platí též

$$AX = XX_1 = BX_1,$$

kde B je druhý průsečík přímky AX_1 s kružnicí k'.

Příklad má dvě různá řešení, pokud $r > \frac{1}{3} r'$. Jestliže $r = \frac{1}{3} r'$, má příklad jediné řešení (je to průměr AS). Jestliže $r < \frac{1}{3} r'$, neexistuje žádné řešení.

7. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$ a mimo ně bod P. Sestrojte tečnu t kružnice k a tečnu t' kružnice k' tak, aby obě tyto tečny byly vzájemně rovnoběžné a aby vzdálenosti bodu P od těchto dvou tečen byly v poměru $m : n$.

Řešení (obr. 41). Body dotyku tečen t, t' s kružnicemi k, k' označme po řadě T, T'. Paty kolmic, spuštěných z bodu P na tečny t, t', označme postupně U, V. Požadavek úlohy je

$$PU : PV = m : n.$$

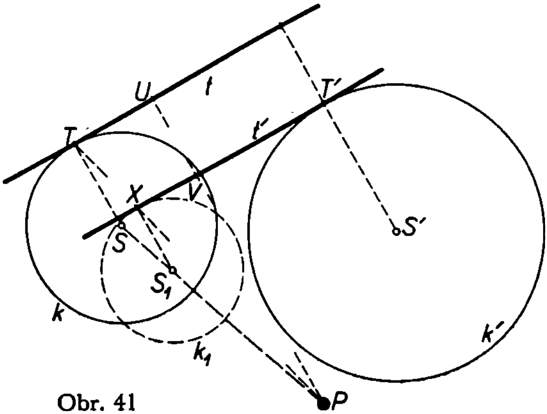
Přímka PT protne tečnu t' v bodě X a platí

$$PU : PV = PT : PX = m : n.$$

Sestrojme nyní pomocnou kružnici k_1, která je stejnolehlá s kružnicí k podle středu stejnolehlosti P a přitom koeficient stejnolehlosti je $m : n$. Kružnice k_1 se v bodě X dotýká přímky t'.

Konstrukce tečen t, t' je podle toho takováto: Sestrojíme kružnici k_1. Společná tečna kružnic k_1, k' je tečna t'. Tečna t v bodě T, který ve stejnolehlosti odpovídá bodu X, je pak s ní rovnoběžná.

Správnost konstrukce vyplývá z předešlého.

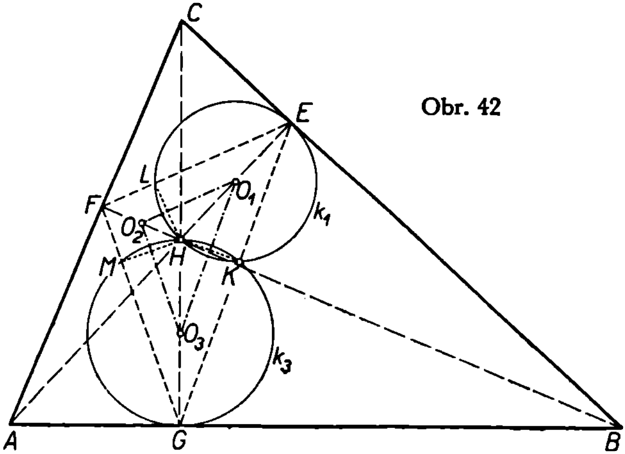


Obr. 41

Počet řešení závisí na počtu společných tečen kružnic k_1, k'. Podle toho může mít příklad nejvýše čtyři různá řešení (pokud ovšem $k_1 \neq k'$), a to tenkrát, když každá z kružnic k_1, k' leží vně druhé. Jestliže tyto dvě kružnice mají vnější dotyk, existují tři různá řešení; jestliže mají společné právě dvě různé tečny, existují dvě různá řešení, a jestliže mají vnitřní dotyk, existuje jediné řešení. Jestliže jedna z kružnic k_1, k' leží uvnitř druhé, neexistuje žádné řešení. Jestliže tečna t' je zároveň tečnou kružnice k', pak tečny t, t' splývají.

To jsme stále předpokládali, že kružnice k_1, k' jsou různé. Kdyby splývaly, pak by existovalo nesčíslně mnoho řešení.

8. Buďtež E, F, G paty výšek daného trojúhelníka ABC, který není pravoúhlý; ortocentrum označme H. Sestrojme kružnici nad průměry EH, FH, GH. Ukažte,



Obr. 42

že tětivy společné první a druhé kružnici, druhé a třetí, první a třetí jsou shodné.

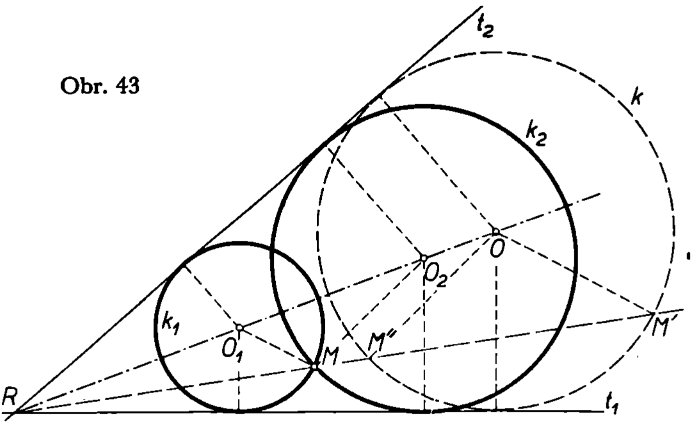
Řešení (obr. 42). Víme, že výšky daného trojúhelníka jsou osami úhlů ortického trojúhelníka EFG. Ortocentrum H má tedy od jeho stran EF, FG, EG shodné vzdálenosti. V obr. 42 jsou narýsovány jen dvě kružnic o průměrech GH (se středem O_3) a EH (se středem O_1). V trojúhelníku EGH je úsečka O_1O_3 střední příčkou a půlí proto vzdálenost vrcholu H od strany EG. Avšak úsečka O_1O_3 je zároveň středná uvažovaných dvou kružnic a proto půlí společnou tětivu kružnic k_1, k_3, tj. tětivu HK, kde K je druhý společný bod kružnic k_1, k_3. Tento bod K, jak plyne z předešlého, leží nutně na straně EG a platí o něm $HK \perp O_1O_3$ a tudíž také $HK \perp EG$. Totéž platí o kružnicích k_1, k_2 a jejich společné tětivě HL (resp. o kružnicích k_2, k_3 a jejich společné tětivě HM). Délky úseček HK, HL, HM jsou podle toho vzdálenosti bodu H od stran po řadě EG, EF, FG, a ty — jak jsme dříve uvedli — jsou shodné.

9. Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou různoběžných přímek t_1, t_2 a prochází přitom daným bodem M, který neleží na žádné z daných přímek.

Řešení (obr. 43). Hledaná kružnice k_1 je stejnolehlá s každou kružnicí k, dotýkající se daných dvou tečen. Střed stejnolehlosti je průsečík R přímek t_1, t_2. Danému bodu M přitom odpovídá bod M' na kružnici k.

Konstrukce hledané kružnice je pak tato. Nejdříve sestrojíme pomocnou kružnici k libovolného poloměru,

Obr. 43



která se dotýká přímek t_1, t_2; její střed označíme O. Na ní zjistíme bod M', který ve zmíněné stejnolehlosti odpovídá bodu M. Potom poloměru OM' odpovídá poloměr O_1M hledané kružnice k_1. Poněvadž střed O_1 leží na ose úhlu tečen t_1, t_2, je tím bod O_1 určen a je určena i kružnice k_1. (Rozumí se, že sestrojujeme osu toho úhlu tečen t_1, t_2, v němž leží bod M.)

Kružnice k_1 skutečně splňuje podmínky kladené úlohou. Především je obrazem kružnice k v použité stejnolehlosti a dotýká se proto přímek t_1, t_2. Poněvadž kružnice k prochází bodem M', musí kružnice k_1 procházet bodem M, který je obrazem bodu M' v uvedené stejnolehlosti.

Příklad má při dané formulaci dvě různá řešení, neboť bod M má na kružnici k za svůj vzor buď bod M', nebo M''.

10. Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou různoběžných tečen t_1, t_2 a dané kružnice $m \equiv (M, r)$.

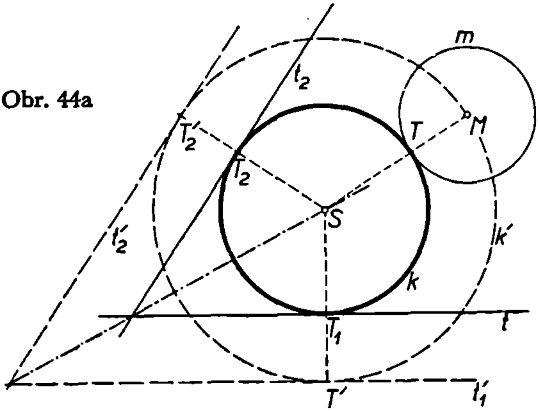
Řešení (obr. 44a, b) neprovedeme celé; spokojíme se s rozborem a s náznakem konstrukce. V obr. 44a má daná kružnice m s výslednou kružnicí k vnější dotyk. Sestrojme pomocnou kružnici k' tak, aby procházela bodem M a byla s kružnicí k soustředná. Kružnice k' se dotýká přímek t_1', t_2' rovnoběžných po řadě s přímkami t_1, t_2 a majících od středu S vzdálenost o r větší než dané přímky.

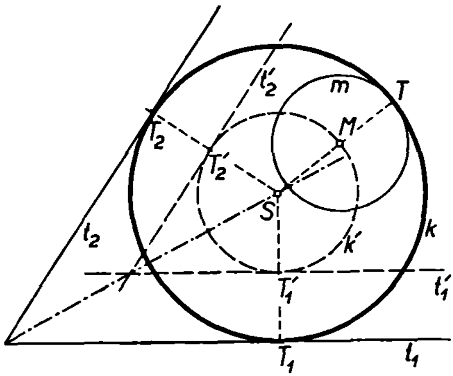
Podle toho stačí sestrojit přímky t'_1, t'_2 a pak kružnici k', která se těchto přímek dotýká a prochází přitom bodem M. Hledaná kružnice je s ní soustředná, ale poloměr má o r menší.

V obr. 44b má hledaná kružnice s danou kružnicí vnitřní dotyk. Pomocná kružnice k', která je s hledanou soustředná a prochází přitom bodem M, dotýká se přímek t_1', t_2', které jsou s přímkami t_1, t_2 rovnoběžné a od bodu S mají vzdálenost o r menší než je vzdálenost přímek t_1, t_2. Další si už čtenář odvodí sám.

Úloha může mít nejvýše čtyři různá řešení.

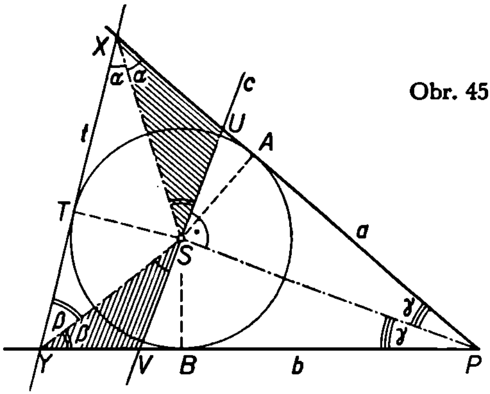
Obr. 44a





Obr. 44b

11. Je dána kružnice k o středu S a její dvě různoběžné tečny a, b, jejichž body dotyku po řadě označíme A, B; průsečík tečen je P. Sestrojme další tečnu t různou od tečen a, b, která protne tečnu a v bodě X a tečnu b v bodě Y. Sestrojme dále přímku c jdoucí středem S kolmo



Obr. 45

k přímce SP. Ta protne tečnu a v bodě U a tečnu b v bodě V. Dokažte, že platí $UX \cdot VY = SU^2$.

Řešení (obr. 45). Je nutné probrat dva případy. První je ten, kdy daná kružnice je uvnitř vepsána trojúhelníku XYP a druhý nastane, jestliže kružnice k je vně vepsána trojúhelníku XYP. Probereme jen případ první a druhý přenechám čtenáři.

V trojúhelníku XYP označme

$$\sphericalangle YXP = 2\alpha, \quad \sphericalangle XYP = 2\beta, \quad \sphericalangle XPY = 2\gamma.$$

O nich tedy platí

$$\alpha + \beta + \gamma = 90°.$$

V dalším dokážeme, že

$$\triangle SVY \sim \triangle XUS.$$

To provedeme takto:

$$\sphericalangle SYV = \beta, \qquad \sphericalangle SVY = 90° + \gamma.$$

Proto třetí úhel v trojúhelníku SVY má velikost α.

V trojúhelníku XUS mají vnitřní úhly potom tyto velikosti:

$$\sphericalangle SXU = \alpha, \qquad \sphericalangle SUX = 90° + \gamma,$$

a to stačí k důkazu tvrzení, že zmíněné trojúhelníky jsou podobné. Potom však můžeme psát

$$SV : UX = VY : SU,$$

tj.

$$SU.SV = UX.VY,$$

a to jsme měli dokázat.

12. Kružnice k', která prochází středy stran daného trojúhelníka ABC, prochází i patami výšek a středy úseček, omezených ortocentrem a vrcholy A, B, C. Její poloměr je roven polovině poloměru kružnice opsané danému trojúhelníku. (Je to tzv. kružnice devíti bodů nebo kružnice Eulerova, nebo též Feuerbachova.)

Důkaz (obr. 46). a) Středy stran daného trojúhelníka označme po řadě A', B', C' a paty výšek označme D (na straně BC), E (na AC), F (na AB). Střed kružnice k opsané trojúhelníku ABC je S. Je okamžitě zřejmé, že trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou stejnolehlé, neboť $AB \| A'B'$, $BC \| B'C'$ a $AC \| A'C'$. Střed této stejnolehlosti je jejich společné těžiště T a poměr stejnolehlosti je —2. Proto poloměr kružnice k', která je opsána trojúhelníku

$A'B'C'$, je roven polovině poloměru kružnice k, která je opsána trojúhelníku ABC.

b) Trojúhelník ACF je pravoúhlý a úsečka FB' je v něm těžnice, jdoucí vrcholem pravého úhlu. Proto

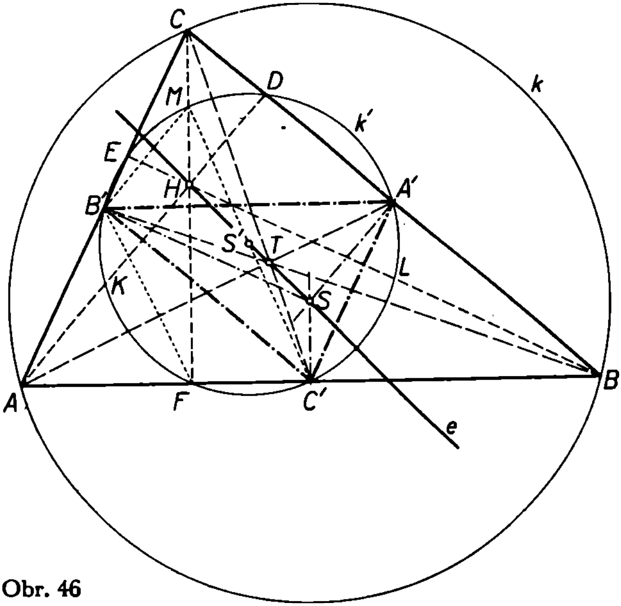
$$\tfrac{1}{2}AC = AB' = CB' = FB'.$$

Také však platí

$$\tfrac{1}{2}AC = A'C'$$

a proto

$$FB' = A'C'.$$



Obr. 46

Lichoběžník $FC'A'B'$ je tudíž rovnoramenný a lze mu tedy opsat kružnici. Ale to je kružnice k', čímž jsme dokázali, že bod F leží na kružnici k'. Podobně se dá ukázat, že i body D, E leží na kružnici k' a tím máme dokázánu další část vysloveného tvrzení.

c) Střed úsečky HC označme M. Úsečka MB' je střední příčka v trojúhelníku ADC a tudíž

$$MB' \parallel AD,$$

z čehož vyplývá, že

$$MB' \perp B'C'.$$

Nad přeponou MC' jsou podle toho sestrojeny dva pravoúhlé trojúhelníky, $MC'B'$, MFC'. Ty mají společnou opsanou kružnici, což je právě kružnice k'. Tím jsme dokázali, že bod M leží na kružnici k'. Podobně se dá dokázat, že i bod K (střed úsečky AH) a bod L (střed úsečky BH) leží na kružnici k', čímž je poslední část našeho tvrzení dokázána.

Důkaz byl proveden pro obecný trojúhelník. Věta však platí i pro trojúhelník pravoúhlý. V rovnoramenném trojúhelníku se kružnice devíti bodů dotýká základny a v trojúhelníku rovnostranném splývá s vepsanou kružnicí.

13. Kružnice k, k' z předešlého příkladu mají střed stejnolehlosti jednak ve společném těžišti T trojúhelníků ABC, $A'B'C'$, a jednak v ortocentru H daného trojúhelníka.

Důkaz (obr. 46). O bodu T jsme to dokázali v předešlém příkladě. Všimneme si proto jen bodu H. Uvažujme stejnolehlost se středem v bodě H a poměrem stejnolehlosti 2 : 1. V ní bodům A, B, C odpovídají po řadě body K, L, M a kružnici k, která prochází body A, B, C, odpovídá kružnice jdoucí body K, L, M; ale to je právě kružnice k'. Tedy kružnice k, k' si v uvažované stejnolehlosti odpovídají, jak jsme měli dokázat.

14. Označme (viz obr. 46) $AH = v'_a$, $HD = v''_a$; $BH = v'_b$, $HE = v''_b$; $CH = v'_c$, $HF = v''_c$. Dokažte, že

$$v'_a . v''_a = v'_b . v''_b = v'_c . v''_c .$$

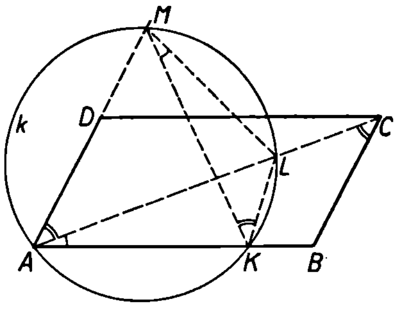
Důkaz. Mocnost bodu H vzhledem ke kružnici k' je

$$M = HK . HD = HL . HE = HM . HF. \qquad (1)$$

Ale

$$HK = \tfrac{1}{2} AH = \tfrac{1}{2} v'_a, \quad HD = v''_a \text{ atd.}$$

Po dosazení do (1) dostaneme daný vztah.



Obr. 47

15. Je dán rovnoběžník $ABCD$ a kružnice k obsahující jeho vrchol A. Nechť polopřímky AB, AC, AD jsou touto kružnicí proťaty po řadě ještě v bodech K, L, M. Dokažte, že platí

$$AC . AL = AB . AK + AD . AM.$$

Důkaz (obr. 47). Čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový a platí tedy o něm Ptolemaiova věta:

$$AL.MK = AK.LM + AM.KL. \qquad (1)$$

Trojúhelníky ABC, MLK jsou podobné, neboť

$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle KAL = \sphericalangle KML,$$
$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle MAL = \sphericalangle MKL.$$

O stranách těchto trojúhelníků tudíž platí

$$AB : AC = LM : MK,$$
$$BC : AC = KL : MK.$$

Z těchto rovnic vyjádříme LM, KL a po dosazení do (1) obdržíme žádaný vztah.

16. Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (O_1, r_1)$, $k_2 \equiv (O_2, r_2)$, $k_3 \equiv (O_3, r_3)$. Nechť každé dvě z nich mají vnější dotyk a nechť kružnice k_1, k_2 (k_1, k_3; k_2, k_3) se dotýkají v bodech T_3 (T_2; T_1). Přímka T_1T_3 (T_2T_3) protíná kružnici k_3 ještě v bodě K (L). Ukažte, že úsečka KL je průměrem kružnice k_3.

Důkaz. Kružnice k_2, k_3 jsou navzájem stejnolehlé podle středu stejnolehlosti T_1. V této stejnolehlosti odpovídá úsečce O_2T_3 úsečka O_3K. Platí tedy $O_3K \| O_1O_2$. Podobně dokážeme, že i $LO_3 \| O_1O_2$ a jsme s důkazem hotovi.

17. Je dán ostrý úhel α o vrcholu V a na jeho ose souměrnosti je dán bod O, nesplývající s vrcholem V. Kolem bodu O opište kružnici tak, aby její poloměr byl menší než OV a aby její průsečíky s oběma rameny určovaly lichoběžník daného obsahu k^2.

Řešení. Hledaná kružnice protne jedno rameno úhlu v bodech A, B a druhé rameno v bodech C, D. Lichoběžník je $ABCD$. Paty kolmic, spuštěných z bodu O na ramena daného úhlu, označme K (na rameni AB) a L (na CD). Úsečka KL je střední příčka lichoběžníka a protíná osu úhlu v bodě M. Výšku lichoběžníka označme v. Potom pro obsah lichoběžníka platí

$$P = KL.v = k^2, \quad \text{tj.} \quad v = k^2 : KL.$$

Ze získaného vzorce můžeme snadno sestrojit výšku v, její polovinu naneseme od bodu M v obou směrech na osu úhlu a takto získanými body procházejí základny lichoběžníka (kolmo k ose).

Je-li N střed kratší základny lichoběžníka, platí

$$ON < OV.$$

Ale

$$ON = \tfrac{1}{2}v + OM = \frac{k^2}{2.KL} + OV.\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

a proto

$$\frac{k^2}{2.KL} + OV.\sin^2\frac{\alpha}{2} < OV.$$

Z toho

$$k^2 < 2.KL.OV.\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

a to je podmínka řešitelnosti.

Cvičení

1. Dvě shodné úsečky AB, CD svírají ostrý úhel α a mají společný vnitřní bod R takový, že trojúhelníky ACR, BDR jsou rovnoramenné. Do těchto trojúhelníků jsou ve-

psány kružnice. Dokažte, že součet délek obou kružnic je nezávislý na délce AR.

2. Dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ mají společné právě dva různé body A, B. Přímka AS_1 protne kružnici k_1 v bodě B_1 a přímka AS_2 protne k_2 v bodě B_2. Přímka B_1B_2 prochází bodem B a je rovnoběžná s přímkou S_1S_2. Dokažte.

3. Je dána kružnice k a její dvě různé, vzájemně rovnoběžné tečny a, b, jejichž body dotyku jsou po řadě A, B. Zvolme další tečnu t kružnice k, různoběžnou s tečnami a, b, která tečny a, b protne postupně v bodech K, L. Dokažte, že součin $AK . BL$ je nezávislý na poloze tečny t.

4. Do rovnoramenného trojúhelníka je vepsána kružnice k. Pak je sestrojena kružnice k_1 menšího poloměru, která se dotýká obou ramen daného trojúhelníka a kružnice k. Vypočtěte poloměr kružnice k_1.

5. Do rovnostranného trojúhelníka jsou vepsány tři kružnice takové, že každá z nich se dotýká dvou stran trojúhelníka a druhých dvou kružnic. Vypočtěte poloměr těchto kružnic.

6. Z řešení příkladu 13 je patrno, že střed kružnice opsané danému trojúhelníku, těžiště a ortocentrum tohoto trojúhelníka leží v přímce (Eulerova přímka). Proveďte podrobně. Jaký je poměr $TS : TH$?

7. Zjistěte, zda vztah dokázaný v příkladě 15 platí i tehdy, když kružnice k protne úsečky AB, AC, AD v bodech na prodloužení za bod A.

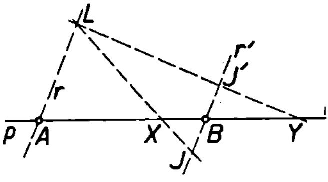
5. kapitola

KRUŽNICE JAKO MNOŽINA BODŮ

I. Je dána přímka p a na ní dva různé body A, B. Tu platí:

Věta 12. *Na přímce p existují právě dva různé body X, Y, které od bodů A, B (v tomto pořadí) mají daný poměr vzdáleností $\lambda \neq 0, 1$. Pro $\lambda = 1$ existuje jediný bod této vlastnosti (střed úsečky AB); hodnotě $\lambda = 0$ odpovídá sám bod A.*

Důkaz (obr. 48) provedeme prostě tak, že tyto dva body sestrojíme. Za tím účelem proložme bodem A přímku $r \neq p$ a bodem B přímku $r' \| r$. Na přímce r určeme bod L tak, aby $AL = \lambda$ a na přímce r' určeme dva různé body J, J' tak, aby $BJ = BJ' = 1$. Pak přímky LJ, LJ' vytnou na přímce p žádané body X, Y, z nichž jeden je mezi body A, B a druhý na prodloužení úsečky AB.



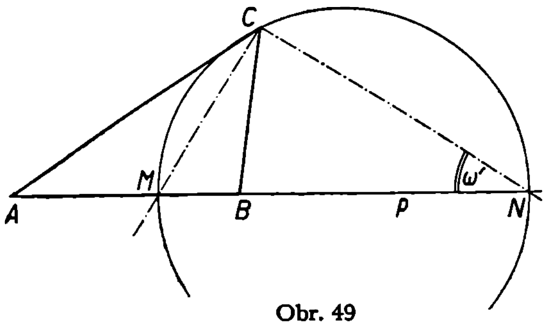
Obr. 48

Důkaz správnosti této konstrukce plyne z podobnosti trojúhelníků XAL, XBJ, případně YAL, YBJ'.

Jestliže $\lambda = 1$, potom popsaná konstrukce nás přivede k jedinému bodu — středu úsečky AB.

Jestliže posléze $\lambda = 0 = 0 : 1$, dostaneme jediný bod — bod A.

Věta 13. *Osa vnitřního (vnějšího) úhlu protne protější stranu daného trojúhelníka v bodě M (N), o němž platí $AM : BM = b : a$ ($AN : BN = b : a$).*



Obr. 49

D ů k a z provedeme pro osu vnitřního úhlu při vrcholu C. V obr. 49 je dán trojúhelník ABC; osa úhlu ACB protíná stranu AB v bodě M. Daný trojúhelník je rozdělen na dva trojúhelníky AMC, BMC. Použijeme-li sinové věty, dostaneme z prvního a z druhého trojúhelníka ($\omega = \sphericalangle BMC$)

$$AM = AC . \sin \frac{\gamma}{2} : \sin \omega,$$

$$BM = BC . \sin \frac{\gamma}{2} : \sin \omega.$$

Z těchto dvou rovnic již máme

$$AM : BM = AC : BC = b : a.$$

Tím je věta dokázána pro osu vnitřního úhlu, neboť stejným způsobem se dá dokázat pro osy vnitřních úhlů CAB, CBA.

Osa vnějšího úhlu při vrcholu C protne protilehlou stranu v bodě N, který je na prodloužení úsečky AB. Označíme-li $\sphericalangle CNB = \omega'$, pak z trojúhelníků ANC, BNC užitím sinové věty obdržíme

$$AN : AC = \sin\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) : \sin\omega',$$

$$BN : BC = \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) : \sin\omega'.$$

Z těchto dvou rovnic dělením dojdeme k výsledku

$$AN : BN = b : a.$$

Platí však i věta obrácená:

Věta 13'. *Jestliže přímka CM dělí stranu AB trojúhelníka ABC v poměru $AM : BM = b : a$, pak tato přímka je buď osou vnitřního, nebo osou vnějšího úhlu při vrcholu C podle toho, zda bod M leží mezi body A, B, nebo na prodloužené úsečce AB.*

Důkaz. a) Jestliže $AM : BM = 1$ a bod M leží mezi body A, B, znamená to, že $a = b$ a věta je pravdivá.

b) Nechť $AM : BM \neq 1$ a bod M leží mezi body A, B. Osa vnitřního úhlu ACB protne stranu AB v bodě M', o němž platí

$$AM' : BM' = b : a.$$

To však je možné jedině tak, že $M' \equiv M$ a věta je pravdivá i v tomto případě.

Podobně se provede důkaz v případě, že bod M leží na prodloužení úsečky AB, ale poměr $AM : BM \neq 0, 1$.

Věta 14. *Množina všech bodů, které mají od dvou pevných a různých bodů stále stejný poměr vzdáleností $m : n$ (různý od 0 a 1), je kružnice zvaná Apolloniova.*

D ů k a z (obr. 49). Dané dva různé body označme A, B. Ty leží na přímce p. Na ní existují, jak víme, dva různé body M, N, o nichž platí

$$AM : BM = m : n, \quad (1)$$
$$AN : BN = m : n,$$

kde poměr $m : n$ je dán. Body M, N náleží naší množině bodů.

Nechť bod C, který neleží na přímce AB, náleží uvažované množině bodů. Pak platí

$$AC : BC = m : n. \quad (2)$$

Poněvadž body A, B, C můžeme považovat za vrcholy trojúhelníka, plyne z rovnic (1) a (2) za použití věty *13'*, že přímka CM je osou vnitřního úhlu a přímka CN je osa vnějšího úhlu v trojúhelníku ABC. Avšak potom přímky CM, CN jsou navzájem kolmé a bod C je bodem kružnice k sestrojené nad průměrem MN.

Obráceně. Zvolme na kružnici k libovolný bod $C' \neq M$, N a spojme jej s body A, B. Dostaneme tak trojúhelník ABC'. Přímka MC' rozdělí vnitřní úhel $AC'B$ na dva:

$$\sphericalangle AC'M = \gamma_1, \quad \sphericalangle BC'M = \gamma_2.$$

Rozumí se, že

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma = \sphericalangle AC'B < 180°. \quad (1)$$

Písmenem v označme ještě výšku trojúhelníka ABC' jdoucí vrcholem C'. Obsah trojúhelníka AMC' lze vyjádřit dvěma způsoby:

$$\tfrac{1}{2}\,AM.v = \tfrac{1}{2}\,AC'.MC' \sin\gamma_1.$$

Podobně obsah trojúhelníka BMC' lze vyjádřit dvěma způsoby:

$$\tfrac{1}{2}\,BM.v = \tfrac{1}{2}\,BC'.MC' \sin\gamma_2. \qquad (1')$$

Z těchto dvou rovnic získáme novou

$$AM : BM = AC' \sin\gamma_1 : BC' \sin\gamma_2. \qquad (2)$$

Podobně z trojúhelníků ANC', BNC' dostaneme

$$AN : BN = AC' \sin(90^\circ + \gamma_1) : BC' \sin(90^\circ - \gamma_2) =$$
$$= AC' \cos\gamma_1 : BC' \cos\gamma_2. \qquad (3)$$

Víme však, že

$$AM : BM = AN : BN = m : n$$

a proto z rovnice (2) a (3) dostaneme další rovnici

$$\sin\gamma_1 : \sin\gamma_2 = \cos\gamma_1 : \cos\gamma_2$$

čili

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\gamma_2.$$

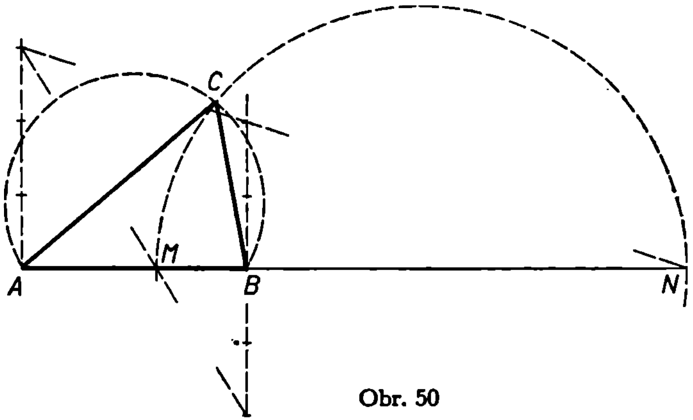
S ohledem na rovnici (1) docházíme k vztahu

$$\gamma_1 = \gamma_2,$$

tj. přímka MC' je osou vnitřního úhlu trojúhelníka ABC' a přímka NC' je osou vnějšího úhlu. Bod C' je bodem uvažované množiny. Tím je také důkaz vyslovené věty proveden.

Příklady

1. Sestrojte trojúhelník, v němž $c = 6$, $\gamma = 60°$, $a:b = 2:3$.



Obr. 50

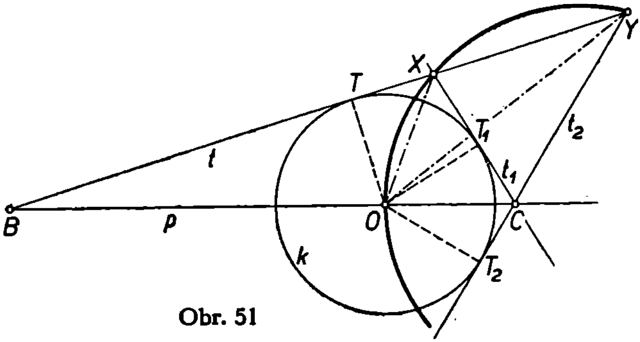
Řešení (obr. 50). Vrchol C hledaného trojúhelníka ABC musí ležet na tom oblouku kružnice k, z jehož bodů je úsečku AB vidět pod úhlem 60°. Potom leží i na Apolloniově kružnici opsané nad průměrem MN, přičemž body M, N jsou určeny vztahy

$$AM : BM = 3 : 2, \quad AN : BN = 3 : 2.$$

Poněvadž bodové dvojice A, B; M, N se vzájemně oddělují, má úloha vždy řešení, a to (až na řešení souměrné) jediné.

2. Na dané přímce p jsou dány tři různé body B, O, C v tomto pořadí. Kolem bodu O je opsána kružnice k libovolným poloměrem, ale tak, aby body B, C ležely buď vně této kružnice, nebo jeden vně (vzdálenější od O) a druhý na kružnici (bližší bodu O). Z bodů B, C jsou k ní sestrojeny tečny, které se protnou v bodě X. Jaká je množina všech bodů X, mění-li kružnice k svůj poloměr?

Řešení (obr. 51). a) Jestliže $BO = CO$, pak množinou všech bodů dané vlastnosti je osa úsečky BC s výjimkou bodu O.



Obr. 51

b) Věnujme tedy pozornost případu, kdy $BO \neq CO$. Z bodu B sestrojme jednu tečnu kružnice k (v obr. je to tečna t) a z bodu C sestrojme obě a označme je t_1, t_2. Jejich body dotyku jsou T_1, T_2. Průsečík přímek t, t_1 je X. V trojúhelníku BCX je přímka XO osou vnitřního úhlu BXC, neboť čtyřúhelník $OTXT_1$ je deltoid. Proto platí

$$BX : CX = BO : CO$$

a bod X leží na Apolloniově kružnici příslušné úsečce BC; poměr vzdáleností je roven $BO : CO$.

Podobně tečny t, t_2 se protínají v bodě Y, o němž platí

$$BY : CY = BO : CO,$$

neboť přímka YO je osou vnitřního úhlu trojúhelníka BYC. Tudíž i bod Y leží na téže Apolloniově kružnici jako bod X.

Obráceně. Zvolme na Apolloniově kružnici libovolný bod X' neležící na přímce p. Přímka OX' je osou úhlu trojúhelníka BCX' a proto existuje (jediná) kružnice se středem O dotýkající se přímek BO', CO'.

Došli jsme tak k výsledku:

Množinou všech průsečíků uvažovaných tečen je Apolloniova kružnice, jejíž každý bod má tu vlastnost, že poměr jeho vzdáleností od bodů B, C je roven $BO : CO$. Do této množiny nesmíme počítat průsečíky Apolloniovy kružnice s přímkou BC.

3. Jsou dány dvě kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$, z nichž každá leží vně druhé. Najděte množinu všech bodů, z nichž vidíme tyto dvě kružnice pod úhlem konstantní velikosti.

Řešení. a) Jestliže jsou obě kružnice shodné, pak hledanou množinou je ta osa souměrnosti obou kružnic, která půlí jejich střednou.

b) Mějme tedy kružnice různých poloměrů a nechť bod M náleží hledané množině bodů. Veďme z něho tečny t, u ke kružnici k a tečny t', u' ke kružnici k'. Body dotyku označíme postupně T, U, T', U'. Podle daného platí (obr. 52)

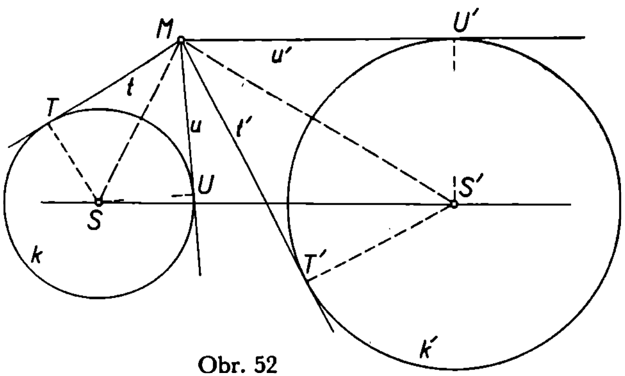
$$\sphericalangle tu = \sphericalangle t'u' = 2\omega < 180°.$$

Přímky MS, MS' půlí úhly těchto tečen. Z pravoúhlých trojúhelníků MST, $MS'T'$ vyplývá

$$MS . \sin \omega = r, \quad MS' . \sin \omega = r'$$

a z toho

$$MS : MS' = r : r'.$$



Obr. 52

Bod M leží podle toho na Apolloniově kružnici, která je množinou všech bodů, jež mají od bodů S, S' poměr vzdáleností rovný $r : r'$.

Obráceně, zvolme na této kružnici libovolný bod M'. Poněvadž je bodem Apolloniovy kružnice, platí

$$SM' : S'M' = r : r'. \tag{1}$$

Z bodu M' sestrojené tečny ke kružnici k svírají úhel $2\omega < 180°$ a tečny sestrojené z téhož bodu ke kružnici k svírají úhel $2\omega' < 180°$. Platí proto

$$SM' . \sin \omega = r, \qquad S'M' . \sin \omega' = r'.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice (1), dostaneme

$$\sin \omega = \sin \omega'.$$

Poněvadž však

$$2\omega < 180°, \text{ tj. } \omega < 90°,$$
$$2\omega' < 180°, \text{ tj. } \omega' < 90°,$$

plyne z toho, že

$$\omega = \omega'.$$

Došli jsme tak k výsledku: Množinou všech bodů, z nichž jsou vidět dvě kružnice různých poloměrů, z nichž každá leží vně druhé, pod konstantním úhlem, je Apolloniova kružnice, která má oba středy stejnolehlosti daných kružnic za průměr. (Viz cvič. 20.)

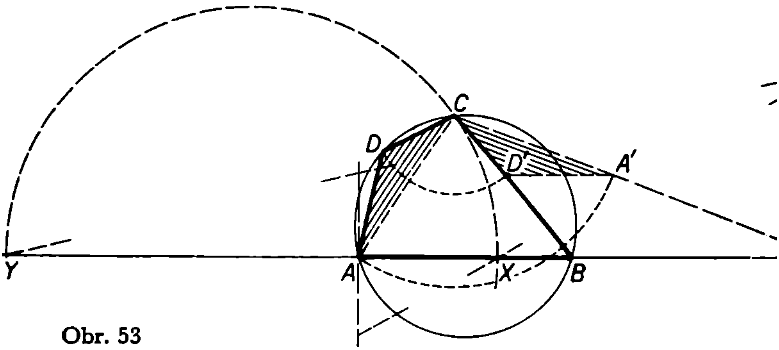
4. Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jestliže jsou dány délky jeho stran: $AB = a = 6$, $BC = b = 5{,}2$, $CD = c = 2{,}2$, $AD = d = 3$.

Řešení (obr. 53). Trojúhelník ACD otočme kolem vrcholu C tak, aby polopřímka CD splynula s polopřímkou CB. Vrchol D tím přejde v bod D' na polopřímce CB a bod A přejde do bodu A'. Platí tedy

$$\triangle CDA \cong \triangle CD'A'.$$

Poněvadž protější úhly ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou výplňkové, je $D'A' \parallel BE$, kde E je průsečík přímky CA' s přímkou AB. Potom však

$$\triangle CD'A' \sim \triangle CBE$$



Obr. 53

a odtud $\qquad CD' : D'A' = CB : BE.$

Stručnější zápis je

$$c : d = b : BE, \quad \text{tj.} \quad BE = \frac{b.d}{c}.$$

Známe tedy délku úsečky BE. Počítejme ještě poměr

$$AC : EC = A'C : EC = D'C : BC = c : b.$$

Podle toho vrchol C má poměr vzdáleností od bodů A, E roven poměru $c : b$ a leží tudíž na Apolloniově kružnici, která vzdálenost bodů A, E dělí v poměru $c : b$.

Z předchozí úvahy plyne tato konstrukce:

a) Sestrojíme úsečku $BE = \dfrac{b.d}{c}$ a pak na libovolné přímce určíme body A, B, E tak, aby $AB = a$, $BE = \dfrac{b.d}{c}$ a aby přitom platilo $AE = AB + BE$.

b) Sestrojíme Apolloniovu kružnici, která body A, E odděluje v poměru $c : b$. Na ní a na kružnici (B, b) leží vrchol C.

c) Sestrojíme vrchol D.

Sestrojený čtyřúhelník je skutečně tětivový, neboť sestrojená délka BE předpokládá, že $D'A' \parallel BE$, což ve svých důsledcích vede k tomu, že trojúhelníky CDA, $CD'A'$ jsou shodné, a to má za následek, že úhly ABC, CDA jsou výplňkové.

V diskusi si musíme nejprve všimnout toho, za jakých podmínek dostaneme bod C. To je průsečík Apolloniovy kružnice s kružnicí $(B; b)$. Počítejme proto poloměr Apolloniovy kružnice. Především (X, Y jsou průsečíky Apol. kružnice s AB).

$$AX + EX = \frac{ac + bd}{c},$$

$$AX : EX = c : b.$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$AX = \frac{ac + bd}{b + c}, \quad EX = \frac{b(ac + bd)}{c(b + d)}.$$

Podobně řešením soustavy

$$EY + AY = \frac{ac + bd}{c},$$

$$AY : EY = c : b,$$

dostaneme za předpokladu $b > c$.

$$AY = \frac{ac + bd}{b - c}, \quad EY = \frac{b(ac + bd)}{c(b - c)}.$$

Označíme-li r poloměr Apolloniovy kružnice, je

$$2r = XY = EY - EX = \frac{2b(ac + bd)}{b^2 - c^2}.$$

Je-li S střed Apolloniovy kružnice, platí

$$SB = \frac{b(ab + cd)}{b^2 - c^2}.$$

Aby vrchol C existoval, musí platit

$$|SC - BC| < SB < SC + BC.$$

Po dosazení a úpravě dojdeme k dvěma nerovnostem

$$a - d < b + c, \quad b - c < a + d. \tag{1}$$

Pro existenci bodu D obdobně platí

$$|CD - AD| < AC < CD + AD,$$

což jinak psáno, dá

$$|c - d| < \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}} < c + d.$$

Všimneme si zatím nerovnosti

$$|c - d| < \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}.$$

Umocníme a po kratší úpravě dostaneme

$$(c - d)^2 < (a + b)^2,$$

tj.

$$|c - d| < a + b. \tag{2}$$

Podobně z nerovnosti

$$\sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}} < c + d$$

dostaneme

$$|a - b| < c + d. \tag{3}$$

Vztahy (1), (2), (3) jsou podmínky pro to, aby se čtyřúhelník $ABCD$ dal sestrojit. Dalo by se také říci, že podmínky řešení jsou: Každá strana čtyřúhelníka je menší než součet ostatních stran.

Vraťme se nyní k případu $b = c$, který jsme v diskusi vyloučili. Kdyby tato rovnost platila, bylo by

$$BE = d, \quad \text{tj.} \quad A' \equiv E, \quad D' \equiv B.$$

Z toho by dále platilo

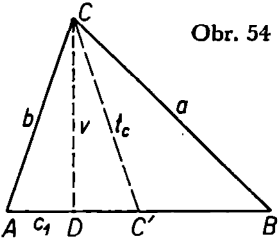
$$CE = CA$$

a příklad by se dal řešit podstatně jednodušeji.

II. Kružnice jako množina bodů určité vlastnosti se vyskytuje velmi často. Uvedeme si ještě několik příkladů, avšak pro další budeme potřebovat několik vět, které si odvodíme.

Věta 15. *Délka těžnice trojúhelníka ABC, jež vychází z vrcholu C, je dána vzorcem*

$$t_c^2 = \frac{1}{4}\,[2(a^2 + b^2) - c^2].$$



Obr. 54

Důkaz (obr. 54). Patu výšky spuštěné z vrcholu C označme D, střed strany AB označme C'. Tedy

$$CD = v, \quad CC' = t_c.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka CDC' plyne

$$t_c^2 = CD^2 + C'D^2.$$

Nejprve vypočítáme délky úseček

$$c_1 = AD, \quad c_2 = BD,$$

pak vypočítáme délku výšky v a naposled délku těžnice t_c.

Je patrno, že platí

$$v^2 = AC^2 - AD^2 = b^2 - c_1^2 = a^2 - c_2^2.$$

Odtud vyplývá následující vztah

$$c_2^2 - c_1^2 = a^2 - b^2,$$

a ten postupně upravujeme:

$$(c_2 + c_1)(c_2 - c_1) = a^2 - b^2,$$

$$c_2 - c_1 = (a^2 - b^2) : c.$$

K této rovnici připišme rovnici

$$c_1 + c_2 = c.$$

Řešením soustavy posledních dvou rovnic dostaneme

$$c_1 = (b^2 + c^2 - a^2) : 2c, \qquad c_2 = (a^2 - b^2 + c^2) : 2c.$$

Nyní se dá vypočítat délka výšky jako funkce stran:

$$v^2 = b^2 - c_1^2 = b^2 - [(b^2 + c^2 - a^2) : 2c]^2.$$

Ještě vyjádříme délku úsečky DC':

$$DC' = \tfrac{1}{2} c - c_1 = (a^2 - b^2) : 2c$$

a můžeme již přistoupit k výpočtu délky těžnice.

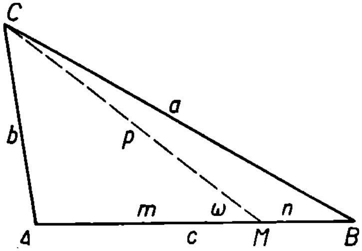
$$t_c^2 = b^2 - [(b^2 + c^2 - a^2) : 2c]^2 + [(a^2 - b^2) : 2c]^2.$$

Z toho pak po kratší úpravě dostaneme vzorec dříve uvedený. Cyklickou záměnou dojdeme k obdobným vzorcům pro těžnice t_a, t_b.

Tak, jak jsme právě vyjádřili délku těžnice pomocí stran, mohli bychom vyjádřit i délku výšek nebo délku osy vnitřního či vnějšího úhlu. Existuje však vzorec — tzv. *Stewartův* — který vyjadřuje délku kterékoli úsečky omezené vrcholem trojúhelníka a bodem na protější straně.

Věta 16. *V trojúhelníku ABC je dána úsečka CM, kde M je bod na straně AB a dělí tuto stranu na úsečky délek $AM = m$, $BM = n$. Jestliže $CM = p$, pak platí*

$$cp^2 = ma^2 + nb^2 - cmn.$$



Obr. 55

Důkaz (obr. 55). Na trojúhelníky AMC, BMC použijeme kosinové věty:

$$b^2 = m^2 + p^2 - 2mp \cos \omega,$$
$$a^2 = n^2 + p^2 + 2np \cos \omega.$$

Vyloučíme-li z obou rovnic $\cos \omega$ a použijeme-li vztahu $m + n = c$, dojdeme k Stewartovu vzorci.

V tomto vzorci je obsažen vzorec dříve odvozený pro délku těžnice t_c. Stačí totiž položit $m = n = \frac{c}{2}$. Je v něm obsažen vzorec pro délku výšky v_c. To bychom museli položit

$$m = c_1 = (b^2 + c^2 - a^2) : 2c, \; n = c_2 = (a^2 - b^2 + c^2) : 2c.$$

Proveďte oba případy.

Vraťme se však ke vzorci

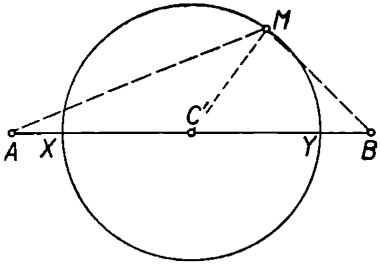
$$t_c^2 = \frac{1}{4}\,[2(a^2 + b^2) - c^2],$$

z něhož vyplývá

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\,(4\,t_c^2 + c^2). \qquad (1)$$

Odtud je patrno: Jsou-li v trojúhelníku dány strana c a těžnice t_c, potom vrchol C leží na kružnici (C', t_c) a zbývající dvě strany jsou vázány vztahem (1). Můžeme však vyslovit větu mnohem silnější.

Věta 17. *Množina všech bodů, pro něž součet čtverců vzdáleností od dvou pevných a různých bodů je konstantní a roven $k^2 \neq 0$, je kružnice. Její střed půlí vzdálenost pevných bodů a její poloměr r je dán vzorcem $r^2 = (2k^2 - c^2) : 4$, kde c je vzdálenost daných dvou bodů.*



Obr. 56

D ů k a z (obr. 56). Dané dva body označíme A, B a střed úsečky AB označíme C'. Bod M, který neleží na přímce AB, je bodem naší množiny a tudíž o něm platí

$$AM^2 + BM^2 = k^2.$$

V trojúhelníku ABM je MC' těžnicí a platí tedy

$$MC'^2 = [2(AM^2 + BM^2) - AB^2] : 4.$$

Po dosazení za součet $AM^2 + BM^2$ nabude rovnice jednoduššího tvaru:

$$MC'^2 = (2k^2 - c^2) : 4 = \text{konst.}$$

Bod M je podle toho bodem kružnice (C', MC'), která má pevný střed C' a konstantní poloměr MC'.

Obráceně, na této kružnici zvolme libovolný bod M', který neleží na přímce AB. Pro těžnici $M'C'$ trojúhelníka ABM' platí

$$M'C'^2 = [2(AM'^2 + BM'^2) - AB^2] : 4,$$

což jinak psáno, dá

$$AM'^2 + BM'^2 = (4t_c^2 + c^2) : 2,$$

což je veličina konstantní. Znamená to, že bod M' a tedy i každý jiný bod zmíněné kružnice má součet čtverců vzdáleností od bodů A, B rovný dané konstantě k^2. Tím je důkaz proveden pro body neležící na přímce AB. Ukážeme však, že i body společné přímce AB a uvažované kružnice náleží naší množině bodů. Označme tyto body X, Y. Je patrno, že

$$AX = c : 2 - t_c, \quad BX = c : 2 + t_c,$$

a proto

$$AX^2 + BX^2 = c^2 : 2 + 2t_c^2 = (4t_c^2 + c^2) : 2 = k^2.$$

Pro bod Y se důkaz provede podobně.

V obr. 56 je nakreslena situace pro $k < c$. Úsečka XY leží proto uvnitř úsečky AB. Platí-li $k > c$, potom by $XY > AB$. Kdyby posléze $k = c$, platilo by pak $XY =$

$= AB$, tj. $X \equiv A$, $Y \equiv B$. V každém případě by však body X, Y náležely uvažované množině bodů, i když rovnice, pomocí nichž by se to dokazovalo, by byly poněkud jiné.

Příklady

1. Vypočtěte délky stran a, b v trojúhelníku ABC, jestliže je dána strana c, protilehlý úhel $\gamma = 60°$ a těžnice t_c.

Řešení. Víme, že

$$a^2 + b^2 = (4t_c^2 + c^2) : 2. \tag{1}$$

K tomu připíšeme kosinovou větu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - ab.$$

Z obou rovnic dostaneme

$$ab = (4t_c^2 - c^2) : 2.$$

Známou úpravou rovnic (1) a (2) dojdeme k jednodušší soustavě

$$a + b = \sqrt{(12t_c^2 - c^2) : 2},$$
$$a - b = \sqrt{(3c^2 - 4t_c^2) : 2}.$$

Odtud již snadno jednak

$$a_1 = \left[\sqrt{(12t_c^2 - c^2) : 2} + \sqrt{(3c^2 - 4t_c^2) : 2}\right] : 2,$$
$$b_1 = \left[\sqrt{(12t_c^2 - c^2) : 2} - \sqrt{(3c^2 - 4t_c^?) : 2}\right] : 2,$$

a jednak

$$a_2 = b_1, \quad b_2 = a_1.$$

Je okamžitě patrno, že podmínky řešitelnosti jsou

$$12\,t_c^2 - c^2 > 0,$$
$$3\,c^2 - 4\,t_c^2 \geqq 0,$$
$$12\,t_c^2 - c^2 > 3c^2 - 4\,t_c^2\,.$$

Pro dané délky tak dostáváme

$$\tfrac{2}{3}\,t_c\sqrt{3} \leqq c < 2t_c,$$

což jsou podmínky řešitelnosti. V případě rovnosti má úloha jediné řešení — rovnoramenný trojúhelník.

2. Je dána pevná kružnice k a na ní dva pevné a různé body A, B. Na kružnici k zvolme libovolný bod $M \neq A$, B a na polopřímce BM sestrojme bod $C \neq B$ tak, aby $BM = CM$. Bod C spojme ještě se středem O tětivy AB. Jaká je množina všech průsečíků X přímek AM, CO, jestliže se bod M pohybuje po kružnici k?

Řešení (obr. 57). V trojúhelníku ABC jsou přímky AM, CO těžnice, bod X je těžiště a tudíž

$$AX = \tfrac{2}{3}\,AM.$$

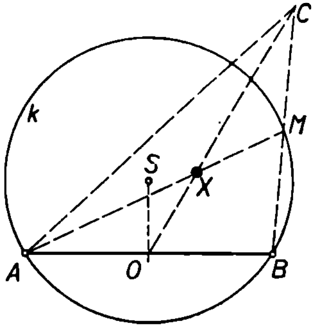
Víme, že bod M opisuje kružnici k a z právě napsané rovnice plyne, že bod X leží na kružnici k', která ve stejnolehlosti o středu A a koeficientu $\frac{2}{3}$ je obrazem kružnice k.

Obráceně, zvolme na kružnici k' bod Y mimo bod A a mimo průsečík přímky AB s kružnicí k'. Jemu v uvažované stejnolehlosti odpovídá na kružnici k bod N, a to tak, že

$$AN = \tfrac{3}{2}\,AY, \quad \text{tj.} \quad AY = \tfrac{2}{3}\,AN.$$

Vzhledem k tomuto vztahu se dá sestrojit trojúhelník ABC' tak, že Y je jeho těžiště a N je střed strany BC'.

Z toho všeho je patrno: Množina všech bodů X (nebo též množina všech těžišť trojúhelníků ABC) je kružnice, která ve stejnolehlosti o středu A a koeficientu $\frac{2}{3}$ je obrazem kružnice k. Přitom obrazy bodů A, B je nutné z množiny vyjmout.



Obr. 57

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Kolem jeho hlavního vrcholu C je opsána kružnice poloměrem $r < CB = CA$ a z vrcholů A, B jsou k ní sestrojeny tečny. Najděte množinu všech průsečíků těchto tečen, jestliže poloměr r se mění.

Řešení (obr. 58). a) Množina všech průsečíků tečen, které jsou souměrně sdružené podle osy souměrnosti daného trojúhelníka, je právě tato osa s výjimkou bodu C. (Je to množina bodů U, V.)

b) Hledejme tedy množinu všech průsečíků takových tečen, které nejsou souměrně sdružené podle osy souměrnosti daného trojúhelníka. V obr. 58 jsou to např.

tečny t, u, jež se protínají v bodě X. Body dotyku tečen t, u označme po řadě K, L. Podle věty *Ssu* o shodnosti trojúhelníků je

$$\triangle CKB \cong \triangle CLA,$$

neboť

$$CB = CA, \quad CK = CL$$

a oba trojúhelníky jsou pravoúhlé. Proto

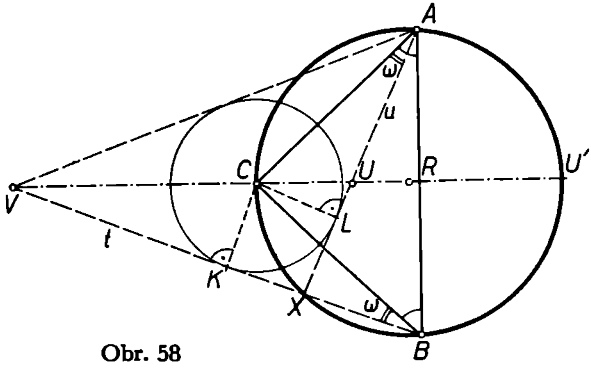
$$\measuredangle CBK = \measuredangle CAL = \omega.$$

Důsledek toho je, že i

$$\measuredangle ACB = \measuredangle AXB.$$

(Obě ramena úhlu ACB se v kladném smyslu otočila o týž úhel ω.) Proto bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Obráceně. Na kružnici opsané trojúhelníku ABC zvolme libovolný bod X' různý od bodů A, B, C. Přímky $u' \equiv AX'$, $t' \equiv BX'$ jsou tečny kružnice o středu C. Toto tvrzení snadno dokážeme. Přímky u', t' jsou navzájem



Obr. 58

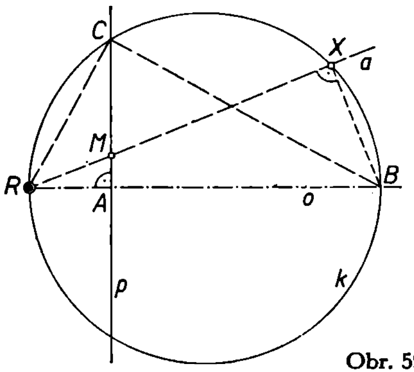
kolmé (obvodový úhel nad průměrem) a mají dvě osy souměrnosti, které procházejí středy oblouků $\widehat{AB}$; to jsou body U', C. Oba tyto středy jsou zároveň středy kružnic dotýkajících se přímek u', t'. Pro nás má význam jen bod C.

Došli jsme tak k výsledku: Množina všech bodů X je kružnice opsaná trojúhelníku ABC s výjimkou bodu C.

4. Je dána přímka p a mimo ni bod R. Bodem R je vedena libovolná přímka a, která přímku p protne v bodě M. Na polopřímce RM určíme bod X tak, aby $RM \cdot RX = k^2$, kde $k \neq 0$. Najděte množinu všech bodů X, jestliže přímka a se otáčí kolem bodu R.

Řešení (obr. 59). Sestrojme přímku o jdoucí bodem R kolmo na přímku p. Její patu označme A. Na polopřímce RA existuje jediný bod B, pro nějž platí

$$RA . RB = k^2.$$



Obr. 59

Pata kolmice, spuštěná z bodu B na přímku a, je hledaný bod X. Důkaz tohoto tvrzení provedeme takto:

$$\triangle RAM \sim \triangle RXB,$$

neboť mají jeden úhel společný a oba trojúhelníky jsou pravoúhlé. I platí

$$RA : RM = RX : RB$$

a odtud již máme

$$RA . RB = RM . RX = k^2.$$

Bod X leží tedy na kružnici k sestrojené nad průměrem RB.

Obráceně. Na kružnici k zvolme libovolný bod $X' \not\equiv \not\equiv R, B$. Jeho spojnice s bodem R protne přímku p v bodě M'. Body R, B, X' jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníka podobného trojúhelníku $RM'A$. Z toho pak plyne

$$RA : RM' = RX' : RB,$$

z čehož opět dostaneme

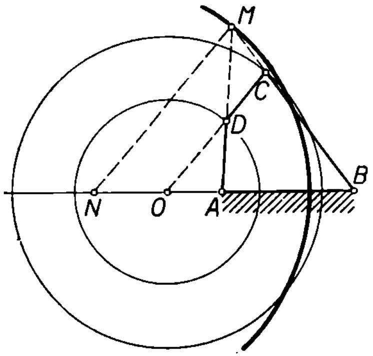
$$RA . RB = RM' . RX' = k^2.$$

Z toho vidíme, že bod X' odpovídá bodu M' na přímce p. Výsledek lze vyjádřit větou: Množina všech bodů X je kružnice nad průměrem AB s výjimkou bodu R, který neodpovídá žádnému bodu přímky p.

Poznámky. Rovnicí $RM . RX = k^2$, kde $k \neq 0$, je v rovině mezi body určena příbuznost, v níž bodu M odpovídá bod X. Této příbuznosti říkáme kruhová inverze.

Bod X můžeme také zvolit na polopřímce MR, ale pak bod B musí ležet na polopřímce AR.

5. Je dán proměnný konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž protější strany AB, CD mají konstantní délku a v prodloužení se protínají v pevném bodě O. Strana AB je kromě toho pevná, nepohyblivá, zatímco strana CD se otáčí kolem bodu O. Najděte množinu všech průsečíků M stran AD, BC.



Obr. 60

Řešení (obr. 60). Pro rychlejší vyjadřování označme

$$OA = a,\ OB = b,\ OC = c,\ OD = d,$$
$$AB = b - a = k,\quad CD = c - d.$$

Bodem M veďme rovnoběžku s přímkou OC a ta protne přímku OB v bodě N. Z podobnosti trojúhelníků MNB, COB plyne

$$MN : NB = CO : OB = c : b,$$

z čehož

$$MN = \frac{c}{b}\, NB. \tag{1}$$

Dále je patrno, že

$$\triangle OAD \sim \triangle NAM,$$

a proto

$$OD : OA = MN : NA = d : a,$$

$$MN = \frac{d}{a} NA. \tag{2}$$

Poněvadž levé strany rovnic (1) a (2) jsou shodné, shodují se i pravé strany:

$$\frac{c}{b} NB = \frac{d}{a} NA.$$

Ale $NB = NA + k$ a tudíž po dosazení

$$\frac{c}{b} NA + \frac{kc}{b} = \frac{d}{a} NA,$$

z čehož se dá vypočítat NA:

$$NA = \frac{kac}{bd - ac} = \text{konst.},$$

za předpokladu, že $bd - ac \neq 0$. Úsečka NA má tedy stálou, neproměnnou délku, což znamená, že bod N je pevný. Procházejí jím tudíž všechny přímky rovnoběžné s OC a proložené průsečíkem M. Poněvadž zároveň

$$MN = \frac{d}{a} NA = \text{konst.},$$

plyne odtud, že průsečík M leží na kružnici (N, NM).

Zvolme obráceně na této kružnici bod M' a s přímkou NM' veďme bodem O rovnoběžku, která na kružnicích (O, OD), (O, OC) vytne body D', C'. Přímka $M'D'$ protne přímku OB v bodě A'. Potom

$$\triangle M'NA' \sim \triangle D'OA'$$

a proto

$$M'N : NA' = OD' : OA'.$$

Víme však, že

$$M'N = MN = \frac{d}{a} NA.$$

Tím předešlá rovnice po dosazení nabude tvaru

$$\frac{d}{a} NA : NA' = d : a.$$

Z toho máme

$$NA' = NA$$

čili body A, A' splývají, neboť oba leží na polopřímce NB. Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý. Přímky $M'N$, OC jsou rovnoběžné a body A, A' leží v polorovině OCB, opačné k polorovině OCM. To však znamená, že přímka $M'D'$ prochází bodem A nebo jinak, body M', D', A leží v přímce.

Podobně bychom dokázali, že i body M', C', B leží v přímce. Tím jsme dokázali, že množina všech bodů M je kružnice $\left(N, \dfrac{kcd}{bd - ac}\right)$ s výjimkou průsečíků s přímkou AB.

Poznámky. Při řešení jsme vyloučili případ

$$bd - ac = 0.$$

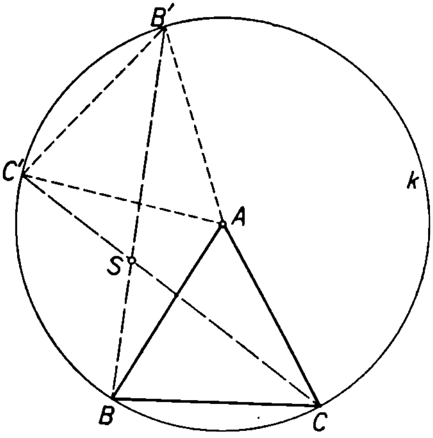
Kdyby totiž tato rovnice platila, plynulo by z ní

$$b : a = c : d.$$

Přímky AD, BC by byly rovnoběžné a bod M by neexistoval. Hledat množinu bodů M by ztratilo smysl.

V kinematické geometrii, kam příklad svou povahou náleží, se čtyřúhelníku $ABCD$ říká kloubový. Strana AB se nazývá rám, strany AD, BC jsou vahadla (nebo kliky), strana CD je ojnice.

6. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, který je pevný a množina všech rovnostranných trojúhelníků $AB'C'$, které z něho vzniknou otočením kolem vrcholu A. Jaká je množina všech průsečíků přímek BB', CC'?



Obr. 61

Řešení (obr. 61). Z uvažované množiny trojúhelníků si zvolme trojúhelník $AB'C'$, který je různý od trojúhelníka ABC. Trojúhelníky ABC, $AB'C'$ jsou souhlasně shodné. Přímky BB', CC' se proto protnou a jejich průsečík označme S. Body B, C, B', C' leží na kružnici $k \equiv (A, AB)$ a jsou vrcholy rovnoramenného lichoběžníka vepsaného kružnici k. Podle věty o obvodových úhlech platí

$$\sphericalangle CB'B = \sphericalangle CC'B = \tfrac{1}{2} \sphericalangle CAB = 30°,$$
$$\sphericalangle C'BB' = \sphericalangle C'CB' = \tfrac{1}{2} \sphericalangle C'AB' = 30°.$$

Podle toho

$$\sphericalangle BSC' = 180° - \sphericalangle CC'B - \sphericalangle C'BB' = 120°,$$

tj. $\sphericalangle BSC = 60°$. To však znamená, že velikost úhlu BSC nezávisí na velikosti úhlu, o nějž se trojúhelník $AB'C'$ otočil ze základní polohy ABC. Množina bodů S leží tedy na kružnici $BSAC$ opsané trojúhelníku ABC.

Kdyby velikost úhlu, o který se trojúhelník ABC otočí do polohy $AB'C'$, byla právě 60°, pak by $B \equiv C' \equiv S$ a z toho je patrno, že bod B náleží uvažované množině bodů. Podobně při opačném smyslu otočení o 60° bychom ukázali, že i bod C náleží naší množině bodů.

Kdyby posléze bod C' ležel na menším oblouku BC kružnice k, platilo by

$$\sphericalangle BCC' = \sphericalangle BB'C = 30°$$

a z toho

$$\sphericalangle CSB' = 120°.$$

Vidíme, že i v tomto případě bod S leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Obráceně, na kružnici opsané trojúhelníku ABC mějme libovolný bod S' a uvažujme nejprve případ, že leží na oblouku BAC. Spojme jej s body B, C. Tyto přímky protnou kružnici k ještě v bodech B'', C''. Tu platí

$$B''C'' = BC,$$

neboť $BCB''C''$ je rovnoramenný lichoběžník. Kromě toho

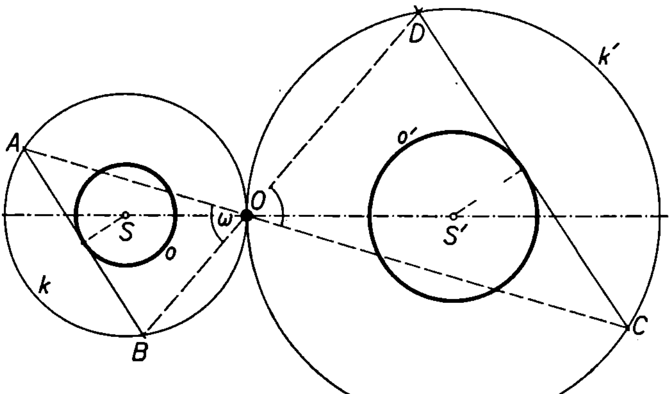
$$\sphericalangle C''S'B'' = \sphericalangle CS'B = 60°$$

a proto kružnice opsaná trojúhelníku $B''C''S'$ prochází i bodem A. Vidíme, že trojúhelník $AB''C''$ je rovnostranný, tj. vznikl otočením trojúhelníka ABC kolem vrcholu A. St jným způsobem bychom postupovali, kdybychom S' zvolili na m nším oblouku Bc.

Můžeme tedy říci: Množina všech průsečíků přímek BB', CC' je kružnice opsaná trojúhelníku ABC.

7. Jsou dány dvě kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$, které v bodě O mají vnější dotyk. Bodem O jsou proloženy dvě přímky, které spolu svírají ostrý úhel ω konstantní velikosti. Tyto přímky protnou první kružnici v bodech A, B a druhou kružnici v bodech C, D. Zjistěte, jaké křivky se dotýkají tětiva AB a tětiva CD, jestliže se obě přímky otáčejí kolem bodu O, ale stále přitom svírají týž úhel ω.

Řešení (obr. 62). Úhel ω v první kružnici je obvodový a poněvadž se otáčením jeho velikost nemění, vytínají jeho ramena na kružnici k (na kružnici k') tětivy stejné délky.



Obr. 62

Proto se tyto tětivy dotýkají kružnice o (kružnice o') soustředné s kružnicí k (kružnicí k'). Ale při otáčení se stane, že obvodovým úhlem bude úhel velikosti $180° - \omega$. Jeho ramena vytínají však na kružnici k (na kružnici k') tětivy téže délky; ty se pak dotýkají kružnice o (kružnice o').

Jestliže máme obráceně tětivu $A'B'$ kružnice k (tětivu $C'D'$ kružnice k'), která se dotýká kružnice o (kružnice o'), musí být

$$A'B' = AB\ (C'D' = CD)$$

a potom buď

$$\sphericalangle A'OB' = \omega \qquad (\sphericalangle C'OD' = \omega),$$

nebo

$$\sphericalangle A'OB' = 180° - \omega \quad (\sphericalangle C'OD' = 180° - \omega).$$

Máme tedy výsledek: Tětivy AB v první kružnici (tětivy CD v druhé kružnici) tvoří množinu všech tečen kružnice o, soustředné s kružnicí k (kružnice o' soustředné s kružnicí k').
K tomu je však zapotřebí připustit i ty dvě polohy úhlu ω, kdy se stane úsekovým.

8. Je dána kružnice k a v ní tětiva AB, která není průměrem. Sestrojme libovolnou kružnici m, která má střed na kružnici k a zároveň se dotýká přímky AB. Pak tečny a, b, sestrojené po řadě z bodů A, B, ke kružnici m (a různé od tečny AB), se protínají v bodě X. Najděte množinu všech bodů X při proměnné kružnici m.

Řešení. a) Předpokládejme nejprve, že střed M kružnice m je vnitřním bodem menšího oblouku AB kružnice k. Z trojúhelníka ABM plyne (obr. 63a)

$$\sphericalangle AMB = \mu = 180° - (\alpha + \beta).$$

Ale úhel μ má konstantní velikost, neboť to je obvodový úhel nad (větším) obloukem AB. Proto i

$$\alpha + \beta = \text{konst.}$$

Z trojúhelníka ABX se dá vypočítat úhel $\xi = \sphericalangle AXB$:

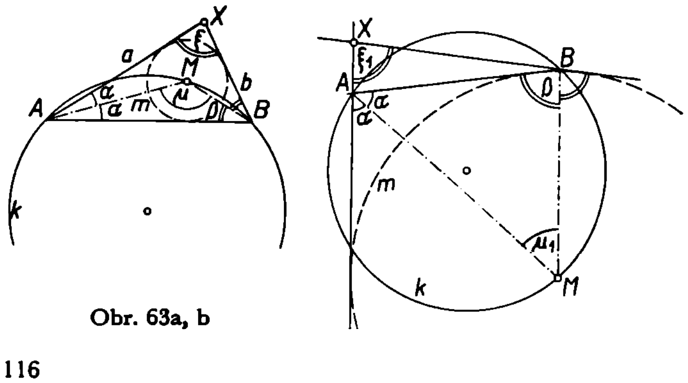
$$\xi = 180° - (2\alpha + 2\beta) = \text{konst.}$$

Tím jsme však dokázali: Jestliže bod M je vnitřním bodem menšího oblouku $\widehat{AB}$, pak velikost úhlu ξ nezávisí na poloze bodu M. Důsledkem toho je, že bod X leží na kruhovém oblouku opsaném nad tětivou AB a poloměru rovném AB : 2sin 2μ.

Ještě vypočteme, jak spolu souvisí úhly μ, ξ. Snadno zjistíme, že

$$\mu = 90° + \frac{\xi}{2}.$$

Obráceně. Na kruhovém oblouku AXB zvolme libovolný bod X' různý od bodů A, B a spojme jej s body A, B. Tím vznikne trojúhelník ABX'. Tomuto trojúhelníku vepišme kružnici m' se středem M'. Ukážeme, že bod M' leží na menším oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k.



Obr. 63a, b

Označme

$$\sphericalangle BAX' = 2\alpha', \quad \sphericalangle ABX' = 2\beta', \quad \sphericalangle AX'B = \xi.$$

O těchto úhlech platí

$$2\alpha' + 2\beta' + \xi = 180°.$$

Střed kružnice vepsané trojúhelníku ABX' označme M'. Počítejme:

$$\mu' = \sphericalangle AM'B = 180° — (\alpha' + \beta') = 90° + \frac{\xi}{2} = \mu.$$

To však znamená, že bod M' je bodem menšího oblouku AB kružnice k, jak jsme měli dokázat.

b) Zvolme nyní bod M na větším kruhovém oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k, a to tak, aby pata kolmice spuštěné z bodu M na tětivu AB byla vnitřním bodem této tětivy (obr. 63b). Označme

$$\mu_1 = \sphericalangle AMB = 180° — \mu = \text{konst.}$$

Přitom μ je velikost úhlu v případě a). Označíme-li ještě

$$\sphericalangle MAB = \alpha, \quad \sphericalangle MBA = \beta,$$

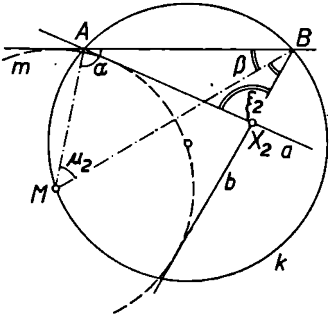
můžeme psát

$$\alpha + \beta = 180° — \mu_1.$$

Tečny, sestrojené z bodů A, B ke kružnici m, se protnou v bodě X_1 a svírají přitom úhel velikosti ξ_1, o němž platí:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sphericalangle AX_1B = 180° — (180° — 2\alpha) — (180° — 2\beta) = \\ &= 2\alpha + 2\beta — 180° = 360° — 2\mu_1 — 180° = \\ &= 180° — 2\mu_1 = 2\mu — 180° = \xi = \text{konst.}\end{aligned}$$

Zde opět ξ je velikost úhlu z případu a). Z výpočtu je patrno, že bod X_1 leží na tomtéž kruhovém oblouku, na němž ležely body X v případě a). Docházíme tak k téže množině bodů jako prve.



Obr. 63c

c) Zvolme ještě bod M na větším oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k, a to tak, aby se kružnice m dotýkala přímky AB na prodloužení, např. za bod B. Tečny ke kružnici m vedené body A, B se protnou v bodě X_2. Označme opět (obr.63c)

$$\sphericalangle MAB = \alpha, \quad \sphericalangle MBA = \beta,$$

$$\sphericalangle AMB = \mu_2 = 180° - \mu, \quad \sphericalangle AX_2B = \xi_2.$$

O těchto úhlech platí

$$\mu_2 = 180° - (\alpha + \beta)$$
$$\xi_2 = 2(180° - \beta) - 2\alpha = 360° - 2\mu = 180° - \xi.$$

Bod X_2 leží podle toho na kruhovém oblouku, který oblouk z případů a), b) doplňuje — zatím s výjimkou bodů A, B — na kružnici.

Obrácený postup se provádí obdobně jako u dřívějších dvou případů a proto je přenechávám čtenářům.

d) Všimněme si však ještě případu, kdy kružnice m se přímky AB dotýká právě v bodě A (nebo v bodě B). Potom bod B (nebo bod A) můžeme považovat za průsečík tečen vedených z bodů A, B ke kružnici m a proto můžeme body A, B počítat k bodům uvažované množiny.

9. Je dán pravý úhel GOH a jeho vnitřní bod B. Tímto bodem prochází pevná přímka p neobsahující bod O a proměnná přímka h také neobsahující bod O. Přímka p protíná ramena OG, OH po řadě v bodech A, B a přímka h je protíná v bodech K, L. Trojúhelníkům BAK, BCL jsou opsány kružnice, které kromě bodu B mají společný ještě bod X. Zjistěte množinu všech bodů X, otáčí-li se přímka h kolem bodu B.

Řešení. Mějme nejprve případ, kdy bod K leží mezi body O, A a pak nutně bod C leží mezi body O, L (obr. 64). Nejdřív si dokážeme, že středy obou proměnných kružnic, a tím i bod X, leží v polorovině pL. Trojúhelník ABK je vždy tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu K. Střed jeho opsané kružnice leží tedy vně trojúhelníka, ale je to vnitřní bod úhlu AKB. Leží tedy v polorovině opačné k polorovně $pK \equiv pO$, tj. v polorovině pL. Totéž se dá říci o středu kružnice opsané trojúhelníku BCL a to pak znamená, že tím spíš v této polorovině leží bod X.

Všimněme si nyní, že čtyřúhelník $AXBK$ je tětivový a proto

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle OKL.$$

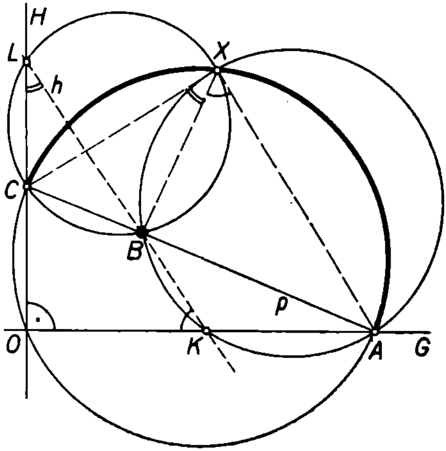
Potom také je

$$\sphericalangle CXB = \sphericalangle CLB.$$

Sečtením obou těchto rovnic dostaneme

$$\sphericalangle AXC = \sphericalangle AXB + \sphericalangle CXB = \sphericalangle OKL + \sphericalangle CLB = 90°.$$

Bod X leží tudíž na kružnici opsané trojúhelníku OAC, přesněji řečeno (s ohledem na dřívější) leží na půlkružnici $\widehat{AC}$ této kružnice, která neobsahuje bod O.



Obr. 64

Stejným způsobem dojdeme k témuž výsledku, jestliže bod A leží mezi body O, K a bod L mezi body O, C.

Obráceně. Na této půlkružnici zvolme libovolný bod $X' \not\equiv A$, C a trojúhelníkům ABX', BCX' opišme kružnice. Ty protnou polopřímky OG, OH ještě v bodech K', L'. Nyní platí

$$\sphericalangle OL'B = \sphericalangle BX'C,$$
$$\sphericalangle AK'B = \sphericalangle AX'B.$$

Sečtením obou těchto rovnic dostaneme

$$\sphericalangle OL'B + \sphericalangle AK'B = \sphericalangle BX'C + \sphericalangle AX'B = 90°$$

a body K, B, L leží v přímce.

Je nutné si ještě všimnout případu, kdy kružnice opsaná trojúhelníku BCX se dotýká (v bodě C) přímky OH. Znamená to, že body C, L splynou. Potom však nutně i kružnice opsaná trojúhelníku ABX se v bodě A dotýká přímky OG. Obě tyto kružnice se protínají v bodě, který náleží uvažované množině bodů.

Výsledek shrneme do věty: Hledaná množina všech průsečíků X je ta půlkružnice $\widehat{AC}$ z kružnice opsané trojúhelníku ACO, která neleží v polorovině pO. Do množiny nesmíme počítat body A, C.

Cvičení

1. Je dána úsečka $AB = 7$. Sestrojte a) vnitřní bod X této úsečky tak, aby $AX : BX = \sqrt{2}$, b) vnější bod Y tak, aby platilo $AY : BY = \sqrt{3}$, c) oba body přímky AB, pro něž $AZ : BZ = \sqrt{5} : \sqrt{15}$.

2. Kde leží bod M, pro nějž $AM : BM = -1$?

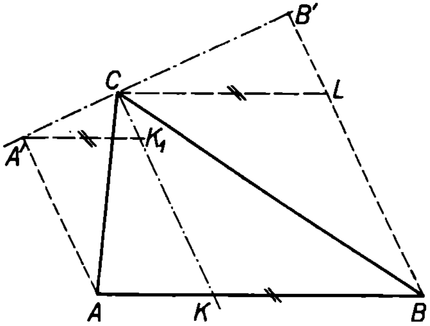
3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$. Jestliže O je jejich střed stejnolehlosti, platí $SO : S'O = r : r'$. Dokažte.

4. Sestrojte trojúhelník, jestliže je dána strana AB, na ní bod $M \neq A, B$ osy vnitřního úhlu ACB a výška v_c. — Volte $AB = 7$, $AM = 2{,}2$, $v_c = 3{,}5$.

Návod: Sestrojte nejdřív průsečík N osy vnějšího úhlu s přímkou AB.

5. Větu 13 lze dokázat též na základě přiloženého obr. 65, v němž přímka CK je osa vnitřního úhlu a přímka $A'B'$ je osa vnějšího úhlu.

Návod: Vyjděte z toho, že $\triangle CAA' \sim \triangle CBB'$ a $\triangle CA'K_1 \sim \triangle B'CL$.



Obr. 65

6. Dokažte, že ve cvičení 5 z 3. kapitoly platí $AM^2 + AN^2 = k^2$, kde $k \neq 0$ je konstanta nezávislá na poloze průměru MN.

7. Vypočtěte délky těžnic v pravoúhlém trojúhelníku, v němž $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

8. Ze vzorců pro délky těžnic odvoďte

a) $4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$,

b) $16(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4)$.

9. V Stewartově vzorci položte a) $m = c$, $n = ?$, b) $m = 0$, $n = ?$. Co dostanete?

10. Jak se změní Stewartův vzorec, jestliže příčka CM protne stranu AB na prodloužení? Uvažujte oba možné případy.

11. Vypočtěte délky úseček, které na straně AB troj-

úhelníka ABC vytíná osa vnitřního úhlu a pak užitím Stewartovy věty vypočtěte délku osy vnitřního úhlu.

12. Trojúhelník ABM má stranu AB pevnou, nepohyblivou, ale vrchol M se pohybuje po kružnici opsané trojúhelníku ABM.

a) Zjistěte množinu všech středů kružnic, vepsaných trojúhelníkům ABM.

b) Zjistěte množinu všech ortocenter trojúhelníků ABM.

c) Zjistěte množinu všech těžišť trojúhelníků ABM.

13. Úsečka AB konstantní délky $c \neq 0$ se svými krajními body pohybuje po dvou přímkách k sobě kolmých. Jaká je množina všech středů těchto úseček?

14. Je dána kružnice k a na ní pevný bod O, který je vrcholem ostrého úhlu velikosti ω. Tento úhel se otáčí kolem svého vrcholu, ale nemění svou velikost. Co obaluje tětiva, kterou ramena úhlu vytínají na kružnici?

15. Kružnice $k \equiv (S, r)$ se otáčí kolem svého bodu A. Ke každé pootočené kružnici je sestrojena tečna daného pevného směru. Jaká je množina všech bodů dotyku?

16. Trojúhelník ABC má pevnou stranu AB a těžnice AA' má konstantní délku t_a. Zjistěte množinu všech vrcholů C trojúhelníků ABC, které je možné z daných dvou prvků sestrojit.

17. Vnitřním bodem A dané kružnice $k \equiv (O, r)$ je proložena přímka, která kružnici k protne v bodech B, C. Pak jsou sestrojeny dvě kružnice, dotýkající se kružnice k, z nichž první prochází body A, B a druhá body A, C. Tyto dvě kružnice mají kromě bodu A společný ještě bod M. Určete množinu všech bodů M, jestliže sečna BC se mění.

18. Dvě dané kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$ mají společné právě dva různé body A, B. Bodem A je proložena libovolná přímka, která dané kružnice protne po řadě v bodech K, K'. Najděte množinu průsečíků všech přímek KS, $K'S'$, otáčí-li se přímka kolem bodu A.

19. V dané kružnici je dána pevná tětiva AB jako základna rovnoramenného lichoběžníka vepsaného dané kružnici. Druhá základna mění stále svou polohu. Najděte množinu všech středů ramen lichoběžníků.

20. Příklad 3 ze str. 92 řešte za předpokladu, že kružnice k, k' mají společné dva body nebo že jedna z nich leží uvnitř druhé.

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

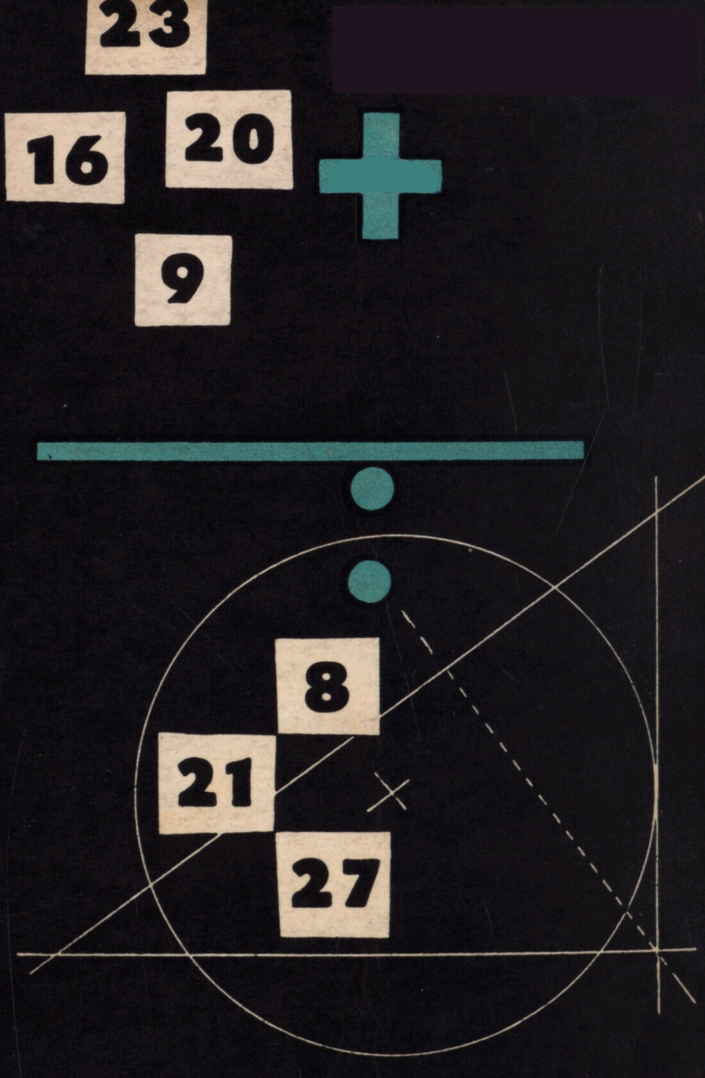
kružnice

STANISLAV HORÁK

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2452
Edice Škola mladých matematiků, svazek 16
Vytiskl Mír, n. p., závod 1,
Václavské nám. 15, Praha 1
4,70 AA, 4,84 VA. D - 12*60377
Náklad 7000 výtisků. 1. Vydání
128 stran. Praha 1966

23-139-66 03.2 Cena brož. výt. Kčs 4,- I

[redacted]



23 - 139 - 66
03-2
Cena brož.
Kčs 4,— I