Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAK VYŠETŘUJEME GEOMETRICKÁ MÍSTA METODOU SOUŘADNIC

15

tematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MILAN KOMAN

jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

KAPITOLA Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE V ROVINĚ

PRAHA 1966
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

Tuto knížku věnuji památce

RUDOLFA ZELINKY,

čelného pracovníka
Československé matematické olympiády
a spoluzakladatele mezinárodních
matematických olympiád

PŘEDMLUVA

Úlohy na vyšetřování geometrických míst bodů dané vlastnosti se zařazují do školské matematiky již dlouhou dobu. K jejich řešení se používá, s výjimkou nejvyšší třídy SVVŠ, téměř výhradně tzv. syntetické metody. V této knížce budeme naproti tomu používat při vyšetřování geometrických míst bodů zásadně početní metody, využívající známých výsledků z analytické geometrie; mluvíme o tzv. *metodě souřadnic*. Přitom se omezíme na nejjednodušší matematické prostředky. Čtenáři při studiu příručky vystačí prakticky se znalostmi rovnic přímek a kuželoseček, jejichž osy jsou rovnoběžné s osami souřadnic, a s výpočtem vzdáleností bodů a přímek. Nikde se nepoužívá tečen kuželoseček, jejich polár a rovnic algebraických křivek vyšších stupňů. Pro všechny případy je ještě v 5. kapitole uveden, bez jakýchkoliv důkazů, stručný přehled používaných výsledků z analytické geometrie.

I přes omezené matematické prostředky jsme se snažili vybírat takové příklady, které nelze jednoduše řešit synteticky. Domníváme se, že není účelné používat metody souřadnic tam, kde známe jiné jednoduché řešení. Metody souřadnic používáme naopak právě v těch případech, kdy neznáme jiný způsob řešení.

Řekněme si též něco o způsobu zpracování a o studiu této knížky. Nejdříve však malé přirovnání.

Pravděpodobně znáte pokus, který konají fyziologové s myší v bludišti. Jde o bludiště, na jehož jednom konci je umístěna potrava, kterou myš ucítí hned na začátku své cesty a snaží se k ní co nejrychleji dostat. Samozřejmě při prvním pokusu není její cesta nejkratší, často si zajde a musí se vracet. Avšak při opakování pokusu dosáhne cíle již rychleji a po několika pokusech běží rovnou nejkratší cestou.

V podobné situaci, jako myš před prvním pokusem, bývá i matematik, který má řešit nějaký problém nebo složitější úlohu. Jeho cesta za výsledkem bývá dost klikatá. Jakmile však dojde jednou k cíli, začne obvykle své řešení zjednodušovat a to tak dlouho, až dostane co nejjednodušší řešení. (Podobnou zkušenost máte asi i vy s řešením a vypracováváním soutěžních úloh Matematické olympiády.) Ovšem nejnamáhavější a tím i nejpoučnější je první objevná cesta. Bohužel, při zpracovávání učebnic nebo jiné studijní literatury se na tuto skutečnost bere málokdy zřetel. Obvykle se publikují ta nejkratší a nejelegantnější řešení. Tím se ovšem zastře důvod, proč při tomkterém kroku řešení se ubíráme právě zvolenou cestou nebo jak se na určitý (zdánlivě umělý) obrat přijde.

Autor si byl při zpracování knížky těchto obtíží vědom. Proto neuvádí vždy nejkratší řešení. Svá řešení se snaží komentovat tak, aby usnadnil čtenáři myšlenkový postup, kterým lze dospět k dalšímu pokračování. Jak se mu to podařilo, posoudíte sami.

Z uvedeného přirovnání plyne důležité poučení i pro čtenáře. Pro rozvoj matematických schopností je rozhodně účinnější, jestliže se každý pokusí nejdříve sám najít svůj vlastní postup (i se všemi oklikami a zatáčkami) než pasívní studium předloženého textu. Přitom není nikdy vyloučeno, že najde jednodušší řešení. A to je koneckonců také účel.

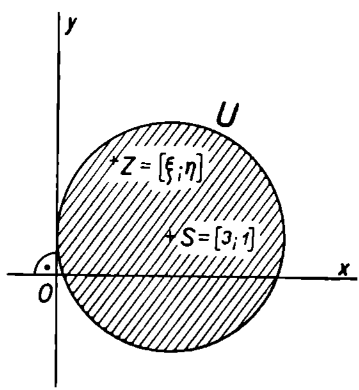
Řada příkladů je volena tak, že se v průběhu řešení rozpadnou na více případů. Této situaci jsme se mohli vyhnout vhodnou obměnou úlohy. Nepovažovali jsme to však za účelné. Je známou skutečností, že řešitelé matematických úloh při olympiádách velmi často zapomínají na zvláštní případy nebo dokonce na podstatnou část řešení. Domníváme se proto, že řešení obdobných příkladů vám pomůže vyznat se i v „džungli“ řešení složitějších soutěžních úloh.

Tolik slov úvodem. A nyní vám již přejeme mnoho úspěchů při studiu knížky.

1. kapitola

ÚVODNÍ POZNÁMKY

Každá matematická disciplína si vytváří celou řadu základních pojmů, se kterými potom běžně pracuje a které dále rozvíjí. Proto úspěšné studium kterékoli matematické disciplíny vyžaduje důkladné pochopení všech základních pojmů i souvislostí mezi nimi. Každá nepřesnost nebo nejasnost se vždy, ať dříve či později, nějak vymstí. Proto i my si nejdříve podrobně vysvětlíme některé více či méně známé věci z analytické geometrie.



Obr. 1

Předně si ujasníme **co to znamená,** když v analytické geometrii řekneme, **že nějaký geometrický útvar *U*[1]) má** (v kartézské soustavě souřadnic) **to a to početní vyjádření** (např. tu a tu rovnici či nerovnost). Jako příklad, na kterém si to ukážeme, uvedeme větu:

[1]) Geometrické útvary chápeme všude jako množiny bodů.

*Kruh **U** se středem $S = [3; 1]$ a poloměrem $r = 3$* (obr. 1) *má (v kartézské soustavě souřadnic) početní vyjádření*

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leqq 9.\text{[1]} \qquad (1)$$

Když si tuto větu podrobně promyslíme, zjistíme, že se v ní mluví vlastně o *dvou množinách*. Je to jednak kruh **U**, který je množinou všech bodů $Z = [\xi; \eta]$, které mají od středu S vzdálenost nejvýše rovnou třem, jednak je to množina **P** všech bodů $Z = [\xi; \eta]$, jejichž souřadnice vyhovují početnímu vyjádření (1). Uvedená věta pak říká, že množiny **U** a **P** se sobě rovnají, tzn. skládají se přesně z týchž bodů.

Připomeňme si, že bodové **množiny U a P se sobě rovnají** (což zapisujeme **U** = **P**) právě tehdy, jsou-li pro každý bod Z splněny podmínky:

[A]: Jestliže bod Z *patří množině* **U**, potom *patří i množině* **P**. Jinými slovy: Množina **U** je částí množiny **P**, což zapisujeme $\mathbf{U} \subset \mathbf{P}$.
V našem případě to znamená: Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ patří kruhu **U**, pak jeho souřadnice vyhovují nerovnosti (1).

[B]: Jestliže bod Z *patří množině* **P**, potom *patří i množině* **U**. Jinými slovy: Množina **P** je částí množiny **U**, což zapisujeme $\mathbf{P} \subset \mathbf{U}$[2]).
V našem případě to znamená: Jestliže souřadnice bodu $Z = [\xi; \eta]$ vyhovují nerovnosti (1), pak bod Z patří kruhu **U**.

---

[1]) Viz např. [6] na str. 87.

[2]) Připomeňme, že v matematice má slovo „část" širší význam než v běžné řeči. V hovorové i spisovné češtině je totiž vždy část „menší" než celek. Naproti tomu v matematice, mluvíme-li o části, nevylučujeme tím celek. Proto například každý čtverec je svou vlastní částí, právě tak jako každá přímka je částí sama sebe.

Obě podmínky [A] i [B] můžeme vyslovit též v tzv. *obměněném (negativním) tvaru:*

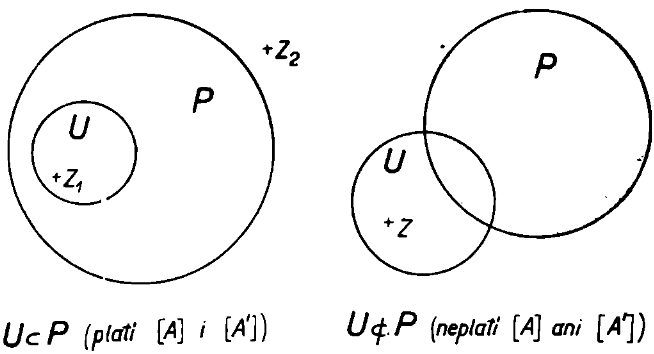
[A′]: Jestliže bod Z *nepatří množině* **P**, potom *nepatří ani množině* **U**.

V našem případě to znamená: Jestliže souřadnice bodu $Z = [\xi; \eta]$ nevyhovují nerovnosti (1), pak bod Z nepatří kruhu **U**.

[B′]: Jestliže bod Z *nepatří množině* **U**, potom *nepatří ani množině* **P**.

V našem případě to opět znamená: Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří kruhu **U**, pak jeho souřadnice nevyhovují nerovnosti (1).

Podmínky [A] a [A′], právě tak jako podmínky [B] a [B′], říkají jinými slovy o množinách **U** a **P** přesně totéž. Tak např. ve všech situacích, kdy je splněna jedna z podmínek [A] a [A′], je splněna i druhá, a ve všech situacích, kdy jedna z těchto podmínek neplatí, neplatí ani druhá. Správnost tohoto tvrzení si můžete ověřit na



Obr. 2ab

množinových diagramech na obrázcích 2ab. Totéž platí i o podmínkách [B] a [B′].

Vlastnosti [A] a [B], resp. [A′] a [B′] mají základní význam, neboť ukazují cestu, jak se dokazuje rovnost dvou množin $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{P}$. Je třeba vždy ověřit jednak jednu z podmínek [A] a [A′], jednak jednu z podmínek [B] a [B′]. Tuto hlavní myšlenku vyjadřuje schéma:

ověřit [A] či [A′], tj. $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{P}$

Množina $\boldsymbol{U}$, tj. daný geometrický útvar	→	**Množina** $\boldsymbol{P}$, udaná početním vyjádřením
	←	

ověřit [B] či [B′], tj. $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{U}$

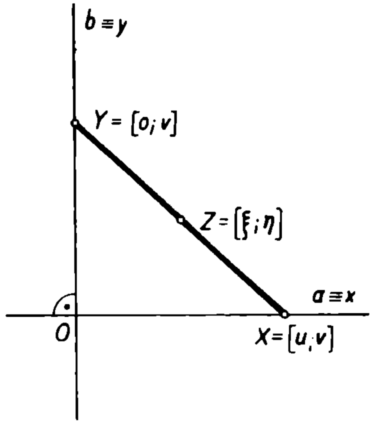
Pro úplnost si připomeňme, že *kartézskou soustavou souřadnic* rozumíme soustavu pravoúhlých souřadnic, při níž jsou za jednotky na obou osách zvoleny shodné úsečky. V této knížce však budeme pro stručnost místo slov „kartézská soustava souřadnic“ užívat kratšího názvu „soustava souřadnic“.

Všimněme si nyní podrobněji **struktury řešení úloh na vyšetřování geometrických míst bodů.** Také zde operujeme s množinami. Jestliže při vyšetřování geometrických míst bodů dané vlastnosti používáme *metody souřadnic* (tj. analytické geometrie), *pracujeme* většinou dokonce *se třemi množinami*. Ukážeme si to opět na příkladě.

1. Příklad. Jsou dány dvě kolmice a, b. Bod X probíhá přímku a, bod Y přímku b a to tak, že úsečka XY

má stálou délku $2d$. Máme vyšetřit geometrické místo $\boldsymbol{M}$ středů Z všech úseček XY.

Řešení. Za osy souřadnic zvolíme přímky a, b (obr. 3). Zvolíme si libovolnou úsečku XY vyhovující zadání příkladu; její střed je bod $Z = [\xi; \eta]$. Tím dostaneme libovolný bod geometrického místa (tj. *první množiny*) $\boldsymbol{M}$. Souřadnice bodů X, Y zvolíme podle obrázku 3.



Obr. 3

Úsečka XY má délku $2d$, tzn. je

$$XY = \sqrt{(u - 0)^2 + (0 - v)^2} = \sqrt{u^2 + v^2} = 2d. \qquad (2)$$

Střed Z úsečky XY má souřadnice

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(u + 0) = \frac{1}{2}u, \\ \eta &= \frac{1}{2}(0 + v) = \frac{1}{2}v. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Parametry u, v vyloučíme, jestliže dosadíme za u, v ze vztahů (3) do poslední rovnosti (2). Po úpravě zjistíme, že souřadnice libovolného bodu $Z = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$ vyhovují početnímu vyjádření

$$\xi^2 + \eta^2 = d^2. \qquad (4)$$

Tím jsme však dostali *druhou množinu*. Je to množina $\boldsymbol{P}$, kterou tvoří všechny body $Z = [\xi; \eta]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (4). Z dosavadních úvah zároveň vyplývá, že je

$$\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{P}. \tag{5}$$

(Vztah (5) jsme totiž dokázali ověřením podmínky [A].)

Abychom dokázali rovnost množin $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}$, musíme ještě dokázat vztah

$$\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{M}. \tag{6}$$

To provedeme např. ověřením podmínky [B′]. Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině $\boldsymbol{M}$, tzn. Z je střed úsečky XY, která má sice krajní body na přímkách a, b, ale nemá délku $2d$. Pak

$$XY = \sqrt{u^2 + v^2} \neq 2d. \tag{2′}$$

Dosadíme-li opět ze vztahů (3) za u a v do nerovnosti (2′), dostaneme po úpravě

$$\xi^2 + \eta^2 \neq d^2. \tag{4′}$$

Nerovnost (4′) však znamená, že bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří ani množině $\boldsymbol{P}$. Tím je tedy dokázán vztah (6), který spolu se vztahem (5) ukazuje, že je

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}. \tag{7}$$

Z analytické geometrie však víme, že rovnice (4) je početním vyjádřením kružnice $\boldsymbol{U}$ se středem O v počátku soustavy souřadnic (tj. v průsečíku přímek a, b) a s poloměrem d. Kružnice $\boldsymbol{U}$ je tedy *třetí množinou;* přitom analytická geometrie říká, že

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}. \tag{8}$$

Z rovností (7) a (8) pak plyne, že

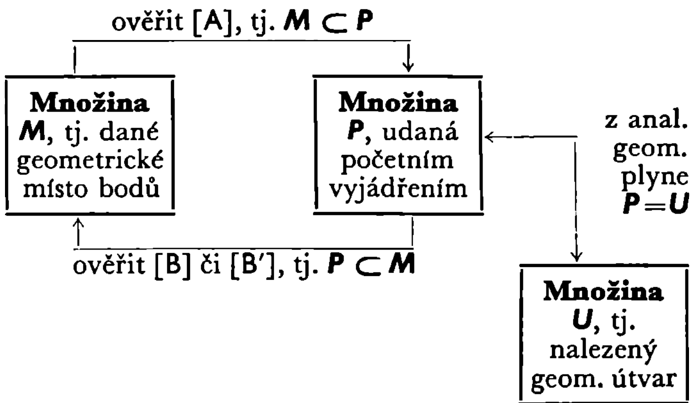
$$U = M,$$

tzn. kružnice U je vyšetřovaným geometrickým místem M.

Výsledek. Geometrické místo M je kružnice U se středem v průsečíku kolmic a, b a s poloměrem d.

Řešení příkladu 1 jsme udělali tak podrobně proto, abychom ukázali všechny tři množiny, které se v průběhu řešení vyskytují. Přitom ovšem množina P charakterizovaná společným početním vyjádřením množin U, M sehrála při řešení pouze úlohu jakéhosi prostředníka „třetí osoby". Proto také při řešení dalších příkladů ani o množině P explicitně nemluvíme; mluvíme však vždy o společném početním vyjádření množin U, M, což je ovšem v podstatě totéž.

Strukturu řešení úlohy na vyšetřování geometrických míst bodů metodou souřadnic můžeme vyjádřit schématem:



Můžeme tedy říci, že řešení se v podstatě skládá ze tří fází. Předně zjistíme, jakému početnímu vyjádření vyhovují všechny body množiny M. Tím vlastně najdeme množinu P a zároveň ověřením podmínky [A] dokážeme, že $M \subset P$.

Potom ověřením jedné z podmínek [B] a [B'] dokážeme, že je též $P \subset M$. Tato fáze řešení má, populárně řečeno, zajistit, že se do P nepřipletly body, které nepatří geometrickému místu M, případně takovéto „přiživující" se body včas vyloučit.

Konečně ve třetí fázi na základě znalostí z analytické geometrie určíme geometrický útvar U, který se rovná množině P a tedy i množině M. Tato fáze je tedy vlastně jen dílem okamžiku.

Připomeňme však, že *metoda souřadnic je při řešení jen pomocným aparátem, a proto je třeba vždy výsledek formulovat nezávisle na zvolené soustavě souřadnic, tj. pouze s použitím daných prvků.*

Je samozřejmé, že není účelné užívat při vyšetřování geometrických míst bodů dané vlastnosti pouze metody souřadnic. Např. nebudeme používat této metody, známe-li jednoduchý syntetický způsob řešení. Proto si řekněme, **kdy** při řešení úloh o geometrických místech bodů **užíváme metody souřadnic:**

1. Jestliže výsledek nedovedeme jiným způsobem odhadnout.
2. Jestliže sice dovedeme odhadnout výsledek, ale svůj odhad nedovedeme jinak dokázat.

Ukážeme si však později, že ani v uvedených dvou případech se nevyhýbáme jednoduchým syntetickým úsudkům, neboť ty mohou řešení značně zjednodušit. Metoda souřadnic je totiž sice velmi spolehlivá metoda (vede k cíli i tam, kde např. syntetická metoda selhala), ale někdy je dost pracná. Odtud staré pořekadlo, že analytická geometrie nahradila duchaplnost syntetické geometrie trpělivostí.

Pracnost početní metody do značné míry ovlivňuje mimo jiné i vhodnost či nevhodnost volby soustavy souřadnic. Pro nejvýhodnější volbu soustavy souřadnic neexistuje bohužel univerzální návod. Ve většině případů je však účelné **volit soustavu souřadnic podle zásady:** Jestliže je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ souměrné podle nějaké přímky, ztotožníme tuto přímku s některou souřadnicovou osou. Jestliže je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ souměrné podle nějakého středu, zvolíme jej za počátek soustavy souřadnic. (Této zásady jsme mlčky využili již při řešení příkladu 1.)

2. kapitola

APLIKACE VZDÁLENOSTI DVOU BODŮ

Jak napovídá již název kapitoly, budeme se nejdříve zabývat geometrickými místy takových bodů, jejichž polohu lze charakterizovat vzdálenostmi od předem daných pevných bodů.

2. Příklad. Je dán trojúhelník ABC a reálné číslo $c > 0$. Ke zvolenému bodu V sestrojíme postupně body X, Y, Z tak, aby body Y, X byly souměrně sdružené podle středu A, body X, Y souměrně sdružené podle středu B a konečně body V, Z souměrně sdružené podle středu C. Vyšetříme geometrické místo $\mathbf{M}$ všech bodů V, pro něž je $VZ \leqq c$.

Řešení. Soustavu souřadnic zvolíme podle obrázku 4. Pro zjednodušení je zvolena za jednotku na osách souřadnic úsečka AC. Na obrázku jsou označeny též souřadnice všech potřebných bodů.

Nyní postupně určíme souřadnice bodů X, Y, Z pomocí souřadnic bodů A, B, C, V.

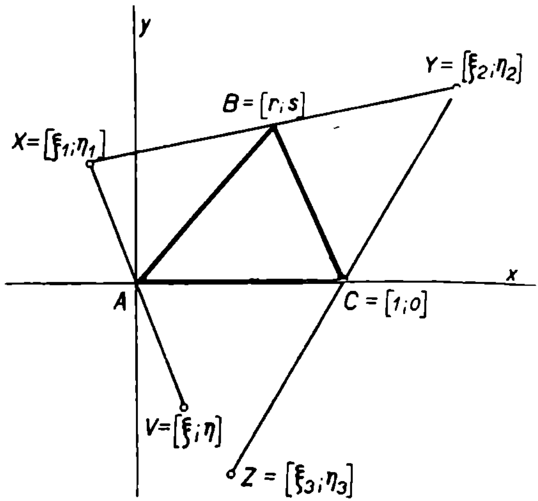
$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\xi; & \eta_1 &= -\eta; \\ \xi_2 &= \xi + 2r; & \eta_2 &= \eta + 2s; \\ \xi_3 &= -\xi - 2r + 2; & \eta_3 &= -\eta - 2s. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Jestliže bod $V = [\xi; \eta]$ patří množině $\mathbf{M}$, pak je podle předpokladu $VZ \leqq c$, neboli

$$\sqrt{(\xi - \xi_3)^2 + (\eta - \eta_3)^2} \leqq c. \qquad (2)$$

Po dosazení za ξ_3 a η_3 z rovností (1) a po úpravě dostaneme nerovnost

$$[\xi - (1 - r)]^2 + (\eta + s)^2 \leqq \frac{1}{4} c^2. \tag{3}$$



Obr. 4

Souřadnice libovolného bodu $V = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$ vyhovují tedy nerovnosti (3). Ta je však zároveň početním vyjádřením kruhu $\boldsymbol{U}$ se středem $D = [1 - r; -s]$ a s poloměrem $\frac{1}{2} c$. Tím je tedy dokázáno, že $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Nyní se pokusíme zjistit, zda platí též vztah $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$. Budeme postupovat tak, že ověříme podmínku [B].

Nechť bod $V = [\xi; \eta]$ patří kruhu $\boldsymbol{U}$, potom jeho souřadnice vyhovují nerovnosti (3). Tu však můžeme upravit na tvar

$$[\xi - (-\xi - 2r + 2)]^2 + [\eta - (-\eta - 2s)]^2 \leqq c^2;$$

resp. s použitím rovností (1) na tvar

$$(\xi - \xi_3)^2 + (\eta - \eta_3)^2 \leqq c^2.$$

Protože obě strany této nerovnosti jsou nezáporná čísla, můžeme je odmocnit a tím dostaneme tvar (2). Ten však znamená, že $VZ \leqq c$, čili bod V patří množině $\boldsymbol{M}$. Tím je dokázáno, že $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Ze vztahů $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$ již plyne rovnost $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}$. Je tedy geometrické místo $\boldsymbol{M}$ kruh $\boldsymbol{U}$ se středem v bodě $D = [1 - r; -s]$ a s poloměrem $\frac{1}{2}c$. To však ještě není v pravém slova smyslu výsledek, neboť v odpovědi se udává poloha bodu D pomocí souřadnic. Snadno si však ukážeme, že bod D dostaneme tak, že doplníme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABCD$.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je kruh $\boldsymbol{U} \equiv (D; \frac{1}{2}c)$, jehož střed D je vrcholem rovnoběžníku $ABCD$.

Všimněte si, že metoda souřadnic nám dala více než to, co jsme žádali. Výpočty a výsledek platí i v tom případě, když body A, B, C nejsou vrcholy trojúhelníka, ale kdy leží v přímce a případně i všelijak splývají. Pak sice nelze v řešení hovořit o rovnoběžníku $ABCD$, ale to nevadí; v tom případě se užije jiné formulace.

Z příkladu 2 můžeme vytěžit navíc tyto obecnější poznatky:

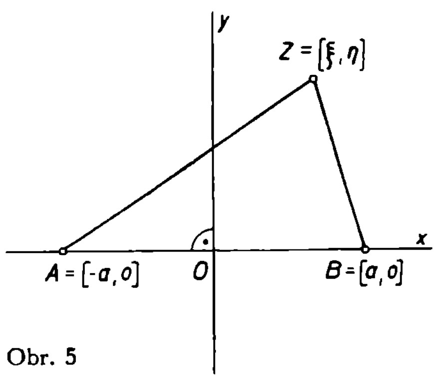
1. Analytická metoda může často automaticky vyřešit více než to, co se v dané úloze požaduje.

2. V některých případech je výhodné zvolit v soustavě souřadnic za jednotkovou úsečku jistou úsečku daného útvaru.

3. Výsledek máme vždy popsat pouze pomocí daných prvků, tzn. tak, aby se v něm nevyskytovaly matematické objekty (např. souřadnice, body, přímky ap.), které jsme zavedli sami až v průběhu řešení. Jinými slovy to znamená, že formulace výsledku má být jasná po přečtení zadání úlohy i bez studia jejího řešení.

3. Příklad. Je dána úsečka $AB = 2a$ a číslo $k > 0$. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od bodů A, B stálý rozdíl druhých mocnin vzdáleností rovný k.

Řešení. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je na první pohled souměrné podle přímky AB i podle osy úsečky AB. Soustavu souřadnic proto zvolíme podle obrázku 5.



Obr. 5

Podle předpokladu je pro každý bod $Z = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$

$$|AZ^2 - BZ^2| = k, \tag{4}$$

neboli

$$|[(\xi + a)^2 + \eta^2] - [(\xi - a)^2 + \eta^2]| = k. \tag{5}$$

Odtud postupně dostaneme

$$4a \,.\, |\xi| = k,$$

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{k}{4a}, & \text{pro} \quad \xi > 0, \\ -\dfrac{k}{4a}, & \text{pro} \quad \xi < 0. \end{cases} \tag{6}$$

To znamená, že každý bod $Z = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$ vyhovuje jedné z rovností (6). Z analytické geometrie víme, že rovnosti (6) jsou početním vyjádřením útvaru $\boldsymbol{U}$ složeného ze dvou rovnoběžek s osou y ve vzdálenosti $|\xi| = \dfrac{k}{4a}$ od počátku. Dokázali jsme tedy vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Vztah $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$ dokážeme obrácením dosavadního postupu. Pro souřadnice libovolného bodu $Z = [\xi; \eta]$ útvaru $\boldsymbol{U}$ platí některý ze vztahů (6); z nich můžeme odvodit vztah (5) a tím i (4). Patří tedy bod $Z = [\xi; \eta]$, který vyhovuje jedné z rovností (6), skutečně množině $\boldsymbol{M}$, tzn. $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je útvar $\boldsymbol{U}$, který se skládá ze dvou přímek rovnoběžných s osou úsečky AB vedených ve vzdálenosti $\frac{1}{4}ka^{-1}$ od středu úsečky AB.

4. Příklad. Je dán rovnoramenný trojúhelník RST se základnou $RS = 2t$ a k ní příslušnou výškou v. Z je takový bod, že z úseček $a = RZ$, $b = SZ$, $c = TZ$ lze sestrojit ostroúhlý trojúhelník. Vyšetříme geometrické místo M všech bodů Z.

Řešení. Předně musíme zjistit nutnou a postačující podmínku pro to, aby úsečky a, b, c byly stranami ostroúhlého trojúhelníka. Podle kosinové věty a věty k ní obrácené víme, že trojúhelník (ať už ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý) o stranách a, b, c a protějších úhlech α, β, γ existuje právě tehdy, jestliže platí

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Duté úhly α, β, γ jsou ostré právě tehdy, když jsou jejich kosiny kladné. Tedy vzhledem k rovnostem (7) můžeme nutnou a postačující podmínku pro to, aby úsečky a, b, c byly stranami ostroúhlého trojúhelníka, vyjádřit soustavou nerovností

$$\left.\begin{aligned} a^2 &< b^2 + c^2, \\ b^2 &< a^2 + c^2, \\ c^2 &< a^2 + b^2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

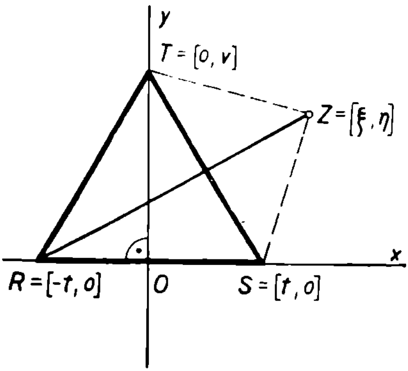
Nyní již můžeme začít s analytickým vyšetřováním geometrického místa M. Protože je zřejmě toto geometrické místo souměrné podle osy úsečky RS, zvolíme soustavu souřadnic podle obrázku 6. Nerovnosti (8) přepíšeme užitím souřadnic a uvedeme na konečné tvary

$$(\xi - 2t)^2 + (\eta - v)^2 > 4t^2, \tag{9a}$$

$$(\xi + 2t)^2 + (\eta - v)^2 > 4t^2, \tag{9b}$$

$$\xi^2 + (\eta + v)^2 > 2(v^2 - t^2). \tag{9c}$$

Zjistili jsme tedy, že souřadnice každého bodu $Z = [\xi; \eta]$ patřícího množině $\boldsymbol{M}$, vyhovují nerovnostem (9a) až (9c). Přitom nerovnosti (9a) a (9b) jsou početní vyjádření vnějšků $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_2$ kružnic $k_1 \equiv (C_1; 2t)$, $k_2 \equiv (C_2; 2t)$, kde C_1, C_2 jsou (jak se sami snadno přesvědčíte) vrcholy rovnoběžníků RSC_1T a $RSTC_2$. Pro útvar $\boldsymbol{U}_3$, daný početním vyjádřením (9c), musíme rozlišit tři případy:



Obr. 6

1. Pravá strana nerovnosti (9c) je kladná. Pak $\boldsymbol{U}_3$ je vnějšek kruhu k_3 s poloměrem $\sqrt{2(v^2 - t^2)}$ a středem C_3 souměrně sdruženým s bodem T podle přímky RS. Tento případ nastane právě tehdy, je-li $v > t$, tzn. je-li trojúhelník RST ostroúhlý.

2. Pravá strana nerovnosti (9c) se rovná nule. Pak je $\boldsymbol{U}_3$ celá rovina s výjimkou bodu C_3. Tento případ nastane právě tehdy, je-li $v = t$, tzn. je-li trojúhelník RST pravoúhlý.

3. Pravá strana nerovnosti (9c) je záporná. Pak je $\boldsymbol{U}_3$ celá rovina bez výjimky. To nastane právě tehdy, je-li $0 < v < t$, tzn. je-li trojúhelník RST tupoúhlý.

Pro každý bod $Z = [\xi; \eta]$ geometrického útvaru $\boldsymbol{M}$ jsou splněny všechny tři nerovnosti (9a) až (9c) zároveň, a proto je množina $\boldsymbol{M}$ částí všech tří útvarů $\boldsymbol{U}_1$,

$\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{U}_3$. Množina $\boldsymbol{M}$ je tudíž částí průniku[1]) množin $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{U}_3$, tj. $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2 \cap \boldsymbol{U}_3$ (na obr. 7abc je množina $\boldsymbol{U}$ vyšrafována).

Nyní dokážeme obrácené tvrzení, tj. $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$. Dokážeme to nepřímo, tj. ověřením podmínky [B′]. Jestliže z úseček $a = RZ$, $b = SZ$, $c = TZ$ nelze sestrojit ostroúhlý trojúhelník (tzn., že z nich buď vůbec nelze sestrojit trojúhelník, nebo je tento trojúhelník pravoúhlý či tupoúhlý), pak *neplatí aspoň jedna z nerovností* (8). V důsledku toho neplatí pro bod $Z = [\xi; \eta]$ aspoň jedna z nerovností (9a) až (9c). To však znamená, že bod Z nepatří aspoň jednomu z útvarů $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{U}_3$ a tedy nemůže patřit ani jejich průniku $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2 \cap \boldsymbol{U}_3$. Tím je tedy dokázán vztah $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

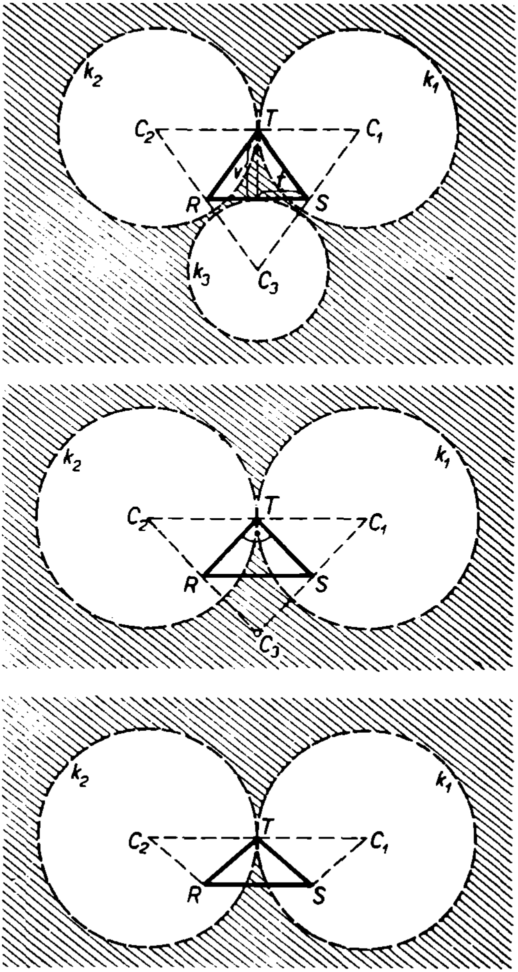
Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je útvar $\boldsymbol{U}$, jehož konstrukce byla popsána (nezávisle na zvolené soustavě souřadnic) v průběhu řešení. (Viz obr. 7abc; hraniční kružnice k_1, k_2, k_3 geometrickému místu $\boldsymbol{M}$ nepatří a jsou proto vytaženy pouze čárkovaně.)

Příklad 4 ukazuje, že geometrické místo může být někdy charakterizováno několika podmínkami [viz nerovnosti (8)]. Každá z těchto podmínek určí jedno „pomocné" geometrické místo (viz útvary $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{U}_3$). Hledané geometrické místo tvoří potom společná část neboli *průnik* těchto „pomocných" geometrických míst.

Někdy je „tvar" geometrického místa závislý na vzá-

---

[1]) Průnikem dvou množin $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ rozumíme množinu $\boldsymbol{P}$, která se skládá právě z těch bodů, které patří zároveň oběma množinám $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$. (Zapisujeme to $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N}$.) Jestliže množiny $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ nemají žádný společný bod, říkáme, že jejich průnik je množina prázdná (označení $\emptyset$). Podobně se definuje průnik tří a více množin.



Obr. 7 abc

jemné poloze daných prvků. V takovém případě musíme provést samozřejmě příslušné třídění vyšetřovaného geometrického místa (viz podrobnou diskusi množiny $\boldsymbol{U}_3$ v příkladu 4).

V druhé části řešení příkladu 4 jsme potřebovali vyslovit negaci soustavy nerovností (8). Všimněte si, že negace správně zněla: *Aspoň jedna* z nerovností (8) *není splněna.* Často se totiž chybuje v tom, že za negaci se prohlásí výrok: „Žádná z nerovností (8) není splněna." Podobně se utvoří např. negace výroku: „Všechny vstupenky na dnešní představení jsou vyprodány." Negace správně zní: „Všechny vstupenky na dnešní představení nejsou (ještě) vyprodány čili alespoň jedna vstupenka je na prodej."

5. Příklad. Jsou dány různoběžky a, b a bod Z, pro který platí: Vzdálenost pat kolmic vedených z bodu Z na přímky a, b se rovná danému číslu $d > 0$. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z.

Řešení. Je zřejmé, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je souměrné podle obou os různoběžek a, b. Zvolíme proto tyto osy zároveň za osy soustavy souřadnic (obr. 8).

Předpokládejme, že bod $Z = [\xi; \eta]$ patří množině $\boldsymbol{M}$. Určíme souřadnice bodů A, B, které jsou patami kolmic, z bodu Z na přímky a, b. Výpočet provedeme napřed pro bod A. Určíme rovnici přímky AZ; je to kolmice k přímce $y = kx$ a prochází bodem $Z = [\xi; \eta]$. Směrnice přímky AZ je $-\dfrac{1}{k}$. Rovnice přímky AZ je tedy

$$y - \eta = -\frac{1}{k}(x - \xi).$$

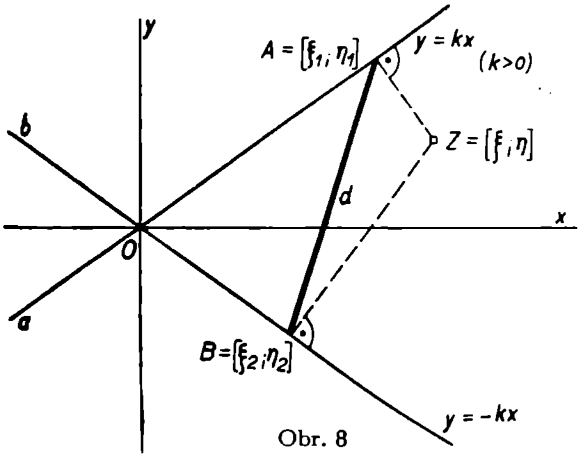
Souřadnice bodu A dostaneme tudíž řešením soustavy

$$y = kx,$$

$$y - \eta = -\frac{1}{k}(x - \xi).$$

Po snadném výpočtu vyjde

$$\xi_1 = \frac{k\eta + \xi}{1 + k^2}; \quad \eta_1 = \frac{k(k\eta + \xi)}{1 + k^2}. \qquad (10)$$



Obr. 8

Výpočet souřadnic bodu B bychom mohli provést úplně stejně; je to ovšem zbytečné. Stačí totiž ve výsledcích (10) nahradit všude číslo k číslem k němu opačným.

$$\xi_2 = \frac{-k\eta + \xi}{1 + k^2}; \quad \eta_2 = \frac{-k(-k\eta + \xi)}{1 + k^2}. \qquad (11)$$

Protože bod Z patří množině $\boldsymbol{M}$, je $AB = d$, tzn.

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2} = d; \tag{12}$$

po dosazení z (10) a (11) a po úpravě vyjde

$$\xi^2 + \eta^2 = \left[\frac{d(1+k^2)}{2k}\right]^2. \tag{13}$$

Rovnice (13) je početním vyjádřením kružnice **U** se středem O v průsečíku různoběžek a, b a s poloměrem $d(1 + k^2)(2k)^{-1}$. Tím je dokázána první část $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Nyní dokážeme obrácené tvrzení: $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$. Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině **M**, pak příslušná úsečka AB nemá délku d, tzn.

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2} \neq d. \tag{12'}$$

Odtud pak, podobně jako výše, odvodíme nerovnost

$$\xi^2 + \eta^2 \neq \left[\frac{d(1+k^2)}{2k}\right]^2. \tag{13'}$$

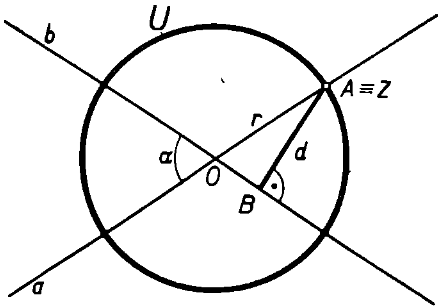
To však znamená, že bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří kružnici **U**. Tím je důkaz ukončen.

Zbývá pouze určit poloměr kružnice **U** nezávisle na zvolené soustavě souřadnic. Označme α odchylku přímek a, b. Potom zřejmě směrnice k přímky a je $k =$ $= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; jednoduchým výpočtem pak zjistíte, že poloměr kružnice **U** je

$$d(1 + k^2)\,(2k)^{-1} = d\,.\,(\sin \alpha)^{-1}.$$

Výsledek. Geometrické místo **M** je kružnice **U** se středem v průsečíku různoběžek a, b a s poloměrem $r =$ $= d\,.\,(\sin \alpha)^{-1}$, kde α je odchylka přímek a, b.

Všimněme si, že poloměr r kružnice **U** jsme mohli uhodnout i bez výpočtu. Stačí totiž zvolit bod Z geometrického místa **M** na některé z přímek a, b (obr. 9).



Obr. 9

Cvičení

1. a) Je dán čtyřúhelník $ABCD$ a číslo $d > 0$. Zvolte si bod V a sestrojte lomenou čáru $VWXYZ$ tak, že body A, B, C, D jsou po řadě středy úseček VW, WX, XY, YZ. Vyšetřete geometrické místo **M** bodů V, pro něž je velikost úsečky $VZ < d$.
   b) Řešte obdobnou úlohu pro pětiúhelník $ABCDE$!
2. a) Jsou dány dva různé body A, B a číslo $k > 0$. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, které mají od bodů A, B stálý součet druhých mocnin vzdáleností rovný k^2.
   b) Řešte obdobnou úlohu pro případ, že jsou dány tři body A, B, C, resp. čtyři body A, B, C, D. (Výsledné geometrické místo určete pomocí vzdáleností daných bodů.)
3. Je dána úsečka AB a číslo k $(0 < k \neq 1)$. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, pro něž platí $AZ : BZ = k$.

4. Je dán trojúhelník PQR. Vyšetřete množinu $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: $PZ^2 + QZ^2 = RZ^2$.
5. Půdorys místnosti je rovnostranný trojúhelník ABC o straně 10 m. Všechny stěny jsou obloženy zrcadly. Paprsek, který vyšel z bodu Z_0, se po odrazu od všech tří stěn vrátil zpět do bodu Z_0; přitom urazil vodorovnou dráhu dlouhou 20 m. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají stejnou vlastnost jako bod Z_0.
6. Jsou dány dvě kolmice o_1, o_2. Po přímce o_1 se pohybuje bod A a po přímce o_2 bod B tak, že úsečka AB má stálou délku d. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: bod B je středem úsečky AZ.
7. Je dán tzv. deltoid $ABCD$, tj. čtyřúhelník souměrný podle úhlopříčky AC. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí:
$$AZ^2 < BZ^2 + DZ^2 < CZ^2.$$
8. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: $AZ + BZ = CZ$. (Návod: Soustavu souřadnic zvolte tak, aby $C = [0; -1]$ a těžiště trojúhelníka ABC bylo v počátku souřadnic.)

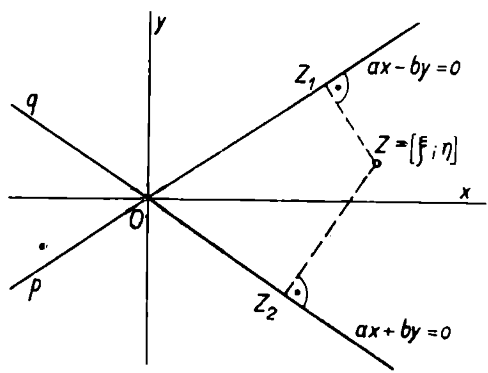
3. kapitola

APLIKACE VZDÁLENOSTI BODU A PŘÍMKY

Budeme vyšetřovat geometrická místa takových bodů, jejichž polohu lze charakterizovat pomocí vzdáleností od daných bodů a přímek.

6. Příklad. Jsou dány dvě různoběžky p, q a číslo $k > 0$. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od přímek p, q stálý součet vzdáleností rovný k.

Řešení. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je zřejmě souměrné podle obou os různoběžek p, q. Zvolíme proto tyto osy



Obr. 10

zároveň za osy soustavy souřadnic (obr. 10). Rovnice přímek p, q napíšeme po řadě ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} ax - by &= 0, \\ ax + by &= 0, \end{aligned}\right\} \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$, potom je (viz obr. 10)

$$ZZ_1 + ZZ_2 = k, \tag{1}$$

kde Z_1, Z_2 jsou paty kolmic vedených z bodu Z na přímky p, q. Vyjádříme-li rovnost (1) pomocí analytické geometrie, dostaneme

$$| a\xi - b\eta | + | a\xi + b\eta | = k. \tag{2}$$

Nyní rozlišíme několik případů.

1. Za předpokladu, že je

$$a\xi - b\eta \geqq 0, \quad a\xi + b\eta \geqq 0, \tag{3}$$

(tzn. za předpokladu, že bod $Z = [\xi; \eta]$ leží „pod“ nebo na přímce p a zároveň „nad“ nebo na přímce q), můžeme na základě definice absolutní hodnoty přepsat rovnici (2) ve tvaru

$$(a\xi - b\eta) + (a\xi - b\eta) = k$$

neboli

$$\xi = \frac{k}{2a}. \tag{4}$$

To znamená, že každý bod $Z = [\xi; \eta]$, patřící geometrickému místu $\boldsymbol{M}$ a vyhovující podmínkám (3), leží na přímce o rovnici (4); přesněji řečeno na úsečce u_1, kterou na této přímce vytínají různoběžky p, q. (Souřadnice η všech bodů této úsečky bychom mohli zjistit z nerovností (3) po dosazení za ξ z rovnice (4).)

2. Za předpokladu, že je

$$a\xi - b\eta \leqq 0, \quad a\xi + b\eta \geqq 0, \tag{5}$$

(tzn. za předpokladu, že bod $Z = [\xi; \eta]$ leží zároveň „nad“ nebo na přímce p i q), můžeme rovnici (2) přepsat ve tvaru

$$(-a\xi + b\eta) + (a\xi + b\eta) = k$$

neboli

$$\eta = \frac{k}{2b}. \tag{6}$$

Proto každý bod $Z = [\xi; \eta]$, patřící množině $\boldsymbol{M}$, musí za uvedených předpokladů ležet na přímce o rovnici (6); lépe řečeno na úsečce u_2, kterou na ní vytínají různoběžky p, q.

Všimněte si, že úsečky u_1 a u_2 mají na přímce p společný krajní bod. K tomuto výsledku můžeme dojít i bez výpočtu; z jednoduché syntetické úvahy totiž ihned plyne, že na každé z přímek p, q leží pouze dva body geometrického místa $\boldsymbol{M}$, které jsou souměrně sdružené podle průsečíku O různoběžek p, q.

Protože celé geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je souměrné podle průsečíku O přímek a, b, nemusíme zřejmě zbývající dva případy

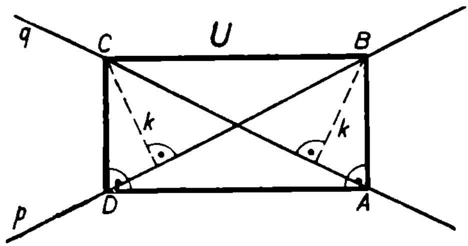
$$a\xi - b\eta \leqq 0, \quad a\xi + b\eta \leqq 0, \tag{7}$$

$$a\xi - b\eta \geqq 0, \quad a\xi + b\eta \leqq 0 \tag{8}$$

ani početně vyšetřovat.

Z našich dosavadních úvah tedy vyplývá, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je částí obvodu $\boldsymbol{U}$ obdélníku $ABCD$ s vrcholy na přímkách p, q. Body A, B, C, D dostaneme v souhlase se zadáním geometrického místa $\boldsymbol{M}$ tak, že na přímce p, resp. q najdeme body, které mají od přímky q, resp. p vzdálenost k (obr. 11).

Nyní vyšetříme obráceně, zda je obvod $\boldsymbol{U}$ obdélníku $ABCD$ částí geometrického místa $\boldsymbol{M}$. Vzhledem k souměrnosti obdélníku $ABCD$ i množiny $\boldsymbol{M}$ podle středu O můžeme se omezit např. pouze na strany AB, BC



Obr. 11

(obr. 11). Stačí tedy dokázat, že $AB \subset \boldsymbol{M}$ a také $BC \subset \boldsymbol{M}$.

Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ patří úsečce AB, pak jeho souřadnice vyhovují rovnici (4) a nerovnostem (3). Ale rovnici (4) můžeme přepsat ve tvaru

$$(a\xi - b\eta) + (a\xi + b\eta) = k$$

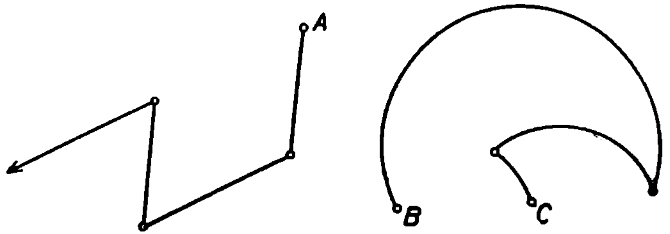
a vzhledem k nerovnostem (3) ve tvaru (2). Rovnost (2) je však jen jiný tvar rovnosti (1). Patří tedy uvažovaný bod Z též geometrickému místu $\boldsymbol{M}$ a proto je $AB \subset \boldsymbol{M}$.

Úplně stejně se dokáže $BC \subset \boldsymbol{M}$. Tím je důkaz hotov.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je obvod $\boldsymbol{U}$ obdélníku $ABCD$, jehož každý vrchol leží na jedné z různoběžek p, q a má od zbývající vzdálenost k.

Při řešení tohoto příkladu se nám vyplatila kombinace početní metody s jednoduchými syntetickými úvahami. Tím se totiž řešení znatelně zkrátilo.

Dále si řekněme ještě jednu praktickou radu. Při podrobnějším vyšetřování rovnic typu (2) se poměrně snadno udělá chyba ve znaménku. Dobrou kontrolu vý-



Obr. 12ab

počtů umožňuje někdy věta, kterou lze poměrně jednoduše dokázat.

Útvar **U**, *daný rovnicí s absolutními hodnotami mnohočlenů, je ve všech svých bodech „spojitou" čarou. Je to tedy útvar složený z jedné nebo několika „lomených čar nebo křivek", které nemají žádné krajní body.*

Nemůže to tedy být např. žádný z útvarů na obr. 12ab. První z nich má totiž jeden krajní bod (A), druhý má dva krajní body (B, C).

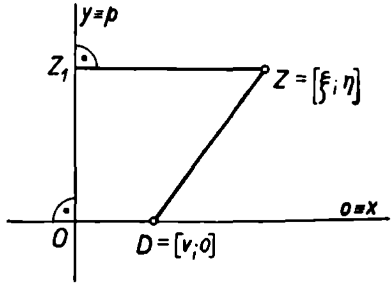
7. Příklad. Je dána přímka p a mimo ni ve vzdálenosti v ($v > 0$) bod D. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ bodů Z, které mají od přímky p a od bodu D součet vzdáleností nejvýše rovný k ($k > v$).

Řešení. Okamžitě je vidět, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$

je souměrné podle kolmice o k přímce p, procházející bodem D. Zvolíme proto přímku o za osu x a přímku p za osu y (obr. 13).

Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$, pak platí

$$ZZ_1 + ZD \leqq k, \qquad (9)$$



Obr. 13

kde Z_1 je pata kolmice z bodu Z na přímku p. Nerovnost (9) přepíšeme užitím prostředků analytické geometrie ve tvaru

$$|\xi| + \sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} \leqq k, \qquad (10)$$

resp. ve tvaru

$$\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} \leqq k - \xi, \text{ pro } \xi \geqq 0, \qquad (11a)$$

$$\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} \leqq k + \xi, \text{ pro } \xi \leqq 0. \qquad (11b)$$

Nejdříve vyšetříme nerovnost (11a). Obě strany umocníme na druhou a po další úpravě dostaneme

$$\eta^2 \leqq 2\xi(v - k) - (v - k)(v + k). \qquad (12)$$

Nerovnost (12) připomíná početní vyjádření jistého rovinného útvaru omezeného parabolou, jejíž osa je rovnoběžná s osou x. Nerovnost (12) proto upravíme na tvar

$$\eta^2 \leqq 2(v - k)\left[\xi - \frac{1}{2}(v + k)\right]. \qquad (13)$$

Protože je podle předpokladu $v < k$, je $v - k < 0$. Je tedy nerovnost (13) početním vyjádřením útvaru $\boldsymbol{U}_1$, skládajícího se z paraboly $\boldsymbol{P}_1$ o rovnici

$$\eta^2 = 2(v - k)\left[\xi - \frac{1}{2}(v + k)\right]$$

a jejího vnitřku. Přitom vrchol paraboly $\boldsymbol{P}_1$ je bod $V_1 = \left[\frac{1}{2}(v + k);\ 0\right]$. Její ohnisko splývá s bodem $D = [v; 0]$, neboť

$$\frac{1}{2}(v + k) + \frac{1}{2}(v - k) = v.$$ [1]

Řídicí přímka d_1 má od přímky p vzdálenost k, neboť

$$\frac{1}{2}(v + k) - \frac{1}{2}(v - k) = k.$$ [1]

Zjistili jsme tedy, že každý bod $Z = [\xi; \eta]$ (kde $\xi \geqq 0$), patřící geometrickému místu $\boldsymbol{M}$, náleží útvaru $\boldsymbol{U}_1$ (dokonce pouze té části útvaru $\boldsymbol{U}_1$, která leží v polorovině pD).

Úplně stejně můžeme vyšetřit nerovnost (11b). Zjistíme, že je početním vyjádřením útvaru $\boldsymbol{U}_2$, složeného z paraboly $\boldsymbol{P}_2$ o rovnici

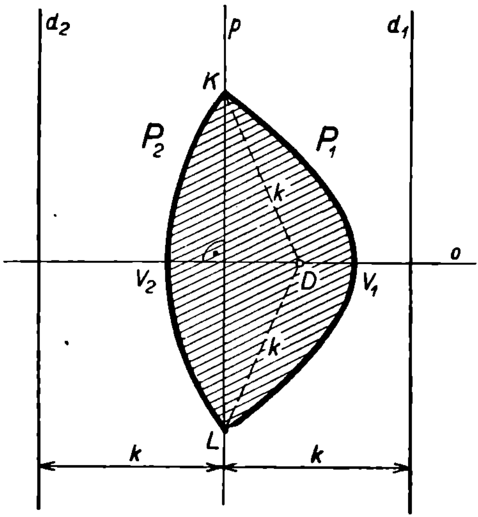
$$\eta^2 = 2(v + k)\left[\xi - \frac{1}{2}(v - k)\right]$$

a jejího vnitřku. Parabola $\boldsymbol{P}_2$ má ohnisko opět v bodě D a její řídicí přímka d_2 má také od přímky p vzdálenost k. Proto každý bod $Z = [\xi; \eta]$ (kde $\xi \leqq 0$) patřící geo-

[1]) Viz např. [7], str. 88.

metrickému místu $\boldsymbol{M}$, náleží útvaru $\boldsymbol{U}_2$ (dokonce pouze té části útvaru $\boldsymbol{U}_2$, která patří k polorovině opačné k polorovině pD).

Obě paraboly $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ protínají přímku p v týchž bo-



Obr. 14

dech, které mají od bodu D vzdálenost rovnou k. Můžeme proto říci, že geometrický útvar $\boldsymbol{M}$ je částí útvaru $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$ (na obr. 14 je útvar $\boldsymbol{U}$ vyšrafován).

Zbývá dokázat, že je též $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$. Zde ukážeme pouze, že část $\boldsymbol{U}_1$, patřící polorovině pD, je součástí množiny $\boldsymbol{M}$. Důkaz obdobného tvrzení pro útvar $\boldsymbol{U}_2$ přenecháme čtenáři. Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ (kde $\xi \geqq 0$) patří útvaru

U_1, pak jeho souřadnice vyhovují nerovnosti (13). Tu můžeme upravit na tvar

$$\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} \leqq | k - \xi |. \qquad (14)$$

Z definice útvaru U_1 však ihned plyne, že $k > \xi$ neboli $k - \xi > 0$. Můžeme proto nerovnost (14) přepsat ve tvaru (11a), resp. (10). Tzn., že bod Z patří množině M.

Výsledek. Označme U_1, U_2 útvary skládající se z parabol (a jejich vnitřků), které mají společné ohnisko D, a jejichž řídicí přímky jsou rovnoběžky s přímkou p, vedené ve vzdálenosti k. Geometrické místo M je pak útvar $U = U_1 \cap U_2$.

Při řešení našeho příkladu jsme vztah $U \subset M$ dokazovali obrácením postupu, kterým jsme ověřili vztah $M \subset U$, tj. ověřením podmínky [B].

V jistém smyslu bude poučné, jestliže důkaz vztahu $U \subset M$ provedeme ještě jednou ověřením obměněné podmínky [B′]. Omezíme se však opět pouze na případ, že $\xi \geqq 0$. Případ $\xi \leqq 0$ přenecháme opět čtenáři.

Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ (kde $\xi \geqq 0$) nepatří množině M. Potom postupně dostaneme:

$$ZZ_1 + ZD > k, \qquad (9')$$

$$| \xi | + \sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} > k, \qquad (10')$$

$$\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} > k - \xi. \qquad (11a')$$

Nyní však musíme rozlišit dva případy.

a) Pravá strana nerovnosti (11a′) je záporná, tzn.

$$k < \xi. \qquad (15)$$

Avšak žádný bod $Z = [\xi; \eta]$ vyhovující nerovnosti (15) nemůže náležet útvaru $\boldsymbol{U}_1$ (viz obr. 14) a tedy ani útvaru $\boldsymbol{U}$.

b) Pravá strana nerovnosti (11a′) je nezáporná. Pak můžeme obě strany umocnit na druhou a dostaneme

$$(\xi - v)^2 + \eta^2 > (k - \xi)^2$$

a po dalších úpravách

$$\eta^2 > 2(v - k)\left[\xi - \frac{1}{2}(v + k)\right]. \qquad (13')$$

Tedy ani v tomto případě nepatří bod Z útvaru $\boldsymbol{U}_1$ a tudíž ani útvaru $\boldsymbol{U}$.

Připomeňme, že při tomto postupu nesmíme vynechat případ a). Opomenutí tohoto případu by mohlo v obdobných situacích vést k hrubé chybě. Můžeme se o tom přesvědčit na jednoduchém příkladu. Snadno totiž zjistíme, že z nerovnosti

$$\sqrt{\xi + \eta} > -2 \qquad (16)$$

neplyne nerovnost

$$\xi + \eta > 4,$$

která vznikne z (16), jestliže umocníme obě strany na druhou. Stačí zvolit např. $\xi = \eta = 1$.

K uvedenému řešení příkladu 7 připojíme ještě jednu poznámku. V okamžiku, kdy jsme zjistili tvar geometrického místa $\boldsymbol{M}$, tj. v okamžiku, kdy jsme dokázali vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$, mohli jsme již docela pohodlně řešení dokončit syntetickou metodou. (Pokuste se o to sami!) Početní metoda měla proto v tomto případě cenu hlavně „objevitelskou“.

8. Příklad. Je dána přímka p a mimo ni ve vzdálenosti v ($v > 0$) bod D. Kromě toho je dáno číslo $k > 1$. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: Poměr vzdáleností bodu Z od přímky p a od bodu D je stálý a rovná se k.

Řešení. Geometrické místo M je souměrné podle přímky o jdoucí bodem D kolmo k přímce p. Soustavu souřadnic zvolíme jako na obr. 13.

Označíme Z_1 patu kolmice z bodu $Z = [\xi; \eta]$ na přímku p. Jestliže bod Z patří množině M, pak je

$$\frac{ZZ_1}{ZD} = k. \tag{17}$$

Pomocí souřadnic přepíšeme rovnost (17) ve tvaru

$$\frac{|\xi|}{\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2}} = k,$$

resp.

$$|\xi| = k\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2}. \tag{18}$$

Umocníme obě strany rovnice (18) na druhou a upravíme na tvar

$$\xi^2(k^2 - 1) - 2k^2v\xi + k^2v^2 + k^2\eta^2 = 0. \tag{19}$$

Dostali jsme rovnici, která je vzhledem k oběma souřadnicím ξ, η kvadratická. Rovnice (19) je proto pravděpodobně početním vyjádřením nějaké středové kuželosečky; upravíme ji proto na některý tvar uvedený v [8] nebo [9]. (Viz str. 88—90.) Postupně dostaneme

$$(k^2 - 1)\left(\xi - \frac{k^2v}{k^2 - 1}\right)^2 + k^2\eta^2 = \frac{k^2v^2}{k^2 - 1},$$

$$\frac{\left(\xi - \dfrac{k^2v}{k^2 - 1}\right)^2}{\left(\dfrac{kv}{k^2 - 1}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\dfrac{v^2}{k^2 - 1}} = 1. \tag{20}$$

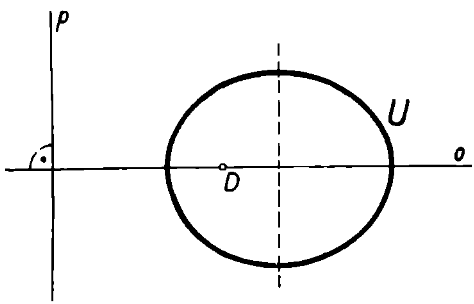
Protože $k > 1$, je $\frac{v^2}{k^2 - 1} > 0$. Proto je rovnice (20) početním vyjádřením elipsy **U** se středem $S = [k^2 v(k^2 - 1)^{-1}; 0]$ a s délkami poloos

$$a = \frac{kv}{k^2 - 1}, \quad b = \frac{v}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Protože souřadnice každého bodu $Z = [\xi; \eta]$ množiny **M** vyhovují rovnici (20), je tím dokázáno, že $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Nyní obráceně předpokládejme, že bod $Z = [\xi; \eta]$ vyhovuje rovnici (20). Potom obráceným postupem dojdeme od rovnice (20) až k rovnici (18). Geometrický význam rovnice (18) je vyjádřen vztahem (17). To tedy znamená, že bod Z patří množině **M**, neboli $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Zbývá popsat elipsu **U** nezávisle na zvolené soustavě souřadnic. Přitom chceme, aby popis byl co nejjednodušší. V takovém případě bývá výhodné zobrazit si pro určité k elipsu **U** a výsledek nejdříve uhodnout a pak teprve dokázat. Na obrázku 15 je znázorněna elipsa **U** pro $k = 2$. Jistě se vám bude zdát nápadná poloha



Obr. 15

bodu D. Není těžké přijít na to, že bod D je ohniskem elipsy $\boldsymbol{U}$. Tento odhad skutečně ověříme výpočtem. Excentricita elipsy $\boldsymbol{U}$ je

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{k^2v^2}{(k^2-1)^2} - \frac{v^2}{k^2-1}} = \frac{v}{k^2-1}$$

a ohniska mají první souřadnici

$$\xi_{1,2} = \frac{k^2v}{k^2-1} \pm \frac{v}{k^2-1} = \begin{cases} v\dfrac{k^2+1}{k^2-1}, \\ v\,. \end{cases}$$

Je tedy bod D to ohnisko elipsy $\boldsymbol{U}$, které je blíže přímce p.

Hlavní vrcholy mají první souřadnice

$$\xi_{3,4} = \frac{k^2v}{k^2-1} \pm \frac{kv}{k^2-1} = \frac{kv}{k \mp 1}\,.$$

Zřejmě jsou obě souřadnice ξ_3, ξ_4 kladné ($k > 1$), proto leží hlavní vrcholy v polorovině pD.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je elipsa $\boldsymbol{U}$ s ohniskem D, hlavní osou kolmou k přímce p. Hlavní vrcholy leží v polorovině pD a mají od přímky p vzdálenosti $kv(k-1)^{-1}$ a $kv(k+1)^{-1}$.

Při řešení příkladu 8 jsme dostali kvadratickou rovnici (19) pro souřadnice ξ, η. Všimněte si, že jsme se o geometrickém útvaru, jehož početním vyjádřením je rovnice (19), vyjádřili velmi opatrně. Nemusí být totiž každá kvadratická rovnice pro ξ, η početním vyjádřením kuželosečky, přesněji řečeno „nedegenerované" kuželosečky. Uvedeme si příklady:

1. Rovnice

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4 = 0$$

je početním vyjádřením jediného bodu $S = [1;\ 0]$, neboť je ekvivalentní s rovnicí

$$4(x - 1)^2 + y^2 = 0.$$

2. Rovnice

$$4x^2 - 8x - y^2 + 4 = 0$$

je početním vyjádřením dvou různoběžek, neboť je ekvivalentní s rovnicí

$$4(x - 1)^2 - y^2 = 0\,,$$

resp. s rovnicí

$$(2x - y - 2)(2x + y - 2) = 0\,.$$

3. Rovnice

$$4x^2 - 8x + y^2 + 3 = 0$$

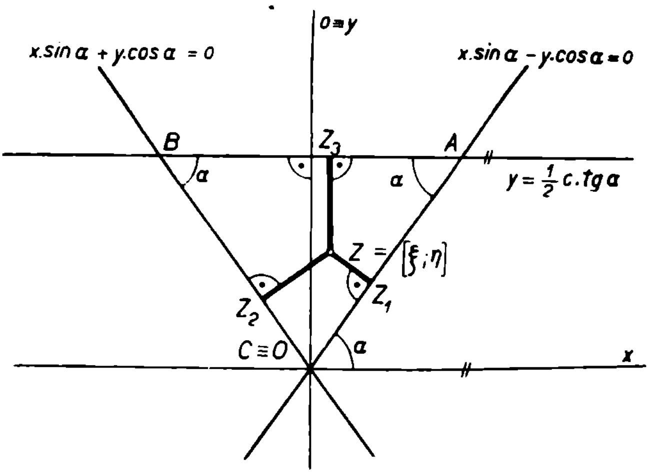
je početním vyjádřením množiny prázdné, neboť je ekvivalentní s rovnicí

$$4(x - 1)^2 + y^2 = -1\,.$$

Z uvedených příkladů je tedy vidět, že nestačí prohlédnout si, jak se to bohužel dost často stává, pouze koeficienty u kvadratických členů. Kromě toho je vidět, že početní vyjádření množiny bodů nemusí být jediné.

9. Příklad. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou $AB = c$ a úhlem α při základně. Vzdálenost libovolného bodu Z hledané množiny $\boldsymbol{M}$ od přímky AB je geometrickým průměrem jeho vzdáleností od přímek AC, BC. Vyšetříme toto geometrické místo $\boldsymbol{M}$.

Řešení. Geometrické místo **M** je zřejmě souměrné podle osy o základny AB trojúhelníka ABC; zvolíme ji proto za jednu ze souřadnicových os. Trojúhelník ABC



Obr. 16

umístíme podle obr. 16. Směrový úhel přímky AC je α (neboť $AB \parallel x$); přímka AC má proto rovnici

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0 \tag{21}$$

a přímka BC, která je souměrně sdružená s přímkou AC podle osy y, má rovnici

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0\,. \tag{22}$$

Položíme-li

$$\sin \alpha = a\,, \quad \cos \alpha = b\,,$$

můžeme rovnice (21) a (22) napsat ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} ax - by &= 0, \\ ax + by &= 0, \end{aligned}\right\} a^2 + b^2 = 1, \quad a > 0, \quad b > 0\,. \tag{23}$$

Rovnice přímky AB je

$$y = \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \alpha\,,$$

resp.

$$y = v\,, \tag{24}$$

kde $v = \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \alpha$ je výška trojúhelníka ABC na základnu AB.

Jestliže nyní bod $Z = [\xi;\ \eta]$ patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$, potom je (viz obr. 16)

$$ZZ_3 = \sqrt{ZZ_1 \cdot ZZ_2}\,, \tag{25}$$

kde Z_1, Z_2, Z_3 jsou paty kolmic vedených z bodu Z na přímky AC, BC, AB. Tuto podmínku vyjádříme početně:

$$|\, v - \eta \,| = \sqrt{|\, a\xi - b\eta \,| \,.\, |\, a\xi + b\eta \,|}\,. \tag{26}$$

Odtud vypočítáme, že

$$(v - \eta)^2 = |\, a^2\xi^2 - b^2\eta^2 \,|\,. \tag{27}$$

Nyní rozlišíme dva případy:

a) Nechť je $a^2\xi^2 - b^2\eta^2 \leqq 0$, neboli $a|\xi| \leqq b|\eta|$. Tato podmínka znamená, že bod $Z = [\xi;\ \eta]$ patří buď úhlu ACB, nebo úhlu k němu vrcholovému. Potom rovnice (27) má tvar

$$(v - \eta)^2 = -a^2\xi^2 + b^2\eta^2. \tag{28}$$

Rovnici (28) upravíme s použitím rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ na tvar

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{v}{a^2}\right)^2 = \left(\frac{vb}{a^2}\right)^2. \tag{29}$$

Rovnici (29) přepíšeme ještě jednou s použitím daných prvků c, α:

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{c}{\sin 2\alpha}\right) = \left(\frac{c}{\sin 2\alpha}\right)^2. \tag{30}$$

V případě a) leží tedy body Z na kružnici $\boldsymbol{U}_1$ se středem $S = \left[0; \frac{c}{\sin 2\alpha}\right]$ a poloměrem $\frac{c}{2 \sin \alpha}$. Protože ze zadání úlohy je ihned patrné, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ musí obsahovat body A, B, snadno na základě dosavadních výsledků usoudíme, že množinu $\boldsymbol{U}_1$ lze sestrojit jako kružnici dotýkající se přímek AC, BC v bodech A, B (obr. 17). Stačí např. ukázat, že trojúhelník BCS má při vrcholu B pravý úhel. Víme, že

$$CS = \frac{c}{\sin 2\alpha}.$$

Odtud postupně dostaneme

$$CS = \frac{BD}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\cos (\mathrm{R} - \alpha)}$$

a tedy trojúhelník BCS je skutečně pravoúhlý. [K důkazu jsme ovšem mohli použít i metody souřadnic; např. vyšetřovat vzájemnou polohu kružnice $\boldsymbol{U}_1$ dané rovnicí (30) a přímek AC, BC daných rovnicemi (23).]

b) Nechť je $a^2\xi^2 - b^2\eta^2 \geqq 0$, neboli $a|\xi| \geqq b|\eta|$. Tato podmínka znamená, že bod $Z = [\xi; \eta]$ patří některému z vnějších úhlů trojúhelníka ABC při vrcholu C. Potom rovnice (27) má tvar

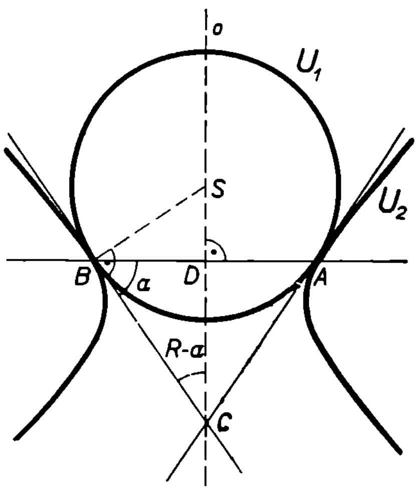
$$(v - \eta)^2 = a^2\xi^2 - b^2\eta^2. \tag{31}$$

Rovnici (31) uvedeme na tvar

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{v^2b^2}{a^2(1+b^2)}} - \frac{\left(\eta - \dfrac{v}{1+b^2}\right)^2}{\dfrac{v^2b^2}{(1+b^2)^2}} = 1\,; \qquad (32)$$

použijeme-li daných prvků c, α, dostaneme

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{c^2}{4(1+\cos^2\alpha)}} - \frac{\left(\eta - \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{2(1+\cos^2\alpha)}\right)^2}{\dfrac{c^2\sin^2\alpha}{4(1+\cos^2\alpha)^2}} = 1\,. \qquad (33)$$



Obr. 17

V tomto případě tedy leží body Z na hyperbole $\boldsymbol{U}_2$ dané rovnicí (33). Ze zadání úlohy je opět zřejmé, že body A, B patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$. Protože souřadnice těchto bodů vyhovují podmínce $a^2\xi^2 - b^2\eta^2 \geqq \geqq 0$, musí tedy hyperbola $\boldsymbol{U}_2$ procházet body A, B.

Dokonce se hyperbola $\boldsymbol{U}_2$ v bodech A, B přímek AC, BC dotýká. Ze zadání úlohy je totiž zřejmé, že body A, B jsou jediné dva body geometrického místa $\boldsymbol{M}$ ležící na přímkách AC, BC. To ovšem znamená, že každá z přímek AC, BC má s hyperbolou $\boldsymbol{U}_2$ společný jediný bod. Protože však přímky AC, BC nejsou rovnoběžné s žádnou z asymptot hyperboly $\boldsymbol{U}_2$ (přesvědčte se o tom výpočtem sami!), musí být přímky AC, BC tečnami hyperboly $\boldsymbol{U}_2$. (Vzájemnou polohu přímek AC, BC bychom mohli samozřejmě vyšetřit i početně.)

Shrneme-li případy a) a b), dostaneme částečný výsledek: Každý bod geometrického místa $\boldsymbol{M}$ patří buď kružnici $\boldsymbol{U}_1$, nebo hyperbole $\boldsymbol{U}_2$, neboli $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U} = = \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2$ (obr. 17)[1]).

Důkaz obráceného tvrzení $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$ bude nyní již lehkou záležitostí. Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině $\boldsymbol{M}$, pak neplatí rovnost (25). Odtud však snadno dojdeme k závěru, že souřadnice bodu Z nevyhovují ani rovnici (30), ani rovnici (32). To znamená, že bod Z nepatří ani množině $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2$.

Výsledek. Nechť $\boldsymbol{U}_1$ značí kružnici dotýkající se přímek AC, BC v bodech A, B. Nechť $\boldsymbol{U}_2$ je hyperbola dotýkající se také přímek AC, BC v bodech A, B, s hlavní osou délky $c(1 + \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$ rovnoběžnou s přímkou AB

[1]) Množina $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2$ je tzv. sjednocení množin $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_2$; skládá se právě z těch bodů, které patří buď útvaru $\boldsymbol{U}_1$, nebo útvaru $\boldsymbol{U}_2$.

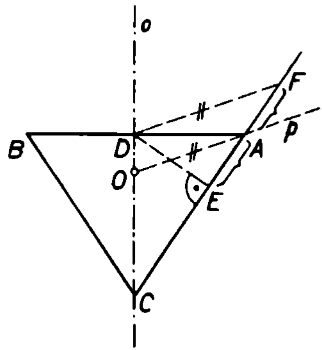
a vedlejší osou délky $c \sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha)^{-1}$ splývající s osou o úsečky AB. Potom geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je útvar složený z kružnice $\boldsymbol{U}_1$ a hyperboly $\boldsymbol{U}_2$ (obr. 17).

Hyperbola $\boldsymbol{U}_2$ je sice ve výsledku příkladu 9 popsána jednoznačně, avšak tento popis pro přímou konstrukci není nejvhodnější. Potřebné prvky hyperboly $\boldsymbol{U}_2$ můžeme ovšem na základě uvedeného řešení určit též konstruktivně.

Předně určíme střed O hyperboly $\boldsymbol{U}_2$. Víme, že jeho vzdálenost od vrcholu C je [viz rovnici (32)]

$$\frac{v}{1 + b^2} = \frac{v}{1 + \cos^2 \alpha} =$$

$$= v \cdot \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha},$$



Obr. 18

kde v je výška trojúhelníka ABC k základně AB. Určíme proto nejdříve konstruktivně poměr $1 : (1 + \cos^2 \alpha)$. Ze středu D základny AB (obr. 18) spustíme kolmici na stranu AC; patu této kolmice označíme E. Potom je

$$AE = AC \cos^2 \alpha.$$

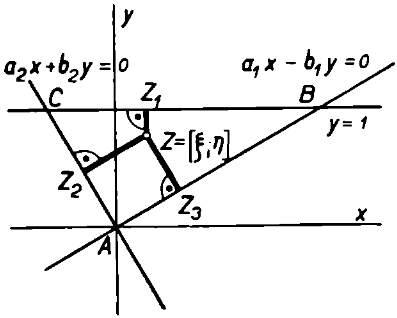
Sestrojíme bod F souměrně sdružený s bodem E podle středu A. Potom platí

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{AC(1 + \cos^2 \alpha)} = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Střed O je proto průsečík přímky CD s přímkou p vedenou bodem A rovnoběžně s DF.

Obdobně lze udat konstrukci délek obou os. To však již přenecháváme čtenáři.

Na závěr našeho příkladu znovu upozorňujeme na efektivnost kombinace syntetické metody s početní metodou. Kdo má dost trpělivosti, může si pro srovnání např. numericky vyšetřit vzájemnou polohu přímky AC a hyperboly $\boldsymbol{U}_2$.



Obr. 19

10. Příklad. Je dán trojúhelník ABC. Nechť Z je libovolný bod trojúhelníka ABC[1]; paty kolmic spuštěných z bodu Z na strany AB, BC, AC označme po řadě Z_3, Z_1, Z_2. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z trojúhelníka ABC, pro něž platí

$$|ZZ_2 - ZZ_3| \leqq ZZ_1 \leqq ZZ_2 + ZZ_3. \qquad (34)$$

Řešení. V každém trojúhelníku alespoň jedna pata výšky na příslušnou stranu náleží vnitřku této strany. Můžeme proto bez omezení obecnosti předpokládat, že to nastane pro výšku ke straně BC. Soustavu souřadnic pak zvolíme podle obrázku 19. Rovnice přímek AB, AC, BC můžeme pak napsat po řadě ve tvaru:

---

[1]) Bod trojúhelníka je jeho vnitřní bod nebo bod na jeho obvodu.

$$\left.\begin{aligned} a_1x - b_1y &= 0\,, \text{ kde } a_1^2 + b_1^2 = 1,\ a_1 > 0\,,\ b_1 > 0, \\ a_2x + b_2y &= 0\,, \text{ kde } a_2^2 + b_2^2 = 1,\ a_2 > 0\,,\ b_2 > 0, \\ y &= 1\,. \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Nechť bod $Z = [\xi;\ \eta]$ patří geometrickému místu **M**. To znamená, že bod Z patří trojúhelníku ABC a vyhovuje podmínce (34). Bod Z patří trojúhelníku ABC právě tehdy, jestliže leží zároveň „nad" nebo na přímkách AB, AC a „pod" nebo na přímce BC; pro bod Z tedy platí nerovnosti

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi - b_1\eta &\leqq 0\,, \\ a_2\xi + b_2\eta &\geqq 0\,, \\ \eta &\leqq 1\,. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Podmínku (34) nejdříve nahradíme ekvivalentní soustavou nerovností

$$\left.\begin{aligned} ZZ_1 &\leqq ZZ_2 + ZZ_3\,, \\ ZZ_2 &\leqq ZZ_3 + ZZ_1\,, \\ ZZ_3 &\leqq ZZ_1 + ZZ_2\,. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Soustavu (37) přepíšeme pomocí souřadnic bodu Z.

$$\left.\begin{aligned} |1 - \eta| &\leqq |a_2\xi + b_2\eta| + |a_1\xi - b_1\eta|\,, \\ |a_2\xi + b_2\eta| &\leqq |a_1\xi - b_1\eta| + |1 - \eta|\,, \\ |a_1\xi - b_1\eta| &\leqq |1 - \eta| + |a_2\xi + b_2\eta|\,. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Absolutní hodnoty odstraníme na základě nerovností (36). Po další jednoduché úpravě dostaneme

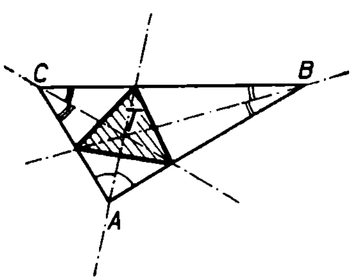
$$\left.\begin{aligned} (-a_1 + a_2)\xi + (b_1 + b_2 + 1)\eta - 1 &\geqq 0\,, \\ (-a_1 - a_2)\xi + (b_1 - b_2 - 1)\eta + 1 &\geqq 0\,, \\ (a_1 + a_2)\xi + (-b_1 + b_2 - 1)\eta + 1 &\geqq 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Každá z nerovností (39) je (za předpokladu, že vždy alespoň jeden z koeficientů u ξ a η se nerovná nule) početním vyjádřením jisté poloroviny. Geometrické místo M musí být proto částí všech těchto tří polorovin i daného trojúhelníka ABC. Průnikem těchto tří polorovin a trojúhelníka ABC bude zřejmě nějaký mnohoúhelník; jeho vrcholy bychom mohli zjistit početně. Místo počítání se nám však opět více vyplatí jiný postup. Vyšetříme totiž synteticky, kolik bodů má množina M na stranách trojúhelníka ABC. Nechť bod Z_0 geometrického místa M leží např. na straně BC. Potom je $Z_0Z_1 = 0$, takže poslední dvě z nerovností (37) mají zjednodušený tvar

$$Z_0Z_2 \leqq Z_0Z_3, \quad Z_0Z_3 \leqq Z_0Z_2. \tag{40}$$

Odtud však plyne, že $Z_0Z_2 = Z_0Z_3$ a tedy bod Z_0 leží na ose vnitřního úhlu BAC. Přitom je zřejmé, že bod Z_0 leží zároveň na hraničních přímkách polorovin vyjádřených posledními dvěma nerovnostmi v soustavě (39). Obdobná úvaha platí i pro zbývající dvě strany trojúhelníka ABC.

Z dosavadních úvah tedy plyne: Geometrické místo M je částí trojúhelníka T, jehož vrcholy jsou průsečíky os vnitřních úhlů s protějšími stranami trojúhelníka ABC (obr. 20).



Obr. 20

Důkaz obráceného tvrzení $\mathsf{T} \subset \mathsf{M}$ přenecháme již čtenářům.

Všimněte si, jak lze charakterizovat nerovnostmi body vnitřku trojúhelníka $\boldsymbol{T}$. Jaký geometrický význam mají pak body vnitřku trojúhelníka $\boldsymbol{T}$?

Při řešení příkladu 10 jsme se omezili na body patřící trojúhelníku ABC. Je samozřejmě možné vyšetřovat stejným způsobem i vnějšek trojúhelníka ABC; viz cvičení 18.

11. Příklad. Je dána úsečka AB s vnitřním bodem V, který ji dělí na úsečky $VA = a$, $VB = b$ $(a > b)$. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů C, pro něž platí: přímka CV je osou vnitřního úhlu trojúhelníka ABC.

Řešení. Úlohu bychom mohli samozřejmě řešit tak, že bychom početně vyjádřili podmínku

$$\sphericalangle BCV = \sphericalangle ACV. \tag{41}$$

Tento postup však není právě lákavý pro svou pracnost. Stačí si uvědomit, že jen k výpočtu úhlu BCV musíme znát směrnice přímek BC a VC.

Z planimetrie však víme, že podmínka (41) je splněna právě tehdy, jestliže má bod V od obou z přímek AC, BC stejnou vzdálenost. Protože budeme vyšetřovat vzdálenosti dvojic přímek od bodu V, umístíme kvůli zjednodušení výpočtů počátek soustavy souřadnic v bodě V. Soustavu souřadnic zvolíme podle obr. 21.

Podmínka (41) je tedy ekvivalentní s podmínkou

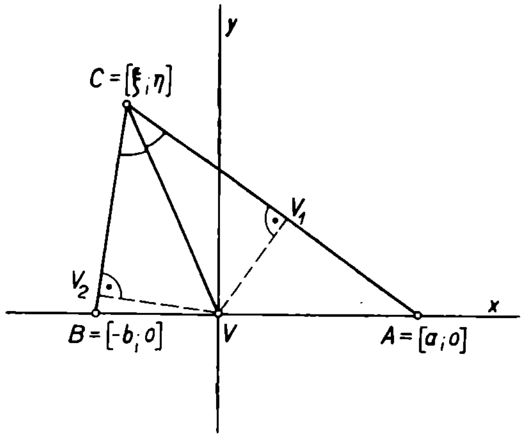
$$VV_1 = VV_2, \tag{42}$$

kde V_1, V_2 jsou paty kolmic z bodu V na přímky AC, BC. Nechť bod $C = [\xi; \eta]$ patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$. Potom rovnice přímek AC, BC můžeme napsat popořadě ve tvaru (viz [3], str. 86)

$$\eta(x - a) - (\xi - a)y = 0\,,$$
$$\eta(x + b) - (\xi + b)y = 0\,,$$

resp.

$$\left.\begin{aligned} \eta x - (\xi - a)y - \eta a &= 0\,, \\ \eta x - (\xi + b)y + \eta b &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$



Obr. 21

Užitím souřadnic bodu C můžeme nyní s pomocí rovnic (43) vyjádřit též rovnost (42):

$$\frac{|-\eta a|}{\sqrt{\eta^2 - (\xi - a)^2}} = \frac{|\eta b|}{\sqrt{\eta^2 + (\xi + b)^2}}\,. \qquad (44)$$

Protože bod C nemůže ležet na přímce AB, je $\eta \neq 0$. Můžeme tedy číslem η rovnici (44) dělit. Po odstranění zlomků a umocnění dostaneme

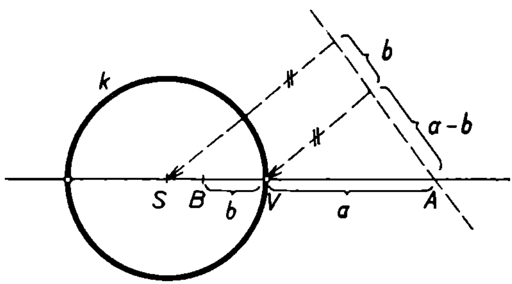
$$\xi^2(a^2 - b^2) + 2ab\xi(a + b) + \eta^2(a^2 - b^2) = 0\,, \tag{45}$$

neboli po dělení součtem $a + b$ ($\neq 0$)

$$\xi^2(a - b) + 2ab\xi + \eta^2(a - b) = 0\,. \tag{46}$$

Protože je $a > b$, můžeme rovnici (46) převést na tvar

$$\left(\xi + \frac{ab}{a - b}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{ab}{a - b}\right)^2. \tag{47}$$



Obr. 22

Tak jsme zjistili, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je částí útvaru $\boldsymbol{U}$, který se skládá ze všech bodů kružnice k se středem $S = \left[-\dfrac{ab}{a - b}\,;\,0\right]$ a poloměrem $\dfrac{ab}{a - b}$, s výjimkou průsečíků s přímkou AB.

Nyní obráceně nechť bod $C = [\xi;\,\eta]$ patří útvaru $\boldsymbol{U}$. Pak jeho souřadnice vyhovují rovnici (45), z níž snadno odvodíme rovnici

$$a^2[\eta^2 + (\xi + b)^2] = b^2[\eta^2 + (\xi - a)^2]\,, \tag{48}$$

resp. rovnici

$$\frac{|a|}{\sqrt{\eta^2 + (\xi - a)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{\eta^2 + (\xi + b)^2}}. \tag{49}$$

Protože bod C leží mimo osu x, je $\eta \neq 0$; můžeme tedy obě strany rovnice (49) násobit číslem $|\eta| = |-\eta|$. Tím dostaneme rovnici (44), která je jen jiným vyjádřením rovnosti (42). To však dokazuje, že platí též $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Výsledek. Nechť k značí kružnici, která má střed S na polopřímce VB ve vzdálenosti $\dfrac{ab}{a-b}$ od počátku V a která prochází bodem V. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je pak kružnice k s výjimkou jejích průsečíků s přímkou AB. (Konstrukce kružnice k je zřejmá z obrázku 22.)

Cvičení

9. Je dána přímka p a mimo ni, ve vzdálenosti v ($v > 0$), bod D. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od přímky p a bodu D stálý rozdíl vzdáleností rovný k ($k > 0$).
10. Je dána přímka p a mimo ni, ve vzdálenosti v ($v > 0$), bod D. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od přímky p a bodu D součet druhých mocnin vzdáleností menší než dané číslo $k > 0$.
11. Je dána přímka p a mimo ni, ve vzdálenosti v ($v > 0$), bod D. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od přímky p a bodu D stálý rozdíl druhých mocnin vzdáleností rovný k ($k > 0$).
12. Jsou dány dvě různoběžky a, b. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$

všech bodů Z, které mají od přímek a, b rozdíl vzdáleností aspoň k ($k > 0$).

13. Jsou dány dvě různoběžky a, b s odchylkou α. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, které mají od přímek a, b stálý rozdíl druhých mocnin vzdáleností rovný k^2 ($k > 0$).
14. Je dána úsečka $AB = 2a$ se středem S a číslo $k > 1$. Je-li C libovolný bod, značí body S_1, S_2 po řadě paty kolmic spuštěných z bodu S na přímky AC, BC. Vyšetřete geometrické místo **M** takových bodů C, pro něž platí $SS_1 = kSS_2$.
15. Je dána úsečka $AB = 2a$ se středem S. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů C, pro něž platí: součet převrácených hodnot druhých mocnin vzdáleností bodu S od přímek AC, BC je roven danému číslu k ($k > 0$).
16. Jsou dány dvě různoběžky a, b s odchylkou φ. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, které mají stálý součet převrácených hodnot vzdáleností od přímek a, b rovný k ($k > 0$).
17. Je dán trojúhelník ABC a číslo $k > 0$. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, které mají od přímek AB, AC, BC stálý součet vzdáleností rovný k. Geometrické místo **M** skutečně pro nějaký trojúhelník sestrojte.
18. Je dán trojúhelník ABC. Je-li Z libovolný bod, pak označíme Z_1, Z_2, Z_3 po řadě paty kolmic z bodu Z na přímky BC, AC, AB. Vyšetřete množinu **M** všech bodů Z vnějšku trojúhelníka ABC, pro něž platí:

$$|ZZ_1 - ZZ_2| < ZZ_3 < ZZ_1 + ZZ_2.$$

19. Je dán úhel $AVB = 2\varphi$ a na jeho ose o, ve vzdálenosti v od vrcholu, bod D. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, pro něž platí: Součin vzdáleností libovolného bodu Z od přímek AV, BV se rovná druhé mocnině jeho vzdálenosti od bodu D.
20. Je dán úhel $AVB = 2\varphi$ a na jeho ose o, ve vzdálenosti v od vrcholu V, bod D. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, pro něž platí: Vzdálenosti libovolného bodu Z od přímek

AV, BV jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má délku DZ.

21. Je dána přímka p a mimo ni, ve vzdálenosti v, bod D. Kromě toho je dáno kladné číslo $k < 1$. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, pro něž platí: Poměr vzdálenosti bodu Z od přímky p a jeho vzdálenosti od bodu D je roven stále k.
22. Nechť ABC je rovnostranný trojúhelník a x, y, z jsou vzdálenosti libovolného bodu V od jeho stran. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů V trojúhelníka ABC, pro něž jsou čísla x, y, z délky stran ostroúhlého trojúhelníka.

4. kapitola

APLIKACE VYŠETŘOVÁNÍ VZÁJEMNÉ POLOHY DVOU ÚTVARŮ

Přicházíme ke třetí a poslední skupině příkladů. Jde o geometrická místa, která vyplní body incidující s jedním nebo dvěma proměnnými (např. pohybujícími se) útvary. Při jejich vyšetřování budeme proto zkoumat vzájemnou polohu daných a proměnných útvarů.

12. Příklad. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 \equiv (S; r_1)$, $k_2 \equiv (S; r_2)$, kde $r_1 > r_2$ a číslo $k(0 < k \neq \neq 1)$. Na kružnici k_1 je dán bod A. Po kružnici k_1 se pohybuje bod X a po kružnici k_2 bod Y tak, že polopřímka SA je osou úhlu XSY. Bod Z leží na polopřímce XY a platí pro něj $XZ = k.XY$. Vyšetříme geometrické místo M všech bodů Z.

Řešení. Geometrický útvar M je zřejmě souměrný podle přímky SA i podle kolmice vedené středem S k přímce SA. Soustavu souřadnic zvolíme proto podle obrázku 23.

Souřadnice bodů X, Y můžeme vyjádřit takto:

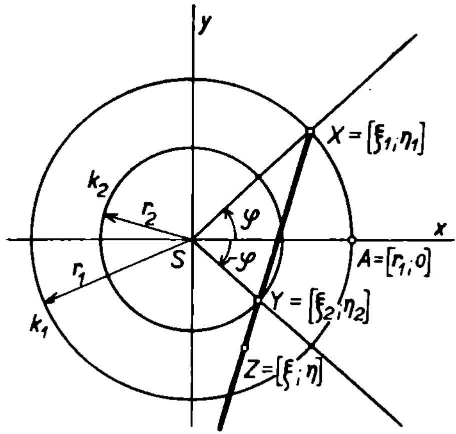
$$\begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos \varphi; & \xi_2 &= r_2 \cos(-\varphi) = r_2 \cos \varphi; \\ \eta_1 &= r_1 \sin \varphi; & \eta_2 &= r_2 \sin(-\varphi) = -r_2 \sin \varphi. \end{aligned} \qquad (1)$$

Potom souřadnice bodu Z jsou (viz [2], str. 85)

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + k(\xi_2 - \xi_1), \\ \eta &= \eta_1 + k(\eta_2 - \eta_1), \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \xi &= [r_1 + k(r_2 - r_1)] \cos \varphi, \\ \eta &= [r_1 - k(r_2 + r_1)] \sin \varphi. \end{aligned} \tag{2}$$



Obr. 23

Z rovnic (2) musíme nyní vyloučit parametr φ. Přitom rozlišíme tři případy:

a) Výraz

$$r_1 + k(r_2 - r_1) = 0\,.$$

Potom je

$$k = \frac{-r_1}{r_2 - r_1} = \frac{r_1}{r_1 - r_2}\,. \tag{3}$$

Podle předpokladu je $r_1 > r_2$, a tedv $k > 0$. Zjistili jsme, že tento případ skutečně může nastat. Potom však mají rovnice (2) tvar

$$\xi = 0, \quad \eta = [r_1 - k(r_2 + r_1)] \sin \varphi ,$$

resp. po dosazení za k z (3)

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{2r_1 r_2}{r_1 - r_2} \sin \varphi . \tag{4}$$

Protože je $|\sin \varphi| \leqq 1$, jsou rovnice (4) početním vyjádřením úsečky PQ, kde

$$P = \left[0; -\frac{2r_1 r_2}{r_1 - r_2}\right], \quad Q = \left[0; \frac{2r_1 r_2}{r_1 - r_2}\right].$$

b) Výraz

$$r_1 - k(r_2 + r_1) = 0 .$$

Potom je

$$k = \frac{r_1}{r_1 + r_2} . \tag{5}$$

Tento případ může tedy také nastat. Přitom rovnice (2) mají tvar

$$\xi = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cos \varphi, \quad \eta = 0 . \tag{6}$$

Protože $|\cos \varphi| \leqq 1$, jsou rovnice (6) opět početním vyjádřením úsečky, tentokrát úsečky RT, kde

$$R = \left[-\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}; 0\right], \quad T = \left[\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}; 0\right].$$

c) Pro oba výrazy je

$$r_1 + k(r_2 - r_1) \neq 0, \quad r_1 - k(r_2 + r_1) \neq 0 ,$$

to znamená

$$k \neq \frac{r_1}{r_1 \pm r_2} . \tag{7}$$

V tomto případě užijeme k vyloučení parametru φ známé identity $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Vyjádříme proto z rovnic (2) $\cos^2 \varphi$ a $\sin^2 \varphi$:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{\xi^2}{[r_1 + k(r_2 - r_1)]^2}, \\ \sin^2 \varphi &= \frac{\eta^2}{[r_1 - k(r_2 + r_1)]^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

a pak sečteme levé a pravé strany těchto rovnic. Vyjde nám

$$1 = \frac{\xi^2}{[r_1 + k(r_2 - r_1)]^2} + \frac{\eta^2}{[r_1 - k(r_2 + r_1)]^2}. \qquad (9)$$

Došli jsme tak k početnímu vyjádření elipsy **E**, jejíž osy splývají se souřadnicovými osami, a délky poloos jsou $a = r_1 + k(r_2 - r_1)$, $b = r_1 - k(r_2 + r_1)$.

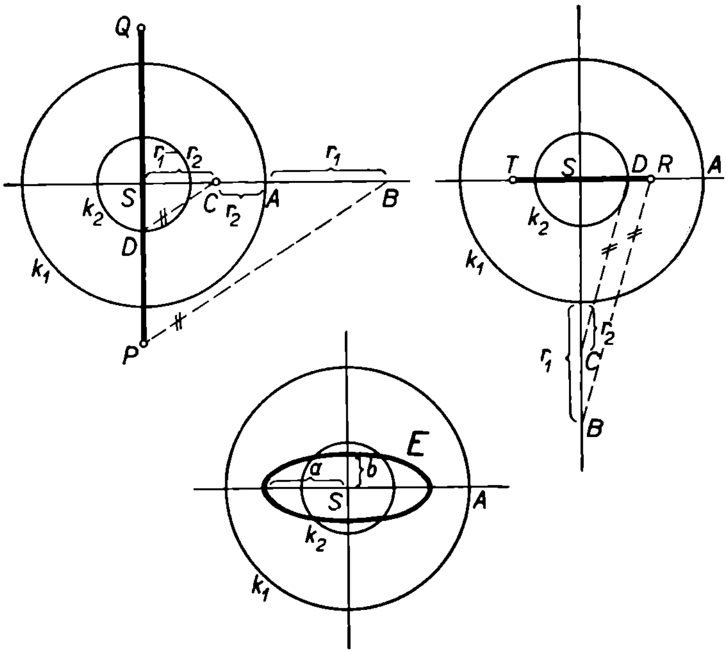
Zjistili jsme tedy, že každý bod Z geometrického místa **M** patří útvaru **U**, který je v závislosti na k buď úsečka PQ, nebo úsečka RT, nebo elipsa **E**. Jinými slovy to znamená, že **M** $\subset$ **U**.

Nyní zbývá dokázat, že je též **U** $\subset$ **M**. Budeme ověřovat podmínku [B′]. Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině **M**. To znamená, že pro příslušné body X, Y neplatí $XZ = k \,.\, XY$. V tom případě pro souřadnice ξ, η nemohou platit obě rovnice (2), to znamená, že *aspoň jedna z nich neplatí.* Pak však neplatí za příslušných podmínek ani rovnice (4), ani rovnice (6), ani rovnice (8). Proto bod Z nepatří ani útvaru **U**.

Výsledek. a) Je-li $k = r_1(r_1 - r_2)^{-1}$, pak je geometrické místo **M** úsečka PQ, která je kolmá k přímce SA, má střed v bodě S a délku $4r_1r_2(r_1 - r_2)^{-1}$. (Obr. 24a.)

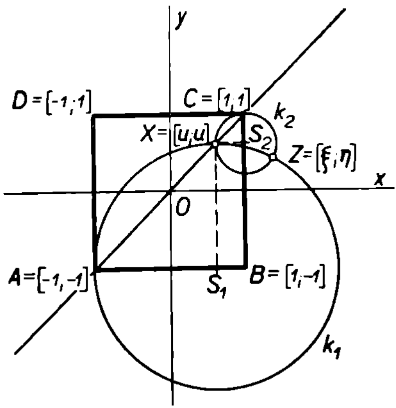
b) Je-li $k = r_1(r_1 + r_2)^{-1}$, pak je geometrické místo **M** úsečka RT, která je částí přímky SA, má střed v bodě S a délku $4r_1r_2(r_1 + r_2)^{-1}$. (Obr. 24b.)

c) Je-li $k \neq r_1(r_1 \pm r_2)^{-1}$, pak je geometrické místo **M** elipsa **E** se středem v bodě S, jejichž jedna osa splývá s přímkou SA a má délku $2a = 2[r_1 + k(r_2 - r_1)]$ a druhá osa má délku $2b = 2[r_1 - k(r_2 + r_1)]$. (Obr. 24c pro $r_1 = \frac{5}{2}r_2$, $k = \frac{1}{2}$.)



Obr. 24abc

Čtenáři, kteří znají funkce sin *h x* cos *h x* (tzv. *hyperbolický sinus* a *hyperbolický kosinus*), mohou stejně jednoduše řešit obdobnou úlohu, kterou dostaneme, jestliže v příkladě 12 kružnice k_1, k_2 nahradíme rovnoosými hyperbolami se společnými asymptotami a společnou hlavní osou. Úlohu lze sice řešit i bez znalostí zmíněných funkcí, řešení je však složitější.



Obr. 25

13. Příklad. Je dán čtverec *ABCD*. Bod *X* probíhá přímku *AC*. Bodem *X* procházejí dvě kružnice k_1 a k_2. První z nich se dotýká přímky *AD* v bodě *A* a druhá se dotýká přímky *DC* v bodě *C*. Kružnice k_1 a k_2 se protínají kromě bodu *X* ještě v dalším bodě *Z*. Vyšetříme geometrické místo **M** bodů *Z*.

Řešení. Soustavu souřadnic zvolme podle obrázku 25. Za jednotku na osách zvolíme polovinu strany čtverce *ABCD*.

Středy kružnic k_1, k_2 mají souřadnice

$$S_1 = [u; -1], \quad S_2 = [1; u],$$

a poloměry

$$r_1 = |1 + u|, \; r_2 = |1 - u|, \text{ kde } |u| \neq 1. \qquad (10)$$

Podmínka $|u| \neq 1$ zajišťuje, že žádná z kružnic k_1, k_2

nedegeneruje v jediný bod. Můžeme proto napsat rovnice kružnic k_1, k_2 ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}(x-u)^2+(y+1)^2&=(1+u)^2\,,\\(x-1)^2+(y-u)^2&=(1-u)^2\,.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Protože bod $Z = [\xi; \eta]$ leží na obou kružnicích k_1, k_2, vyhovují jeho souřadnice rovnicím (11). Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\left.\begin{aligned}\xi^2+\eta^2+2\eta&=2u(\xi+1),\\\xi^2+\eta^2-2\xi&=2u(\eta-1).\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Abychom dostali početní vyjádření množiny $\boldsymbol{M}$, musíme z rovnic (12) vyloučit parametr u. Tak dostaneme rovnici

$$(\xi^2+\eta^2+2\eta)(\eta-1)=(\xi^2+\eta^2-2\xi)(\xi+1)$$

a po další úpravě

$$(\xi^2+\eta^2-2)(\eta-\xi)=0\,.\tag{13}$$

Protože všechny body $Z = [\xi; \eta]$ geometrického místa $\boldsymbol{M}$ leží mimo přímku AC, je $\xi \neq \eta$ a můžeme tedy rovnici (13) dělit výrazem $\eta - \xi \neq 0$. Tak upravíme rovnici (13) na konečný tvar

$$\xi^2+\eta^2-2=0\,,$$

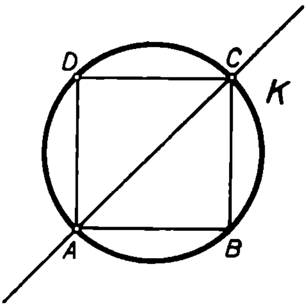
resp.

$$\xi^2+\eta^2=2\,.\tag{14}$$

Rovnice (14) představují kružnici $\boldsymbol{K}$ opsanou čtverci $ABCD$. Tím jsme dokázali, že každý bod Z geometrického místa $\boldsymbol{M}$ patří kružnici $\boldsymbol{K}$. Protože však musí být v (10) $|u| \neq 1$, snadno zjistíme, že z kružnice $\boldsymbol{K}$ musíme vyloučit vrcholy A, C, D. Pro takto vzniklý útvar $\boldsymbol{U}$ je tedy dokázán vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Protože lze postup zřejmě obrátit, je též $U \subset M$. (Proveďte podrobně sami.)

Výsledek. Geometrické místo M je útvar U, skládající se ze všech bodů kružnice K opsané čtverci $ABCD$, s výjimkou bodů A, C, D. (Obr. 26.)



Obr. 26

Všimněme si, že rovnice (7) je vlastně početním vyjádřením útvaru, který se skládá jednak z kružnice opsané nad průměrem AC, jednak z přímky AC. To plyne ihned z toho, že souřadnice bodu $Z = [\xi; \eta]$ vyhovují rovnici (13) právě tehdy, je-li buď

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 = 0\,,$$

nebo

$$\eta - \xi = 0\,.$$

S podobnými rovnicemi se v analytické geometrii setkáváme dosti často. Například rovnice

$$(3x - 4y)(3x + 4y) = 0$$

značí dvojici různoběžek procházející počátkem. Jindy se musíme sami teprve pokusit upravit dané početní vyjádření na takový tvar, aby na jedné straně rovnice (nerovnosti) byla nula a na zbývající straně vznikl součin.

V takovém případě dostaneme obvyklé vítané zjednodušení. Například máme-li rovnici

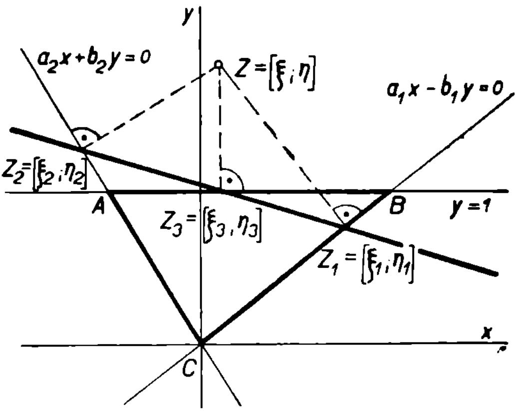
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2 = 0\,,$$

nemůžeme předem o příslušné křivce mnoho říci. Snadno však provedeme úpravy

$$(x^2 + y^2)^2 - (2x)^2 = 0\,,$$
$$(x^2 + y^2 + 2x)(x^2 + y^2 - 2x) = 0\,,$$
$$[(x + 2)^2 + y^2 - 4]\,[(x - 2)^2 + y^2 - 4] = 0.$$

Odtud je již okamžitě vidět, že jde o dvě shodné kružnice o poloměru 2, dotýkající se osy v počátku soustavy souřadnic.

14. Příklad. Je dán trojúhelník ABC. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: Paty kolmic vedených z bodů Z na přímky AB, BC, AC leží v přímce.



Obr. 27

Řešení. Podobně jako při řešení příkladu 10 můžeme zvolit soustavu souřadnic podle obr. 27.

Rovnice přímek BC, AC, AB zapíšeme po řadě ve tvaru:

$$a_1x - b_1y = 0, \text{ kde } a_1^2 + b_1^2 = 1;\ a_1 > 0,\ b_1 > 0, \tag{15}$$

$$a_2x + b_2y = 0, \text{ kde } a_2^2 + b_2^2 = 1;\ a_2 > 0,\ b_2 > 0, \tag{16}$$

$$y = 1.$$

Kolmice k přímce BC, procházející bodem $Z = [\xi; \eta]$, má rovnici

$$b_1(x - \xi) + a_1(y - \eta) = 0\,. \tag{18}$$

Pata $Z_1 = [\xi_1; \eta_1]$ kolmice z bodu $Z = [\xi; \eta]$ k přímce BC má za souřadnice kořeny soustavy rovnic

$$a_1x - b_1y = 0\,,$$
$$b_1(x - \xi) + a_1(y - \eta) = 0\,.$$

Po jednoduchém výpočtu dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= b_1(a_1\eta + b_1\xi)\,, \\ \eta_1 &= a_1(a_1\eta + b_1\xi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Podobně vypočteme souřadnice paty $Z_2 = [\xi_2; \eta_2]$, resp. $Z_3 = [\xi_3; \eta_3]$ kolmic vedených z bodu $Z = [\xi; \eta]$ k přímce AC, resp. AB:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= -b_2(a_2\eta - b_2\xi)\,; & \xi_3 &= \xi\,; \\ \eta_2 &= a_2(a_2\eta - b_2\xi)\,; & \eta_3 &= 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Nyní musíme využít předpokladu, že všechny tři body Z_1, Z_2, Z_3 leží v přímce. Nejdříve si vyřešíme případ, kdy dva z těchto tří bodů splynou. Jestliže např. $Z_1 \equiv Z_2$, pak zřejmě bod Z splyne s vrcholem C trojúhelníka ABC (nakreslete si sami příslušný obrázek). Geometrickému místu **M** tedy patří vrchol C. Podobně se ukáže, že mu patří i další dva vrcholy B, A daného trojúhelníka.

Můžeme tedy v dalším předpokládat, že všechny tři body Z_1, Z_2, Z_3 jsou navzájem různé. Potom mají přímky Z_1Z_3, Z_2Z_3 tytéž směrnice, tzn.

$$\frac{\eta_1 - \eta_3}{\xi_1 - \xi_3} = \frac{\eta_2 - \eta_3}{\xi_2 - \xi_3},$$

odtud plyne

$$(\eta_1 - \eta_3)(\xi_2 - \xi_3) = (\eta_2 - \eta_3)(\xi_1 - \xi_3). \qquad (21)$$

Rovnost (21) však vyjadřuje nutnou a postačující podmínku pro to, aby body Z_1, Z_2, Z_3 ležely v přímce, i v případě, že některé z nich splynou. Kromě toho má rovnice (21) i tu výhodu, že nevylučuje případy, kdy přímky Z_1Z_3, Z_2Z_3 jsou rovnoběžné s osou y.

Po dosazení z rovnic (19) a (20) do rovnice (21) po několikeré úpravě, s využitím rovností

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1,$$

dostaneme tvar

$$a_1a_2(a_2b_1 + a_1b_2)\xi^2 + a_1a_2(a_2b_1 + a_1b_2)\eta^2 + \xi(b_2^2 - b_1^2) -$$
$$- \eta(a_1b_1 + a_2b_2) = 0. \qquad (22)$$

Koeficienty u kvadratických členů se sobě rovnají a jsou různé od nuly (odůvodněte!). Rovnice (22) může být proto rovnicí kružnice. Aby to byla skutečně kružnice (a nikoliv pouze bod nebo dokonce množina prázdná), musí jí vyhovovat souřadnice alespoň dvou různých bodů. Avšak podle naší předběžné úvahy již víme, že geometrickému místu $\boldsymbol{M}$ patří body A, B, C. Odtud tedy dostáváme, že rovnice (22) představuje kružnici $\boldsymbol{K}$ opsanou trojúhelníku ABC.

Tím je dokázáno, že $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{K}$.

Nechť nyní bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině $\boldsymbol{M}$. Pak body Z_1, Z_2, Z_3 neleží v přímce, a tedy neplatí pro jejich souřadnice rovnost (21). Pak však nemůže pro souřadnice bodu Z platit ani rovnost (22). To však znamená, že $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$.

Výsledek. Geometrické místo $\mathbf{M}$ je kružnice $\mathbf{K}$ opsaná trojúhelníku ABC.

Z řešení posledního příkladu je vidět, že nemusíme vždy nutně upravovat získanou kvadratickou rovnici na některý ze základních tvarů, které uvádíme v kapitole **5.** V našem případě např. včas provedená syntetická úvaha nás zachránila od nepříliš lákavé úpravy algebraické rovnice (22). Kromě toho zjištění středu a poloměru kružnice $\mathbf{K}$ by nám neukázalo, že jde o kružnici opsanou trojúhelníku ABC.

15. Příklad. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem ϱ. Ve vzdálenosti v $(0 < v \neq \varrho)$ od středu S je dán bod D. Bod X probíhá kružnici k. Druhý průsečík přímky DX s kružnicí k je bod Y. Označme Z takový bod polopřímky DX, pro který platí

$$\frac{2}{DZ} = \frac{1}{DX} + \frac{1}{DY}. \tag{23}$$

Vyšetříme geometrické místo $\mathbf{M}$ bodů Z.

Řešení. Vyšetřované geometrické místo $\mathbf{M}$ je zřejmě souměrné podle přímky DS i podle středu D. Soustavu souřadnic můžeme tvolit pro $v > \varrho$ podle obrázku 28a a pro $0 < v < \varrho$ podle obrázku 28b.

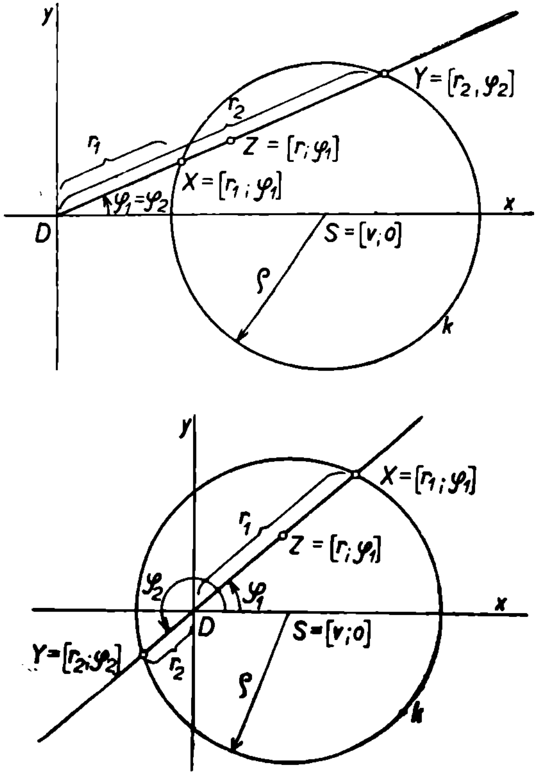
Kružnice k má potom rovnici

$$(x - v)^2 + y^2 = \varrho^2, \tag{24}$$

a přímka DX má rovnici

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0, \quad (0 \leqq \varphi < 2\pi) \,. \qquad (25)$$

V tomto případě bude vhodnější použít polární sou-



Obr. 28ab

stavy souřadnic, jejichž pól je v bodě D a polární osa v polopřímce DS. Použijeme převodních vzorců

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \tag{26}$$

a rovnici (24) přepíšeme ve tvaru

$$(r\cos\varphi - v)^2 + r^2\sin^2\varphi = \varrho^2\,,$$

resp. po úpravě

$$r^2 - 2rv\cos\varphi + v^2 - \varrho^2 = 0\,. \tag{27}$$

Rovnici (27) vyhovují ovšem i polární souřadnice bodů $X = [r_1; \varphi_1]$, $Y = [r_2; \varphi_2]$. Musíme však rozlišit dva případy: a) Bod D leží vně kružnice k (tj. $v > 0$), pak bod Y leží na polopřímce DX a je tedy $\varphi_1 = \varphi_2$ (obr. 28a). b) Bod D leží uvnitř kružnice k (tj. $0 < v < \varrho$), pak bod Y leží na polopřímce opačné k polopřímce DX. V tom případě je $\varphi_1 = \varphi_2 - \pi$ (obr. 28b).

Všimněme si nejdříve prvního případu. Čísla $r_1 = DX$, $r_2 = DY$ jsou (kladné) kořeny rovnice

$$r^2 - 2rv\cos\varphi_1 + v^2 - \varrho^2 = 0\,. \tag{27a}$$

Pokud je diskriminant

$$\Delta = v^2\cos^2\varphi_1 + \varrho^2 - v^2 = \varrho^2 - v^2\sin^2\varphi_1 \tag{28}$$

nezáporný, jsou kořeny $r_{1,2}$ rovnice (27a) rovny

$$r_{1,2} = v\cos\varphi_1 \pm \sqrt{\Delta}\,. \tag{29}$$

Diskriminant Δ je nezáporný právě tehdy, je-li

$$|\sin\varphi_1| \leqq \frac{\varrho}{v} < 1\,. \tag{30}$$

Odtud plyne pro φ_1 nutná podmínka $|\varphi_1| < \frac{\pi}{2}$, a tedy $\cos \varphi_1 > 0$. Protože v tomto případě je

$$\Delta < v^2 \cos^2 \varphi_1 ,$$

plyne z našich úvah, že oba kořeny (29) jsou, za předpokladu, že $\Delta > 0$, kladné. Jsou to proto první souřadnice bodů X a Y v soustavě polárních souřadnic.

Nechť je nyní vzdálenost $DZ = r$. Potom z podmínky (23) dostaneme

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

neboli po dosazení

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{v \cos \varphi_1 + \sqrt{\Delta}} + \frac{1}{v \cos \varphi_1 - \sqrt{\Delta}}$$

a po úpravě

$$v^2 - \varrho^2 = rv \cos \varphi_1 . \tag{31}$$

Použijeme-li opět převodních vzorců (26), můžeme rovnici (31) přepsat v kartézské soustavě souřadnic ve tvaru

$$v^2 - \varrho^2 = vx ,$$

resp.

$$x = \frac{v^2 - \varrho^2}{v} . \tag{32}$$

Dostali jsme tak rovnici přímky. Bez dlouhého početního vyšetřování je však zřejmé, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je podmnožinou pouze té části $\boldsymbol{P}$ přímky (32), která leží uvnitř úhlu určeného tečnami z bodu D ke kružnici k (obr. 29a). Z podmínky (23) kromě toho snadno odvodíme, že

$$DX < DZ < DY, \text{ resp. } DY < DZ < DX.$$

Není proto těžké uhodnout, že **P** je vnitřek úsečky, jejíž krajní body jsou body dotyku T_1, T_2 tečen kružnice k vedených z bodu D. (Tento odhad snadno dokážete pomocí Euklidovy a Pythagorovy věty s užitím rovnosti (32).)

Důkaz tvrzení $\mathbf{P} \subset \mathbf{M}$ přenecháváme již čtenáři.

Dále se budeme zabývat druhým případem ($0 < v < \varrho$). Podobně jako výše zjistíme, že čísla $r_1 = DX$, $r_2 = DY$ jsou kladné kořeny rovnic

$$r^2 - 2rv \cos \varphi_{1,2} + v^2 - \varrho^2 = 0\,, \tag{27b}$$

resp.

$$r^2 \mp 2rv \cos \varphi_1 + v^2 - \varrho^2 = 0\,.$$

Společný diskriminant

$$\Delta = \varrho^2 - v^2 \sin^2 \varphi_1$$

obou rovnic (27b) je vždy kladný. Kořeny rovnic (27b) jsou

$$v \cos \varphi_1 \pm \sqrt{\Delta}\,, \quad \text{resp.} \quad -v \cos \varphi_1 \pm \sqrt{\Delta}\,;$$

kladné z nich jsou pouze kořeny

$$r_1 = v \cos \varphi_1 + \sqrt{\Delta}\,, \quad \text{resp.} \quad r_2 = -v \cos \varphi_1 + \sqrt{\Delta}\,.$$

To jsou první souřadnice bodů X, Y (v soustavě polárních souřadnic).

Nyní opět využijeme podmínky (23). Po dosazení za $DZ = r_1$, $DY = r_2$ dostaneme

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\,,$$

resp.

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{v\cos\varphi_1 + \sqrt{\Delta}} + \frac{1}{-v\cos\varphi_1 + \sqrt{\Delta}}\,.$$

Po úpravě dojdeme k rovnici

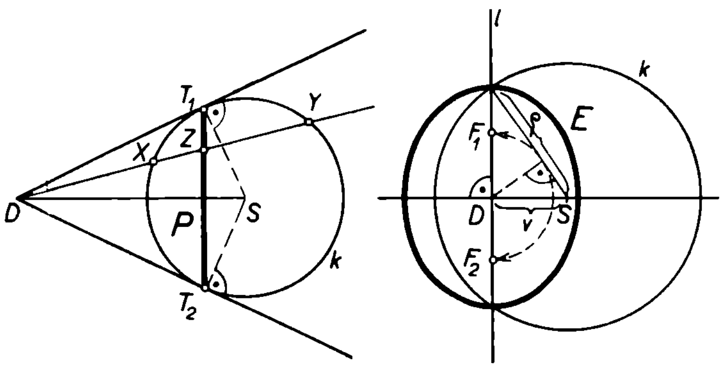
$$r^2(\varrho^2 - v^2\sin^2\varphi_1) = (\varrho^2 - v^2)^2\,. \tag{33}$$

Rovnici (33) přepíšeme v kartézské soustavě souřadnic s užitím převodních vzorců (26). Po úpravě dostaneme konečný tvar

$$\frac{x^2}{\varrho^2 - v^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{\varrho^2 - v^2}{\varrho}\right)^2} = 1\,. \tag{34}$$

Protože je $\varrho > v$, je i $\varrho^2 - v^2 > 0$ a tedy rovnice (34) je početním vyjádřením elipsy **E** se středem D a hlavní osou v přímce DS.

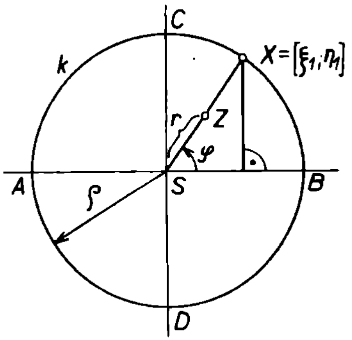
Tím je dokázáno, že ***M*** $\subset$ **E**. Důkaz tvrzení **E** $\subset$ ***M*** přenecháváme opět čtenáři.



Obr. 29ab.

Výsledek. a) Je-li $v > \varrho$, je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ vnitřek $\boldsymbol{P}$ úsečky T_1T_2, jejíž krajní body jsou zároveň body dotyku tečen z bodu D ke kružnici k (obr. 29a).

b) Je-li $v < \varrho$, je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ elipsa $\boldsymbol{E}$ se středem D. Dále, jak sami snadno zjistíte, jsou hlavní vrcholy elipsy $\boldsymbol{E}$ průsečíky kružnice k s kolmicí l k přímce DS jdoucí bodem D. Excentricita elipsy $\boldsymbol{E}$ je rovna výšce pravoúhlého trojúhelníka s přeponou ϱ a odvěsnou v (obr. 29b).



Obr. 30

Uvedeme si ještě jeden příklad, ve kterém s výhodou použijeme polárních souřadnic.

16. Příklad. Je dána kružnice $k \equiv (S; \varrho)$ a její průměr AB. Bod X probíhá kružnici k. Z je takový bod polopřímky SX, jehož vzdálenost od počátku S je menší než vzdálenost bodu X od přímky AB. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z.

Řešení. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je souměrné podle přímky AB i podle osy úsečky AB. Zvolíme proto nejdříve kartézskou soustavu souřadnic podle obrázku 30.

Souřadnice bodu X vyjádříme s výhodou pomocí směrového úhlu φ přímky SX.

$$\xi_1 = \varrho \cos \varphi, \quad \eta_1 = \varrho \sin \varphi . \tag{35}$$

Zvolme nyní soustavu polárních souřadnic s pólem S

a polární osou v polopřímce SB. Jsou-li nyní r, φ polární souřadnice libovolného bodu Z množiny $\boldsymbol{M}$, pak je

$$r < |\varrho \sin \varphi| \, . \tag{36}$$

Zbývá zjistit, který útvar má v polárních souřadnicích početní vyjádření (36). Pro $r = 0$ dostaneme pól S, který tedy patří množině $\boldsymbol{M}$. Můžeme tedy v dalším předpokládat, že je $r > 0$ a užít převodních vzorců

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \; x = r \cos \varphi, \; y = r \sin \varphi$$

k vyjádření nerovnosti (36) v kartézské soustavě souřadnic; dostaneme

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \varrho \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,$$

resp. po úpravě

$$\left.\begin{aligned} x^2 + \left[y - \frac{1}{2}\varrho\right]^2 &< \frac{1}{4}\varrho^2, \quad \text{pro} \quad y \geqq 0\,, \\ x^2 + \left[y + \frac{1}{2}\varrho\right]^2 &< \frac{1}{4}\varrho^2, \quad \text{pro} \quad y \leqq 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

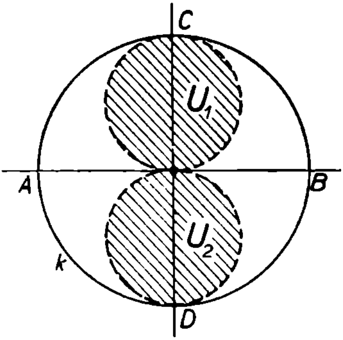
Protože nerovnosti (37) jsou početním vyjádřením vnitřků $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ kruhů dotýkajících se osy X v počátku, je tím dokázán vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2 \cup \{S\}$.[1])

Obráceně si sami již snadno ověříte, že je splněn vztah $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ tvoří vnitřky $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ dvou kruhů s průměry CS, DS spolu s bodem S, kde CD je průměr kružnice k kolmý k přímce AB a bod S je průsečníkem průměrů AB a CD (obr. 31).[2])

---

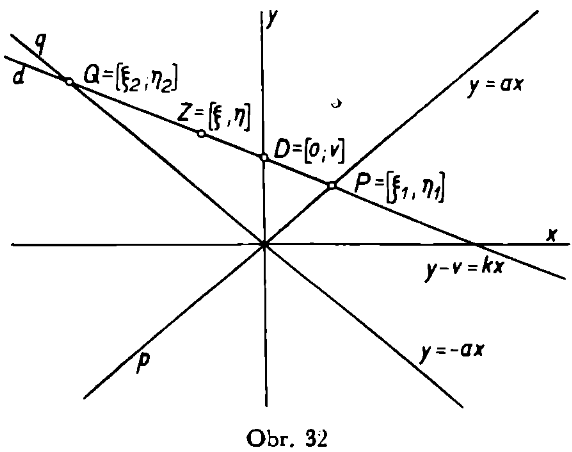
[1]) Zápis $\{S\}$ značí množinu obsahující jediný bod S.
[2]) Na obr. 31 si doplňte označení S středu kružnice k.



Obr. 31

17. Příklad. Jsou dány dvě různoběžky p, q s průsečíkem R. Na jedné z os různoběžek p, q je dán bod D ve vzdálenosti v ($v > 0$) od bodu R. Bodem D prochází přímka d, která se kolem něj otáčí. Body P, Q jsou průsečíky přímky d s přímkami p, q. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech středů Z úseček PQ.

Řešení. Vzhledem k souměrnosti geometrického místa $\boldsymbol{M}$ podle přímky DR, zvolíme soustavu souřadnic podle obrázku 32.



Obr. 32

Rovnice přímek p, q, d můžeme napsat po řadě ve tvaru

$$y = ax\,, \tag{38a}$$
$$y = -ax\,, \tag{38b}$$
$$y - v = kx. \tag{38c}$$

Je sice pravda, že ve tvaru (38c) nemůžeme zapsat přímku d v případě, že splyne s osou y, ale v tomto případě body P, Q splynou a nemá smyslu mluvit o středu úsečky PQ.

Nyní určíme souřadnice bodů $P = [\xi_1;\ \eta_1]$, $Q = [\xi_2;\ \eta_2]$. Řešením soustavy složené z rovnic (38a), (38c) a soustavy rovnic (38b), (38c) dostaneme (pokud $|k| \neq a$)

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{v}{a-k}\,, & \eta_1 &= \frac{av}{a-k}\,, \\ \xi_2 &= \frac{-v}{a+k}\,, & \eta_2 &= \frac{av}{a+k}\,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Nyní již můžeme vypočítat souřadnice středu Z úsečky PQ:

$$\xi = \frac{kv}{a^2-k^2}\,, \quad \eta = \frac{a^2v}{a^2-k^2}\,. \tag{40}$$

Abychom dostali početní vyjádření množiny $\boldsymbol{M}$, vyloučíme z rovnic (40) parametr k. Předně určíme podíl (zřejmě je $\eta \neq 0$)

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{k}{a^2}\,.$$

Odtud vypočítáme k a dosadíme do druhé rovnice (40):

$$\eta = \frac{a^2v}{a^2 - \left(\dfrac{a^2\xi}{\eta}\right)^2}\,.$$

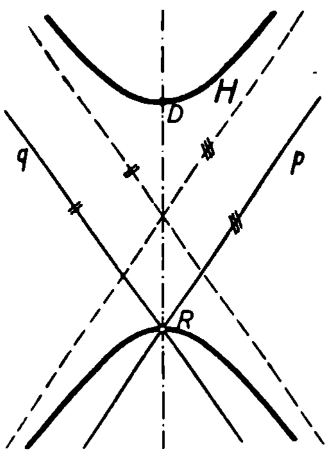
Po jednoduchém výpočtu vyjde

$$\eta(\eta^2 - a^2\xi^2 - v\eta) = 0\,.$$

Protože $\eta \neq 0$, můžeme jím krátit a po další úpravě dojít k tvaru

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{v}{2a}\right)^2} - \frac{\left(\eta - \frac{1}{2}v\right)^2}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} = -1\,. \qquad (41)$$

Dostali jsme početní vyjádření hyperboly $\boldsymbol{H}$. Jak snadno zjistíme, jsou hlavními vrcholy hyperboly $\boldsymbol{H}$ body R, D a asymptoty jsou rovnoběžné s přímkami p, q.



Obr. 33

Nezapomeňme však, že z hyperboly musíme vyloučit bod R. Zjistili jsme tedy, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je částí útvaru $\boldsymbol{U}$, který se skládá ze všech bodů zmíněné hyperboly $\boldsymbol{H}$ s výjimkou bodu R. (Obr. 33.)

Obrácení provedeného postupu přenecháváme již čtenáři.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je (s výjimkou jediného bodu R) hyperbola $\boldsymbol{H}$ s hlavními vrcholy R, D a asymptotami rovnoběžnými s přímkami p, q.

Cvičení

23. Jsou dány dvě různé rovnoběžky AB, c. Bod C probíhá přímku c. Vyšetřete geometrické místo M všech průsečíků výšek trojúhelníků ABC.
24. Jsou dány dvě shodné kružnice K_1, K_2 se společným bodem dotyku T. Bod X probíhá kružnici K_1, bod Y kružnici K_2 tak, že úhel XTY je pravý. Vyšetřete geometrické místo M středů Z úseček XY.
25. Dvě rovnoběžky a, b protíná společná kolmice AB (A je bod přímky a, B je bod přímky b). Bod X probíhá přímku a, bod Y přímku b a to tak, že součin $AX \,.\, BY$ je stále roven číslu $k \neq 1$. Body X, Y jsou
   a) v téže polorovině určené přímkou AB,
   b) v opačných polorovinách určených přímkou AB.
   Vyšetřete geometrické místo M průsečíků Z přímek AY, BX.
26. Jsou dány dva nesoustředné kruhy $\mathsf{K}_1 \equiv (S_1; r_1)$, $\mathsf{K}_2 \equiv (S_2; r_2)$. Bod X probíhá kruh K_1, bod Y kruh K_2 tak, že součet úhlů S_1S_2Y, S_2S_1X je stále roven φ. Vyšetřete geometrické místo M středů Z úseček XY.
27. Jsou dány dvě různoběžky a, b se společným bodem S. Po přímce a se pohybuje bod X a po přímce b bod Y tak, že trojúhelník XYS má konstantní obsah P. Vyšetřete geometrické místo M středů Z úseček XY.
28. Na obvodu čtverce $PQRS$ se pohybují stálou rychlostí tři body U, V, W, které rozdělují obvod tohoto čtverce na tři stejně dlouhé části (lomené čáry). Vyšetřete geometrické místo M těžišť Z všech trojúhelníků UVW.
29. a) Je dána kružnice $\mathsf{K} \equiv (S; \varrho)$ a bod O ve vzdálenosti v ($0 < v \neq \varrho$) od středu S. Dále je dáno číslo $a > 0$. Bod X probíhá kružnici K. Vyšetřete množinu M všech bodů Z, kde Z je takový bod polopřímky OX, pro který je $OX \,.\, OZ = a^2$.
   (Užijte soustavy polárních souřadnic!)
   b) Řešte tutéž úlohu pro případ $v = \varrho$.

30. Jsou dány dvě různoběžky p, q s průsečíkem R. Na ose přímek p, q je dán bod D ve vzdálenosti v ($v > 0$) od bodu R. Bod P probíhá přímku p; Q je průsečík přímky DP s přímkou q. Vyšetřete geometrické místo **M** průsečíků Z výšek všech trojúhelníků PQR.

5. kapitola

PŘEHLED UŽITÝCH VÝSLEDKŮ Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE

[1] Délka úsečky

Délku úsečky s krajními body $A = [x_1; y_1]$, $B = [x_2; y_2]$ počítáme podle vzorce

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

[2] Úsečka, polopřímka

Nechť jsou dány dva různé body $A = [x_1; y_1]$, $B = [x_2; y_2]$. Potom bod $Z = [\xi; \eta]$ patří úsečce AB právě tehdy, když pro jeho souřadnice platí

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1)\,, \\ \eta &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1)\,, \end{aligned}\right\} \text{kde } 0 \leqq \lambda \leqq 1\,.$$

Přitom pro polohu bodu Z platí $AZ = \lambda AB$.

Speciálně pro střed $S = [\xi_1; \eta_1]$ úsečky AB dostaneme

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ \eta_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\,.$$

Bod $Z = [\xi; \eta]$ patří polopřímce AB právě tehdy, když pro jeho souřadnice platí

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1)\,, \\ \eta &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1)\,, \end{aligned}\right\} \text{kde}\quad 0 \leqq \lambda.$$

Pro polohu bodu Z přitom platí $AZ = \lambda.AB$.

[3] Přímka

Směrnicový tvar rovnice přímky různoběžné s osou y je

$$y = kx + q\,,$$

kde k je tangens směrového úhlu $\varphi (k = \operatorname{tg} \varphi)$.

Obecný tvar rovnice přímky je

$$ax + by + c = 0\,,$$

přitom čísla a, b nejsou zároveň rovna nule.

Vyjádření přímky *pomocí* tzv. *směrových sinů a kosinů* (tj. pomocí sinů a kosinů směrového úhlu φ) je

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi + c = 0\,.$$

Přímka určená dvěma různými body $A = [x_1; y_1]$, $B = [x_2; y_2]$ má početní vyjádření

$$(y_1 - y_2)(x - x_1) - (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0\,.$$

Tento tvar má oproti často užívanému směrnicovému tvaru tu výhodu, že zahrnuje i přímky rovnoběžné s osou y.

[4] Polorovina

„Horní" polorovina určená přímkou o rovnici

$$ax + by + c = 0\,, \quad \text{kde} \quad a > 0,\ b > 0,$$

má početní vyjádření

$$ax + by + c \geqq 0\,.$$

„Horní" polorovina určená přímkou o rovnici

$$ax - by + c = 0\,, \quad \text{kde} \quad a > 0,\ b > 0,$$

má početní vyjádření

$$ax - by + c \leqq 0\,.$$

Pro příslušné „dolní“ poloroviny platí obrácené nerovnosti.

[5] Vzdálenost bodu a přímky

Vzdálenost v bodu $A = [x_1; y_1]$ od přímky, která má rovnici

$$ax + by + c = 0\,, \tag{1}$$

se vypočte podle vzorce

$$v = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \tag{2}$$

Jestliže pro koeficienty rovnice (1) platí

$$a^2 + b^2 = 1\,,$$

má vzorec (2) tvar

$$v = |ax_1 + by_1 + c|\,.$$

[6] Kružnice

Kružnice k se středem $S = [m; n]$ a s poloměrem r má rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2\,.$$

Vnitřek, resp. *vnějšek* kružnice k má početní vyjádření

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 < r^2\,,$$

resp.

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 > r^2\,.$$

Rovnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = 0$$

je početním vyjádřením jediného bodu $S = [m; n]$.

Nerovnost

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 < 0$$

představuje množinu prázdnou (tj. není početním vyjádřením žádného bodu).

[7] Parabola

Rovnice

$$(y - n)^2 = 4p(x - m), \quad \text{kde} \quad p \neq 0\,, \tag{3}$$

je početním vyjádřením paraboly $\boldsymbol{P}_1$ s vrcholem $V_1 = [m; n]$ a ohniskem $F_1 = [m + p; n]$.

Rovnice

$$(x - m)^2 = 4p(y - n), \quad \text{kde} \quad p \neq 0\,, \tag{4}$$

je početním vyjádřením paraboly $\boldsymbol{P}_2$ s vrcholem $V_2 = [m; n]$ a ohniskem $F_2 = [m; n + p]$.

Vnějšek paraboly $\boldsymbol{P}_1$ má početní vyjádření

$$(y - n)^2 > 4p(x - m) \quad \text{pro} \quad p > 0$$

a

$$(y - n)^2 < 4p(x - m) \quad \text{pro} \quad p < 0\,.$$

Vnějšek paraboly $\boldsymbol{P}_2$ má početní vyjádření

$$(x - m)^2 > 4p(y - n) \quad \text{pro} \quad p > 0$$

a

$$(y - n)^2 < 4p(x - m) \text{ pro } p < 0\,.$$

Pro *vnitřky* parabol $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ platí obrácené nerovnosti.

[8] Elipsa

Rovnice

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1; \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

je početním vyjádřením elipsy $\boldsymbol{E}$ se středem $S = [m; n]$ a vrcholy $A_{1,2} = [m \pm a; n]$, $B_{1,2} = [m; n \pm b]$.

Excentricita (tj. vzdálenost ohnisek elipsy **E** od jejího středu S) je

$$e = \sqrt{|a^2 - b^2|}.$$

Vnitřek, resp. *vnějšek* elipsy **E** má početní vyjádření

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} < 1,$$

resp.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} > 1.$$

[9] Hyperbola

Rovnice

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1; \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

je početním vyjádřením hyperboly $\boldsymbol{H}_1$ se středem $S = [m;\ n]$, hlavními vrcholy $A_{1,2} = [m \pm a;\ n]$ a asymptotami

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m).$$

Rovnice

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = -1; \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

je početním vyjádřením hyperboly $\boldsymbol{H}_2$ se středem $S = [m;\ n]$, hlavními vrcholy $B_{1,2} = [m;\ n \pm b]$ a asymptotami

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m).$$

Obě hyperboly H_1, H_2 mají stejnou excentricitu

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Vnějšek hyperboly H_1, resp. hyperboly H_2 má početní vyjádření

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} < 1\,,$$

resp.

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} > -1\,.$$

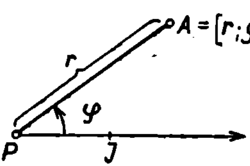
Vnitřky hyperbol H_1 a H_2 vyhovují obráceným nerovnostem.

[10] Soustava polárních souřadnic

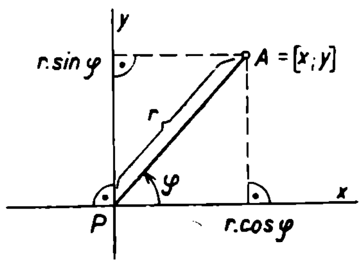
Zvolme v rovině dva různé body P, J. Těmito body je určena tzv. soustava polárních souřadnic, která má **pól** v bodě P, **polární osu** v polopřímce PJ a jednotkovou úsečku PJ.

Je-li bod $A \not\equiv P$, pak pro jeho polární souřadnice $[r; \varphi]$ platí (obr. 34):

a) *první souřadnice* r je délka úsečky AP při zvolené jednotkové úsečce PJ;



Obr. 34



Obr. 35

b) *druhá souřadnice* φ je velikost orientovaného úhlu JPA.

Je-li $A \equiv P$, pak bod A má první souřadnici $r = 0$; jeho druhá souřadnice se nezavádí.

Obráceně každé dvojici reálných čísel $[r; \varphi]$, kde $r > 0$, odpovídá v rovině se zavedenou soustavou polárních souřadnic jediný bod $A = [r; \varphi]$.

[11] Transformační rovnice

pro převod kartézské soustavy souřadnic v polární soustavu souřadnic a obráceně.

Nechť počátek kartézské soustavy souřadnic splyne s pólem polární soustavy souřadnic a nezáporná část osy x splyne s polární osou (obr. 35).

Pro převod mezi kartézskými a polárními souřadnicemi užíváme vzorců

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi ,$$

resp.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ

2. kapitola

1\. a) Všechny úsečky VZ jsou navzájem shodné a platí $VZ = 2AE$, kde E je vrchol rovnoběžníku $BCDE$. Je-li $AE < \frac{1}{2}d$, je geometrickým místem M celá rovina. Je-li $AE \geqq \frac{1}{2}d$, je geometrické místo M množina prázdná (neobsahuje žádný bod).

b) Geometrické místo M je vnitřek kruhu $k \equiv \left(S; \frac{1}{2}d\right)$, kde S je střed libovolné úsečky spojující krajní body příslušné lomené čáry.

2\. a) Je-li $\varrho = \frac{1}{4}(2k^2 - AB^2) > 0$, je geometrickým místem M kružnice $\mathsf{U} \equiv (T; \sqrt{\varrho})$, kde T je střed úsečky AB. Je-li $\varrho = 0$, je geometrickým místem M jediný bod T. Je-li $\varrho < 0$, je geometrické místo M množina prázdná. b) Pro dané tři body A, B, C dostáváme: Je-li $\varrho = \frac{1}{9}[3k^2 - (AB^2 + AC^2 + BC^2)] > 0$, je geometrickým místem M kružnice $\mathsf{U} \equiv (T; \sqrt{\varrho})$, kde T je těžiště trojúhelníka ABC. Je-li $\varrho = 0$, je geometrickým místem jedině bod T, je-li $\varrho < 0$, je geometrickým místem množina prázdná. Pro dané čtyři body A, B, C, D dostáváme: Je-li $\varrho = \frac{1}{16}[4k^2 - (AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2)] > 0$, je geometrickým místem kružnice $\mathbf{U} \equiv (T; \sqrt{\varrho})$, kde T je těžištěm čtveřice bodů A, B, C, D (tzn. T je střed úsečky spojující středy úseček AB, CD). Je-li $\varrho = 0$, je geometrickým místem jediný bod T a je-li $\varrho < 0$, je geometrické místo množina prázdná.

3. Tzv. *Apolloniova kružnice*, tj. kružnice opsaná nad průměrem CD, kde C a D jsou body přímky AB, pro které platí: $AC : BC = AD : BD = k$.

4. Je-li $\sphericalangle PRQ > \frac{\pi}{2}$, je geometrické místo množina prázdná.

   Je-li $\sphericalangle PRQ = \frac{\pi}{2}$, je geometrické místo jediný bod S, čtvrtý vrchol rovnoběžníka $PRQS$. Je-li $\sphericalangle PRQ < \frac{\pi}{2}$, je geometrické místo $\mathbf{M}$ kružnice $\mathbf{U} \equiv (S; \varrho)$, kde $\varrho = \sqrt{2RP \cdot RV}$, V je pata výšky vedené z bodu Q na stranu RP.

5. Za předpokladu, že paprsek se odrazil postupně od stěn určených přímkami AB, BC, CA, je půdorysem geometrického místa společná část vnitřku trojúhelníka ABC a rovnoběžky p se stranou BC ve vzdálenosti $v = 5\left[\sqrt{7} - \sqrt{3}\right] \doteq 4{,}57$ metrů od vrcholu A.

6. Elipsa s osami o_1 a o_2, délkou hlavní poloosy $2d$ a délkou vedlejší poloosy d.

7. Geometrické místo $\mathbf{M}$ je průnik dvou množin $\mathbf{U}_1$ a $\mathbf{U}_2$, které popíšeme každou zvlášť. Označme S průsečík úhlopříček AC a BD. Je-li $\varrho_1 = 2(DS^2 - AS^2) > 0$, je $\mathbf{U}_1$ vnějšek kruhu $k_1 \equiv (E; \sqrt{\varrho_1})$, kde E je bod souměrně sdružený podle středu S s vrcholem A. Je-li $\varrho_1 = 0$, je $\mathbf{U}_1$ celá rovina s výjimkou bodu E a konečně, je-li $\varrho_1 < 0$, je $\mathbf{U}_1$ celá rovina bez výjimky. Je-li $\varrho_2 = 2(DS^2 - CS^2) > 0$, je $\mathbf{U}_2$ vnitřek kruhu $k_2 = (F; \sqrt{\varrho_2})$, kde F je bod souměrně sdružený podle středu S s vrcholem C. Je-li $\varrho_2 \leqq 0$, je $\mathbf{U}_2$ množina prázdná.

8. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je kratší oblouk $\widehat{AB}$ kružnice opsané trojúhelníku ABC.

3. kapitola

9. Označme o kolmici vedenou z bodu D na přímku p a d_1, d_2 rovnoběžky s přímkou p ve vzdálenosti k; přitom označení volme tak, aby přímka d_1 ležela v polorovině pD. Je-li $v > k$, skládá se geometrické místo $\boldsymbol{M}$ z parabol $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ se společným ohniskem D a řídicími přímkami d_1, d_2. Je-li $v = k$, skládá se g. m. $\boldsymbol{M}$ z paraboly $\boldsymbol{P}_2$ s ohniskem D a řídicí přímkou d_2 a z těch bodů přímky o, které neleží „mezi" bodem D a přímkou p. Je-li $v < k$, skládá se g. m. $\boldsymbol{M}$ z té části paraboly $\boldsymbol{P}_1$, která náleží polorovině pd_2 a z té části paraboly $\boldsymbol{P}_2$, která náleží polorovině pD.
10. Označme P patu kolmice vedené z bodu D na přímku p a S střed úsečky PD. Je-li $v^2 \geqq 2k$, je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ množina prázdná. Je-li $v^2 < 2k$, je g. m. $\boldsymbol{M}$ vnitřek $\boldsymbol{U}$ elipsy se středem v bodě S, s hlavní osou délky $\sqrt{2(2k - v)^2}$ rovnoběžnou s přímkou p a vedlejší osou délky $\sqrt{2k - v^2}$.
11. Označme $\boldsymbol{P}$ parabolu s ohniskem D a řídicí přímkou p. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ se skládá ze dvou shodných parabol $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, které vzniknou z paraboly $\boldsymbol{P}$ posunutím ve směru její osy v obou smyslech o vzdálenost $\dfrac{k}{2v}$.
12. Nechť každý vrchol obdélníku $ABCD$ leží na jedné z přímek a, b a má od zbylé přímky vzdálenost k. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ se pak skládá z celé roviny s výj mkou vnitřků dvou pásů rovnoběžek AB, CD a BC, AD.
13. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ tvoří shodné rovnoosé hyperboly, s délkou hlavní poloosy $(k \sin \alpha)^{-1/2}\, \alpha$ a s asymptotami splývajícími s osami různoběžek a, b.

14. Geometrické místo **M** je kružnice se středem O na polopřímce SA ve vzdálenosti $a(k^2 + 1)\ (k^2 - 1)^{-1}$ od počátku S a s poloměrem $2ak(k^2 - 1)^{-1}$.

15. Je-li $k \leqq \dfrac{2}{a^2}$, je geometrické místo **M** množina prázdná. Je-li $k > \dfrac{2}{a^2}$, je geometrické místo **M** hyperbola se středem v bodě S, s vedlejší osou délky $2a$ splývající s přímkou AB a hlavní osou délky $a\sqrt{2}\,(ka^2 - 2)^{-1/2}$.

16. Označme H_1, H_2 hyperboly se společnými asymptotami a, b a excentricitou (vzdálenost ohniska od středu hyperboly) $2\left(k\,.\,\sqrt{\sin\alpha}\right)^{-1}$. Každou větev těchto dvou hyperbol posuňme ve směru hlavní osy příslušné hyperboly od průsečíku P různoběžek a, b o příslušnou délku hlavní poloosy. Všechny čtyři posunuté větve hyperbol tvoří dohromady geometrické místo **M**.

17. Geometrické místo **M** je buď množina prázdná, nebo bod, nebo úsečka anebo uzavřená lomená čára maximálně se šesti vrcholy umístěnými po dvou na každé z přímek AB, AC, BC (některé z těchto vrcholů mohou případně splynout). Vrcholy na přímce AB můžeme sestrojit např. takto: Sestrojíme geometrické místo **M'** všech bodů Z, které mají od přímek BC, AC stálý součet vzdáleností rovný k (viz příklad 6 na str. 32). Společné body geometrického místa **M'** a přímky AB vyčerpávají všechny body geometrického místa **M**, ležící na přímce AB.

18. Geometrické místo **M** se skládá z vnitřku tří trojúhelníků, jejichž jeden vrchol je vždy průsečík osy vnitřního úhlu s protější stranou a další dva vrcholy jsou průsečíky os vnějších úhlů při zbývajících vrcholech s přímkami obsahujícími protější strany.

19. Geometrické místo **M** je elipsa **E**, jejíž hlavní osa splývá s přímkou o, střed S leží na polopřímce VD ve vzdálenosti $v\cos^{-2}\varphi$ od počátku V, její délky poloos jsou $v\sin\varphi\cos^{-2}\varphi$, $v\sin\varphi\cos^{-2}\varphi\,(1 + \cos^2\varphi)^{-1/2}$.

20. Je-li $\varphi = 45°$, pak je geometrické místo **M** osa úsečky DV s výjimkou jejích průsečíků s přímkami VA, VB. Je-li $\varphi \neq 45°$, pak je geometrické místo **M** rovnoosá hyperbola **H** (bez průsečíků s přímkami VA, VB), jejíž hlavní osa splývá s přímkou o, střed S má od bodu V vzdálenost $|v \cos^{-1} 2\varphi|$ a délky obou poloos jsou $|v \sqrt{2} \sin \varphi \cos^{-1} 2\varphi|$. Přitom pro $\varphi < 45°$ leží bod S na polopřímce VD a pro $\varphi > 45°$ na polopřímce k ní opačné.

21. Geometrické místo **M** je hyperbola **H**, která má jedno ohnisko v bodě D, hlavní osa délky $kv(k^2 - 1)^{-1}$ je kolmá k přímce p, střed hyperboly leží v polorovině pD ve vzdálenosti $k^2v(k - 1)^{-1}$ od přímky p.

22. Nechť $ABCD$ je rovnoběžník. $\boldsymbol{H}_1$ značí hyperbolu se středem D, asymptotami BD, CD, hlavní osou AD a délkou hlavní poloosy $a = v\sqrt{2}$ (v je výška trojúhelníka ABC). $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ jsou hyperboly, které vzniknou otočením hyperboly $\boldsymbol{H}_1$ kolem těžiště trojúhelníka ABC o úhly 120° a —120°. Geometrické místo **M** je společná část vnějšků hyperbol $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ a trojúhelníka ABC; je to „hyperbolický trojúhelník" s vrcholy ve středech stran trojúhelníka ABC.

4. kapitola

23. Geometrické místo **M** je parabola **P**, jejíž osa splývá s osou úsečky AB, vrchol V je průsečík výšek rovnoramenného trojúhelníka ABC. Parabola **P** prochází body A, B.

24. Geometrické místo **M** je kružnice **K**, shodná s kružnicemi $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ se středem T, s výjimkou středů S_1, S_2 kružnic $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$.

25. a) Geometrické místo **M** je s výjimkou bodů A, B elipsa **E** s hlavními vrcholy A, B a vedlejší osou délky $\sqrt{k}$.
b) Geometrické místo **M** je s výjimkou bodů A, B hyperbola **H** s hlavními vrcholy A, B a vedlejší osou délky $\sqrt{k}$.

26. Geometrické místo **M** je kruh **K**, jehož střed S splývá se středem úsečky S_1S_2 a poloměr je $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$. Výjimku tvoří bod S, který geometrickému místu **M** nepatří.
27. Geometrické místo **M** tvoří dvě hyperboly H_1, H_2 s asymptotami a, b a excentricitou $e = \sqrt{2P \sin^{-1} \varphi}$, kde φ je odchylka přímek a, b.
28. Geometrické místo **M** je obvod **O** čtverce $P'Q'R'S'$, který je stejnolehlý se čtvercem $PQRS$ se středem stejnolehlosti v průsečíku úhlopříček PR, QS a koeficientem stejnolehlosti $k = 1/9$.
29. a) Geometrické místo **M** je kružnice L se středem C na polopřímce opačné k polopřímce OS. Přitom je $OC = a^2v(v^2 - \varrho^2)^{-1}$ a poloměr kružnice L je $a^2\varrho\,(v^2 - \varrho^2)^{-1}$.
b) Geometrické místo **M** je kolmice **P** k přímce OS. Její průsečík C s polopřímkou OS má od bodu O vzdálenost
$$\frac{1}{2\varrho}(a^2 - 2\varrho).$$
30. Geometrické místo **M** je hyperbola **H** s vrcholy R, V (V je průsečík výšek rovnoramenného trojúhelníka PQR) a asymptotami kolmými k přímkám p, q.

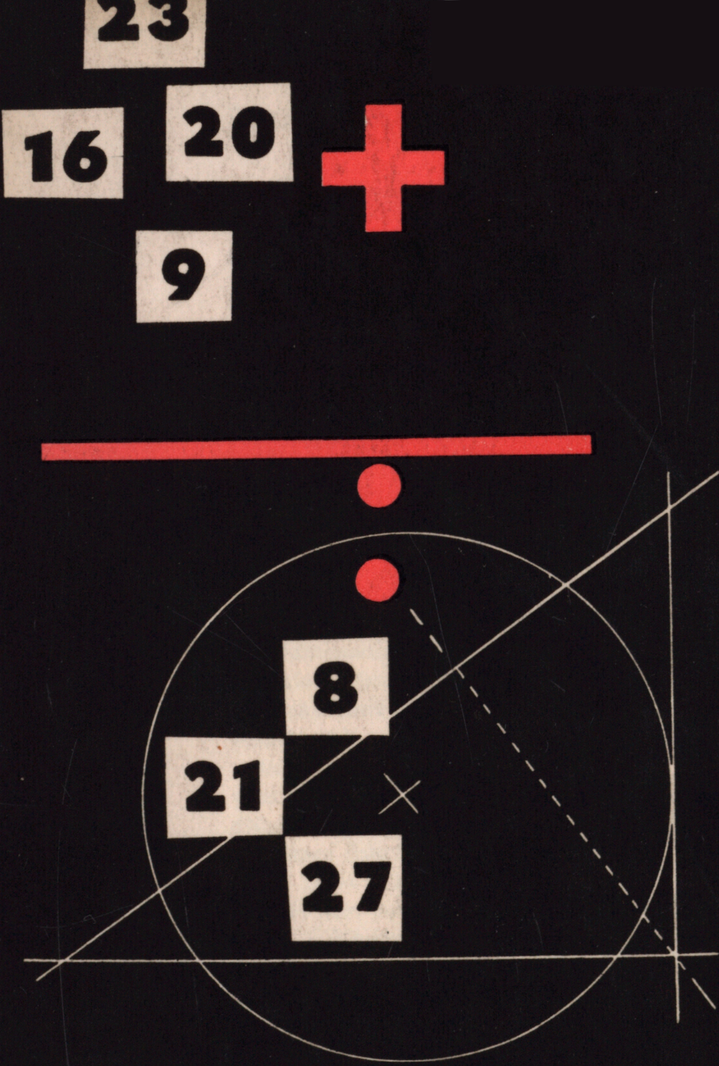
OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MILAN KOMAN

jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Recenzovali prof. dr. Miroslav Fiedler
a doc. dr. Karel Havlíček
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2447.
Edice Škola mladých matematiků, svazek 15
Vytiskl Mír, novinářské závody n. p., závod 1,
Praha 1, Václavské nám. 15
3,70 AA, 3,92 VA. D-12*60362
Náklad 6 400 výtisků. 1. vydání
100 stran. Praha 1966
23-135-66 03.2 Cena brož. výtisku Kčs 3,50 - I



23 - 135 - 66
03-2
Cena brož.
Kčs 3,50 I