O řešení algebraických rovnic

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

13

Vydal Matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MIROSLAV ŠISLER — JOSEF ANDRYS

O řešení algebraických rovnic

PRAHA 1966
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

Odbornou recenzi provedli dr. R. Výborný a dr. K. Drbohlav

PŘEDMLUVA

Tento svazek Školy mladých matematiků je věnován numerickému řešení algebraických rovnic. Je to látka, která je osnovami středních škol dosti opomíjena, přestože je užitečná nejen z praktického hlediska, ale i z hlediska cvičení zručnosti při numerickém počítání. Právě tato zručnost našim olympionikům často chybí a má nepříznivý vliv i na umístění našich reprezentantů na mezinárodních matematických olympiádách. Proto vřele doporučujeme čtenářům, aby nepodceňovali příklady a cvičení, kterých je v knížce dost, a snažili se je všechny rozřešit. Jen tak si mohou osvojit teoretické poznatky získané studiem knížky a zároveň získat potřebnou početní praxi.

Prvé dvě kapitoly tohoto svazku se týkají vlastností algebraických rovnic, jejich algebraického, goniometrického a grafického řešení a algebraických otázek, které s tím souvisí. Zásadně zde pracujeme v oboru komplexních čísel. Novinkou pro mnohého čtenáře bude možná definice n-té odmocniny komplexního čísla (speciálně čísla záporného) a některé další poznatky. Také třetí kapitola, která se týká numerického řešení algebraických rovnic (tzv. přibližných metod), bude pro mnohého čtenáře neobvyklá, avšak velmi užitečná, zvláště pro ty čtenáře, kteří se nechtějí věnovat po maturitě speciálnímu studiu matematiky, neboť látka *zde uvedená není někdy přes svou názornost a snadnou pochopitelnost zahrnuta ani do kursů matematiky některých vysokých škol praktického zaměření.*

Přejeme našim čtenářům mnoho zdaru při práci s touto knížkou a věříme, že z ní budou mít prospěch v matematické olympiádě i v dalším studiu.

Autoři

1. kapitola

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

1. Pojem algebraické rovnice *n*-tého stupně

Ve škole jste se jistě setkali s takovouto úlohou: najděte všechna reálná či komplexní čísla x taková, aby platila například rovnost

$$x^2 + x - 2 = 0. \tag{1}$$

Zápis (1) pak nazýváme rovnicí a chápeme ho jako výše zmíněnou úlohu.

Obecně lze pojem rovnice definovat takto: Je-li dána nějaká funkce $f(x)$, pak *rovnicí*

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

rozumíme úlohu nalézt všechna čísla z definičního oboru funkce f, pro která platí rovnost (2) a nazýváme je *kořeny* rovnice (2). Snadno se přesvědčíme, že kořenů může mít daná rovnice několik. Tak např. rovnice (1) má kořeny 1 a -2, jak se lze dosazením snadno přesvědčit.

V naší knížce se budeme zabývat jen rovnicemi speciálního typu. Budou to takové rovnice (2), kde za funkci f bereme mnohočlen n-tého stupně, tj.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

kde $a_0 \neq 0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou konstanty.

Jsou-li čísla a_i komplexní, nazýváme rovnici

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{3}$$

kde $a_0 \neq 0$ *algebraickou rovnicí n-tého stupně* s komplexními koeficienty; v případě, že a_i jsou čísla reálná, mluvíme o algebraické rovnici n-tého stupně s reálnými koeficienty. Definičním oborem mnohočlenu je, jak víme, obor všech komplexních čísel (pro každé komplexní číslo nabývá daný mnohočlen s reálnými či komplexními koeficienty právě jediné, obecně komplexní hodnoty). Zápis (3) tedy značí podle naší obecné definice rovnice úlohu nalézt všechna komplexní čísla x, pro něž platí rovnost (3).

Rovnice (1) byla příkladem rovnice druhého stupně s reálnými koeficienty. Viděli jsme, že měla dva reálné kořeny 1 a —2. To nás nesmí svádět k domněnce, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty má jen reálné kořeny. Na nejjednodušší rovnici druhého stupně s reálnými koeficienty $x^2 + 1 = 0$ se můžeme přesvědčit, že má dva imaginární kořeny i, —i. Reálný kořen mít nemůže, neboť neexistuje reálné číslo x takové, že $x^2 = -1$. Můžeme tedy říci, že rovnice s reálnými koeficienty mohou mít reálné i imaginární kořeny. Podobná situace nastává i u algebraických rovnic s komplexními koeficienty. Tak například algebraická rovnice s komplexními koeficienty

$$x^3 - \mathrm{i}x + (\mathrm{i} - 1) = 0$$

má jak dva imaginární kořeny i a $-1 - \mathrm{i}$, tak i reálný kořen 1 (přesvědčte se sami dosazením!).

Důležitým pojmem je tzv. *normovaná algebraická rovnice*. To je taková rovnice tvaru (3), kde $a_0 = 1$, tj. ve které je koeficient u nejvyšší mocniny neznámé x roven jedné. Je-li dána rovnice (3), kde $a_0 \neq 0$ a $a_0 \neq 1$, lze ji normovat tak, že všechny koeficienty dělíme číslem a_0. Je samozřejmé, že tímto způsobem dostáváme ekvivalentní algebraickou rovnici, tj. rovnici, která má tytéž kořeny jako rovnice původní.

O řešení algebraických rovnic nejnižších stupňů víte již něco ze školy. Máme na mysli tzv. lineární a kvadratické rovnice.

Lineární rovnicí rozumíme algebraickou rovnici prvého stupně, tj. rovnici tvaru

$$a_0 x + a_1 = 0, \tag{4}$$

kde $a_0 \neq 0$. Její kořen x_1 se vypočte ze vzorce

$$x_1 = -\frac{a_1}{a_0},$$

ať už jsou její koeficienty reálné, či komplexní.

Příklad 1. Řešme lineární rovnici

$$(2 + 3\mathrm{i})\,x + \mathrm{i} = 0.$$

Jest

$$x_1 = \frac{-\mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}(2 - 3\mathrm{i})}{(2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i})} =$$

$$= \frac{-3 - 2\mathrm{i}}{4 + 9} = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}\,\mathrm{i}.$$

Kvadratickou rovnicí rozumíme algebraickou rovnici druhého stupně, která má obecně tvar

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$

kde $a_0 \neq 0$.

Ve škole se probírá jen řešení kvadratických rovnic s reálnými koeficienty. Kvadratickými rovnicemi s komplexními koeficienty se budeme zabývat v kapitole 2.

Kubickou rovnicí konečně rozumíme algebraickou rovnici tvaru

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

kde $a_0 \neq 0$.

2. Otázky existence a počtu kořenů algebraické rovnice

V odstavci 1 jsme viděli, že všechny uvedené rovnice, ať už měly reálné či komplexní koeficienty, měly za kořeny obecně komplexní čísla. To nás vede k otázce, zda každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty má v oboru komplexních čísel nějaký kořen a kolik takových kořenů může mít algebraická rovnice n-tého stupně. Částečná odpověď na tuto otázku je přímo tvrzením jedné velmi důležité věty, kterou nazýváme obyčejně základní větou algebry. Věta zní takto:

Věta 1 *(základní věta algebry). Každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty stupně většího než* 1 *má v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen.*

Řečeno jinými slovy: Je-li dána nějaká algebraická rovnice (je lhostejné, zda má reálné či komplexní koeficienty), pak vždy existuje alespoň jedno komplexní číslo, jež je kořenem této rovnice. Může se tedy docela dobře stát, že rovnice s reálnými koeficienty nemá žádný reálný kořen, ale podle základní věty algebry musí mít aspoň jeden kořen komplexní.

Existuje řada důkazů základní věty algebry. Všechny však přesahují svou obtížností rámec této knížky a nebudeme je proto uvádět. Věta má však v teorii algebraických rovnic mnohé významné důsledky, jak ihned uvidíme. Byla poprvé dokázána geniálním německým matematikem Karl Friedrichem Gaussem v r. 1799.

Základní věta algebry nám však vůbec neříká, kolik kořenů má algebraická rovnice n-tého stupně. Tak např. kvadratické rovnici $x^2 - 2x + 1 = 0$ vyhovuje jediné číslo $x_1 = 1$, kdežto kvadratické rovnici $x^2 - 1 = 0$ vyhovují dvě různá čísla $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Na druhé straně víme, že lineární rovnice má vždy jen jeden kořen, kdežto kvadratická rovnice může mít dva různé kořeny. Zdá se tedy, že bychom mohli očekávat správnost tohoto tvrzení: Algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n od sebe různých kořenů. Toto tvrzení je skutečně správné. Jeho důkazem se budeme zabývat v příští kapitole.

3. Rozklad mnohočlenu na součin kořenových činitelů

V celém tomto odstavci se budeme kvůli snadnějšímu vyjadřování zabývat pouze normovanými algebraickými rovnicemi

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Dokážeme nejprve dvě důležité věty.

Věta 2. *Má-li algebraická rovnice n-tého stupně za kořen číslo α, pak je mnohočlen $f(x)$ dělitelný lineárním dvojčlenem $x - \alpha$ a platí rovnost*

$$f(x) = (x - \alpha)\, g(x), \tag{5}$$

kde $g(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$.

Důkaz. Pokusme se rozložit mnohočlen $f(x)$ na levé straně rovnice na tvar

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = (x - \alpha)(x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + c, \tag{6}$$

kde $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, c$ jsou jisté konstanty. Rovnost (6) upravíme takto:

$$(7)\quad x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n =$$
$$= x^n + (b_1 - \alpha)\, x^{n-1} + (b_2 - \alpha b_1)\, x^{n-2} +$$
$$+ \ldots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})\, x + (c - \alpha b_{n-1}).$$

Jak víme, jsou si dva mnohočleny rovny, jestliže jejich koeficienty u týchž mocnin x jsou si rovny. Porovnáním koeficientů u stejných mocnin na obou stranách rovnosti (7) dostáváme tyto rovnice pro hledané konstanty $b_1, \ldots, b_{n-1}, c$:

$$b_1 - \alpha = a_1,$$
$$b_2 - \alpha b_1 = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$b_{n-1} - \alpha b_{n-2} = a_{n-1},$$
$$c - \alpha b_{n-1} = a_n.$$

Z těchto rovnic lze jednoznačně vypočítat čísla $b_1, \ldots, b_{n-1}, c$, takže mnohočlen $f(x)$ lze skutečně rozložit na tvar (6).

Dosaďme nyní do vztahu (4) za x číslo α. Dostaneme tak vztah

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n =$$
$$= (\alpha - \alpha)\,(\alpha^{n-1} + b_1\alpha^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + c,$$

tj. vztah

$$(8)\qquad \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = c.$$

Protože však je α kořenem rovnice (4), je levá strana vztahu (8) rovna nule, takže $c = 0$. Je tedy možno daný mnohočlen $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ rozložit na tvar

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n =$$
$$= (x - \alpha)(x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}),$$

tj. na tvar

$$f(x) = (x - \alpha)\,g(x), \tag{5}$$

kde α je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $g(x) = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ je mnohočlen stupně $n - 1$.

Věta 2 má i velký praktický význam. Usnadňuje totiž výpočet ostatních kořenů, je-li jeden kořen α znám. V tom případě dělíme mnohočlen na levé straně rovnice dvojčlenem $x - \alpha$, čímž dostaneme podíl $g(x)$. Mnohočlen $g(x)$ má stupeň o jedničku menší a ostatní kořeny rovnice pak jsou kořeny algebraické rovnice $g(x) = 0$, jež je o jedničku nižšího stupně.

Cvičení 1. Vypočtěte ostatní kořeny kubické rovnice

$$x^3 + x^2 - 37x + 35 = 0,$$

je-li znám jeden kořen $x_1 = 5$. Totéž pro rovnici

$$x^3 - 9x^2 - 31x + 147 = 0$$

a kořen $x_1 = 3$. Návod: Dělte příslušný kubický mnohočlen odpovídajícím dvojčlenem $x - x_1$ a řešte kvadratickou rovnici.

Cvičení 2. Rovnice

$$x^3 - ax^2 - a^2x + a^3 = 0$$

má dva stejné kořeny rovné číslu a. Nalezněte třetí kořen. Návod: Opakujte dvakrát postup jako ve cvičení 1. Rozmyslete si skutečnost, že lze také daný kubický mnohočlen dělit přímo mnohočlenem $(x - a)(x - a) = x^2 - 2ax + a^2$!

Další důležitou větou, kterou vyslovíme prozatím bez důkazu, je věta 3.

Věta 3. *Každý mnohočlen n-tého stupně* $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ *lze, až na pořadí činitelů, jednoznačně napsat ve tvaru*

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \tag{9}$$

tj. jako součin lineárních dvojčlenů, kde komplexní čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *jsou kořeny algebraické rovnice* $f(x) = 0$.

Věta 3 nám tedy říká, že danou algebraickou rovnici stupně n $f(x) = 0$ lze psát ve tvaru

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = 0, \tag{10}$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$. Odtud plyne ihned toto důležité tvrzení: Daná algebraická rovnice $f(x) = 0$ nemůže mít kromě kořenů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, které se vyskytují v rozkladu mnohočlenu $f(x)$ žádné další kořeny. Kdyby totiž bylo číslo α_{n+1} dalším kořenem a $\alpha_{n+1} \neq \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, plynula by z (10) rovnost

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_2) \ldots (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0,$$

tj. alespoň jedna ze závorek by byla rovna nule. V tom případě by bylo $\alpha_{n+1} \neq \alpha_i$, kde i je některé z čísel 1, …, n. To by byl však spor, neboť α_{n+1} je různé od všech kořenů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Můžeme tedy o počtu kořenů algebraické rovnice n-tého stupně vyslovit tuto větu:

Věta 4. *Algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n různých komplexních kořenů.*

To je tvrzení, o kterém jsme se již zmínili v odstavci 2.

Uveďme nyní jeden příklad na rozklad kubického mnohočlenu. Mnohočlen $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ lze psát ve tvaru

$$f(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 2)$$

(přesvědčte se vynásobením). Z tohoto příkladu je zároveň vidět, že čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nemusí být vzájemně různá. Lze tedy mnohočlen $f(x)$ psát ve tvaru

$$(11) \qquad f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_j)^{k_j},$$

kde jsou již sdruženy stejné lineární dvojčleny, tj. kde čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ jsou vzájemně různá. Je samozřejmé, že o přirozených číslech $k_1, \ldots, k_j$ musí platit, že $k_1 + \ldots + k_j = n$ (neboť celkový počet činitelů v rozkladu (9) byl roven n). Tak např. lze psát $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$, kde $3 = n = 2 + 1$.

Lineární dvojčleny $x - \alpha_i$, kde α_i je kořenem rovnice $f(x) = 0$, se nazývají *kořenovými činiteli* mnohočlenu $f(x)$. Je-li α_i nějaký kořen, pak exponent k_i u příslušného kořenového činitele $x - \alpha_i$ nazýváme *násobností* kořenu α_i a kořen α_i je pak tzv. *k_i-násobným kořenem* rovnice $f(x) = 0$. Kořen α_i s násobností 1 nazýváme *jednoduchým kořenem* rovnice $f(x) = 0$.

Tak např. výše uvedený kubický mnohočlen $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ lze psát ve tvaru $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$, což znamená, že kubická rovnice $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $\alpha_1 = 1$ a jeden jednoduchý kořen $\alpha_2 = 2$.

Jako další příklad vezměme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Její diskriminant je roven nule, takže ze vzorce pro kořeny kvadratické rovnice dostáváme jen jedno číslo $\alpha = 3$. Mnozí jsou v tomto případě zvyklí říkat, že rovnice má „dva stejné či splývající“ kořeny $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$. To je dosti nejasný výrok. Může vzniknout tato otázka: proč mluvíme o dvou kořenech, když v tomto případě existuje vlastně jen kořen jeden? Takovýmto nejasnostem se vyhneme, užijeme-li pojmu násobnosti kořenu.

Náš kvadratický trojčlen lze rozložit na kořenové činitele takto:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2.$$

Odtud plyne, že daná kvadratická rovnice má jediný dvojnásobný kořen $\alpha = 3$.

Nyní již můžeme vyslovit další tvrzení o souvislosti stupně algebraické rovnice s počtem jejích kořenů. Počítáme-li totiž každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost, pak je počet kořenů roven stupni algebraické rovnice. Platí tedy tato věta:

Věta 5. *Počet kořenů algebraické rovnice je roven jejímu stupni, jestliže každý kořen počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost.*

Důkaz této věty plyne z toho, že mnohočlen n-tého stupně $f(x)$ lze rozložit na součin kořenových činitelů tvaru (11), kde $k_1 + \ldots + k_n = n$, tj. součet násobností všech vzájemně různých kořenů je roven n.

Zůstali jsme ještě dlužni důkaz věty 3. Tato věta je důsledkem věty 2 a základní věty algebry. Je-li dána algebraická rovnice

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

pak podle základní věty algebry má tato rovnice alespoň jeden kořen α_1. Podle věty 2 lze nyní psát polynom $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = (x - \alpha_1)g(x),$$

kde $g(x)$ je ve tvaru $g(x) = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$. Danou rovnici $f(x) = 0$ lze tedy psát ve tvaru

$$(x - \alpha_1)\, g_1(x) = 0. \tag{12}$$

Rovnice $n - 1$ stupně $g_1(x) = 0$ má opět podle základní věty algebry alespoň jeden kořen α_2 (kořen α_2 je pak i kořenem rovnice (12), tj. původní rovnice $f(x) = 0$). Lze tedy mnohočlen $g_1(x)$ psát ve tvaru

$$g_1(x) = (x - \alpha_2)\, g_2(x),$$

kde $g_2(x) = x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}$. Rovnice (12) pak přejde na tvar

$$(13) \qquad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\, g_2(x) = 0,$$

kde $g_2(x)$ je mnohočlen $n - 2$ stupně. Podobně lze postupovat tak dlouho, až rovnice (13) nabude tvaru

$$(10) \qquad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = 0.$$

Tím jsme dokázali, že rovnici n-tého stupně $f(x) = 0$ lze psát ve tvaru součinu n lineárních dvojčlenů, kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$, což je obsahem věty 3. Důkazem jednoznačnosti rozkladu se nebudeme zabývat.

Viděli jsme, že lze každou rovnici tvaru (4) napsat ve tvaru (10) jako součin kořenových činitelů. To nám umožňuje řešit v jistém smyslu obrácenou úlohu: K daným komplexním číslům $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sestavit algebraickou rovnici, která má za kořeny právě tato daná čísla a žádná jiná. Takovou rovnicí je zřejmě rovnice $f(x) = 0$, kde

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m)$$

(a_0 je libovolná konstanta, $a_0 \neq 0$). Je zřejmé, že položíme-li $a_0 = 1$, dostaneme rovnici v normovaném tvaru. Máme-li nalézt dále takovou rovnici, že α_1 má být jejím k_1 násobným kořenem, α_2 jejím k_2 násobným kořenem, až α_m jejím k_m násobným kořenem, pak je hledanou rovnicí rovnice $f(x) = 0$, kde

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_m)^{k_m}$$

(a_0 je libovolná konstanta různá od nuly).

Cvičení 3. Sestavte algebraické rovnice mající tyto jednoduché kořeny:

a) 4, 5, 2; b) —8, —4, 4; c) $-\frac{5}{6}$, $-\frac{2}{5}$, 8; d) 2, —2, 5, —5; e) —3, 4, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; f) $2+i$, $4-2i$, —3.

4. Sestavte algebraické rovnice mající tyto kořeny:
a) dvojnásobný kořen 2 a trojnásobný kořen —2;
b) jednoduchý kořen —2 a dvojnásobný kořen i;
c) jednoduchý kořen i, jednoduchý kořen —i a trojnásobný kořen 0.

Rozkladu na kořenové činitele lze užít také ke zjednodušení výrazů obsahujících mnohočleny.

Příklad 2. Zjednodušme výraz

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}.$$

Řešme kvadratické rovnice $x^2-7x+12=0$ a $x^2-8x+15=0$. Prvá má kořeny 4, 3, a druhá má kořeny 3, 5. Kvadratické trojčleny v čitateli a jmenovateli lze tedy rozložit takto:

$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3),$$
$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5).$$

Je tedy daný výraz definován pro $x \neq 3$, $x \neq 5$. Pro tato x lze psát

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}=\frac{(x-4)(x-3)}{(x-3)(x-5)}=\frac{x-4}{x-5}.$$

Náš výraz lze tedy v celém oboru, ve kterém má smysl, tj. pro $x \neq 3$ a $x \neq 5$, psát v jednodušším tvaru $\frac{x-4}{x-5}$.

(Je samozřejmé, že zjednodušení je možné jen tehdy, mají-li obě kvadratické rovnice společný kořen.)

Cvičení 5. Zjednodušte tyto výrazy:

a) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$;

b) $\dfrac{\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} - \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}}{\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} - \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}}$;

c) $\dfrac{x^2 + 9x + 14}{x^2 - x - 12} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 6x - 7}$.

4. Souvislost kořenů a koeficientů algebraické rovnice

Z rozkladu algebraické rovnice na součin kořenových činitelů lze snadno odvodit zajímavé vzorce, ukazující souvislost kořenů a koeficientů dané rovnice. Ukažme si to nejprve na normované kvadratické rovnici $x^2 + a_1x + a_2 = 0$.

Buďte α_1, α_2 její kořeny (rovnice může mít i dvojnásobný kořen α, tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$). Potom lze uvažovaný kvadratický trojčlen napsat ve tvaru

$$x^2 + a_1x + a_2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Odtud plyne vynásobením rovnost

$$x^2 + a_1x + a_2 = x^2 - \alpha_1x - \alpha_2x + \alpha_1\alpha_2,$$

tj. rovnost

$$x^2 + a_1x + a_2 = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2.$$

To je rovnost dvou mnohočlenů a ta nastane právě tehdy, jsou-li koeficienty odpovídající stejným mocninám x sobě rovné.*) Je tedy

$$(14)\qquad \begin{cases} a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2), \\ a_2 = \alpha_1\alpha_2. \end{cases}$$

Stejným způsobem si čtenář již sám v případě kubické rovnice

$$x^3 + a_1x + a_2x^2 + a_3 = 0$$

odvodí vztahy

$$\begin{cases} a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \\ a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \end{cases}$$

kde α_1, α_2, α_3 jsou kořeny výše uvedené kubické rovnice (opět mohou být některé kořeny vícenásobné, např. $\alpha_1 = \alpha_2$ či $\alpha_2 = \alpha_3$ apod.).

Zcela obdobné vzorce lze odvodit i v případě rovnice n-tého stupně. Platí tato věta:

Věta 6. *Jsou-li* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *kořeny rovnice*

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

platí

$a_1 = (-1)^1(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$,
$a_2 = (-1)^2 .$(součet všech součinů $\alpha_i\alpha_j$, kde $i < j$),
$a_3 = (-1)^3 .$(součet všech součinů $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$, kde $i < j < k$),
. . . . ,
$a_{n-1} = (-1)^{n-1} .$(součet všech součinů $\underbrace{\alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_m}_{n\text{-}1 \text{ členů}}$, kde $i < j < \ldots < m$), $a_n = (-1)^n\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$.

*) O mnohočlenech platí totiž tato věta: Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ dva mnohočleny v komplexním (resp. reálném) oboru a platí-li pro všechna komplexní (resp. reálná) čísla x rovnost $f(x) = g(x)$, pak mají mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ stejné koeficienty. Důkaz této věty již vybočuje z rámce této knížky.

Příklad 3. Pomocí vzorců (14) můžeme snadno uhodnout např. kořeny této jednoduché kvadratické rovnice:

$$x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Podle vzorců (14) platí pro kořeny α_1, α_2 tyto vztahy:

$$7 = -(\alpha_1 + \alpha_2), \qquad (15)$$

$$10 = \alpha_1\alpha_2.$$

Hledáme taková dvě čísla α_1, α_2, aby jejich součin byl 10 a součet či rozdíl 7. Takovými čísly jsou zřejmě čísla 5 a 2. Aby souhlasila znaménka ve vzorcích (15), položíme $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = -2$. Tato čísla jsou pak zřejmě hledané kořeny.

Cvičení 6. Podobným způsobem, jako v příkladu 3, určete kořeny těchto kvadratických rovnic:

a) $x^2 - x - 6 = 0$;
b) $x^2 + x - 12 = 0$;
c) $x^2 - 12x + 35 = 0$;
d) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
e) $x^2 - 8x - 48 = 0$;
f) $x^2 - 12x - 45 = 0$;
g) $x^2 - 11x - 42 = 0$.

7. Sestavte kvadratickou rovnici o kořenech, jejichž součet je roven -1 a součet převrácených hodnot je roven $\frac{1}{2}$. Návod: užijte vztahů (14).

8. Je-li známo, že rovnice $x^2 - 9x - 2142 = 0$ má jeden kořen roven číslu 51, určete pomocí vztahů (14) kořen druhý, aniž rovnici řešíte.

9. Sestavte kvadratické rovnice o kořenech a) 5, 6; b) 7, —9; c) —10, —11; d) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$; e) a + b, a — b; f) $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ [užijte opět vztahů (14)].

10. Jsou-li x_1, x_2 kořeny rovnice $3x^2 - 7x - 6 = 0$, určete čísla a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$; c) $x_1^3 + x_2^3$, aniž rovnici řešíte [užijte vztahů (14)].

11. Sestavte rovnici, která má kořeny o číslo 2 menší než rovnice $x^2 - 2x - 1 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

2. kapitola

ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH SPECIÁLNÍCH TYPŮ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

1. Kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

V tomto odstavci si zopakujeme některé školní vědomosti. Je-li dána kvadratická rovnice tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{16}$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, pak kořeny se vypočtou ze známého vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{17}$$

Podobně v případě normované kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \tag{18}$$

kde p, q jsou reálná čísla, se kořeny vypočtou ze vzorce

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \tag{19}$$

který je důsledkem vzorce (16) pro $a = 1$, $b = p$, $c = q$. Výraz pod odmocninou ve vzorci (17) $D = b^2 - 4ac$ se nazývá *diskriminantem* kvadratické rovnice (16). Protože je diskriminant rovnice (18) roven číslu $p^2 - 4q$, je číslo pod odmocninou ve vzorci (19) čtvrtinou diskriminantu rovnice (18).

Je třeba si dobře uvědomit, jaký vlastně mají vzorce (17) a (18) smysl. Uvažujme např. vzorec (19) pro normovanou rovnici (18). Předně si musíme uvědomit, že vzorec (19) zastupuje vlastně dva vzorce pro dva kořeny x_1, x_2:

$$(20)\quad x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{a} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Tyto vzorce mají zcela jasný smysl, pokud je číslo $\frac{p^2}{4} - q$ pod odmocninou kladné nebo nula (tj. je-li diskriminant kladný nebo nulový). Je-li diskriminant kladný, dostáváme ze vzorců (20) pro kořeny x_1, x_2 dvě různá čísla. Věc je také jasná v případě nulového diskriminantu. Pak je $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$ a $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

Složitější situace nastává v případě, kdy diskriminant je záporný, tj. kdy $\frac{p^2}{4} - q < 0$. V tom případě nemá číslo $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ v reálném oboru smysl. Kvadratická rovnice má pak dva komplexně sdružené kořeny

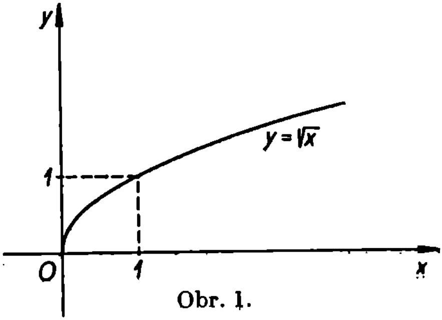
$$x_1 = -\frac{p}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\left|\frac{p^2}{4} - q\right|} \quad \text{a} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \mathrm{i}\sqrt{\left|\frac{p^2}{4} - q\right|}.$$

Zde narážíme na pojem odmocniny ze záporného čísla, který je předmětem následujícího odstavce.

2. Druhá odmocnina komplexního čísla

Ze školy už známe, že druhá odmocnina kladného čísla x je kladné číslo y, pro které platí $y^2 = x$. Takové kladné číslo y existuje právě jedno a značíme je $y = \sqrt{x}$. Dále definujeme $\sqrt{0} = 0$.

Protože ke každému nezápornému číslu x je přiřazena právě jedna nezáporná hodnota $y = \sqrt{x}$, můžeme odmocninu považovat za reálnou funkci reálné proměnné s definičním oborem $\langle 0, \infty)$. Její graf vidíme na obr. 1.



Obr. 1.

Poznamenejme ještě, že je-li dáno číslo $x > 0$ a je-li $y = \sqrt{x}$ (tj. platí-li, že $y > 0$ a $y^2 = x$), pak může vzniknout otázka, proč za druhou odmocninu nepovažujeme také záporné číslo $-y$, když i čtverec čísla $-y$ je roven x, neboť je $(-y)^2 = y^2 = x$. V tomto smyslu by na rozdíl od naší definice měla druhá odmocnina kladného čísla dvě hodnoty lišící se znaménkem a nebyla by tedy funkcí x jako při naší definici (funkční hodnota by nebyla definována jednoznačně). To je jedním z důvodů, proč při počítání s čísly v reálném oboru definujeme odmocninu jako výše, tj. bereme odmocninu vždy kladně.

Podívejme se nyní na pojem odmocniny v komplexním oboru. Zde již není možno definovat odmocninu z daného komplexního čísla x jako funkci tohoto čísla x, tj. jednoznačně. Zde prostě *definujeme druhou odmocninu* *komplexního čísla x jako každé komplexní číslo y, pro něž je $y^2 = x$.* Ukažme některé příklady.

Příklad 4. Umocněním čísel $y_1 = 2 + 3i$ a $y_2 = -2 - 3i$ na druhou dostáváme v obou případech číslo $x = -5 + 12i$. Čísla y_1 a y_2 jsou tedy druhými odmocninami čísla $x = -5 + 12i$.

Příklad 5. Umocněním čísel $y_1 = 2i$ a $y_2 = -2i$ na druhou dostáváme v obou případech číslo -4. Čísla $2i$ a $-2i$ jsou tedy druhými odmocninami čísla -4.

Příklad 6. Číslo $x = 3$*) má zřejmě dvě druhé odmocniny $y_1 = \sqrt{3}$, $y_2 = -\sqrt{3}$ (zde symbol $\sqrt{3}$ značí hodnotu druhé odmocniny z čísla 3 v reálném oboru, tj. kladné číslo, jehož čtvercem je číslo 3). Na tomto příkladě je patrný rozdíl definic odmocniny v reálném a komplexním oboru.

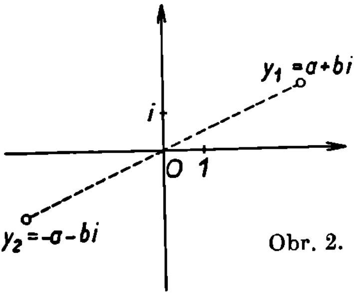
Příklad 7. Druhými odmocninami čísla i jsou čísla $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Druhými odmocninami čísla -1 jsou zřejmě čísla $y_1 = i$, $y_2 = -i$.

Ve všech těchto příkladech byly ke každému komplexnímu číslu uvedeny dvě druhé odmocniny a byla to vždy čísla opačná. To nás vede k domněnce, že lze očekávat správnost tohoto tvrzení:

Věta 7. *Ke každému komplexnímu číslu $x \neq 0$ existují právě dvě různá komplexní, vzájemně opačná čísla y_1, y_2 taková, že $y_1^2 = y_2^2 = x$.*

*) Uvědomte si, že reálná čísla jsou speciálním případem čísel komplexních (jejich imaginární část je rovna nule)!

Toto tvrzení můžeme vyslovit také takto: Každé komplexní číslo $x \neq 0$ má v komplexním oboru právě dvě druhé odmocniny y_1 a y_2. Čísla y_1 a y_2 jsou přitom vzájemně opačná, tj. platí $y_1 = -y_2$. (V Gaussově rovině jsou tedy čísla y_1 a y_2 souměrná vzhledem k počátku — viz obr. 2.)



Obr. 2.

Tuto větu nyní dokážeme. Důkaz provedeme v několika krocích. Dokažme nejprve, že ke každému komplexnímu číslu $x = a + bi$ existuje alespoň jedno číslo $y = c + di$ takové, že $y^2 = x$. Pokusme se takové číslo y nalézt. Hledáme tedy čísla c a d taková, že platí rovnost

$$(c + di)^2 = a + bi.$$

Odtud plyne

$$(c^2 - d^2) + 2cdi = a + bi.$$

Dvě komplexní čísla jsou si rovna, rovnají-li se jejich reálné a imaginární části, tj. platí-li

$$c^2 - d^2 = a, \qquad (21)$$
$$2cd = b.$$

Z těchto dvou rovnic vypočteme hledaná čísla c a d.

Umocněním obou rovnic na druhou dostaneme vztahy

$$(c^2 - d^2)^2 = a^2,$$

$$4c^2d^2 = b^2.$$

Sečtením obou rovnic dostaneme postupně rovnice

$$(c^2 - d^2)^2 + 4c^2d^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 4c^2d^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^4 + 2c^2d^2 + d^4 = a^2 + b^2,$$

$$(c^2 + d^2)^2 = a^2 + b^2$$

a tedy

$$|c^2 + d^2| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Protože jak $c^2 + d^2$ tak i $\sqrt{a^2 + b^2}$ je kladné číslo, máme

(22) $$c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sečtením vztahů (22) a (21) dostáváme

$$2c^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

čili

(23) $$c^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Odečtením (21) od (22) dostáváme

$$2d^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

čili

(24) $$d^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Dokažme nyní, že výrazy $a + \sqrt{a^2 + b^2}$ a $-a + \sqrt{a^2 + b^2}$ stojící v (23) a (24) v závorce jsou nezáporné.

Platí totiž pro libovolná reálná čísla a, b tato nerovnost:

$$a^2 + b^2 \geqq a^2$$

a tedy i

(25) $$\sqrt{a^2 + b^2} \geqq |a|.$$

Protože je dále

$$|a| \geqq a,$$

plyne z nerovnosti (25) nerovnost

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geqq a$$

čili nerovnost

$$-a + \sqrt{a^2 + b^2} \geqq 0.$$

Protože je však také

$$|a| \geqq -a,$$

dostáváme z nerovnosti (25) nerovnost

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geqq -a$$

čili nerovnost

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} \geqq 0.$$

Tím je dokázáno, že oba výrazy jsou nezáporné.

Protože jsou tedy na pravých stranách rovností (23) a (24) nezáporná čísla, dostaneme odmocněním

(26) $$|c| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)},$$

(27) $$|d| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}.$$

Vzorce (26) a (27) nám dávají hodnoty čísel c a d až na znaménko. Snadno se můžeme přesvědčit, že lze vždy položit $c = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}$ a $d = \pm$

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}$, přičemž znaménko $+$ volíme v případě, kdy $b \geqq 0$ a znaménko $-$ v případě, že $b < 0$. *Je tedy odmocninou čísla $a + bi$ číslo*

$$\text{(28)} \quad \sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})},$$

kde bereme znaménko $+$ je-li $b \geqq 0$ a znaménko $-$ je-li $b < 0$. Je-li totiž $b \geqq 0$, pak je

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2}) - \frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2}) +$$

$$+ 2\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})} =$$

$$= a + \mathrm{i}\sqrt{(a+\sqrt{a^2+b^2})(-a+\sqrt{a^2+b^2})} =$$

$$= a + \mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2-a^2} = a + \mathrm{i}\sqrt{b^2} = a + b\mathrm{i}.$$

Podobně je-li $b < 0$, pak je

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2}) - \frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2}) -$$

$$- 2\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})} =$$

$$= a - \mathrm{i}\sqrt{(a+\sqrt{a^2+b^2})(-a+\sqrt{a^2+b^2})} =$$

$$= a - \mathrm{i}\sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = a - \mathrm{i}\sqrt{b^2} =$$
$$= a - \mathrm{i}(-b) = a + b\mathrm{i}.$$

Tím je hotova prvá část důkazu, ve které jsme nejen dokázali existenci alespoň jedné druhé odmocniny k danému komplexnímu číslu, ale i udali vzorec (28), který nám umožňuje snadno tuto odmocninu vypočítat.

Dokažme nyní druhou část našeho tvrzení. Označme odmocninu čísla x stanovenou vzorcem (28) symbolem y_1. Označme dále $y_2 = -y_1$, tj. y_2 je opačné číslo k číslu y_1. Pokud je $y_1 \neq 0$, je vždy $y_2 \neq y_1$ a snadno se dokáže, že i číslo y_2 je odmocninou čísla x. Je totiž $(y_2)^2 = (-y_1)^2 = y_1^2 = x$. Tím je dokázáno, že vždy existují alespoň dvě různé, vzájemně opačné druhé odmocniny daného nenulového komplexního čísla.

Důkaz bude ukončen, dokážeme-li ještě, že tyto druhé odmocniny jsou právě dvě. Předpokládejme, že ze vzorce (24) jsme pro odmocninu z čísla $x = a + b\mathrm{i} \neq 0$ dostali číslo $y_1 = m + n\mathrm{i}$. Potom je i číslo $y_2 = -y_1 = -m - n\mathrm{i}$ druhou odmocninou čísla x. Předpokládejme dále, že by existovalo ještě číslo $z = p + q\mathrm{i}$ takové, že $z \neq y_1$, $z \neq y_2$ a $z^2 = x$ (tj. z by bylo další druhou odmocninou různou od y_1 a y_2). Z rovností

$$y_1^2 = x, \quad z^2 = x$$

nyní plyne, že $y_1^2 = z^2$, tj.

$$(m + n\mathrm{i})^2 = (p + q\mathrm{i})^2.$$

Umocněním dostaneme rovnost

$$(m^2 - n^2) + 2mn\mathrm{i} = (p^2 - q^2) + 2pq\mathrm{i}.$$

Z rovnosti těchto dvou komplexních čísel tedy plynou tyto rovnice:

$$m^2 - n^2 = p^2 - q^2, \tag{29}$$

$$(30) \qquad 2mn = 2pq.$$

Z rovnosti $y_1^2 = z^2$ plyne dále rovnost

$$|y_1^2| = |z^2|$$

čili

$$|y_1|^2 = |z|^2.$$

Odtud plyne rovnost

$$(31) \qquad m^2 + n^2 = p^2 + q^2.$$

Sečtením (29) a (31) dostáváme rovnost

$$2m^2 = 2p^2$$

čili

$$m^2 = p^2.$$

Je tedy

$$(32) \qquad |m| = |p|.$$

Z rovnosti (32) plyne, že je buď $m = p$, nebo $m = —p$.

Je-li $m = p$, plyne z rovnosti (30), že $n = q$ a je tedy $z = p + qi = m + ni = y_1$. To je však spor s předpokladem, že je $z \neq y_1$.

Je-li $m = —p$, plyne z rovnosti (30), že $n = —q$ a je tedy $z = p + qi = —m — ni = —y_1 = y_2$. To je spor s předpokladem, že $z \neq y_2$.

Tím je dokázáno, že k číslu $x \neq 0$ neexistují kromě čísel y_1 a $y_2 = —y_1$ žádné jiné komplexní odmocniny. Důkaz našeho tvrzení je hotov.

Důkaz jsme mohli udělat i mnohem jednodušeji, s použitím základní věty algebry. Tato věta však nebyla dokázána, a proto jsme raději dali přednost elementárnímu důkazu našeho tvrzení. Důkaz by se prováděl takto: Podle definice je druhou odmocninou komplexního čísla $x \neq 0$ takové komplexní číslo y, že platí $y^2 = x$. Je tedy každý kořen rovnice

$$y^2 — x = 0$$

druhou odmocninou komplexního čísla x. To je však algebraická rovnice druhého stupně a podle základní věty algebry má tato rovnice alespoň jeden kořen $y_1 = c + di$. Zřejmě je $y_1 \neq 0$, neboť jinak by bylo $0 = y_1^2 = x$, což není pravda. Položíme-li $y_2 = -c - di$, je $y_2 \neq y_1$ a platí $y_1^2 = c^2 - d^2 + 2cdi$, $y_2^2 = c^2 - d^2 + 2cdi$ čili $y_1^2 = y_2^2 = x$. Nalezli jsme tak dva různé kořeny rovnice $y^2 - x = 0$. Protože tato rovnice je druhého stupně, může mít podle věty 4 nejvýše dva kořeny. Odtud plyne naše tvrzení, že ke každému komplexnímu číslu $x \neq 0$ existují dvě různé, vzájemně opačné druhé odmocniny.

Nyní vypočteme několik příkladů na výpočet druhých odmocnin komplexního čísla.

Příklad 8. Vezměme číslo $x = -5 + 12i$ z příkladu 4. Protože je $b = 12 > 0$, dostáváme ze vzorce (28) se znaménkem $+$ toto číslo:

$$y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{25 + 144})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{25 + 144})} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{169})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{169})} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(-5 + 13)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(5 + 13)} =$$

$$= \sqrt{4} + i\sqrt{9} = 2 + 3i.$$

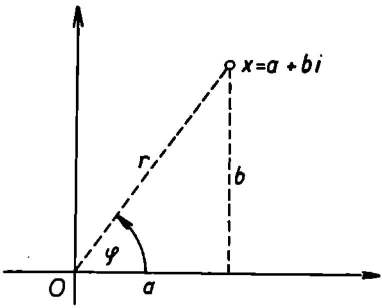
Pro druhou hodnotu odmocniny y_2 dostáváme číslo $y_2 = -y_1 = -2 - 3i$. Dospíváme tak k výsledku příkladu 4.

Příklad 9. Vypočtěme druhé odmocniny ze záporného čísla $x = -4 = -4 + 0i$.

Protože je $b = 0$, vezmeme ve vzorci (28) znaménko $+$. Je tedy

$$y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(-4 + \sqrt{16})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(4 + \sqrt{16})} =$$
$$= \sqrt{0} + i.2 = 2i.$$

Dále je $y_2 = -y_1 = -2i$.



Obr. 3.

Druhé odmocniny z komplexního čísla můžeme počítat i jiným způsobem. Využijeme k tomu tzv. *goniometrického vyjádření komplexního čísla*. Je-li dáno komplexní číslo $x = a + bi$, $x \neq 0$ (viz obr. 3), lze jeho polohu v Gaussově rovině jednoznačně charakterizovat pomocí jeho vzdálenosti od počátku r a pomocí úhlu φ, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, který svírá jeho průvodič s reálnou osou. Platí pak vzorce

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

kde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pokud $a \neq 0$, tj. pokud je $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ a $\varphi \neq \frac{3\pi}{2}$ (je-li $a = 0$, jedná se o ryze imaginární číslo),

lze φ snadno určit z goniometrické rovnice $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.
Je ovšem třeba si uvědomit, ve kterém kvadrantu Gaussovy roviny číslo $a + bi$ leží. Je tedy

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Příklad 10. Vyjádřeme goniometricky číslo $3 + 4i$.
Jest
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}.$$

V logaritmických tabulkách nalezneme, že $\varphi = 53°08'$.
Je tedy
$$3 + 4i = 5(\cos 53°08' + i \sin 53°08').$$

Pomocí goniometrického vyjádření

$$x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

daného komplexního čísla x pak obě druhé odmocniny ihned dostaneme ze vzorců

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \sqrt{r}\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right), \\ y_2 &= \sqrt{r} \; \cos \frac{\varphi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

Důkaz, že čísla (32) jsou hledanými druhými odmocninami, se snadno provede umocněním čísel y_1 a y_2 na druhou pomocí vzorců pro funkce dvojnásobného úhlu. Provedeme ho např. pro y_1. Platí

$$y_1^2 = r\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = r\left[\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + i\left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right)\right] = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = x.$$

Příklad 11. Vypočtěme opět druhé odmocniny čísla x z příkladu 4. Je tedy $x = -5 + 12i$, takže

$$r = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

a
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{12}{5} = -2{,}4.$$

Protože je číslo $-5 + 12i$ v druhém kvadrantu, dostaneme z tabulek $\varphi = 112°37'$. Je tedy

$$y_1 = \sqrt{13}\left(\cos\frac{112°37'}{2} + i\sin\frac{112°37'}{2}\right) =$$
$$= \sqrt{13}\,(\cos 56°18' + i \sin 56°18') =$$
$$= 3{,}60555(0{,}55484 + i\,0{,}83196) \doteq 2 + 3i.$$

3. Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

Se znalostmi, které jsme nabyli v odstavci 2 již snadno můžeme řešit kvadratické rovnice s komplexními koeficienty. Mějme dánu kvadratickou rovnici

(33) $$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde a, b, c jsou komplexní čísla, $a \neq 0$. Rovnici (33) napíšeme ve tvaru

(34) $$ax^2 + bx = -c.$$

Obě strany rovnice (34) násobme číslem $4a$ a přičtěme k nim b^2. Dostaneme rovnost

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

čili rovnost

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Čtenář si zajisté všiml, že všechny úpravy, které jsme dosud udělali, jsou v oboru komplexních čísel přípustné. Dále vidíme, že v poslední rovnici stojí na pravé straně komplexní číslo. Chceme nyní najít takové komplexní číslo y, jehož čtverec je roven číslu $b^2 - 4ac$. Taková čísla — druhé odmocniny čísla $b^2 - 4ac$ — existují dvě, pokud $b^2 - 4ac \neq 0$. Pro $b^2 - 4ac = 0$ je $y = 0$. Je-li y jednou z odmocnin, je číslo $-y$ odmocninou druhou. Položíme-li nyní

$$2ax_1 + b = y,$$

dostaneme jeden kořen kvadratické rovnice

$$x_1 = \frac{-b + y}{2a}. \tag{35}$$

Položíme-li

$$2ax_2 + b = -y,$$

dospíváme k druhému kořenu

$$x_2 = \frac{-b - y}{2a} \tag{36}$$

kvadratické rovnice (33).

Vzorce (35) a (36) pro kořeny x_1, x_2 můžeme stručně zapsat vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm y}{2a}, \tag{37}$$

kde y značí jednu z obou hodnot druhé odmocniny z čísla $b^2 - 4ac$. Označíme-li $y = \sqrt{b^2 - 4ac}$, pak lze vzorec (37) psát ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{38}$$

což je vzorec zcela totožný se vzorcem (17) pro kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty. Je třeba však dát pozor na jiný význam symbolu $\sqrt{}$.

Protože reálná čísla jsou jen speciálním případem komplexních čísel, můžeme již snadno odpovědět na zbývající otázku, jaké je řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v případě záporného diskriminantu. Jedná se totiž jen o speciální případ řešení rovnice s komplexními koeficienty. V tomto případě jde o nalezení druhých odmocnin reálného záporného čísla $b^2 - 4ac$. Buď x reálné záporné číslo, tj. $x = x + 0\mathrm{i}$ a $|x| = -x$. Podle vzorce (28) dostaneme pro odmocninu čísla x výraz

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2})} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2})} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x + |x|)} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(-x + |x|)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(-|x| + |x|)} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(|x| + |x|)} =$$

$$= 0 + \mathrm{i}\sqrt{|x|} = \mathrm{i}\sqrt{|x|}\,.$$

Reálné záporné číslo x má tedy tyto dvě odmocniny:

$$\mathrm{i}\sqrt{|x|} \text{ a } -\mathrm{i}\sqrt{|x|}\,.$$

Pro kořeny kvadratické rovnice tedy v případě záporného diskriminantu dostáváme podle (38) vzorce

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}.$$

Celkem lze tedy udělat pro kvadratickou rovnici (33) tento závěr:

a) Pro kořeny kvadratické rovnice s komplexními koeficienty platí vzorec

$$(38) \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

kde symbol $\sqrt{b^2 - 4ac}$ znamená některou z obou komplexních odmocnin komplexního čísla $b^2 - 4ac$.

b) Ve speciálním případě kvadratické rovnice s reálnými koeficienty plynou z (38) pro kořeny vzorce

$$(39) \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pokud diskriminant $D = b^2 - 4ac \geqq 0$. Je-li $D < 0$, je

$$(40) \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}.$$

V obou případech stojí pod odmocninou nezáporné číslo.

Speciálním případem kvadratické rovnice je tzv. ryze kvadratická rovnice tvaru

$$(39) \qquad ax^2 + c = 0, \quad a \neq 0.$$

(Zde je tedy $b = 0$, takže chybí lineární člen.)

Vzorce pro kořeny této rovnice lze odvodit jako důsledky vzorců pro kořeny kvadratické rovnice pro $b = 0$, nebo je lze odvodit přímo takto: Z rovnice (39) plyne ihned

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Řešením ryze kvadratické rovnice jsou tedy taková komplexní čísla, jejichž čtverec je roven číslu $-\frac{c}{a}$. Jsou možné tyto případy:

a) V případě, že číslo $-\frac{c}{a}$ je reálné a je $-\frac{c}{a} > 0$, je

$$x_{1.2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

b) V případě, že číslo $-\frac{c}{a}$ je reálné a je $-\frac{c}{a} < 0$, je

$$x_{1.2} = \pm \mathrm{i} \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}.$$

c) V případě, že číslo $-\frac{c}{a}$ je komplexní nikoliv reálné, pak, označíme-li symbolem $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ jednu z druhých odmocnin čísla $-\frac{c}{a}$, dostáváme pro kořeny vzorec

$$x_{1.2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Dostáváme formálně stejný vzorec, jako v případě reálného a kladného $-\frac{c}{a}$, avšak odmocnina má odlišný význam. Uvědomte si, že z posledního vzorce plynou jako speciální případy vzorce uvedené v bodech a) a b).

Třetím speciálním případem kvadratické rovnice je rovnice tvaru

$$ax^2 + bx = 0, \quad a \neq 0,$$

tj. rovnice bez absolutního členu. Její řešení je velmi snadné jak v reálném, tak i komplexním oboru. Napíšeme-li rovnici ve tvaru

$$x(ax + b) = 0,$$

je ihned vidět, že jedním kořenem je $x_1 = 0$ a druhým kořenem je kořen rovnice $ax + b = 0$, tj. číslo $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Uveďme nyní několik příkladů.

Příklad 12. Řešme reálnou kvadratickou rovnici

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Zde je $D = 25 - 24 = 1 > 0$, takže dostáváme dva reálné různé kořeny

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6},$$

tj.

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Příklad 13. Řešme reálnou kvadratickou rovnici

$$9x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Zde je $D = 36 - 36 = 0$, takže rovnice má jeden dvojnásobný kořen

$$x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 14. Řešme rovnici

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Zde je $D = 16 - 52 = -36 < 0$, takže rovnice má dva komplexně sdružené kořeny

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}.$$

Je tedy $x_1 = 2 + 3i$ a $x_2 = 2 - 3i$. Poznamenejme, že v tomto případě by bylo lépe užít vzorce pro řešení normované kvadratické rovnice $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, který je důsledkem vzorců (38), (39), (40) pro $a = 1$.

Příklad 15. Řešme rovnici

$$x^2 + (2 - 3i)x - 5(1 + i) = 0.$$

Zde je $D = (2 - 3i)^2 - 20(1 + i) = 15 + 8i$. Podle vzorce (28) dostaneme pro odmocninu čísla $15 + 8i$ číslo

$$\sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{15^2 + 8^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + \sqrt{15^2 + 8^2})} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(15 + 17)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + 17)} =$$

$$= \sqrt{16} + i\sqrt{1} = 4 + i.$$

Číslo D má tedy dvě druhé odmocniny $4 + i$ a $-4 - i$. Pro kořeny tedy dostáváme

$$x_1 = \frac{1}{2}(-2 + 3i + 4 + i) = 1 + 2i,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-2 + 3i - 4 - i) = -3 + i.$$

Naše rovnice má tedy dva různé komplexní kořeny $x_1 = 1 + 2i$ a $x_2 = -3 + i$. (Všimněte si, že komplexní kořeny nejsou u rovnice s komplexními koeficienty obecně komplexně sdružená čísla!)

Příklad 16. Řešme rovnici

$$ix^2 - (2 + 2i) = 0.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$x^2 = \frac{2 + 2i}{i}$$

a nalezneme odmocniny z čísla $\frac{2 + 2i}{i} = \frac{(2 + 2i)i}{i^2} =$ $= 2 - 2i$. Podle vzorce (28) je jedna z odmocnin rovna číslu

$$\sqrt{\frac{1}{2}(2 + \sqrt{8})} - i\sqrt{\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{8})} =$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{2}} - i\sqrt{-1 + \sqrt{2}}.$$

Daná rovnice má tedy dva kořeny

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} - i\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$$

$$\text{a } x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{-1 + \sqrt{2}}.$$

Cvičení 12. Řešte tyto kvadratické rovnice:

a) $6ax^2 - ab - b^2 = 0$, kde $a \neq 0$;

b) $a^2x^2 - abx + \frac{b^2}{4} = 0$, kde $a \neq 0$;

c) $ax^2 - 2x\sqrt{2} - 2 = 0$, kde $a \neq 0$.

13. Pomocí diskriminantu rozhodněte, jakého druhu je řešení těchto rovnic:

a) $2x^2 + 4x + 11 = 0$;

b) $3x^2 - 2x\sqrt{3} - 1 = 0$;

c) $3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 = 0$;

d) $a^2x^2 - abx + \frac{b^2}{4} = 0$.

V případě d) proveďte diskusi řešení.

14. Řešte tyto kvadratické rovnice:

a) $x^2 = 9 - 40i$;
b) $x^2 = i$;
c) $x^2 - 1 - i = 0$;
d) $2x^2 - 1 - 4i\sqrt{3} = 0$;
e) $(1 + i)x^2 + 7 + 3i = 0$;
f) $x^2 - 4i\sqrt{5} = -1$.

15. Řešte tyto kvadratické rovnice:

a) $x^2 - ix + 2 = 0$;
b) $x^2 - 3x + 3 + i = 0$;
c) $x^2 + 3x = -10i$;
d) $x^2 + 3(3 + 2i) = 2x$;
e) $(2 - i)x^2 - (4 - 2i)x + 21 + 3i = 0$.

4. Řešení některých rovnic převedením na kvadratickou rovnici

Často se setkáváme (zvláště při slovních úlohách) s rovnicemi, které nejsou algebraické podle naší definice, tj. na levé straně není mnohočlen, ale lze je různými úpravami na kvadratickou rovnici převést. Vezměme např. rovnici

$$\frac{x}{x + 4} = \frac{16}{x - 14}.$$

Předpokládáme-li $x \neq -4$, $x \neq 14$, lze tuto rovnici vynásobením obou stran činitelem $(x + 4)(x - 14)$ převést na tvar

$$x(x - 14) = 16(x + 4).$$

Úpravami dostáváme postupně tyto rovnice:

$$x^2 - 14x - 16x - 48 = 0,$$

$$x^2 - 30x - 48 = 0.$$

To však už je kvadratická rovnice, která má kořeny

$$x_1 = 15 + \sqrt{273} \doteq 31{,}5, \quad x_2 = 15 - \sqrt{273} \doteq -1{,}5.$$

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že nalezená čísla x_1, x_2 vyhovují dané rovnici.

Je velmi důležité si uvědomit, že v případech, kdy provádíme s rovnicí jiné úpravy než ekvivalentní*), je zkouška nutná, neboť se může stát, že upravená rovnice má navíc některé kořeny, jež nevyhovují rovnici původní. Podobně může nastat situace, že upravená rovnice nemá za kořen číslo, které je kořenem rovnice původní (to znamená, že během úprav můžeme nějaký kořen ztratit). Takovým úpravám, při nichž kořeny ztrácíme, se musíme vyhýbat. Nelze např. dělit obě strany rovnice dělencem obsahujícím neznánou, aniž jsme se přesvědčili, že nulové body dělence nejsou kořeny původní rovnice. Je to zřejmé z tohoto příkladu: Kdybychom bezmyšlenkovitě dělili rovnioi

$$(x - 4)(x + 3) = (x + 3)(2x + 5)$$

výrazem $x + 3$ stojícím na obou stranách rovnice, dostali bychom rovnici

$$x - 4 = 2x + 5,$$

*) Dvě rovnice jsou, jak víme, *ekvivalentní*, mají-li tytéž kořeny. Algebraické úpravy, které převádějí rovnici na rovnici s ní ekvivalentní, nazýváme ekvivalentními úpravami. Tak např. násobení (dělení) obou stran rovnice číslem různým od nuly je ekvivalentní úprava. Podobně přičtení (odečtení) stejného čísla k oběma stranám je úprava ekvivalentní.

tj. $x = -9$. Obdrželi bychom tak jen jeden kořen původní rovnice a ztratili bychom přitom druhý kořen $x = -3$, pro který nabývá výraz $x + 3$ nulové hodnoty. To by se nemohlo bývalo stát, kdybychom se ještě před dělením přesvědčili, zda číslo $x = -3$ je kořenem dané rovnice.

V příkladu uvedeném na začátku tohoto odstavce jsme obě strany dané rovnice násobili činiteli obsahujícími neznámou. Zde však čísla x, pro která nabývali tito činitelé $x + 4$ a $x - 14$ nulové hodnoty, nebyla kořeny dané rovnice, takže jsme mohli předpokládat, že je $x \neq -4$ a $x \neq 14$. Za tohoto předpokladu byly provedené úpravy ekvivalentní.

Příkladem úpravy rovnice, která není ekvivalentní, je kromě právě zmíněného násobení či dělení rovnice činitelem obsahujícím neznámou, též umocnění a odmocnění obou stran rovnice.

Výše uvedenou úvahu si ověřme ještě na dalším příkladě.

Příklad 17. **Řešme rovnici**

$$9(x - 5)^2 - 16(x + 2)^2 = 0.$$

Rovnici upravme na tvar

$$9(x - 5)^2 = 16(x + 2)^2.$$

Obě strany této rovnice odmocníme. Dostáváme tak rovnici

$$|3(x - 5)| = |4(x + 2)|.$$

Odtud plyne, že je buď

$$3(x - 5) = 4(x + 2),$$

nebo

$$3(x - 5) = -4(x + 2).$$

Z prvé rovnice dostaneme úpravou lineární rovnici

$$x + 23 = 0$$

mající kořen $x_1 = -23$ a z druhé rovnice dostáváme úpravou lineární rovnici

$$7x - 7 = 0$$

mající kořen $x_2 = 1$. Zkouškou se přesvědčíme, že oba kořeny $x_1 = -23$ a $x_2 = 1$ vyhovují dané rovnici. Viděli jsme, že při neopatrném odmocňování by se mohlo stát, že bychom uvažovali jen rovnici $3(x - 5) = 4(x + 2)$, čímž bychom ztratili kořen $x_2 = 1$. (Pamatujte, že pro reálné a je vždy $\sqrt{a^2} = |a|$!)

Danou rovnici bychom však mohli řešit i tak, že bychom ji umocněním obou závorek a jednoduchou úpravou převedli na ekvivalentní kvadratickou rovnici

$$7x^2 + 154x - 161 = 0,$$

jejíž kořeny jsou právě čísla $x_1 = -23$ a $x_2 = 1$.

Cvičení 16. Řešte tyto rovnice:

a) $\dfrac{2x + 8}{x - 11} + \dfrac{x + 34}{3x - 48} = 6$;

b) $\dfrac{x - 10}{5} : \dfrac{x + 10}{4} = (x + 10) : 5(x - 10)$;

c) $\dfrac{4x + 9}{2x - 3} = \dfrac{3x + 8}{4 - x}$;

d) $\dfrac{x + 2}{x - 2} + \dfrac{x - 2}{x + 2} = 3$;

e) $\dfrac{2x - 3}{x} + \dfrac{x}{2x - 3} = \dfrac{34}{15}$.

Zvláštním typem rovnic, které nejsou algebraické, ale lze je někdy převést na kvadratickou rovnici, jsou tzv. *rovnice iracionální*. Jsou to takové rovnice, v nichž je neznámá pod odmocninou. Příkladem takové rovnice je rovnice

$$\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}. \tag{41}$$

Řešíme ji umocněním obou stran, tj. užíváme neekvivalentní úpravy, a proto platí to, co bylo řečeno na začátku tohoto odstavce. Poznamenejme ještě výslovně, že u iracionálních rovnic se omezíme pouze na ty reálné hodnoty neznámé, pro něž jsou výrazy pod odmocninami nezáporné. Jinak zde totiž nastávají některé potíže s komplexní odmocninou.

Příklad 18. Řešme výše uvedenou rovnici (41). Umocněním obou stran dostaneme rovnici

$$2x + 7 + 3x - 18 + 2\sqrt{(2x+7)(3x-18)} =$$
$$= 7x + 1.$$

Odtud ihned dostaneme rovnici

$$\sqrt{(2x+7)(3x-18)} = x + 6.$$

Dalším umocněním dostáváme rovnici

$$6x^2 - 15x - 126 = x^2 + 12x + 36$$

čili

$$5x^2 - 27x - 162 = 0.$$

To je už kvadratická rovnice s kořeny $x_1 = 10$, $x_2 = -3{,}6$. Zkouškou zjistíme, že číslo $x_1 = 10$ splňuje rovnici (41) a je tedy jejím kořenem. Číslo $x_2 = -3{,}6$ však původní rovnici (41) nevyhovuje, neboť výraz $\sqrt{3x-18}$ nemá pro $x = x_2$ smysl (pod odmocninou je záporné číslo). Daná rovnice (41) má tedy jeden reálný kořen $x = 10$.

Cvičení 17. Řešte tyto iracionální rovnice:

a) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{9x - 2} = 2\sqrt{5x + 1}$;

b) $\sqrt{2x - 10} + \sqrt{3x + 10} = \sqrt{2x - 17} + \sqrt{3x + 25}$;

c) $\sqrt{5x + 6} - \sqrt{2x + 4} = \sqrt{x - 2}$;

d) $\sqrt{x^2 + 20} + \sqrt{x^2 - 20} = 2\sqrt{5}$;

e) $\dfrac{2x^2 - a}{\sqrt{x^2 - b}} = \sqrt{x^2 - b}$ (proveďte diskusi!).

Některé iracionální rovnice můžeme řešit substitucí. Uveďme příklad takové rovnice.

Příklad 19. Řešme rovnici

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x - 7 = 0.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + (x^2 - 3x + 5) - 12 = 0.$$

Tím dostaneme pod odmocninou i v závorce stejný kvadratický trojčlen. Položíme-li nyní substituci

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = y,$$

je $x^2 - 3x + 5 = y^2$ a poslední rovnice o neznámé x přejde na tuto rovnici o neznámé y:

$$y + y^2 - 12 = 0.$$

To je kvadratická rovnice s kořeny $y_1 = 3$, $y_2 = -4$. Pomocí naší substituce přejdeme opět k původní neznámé. Máme dva případy:

a) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3$. Umocněním obou stran této rovnice na druhou dostaneme

$$x^2 - 3x + 5 = 9,$$

tj. kvadratickou rovnici

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

s kořeny $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.

b) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -4$. V tomto případě neexistuje žádné reálné číslo x, pro něž by se tato odmocnina rovnala zápornému číslu. V tomto případě nedostáváme žádné kořeny x_1, x_2.

Zkouškou se přesvědčíme, že nalezená čísla $x_1 = 4$, $x_2 = -1$ jsou kořeny dané rovnice.

Cvičení 18. Řešte substitucí tyto iracionální rovnice:

a) $\sqrt{5x + 9} + 5x + 9 = 56$;

b) $\sqrt{x^2 - 85x + 405} + \dfrac{18}{\sqrt{x^2 - 85x + 405}} = 9$;

c) $x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 6$;

d) $\dfrac{\sqrt{39 + x^2} + 4}{\sqrt{39 + x^2} - 4} = \dfrac{3}{2}$.

5. Slovní úlohy vedoucí na kvadratickou rovnici

Existuje řada slovních nebo početně geometrických úloh, které vedou na kvadratickou rovnici. Čtenáře upozorňujeme, že se u takovýchto úloh i při správném výpočtu může snadno stát, že některý z vypočtených kořenů úloze nevyhovuje, příp. nemá vůbec žádný skutečný smysl. To je třeba vždy u nalezených kořenů ověřit. Ukážeme si to na příkladě.

Příklad 20. Máme zjistit, zda existuje mnohoúhelník mající 35 úhlopříček.

Pro počet úhlopříček n-úhelníka platí vzorec

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Toto číslo snadno dostaneme, uvážíme-li, že z každého vrcholu vychází $n - 3$ úhlopříček, tj. ze všech n vrcholů vychází $n(n - 3)$ úhlopříček. Protože je však nyní každá úhlopříčka počítána dvakrát, je skutečný počet úhlopříček roven výše uvedenému číslu.

Podle podmínek úlohy má být počet úhlopříček roven číslu 35, tj. má platit

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35.$$

Odtud plyne kvadratická rovnice

$$n^2 - 3n - 70 = 0.$$

Její kořeny jsou $n_1 = 7$ a $n_2 = -10$. Číslo n_1 je celé a kladné, takže vyhovuje naší úloze. Hledaný mnohoúhelník je sedmiúhelník. Číslo n_2 je sice celé, ale je záporné, takže nemůže označovat počet úhlopříček. Kořen n_2 tedy naší úloze nevyhovuje.

Cvičení 19. Jak velká je strana rovnostranného trojúhelníka, jehož obsah je 1000 cm^2?

20. Čtverec o straně 10 cm proměňte v obdélník téhož obvodu, jehož obsah je roven 64 % obsahu čtverce. Určete rozměry obdélníka.

21. Určete tři čísla o vzájemném poměru 3 : 4 : 5, jejichž součet čtverců je 1250.

22. Na schodišti výšky 3,6 m by se zvětšil počet stupňů o 3, kdyby se výška každého stupně zmenšila o 4 cm. Kolik stupňů má schodiště?

23. Pravoúhlý trojúhelník mající délku odvěsen v poměru 5 : 12, má přeponu 26 m dlouhou. Jak dlouhé jsou odvěsny?

24. Úsečku dané délky rozdělte tak, aby menší část byla ve stejném poměru k větší, jako větší část k celé úsečce (tzv. zlatý řez).

25. Nádržku naplníme prvým kohoutem o 4 hodiny, druhým o 9 hodin později, než oběma současně. Za jakou dobu se naplní každým kohoutem zvláště?

26. V které číselné soustavě je číslo 288 vyjádřeno znakem 561?

27. V které číselné soustavě je číslo 157 vyjádřeno znakem 111?

28. Jak velký je poloměr kruhu, ve kterém tětiva 8 cm vzdálená od středu je o 13 cm větší než poloměr?

29. Na jednom konci tovární budovy dlouhé 80 m svítí žárovka o 100 dekalumenech, na druhém žárovka o 1000 dekalumenech. Které místo budovy je od obou světel stejně osvětleno?

✪ 30. Čitatel zlomku je o 3 větší než jeho jmenovatel, poměr hodnoty zlomku a jeho převrácené hodnoty je 64 : 25. Který je to zlomek?

31. Který n-úhelník má 275 úhlopříček?

32. Které dva mnohoúhelníky mají dohromady 17 stran a 47 úhlopříček?

33. Objem komolého kužele o výšce 21 cm je 694 cm³. Poloměr dolní podstavy je o 5 cm větší, než poloměr podstavy horní. Vypočtěte poloměry obou podstav.

34. Dva závodníci vyběhnou současně z místa M. První závodník, který běžel průměrnou rychlostí o 0,2 m/sec větší, doběhl do cíle 960 m vzdáleného o 20 sec dříve. Jaké byly jejich časy a rychlosti?

35. Z místa A vyjede jedno auto do místa B a současně vyjede z místa B do A druhé auto, které jede rychlostí o 4 km/h menší. Vypočtěte rychlost obou aut, urazí-li druhé auto dráhu z B do A za dobu o 24 min větší, než urazí první auto dráhu z A do B. Vzdálenost míst A a B je 270 km.

36. Je dáno několik bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Proložíme-li každými dvěma přímku, obdržíme 10 přímek. O kolik bodů se jedná?

37. Na kterém místě mezi Zemí a Měsícem se ruší přitažlivé síly obou těles, je-li hmota Měsíce rovna $\frac{1}{81}$ hmoty Země?

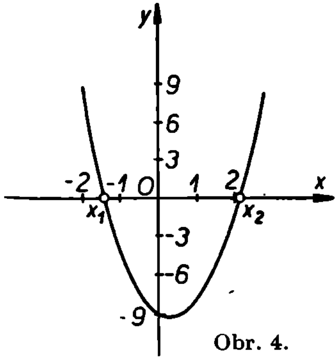
6. Grafické řešení kvadratické rovnice

Grafické řešení slouží k přibližnému určení reálných kořenů dané algebraické rovnice s reálnými koeficienty.

První, nejjednodušší způsob grafického řešení rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

spočívá v tom, že se nakreslí graf funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ (grafem kvadratické funkce je parabola s osou ve směru osy y) a body na ose x, ve kterých graf funkce f protne osu x, jsou pak kořeny dané rovnice. V případě, že daná kvadratická rovnice má dva reálné různé kořeny, protne parabola osu x ve dvou různých bodech.



Obr. 4.

Má-li rovnice jeden dvojnásobný kořen, pak je osa x tečnou paraboly (má s ní jeden společný bod). Konečně v případě, že rovnice má dva imaginární komplexně sdružené kořeny, neprotíná osa x parabolu vůbec. Na obr. 4 vidíme např. graf funkce

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 9,$$

který protíná osu x ve dvou bodech $x_1 \doteq -1{,}4$ a $x_2 \doteq 2{,}1$. Čísla x_1, x_2 jsou pak přibližně kořeny rovnice

$$3x^2 - 2x - 9 = 0.$$

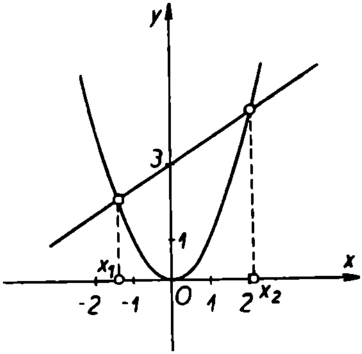
Je zřejmé, že tento způsob grafického řešení je pro kvadratickou rovnici velmi pracný a nevýhodný. Na druhé straně má tu výhodu, že pomocí grafu lze hledat reálné kořeny algebraických rovnic libovolného stupně i nealgebraických rovnic tvaru $f(x) = 0$, kde f je libovolná reálná funkce reálné proměnné x. Pro kvadratické rovnice používáme raději následujícího způsobu.

Napišme danou kvadratickou rovnici ve tvaru

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Víme, že grafem funkce $y = x^2$ je parabola a grafem lineární funkce $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ je přímka. Kořeny dané kvadratické rovnice jsou tedy x-ové souřadnice průsečíků grafů obou funkcí. Parabolu $y = x^2$ si můžeme jednou provždy sestrojit s velkou přesností na milimetrový papír, neboť se hodí při řešení každé kvadratické rovnice. Graf lineární funkce $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ sestrojíme v každém jednotlivém případě např. jako přímku určenou body $\left[0, -\frac{c}{a}\right]$ a $\left[1, -\frac{b+c}{a}\right]$ (přesvědčte se, že oba body jsou skutečně body grafu uvažované lineární funkce). Řečeno mluvou analytické geometrie je rovnice $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ rovnicí přímky o směrnici $-\frac{b}{a}$ a jejíž úsek na ose y je $-\frac{c}{a}$.

Je zřejmé, že metoda je zvláště výhodná, řešíme-li větší počet kvadratických rovnic, neboť pak měníme jen přímku, kdežto parabola zůstává. Přesnost nalezených kořenů závisí jako u všech grafických metod na možnostech grafického provedení. Hraje zde roli kvalita rýsovacích prostředků, měřítko obrázku, tloušťka čar apod. K tomu přistupuje v našem případě i ta okolnost, že nelze přesně nakreslit parabolu a že ji tedy jen přibližně prokládáme několika vypočtenými body této paraboly.



Obr. 5.

Příklad 21. Řešme výše uvedeným způsobem opět rovnici

$$3x^2 - 2x - 9 = 0.$$

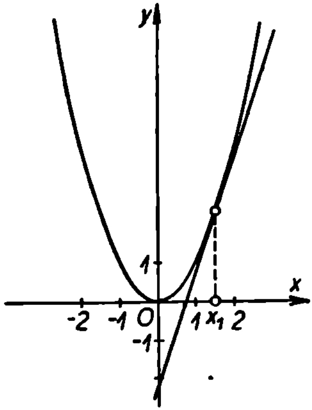
Rovnici přepíšeme na tvar

$$x^2 = \frac{2}{3}x + 3\,.$$

Na obr. 5 vidíme, že se grafy funkcí $y = x^2$ a $y = \frac{2}{3}x + 3$ protínají ve dvou bodech o x-ových souřadnicích $x_1 \doteq -1{,}4$, $x_2 \doteq 2{,}1$. Grafem funkce $y = \frac{2}{3}x + 3$ je přímka o směrnici $\frac{2}{3}$ a úseku na ose y rovném 3. Sestrojíme ji jako přímku procházející body $[0, 3]$ a $\left[1, \frac{11}{3}\right]$.

Příklad 22. Řešme kvadratickou rovnici

$$4x^2 - 12x + 9 = 0.$$



Obr. 6.

Sestrojme grafy funkcí $y = x^2$ a $y = 3x - \frac{9}{4}$. Grafem lineární funkce je přímka procházející body $\left[0, -\frac{9}{4}\right]$, $\left[1, \frac{3}{4}\right]$ — viz obr. 6. Tato přímka je tečnou paraboly $y = x^2$. Dotykový bod má souřadnici $x \doteq 1{,}5$. Daná rovnice má tedy dvojnásobný kořen $x_1 \doteq 1{,}5$.

Poznamenejme ještě, že při výše uvedeném způsobu grafického řešení můžeme dosáhnout již poměrně značné přesnosti, je-li graf paraboly nakreslen dostatečně přesně, neboť přímku, kterou kreslíme pro každou rovnici znovu, umíme narýsovat zcela přesně. Obdobného způsobu se proto užívá i u kubické rovnice, kde rovněž lze dosáhnout toho, že jednu křivku si můžeme pevně narýsovat a pohybovat jen s přímkou.

Mějme kubickou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Zaveďme novou neznámou z vztahem

$$x = z - \frac{a}{3}.$$

Dosazením do kubické rovnice dostaneme rovnici

$$\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0.$$

Úpravou této rovnice dostaneme kubickou rovnici tvaru

$$z^3 + Az + B = 0,$$

která již neobsahuje člen z^2 (přesvědčte se sami umocněním a sloučením!). Poslední rovnici lze napsat ve tvaru

$$z^3 = -Az - B,$$

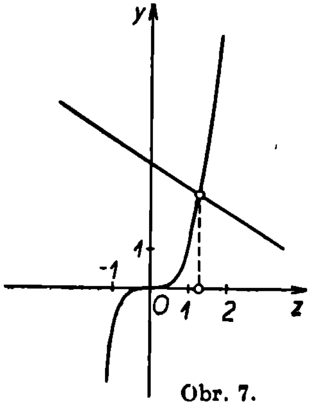
takže reálné kořeny této kubické rovnice nalezneme jako z-ové souřadnice průsečíků křivky $y = z^3$ a přímky $y = -Az - B$. Křivku $y = z^3$ (tzv. kubickou parabolu) si můžeme opět nakreslit jednou provždy s velkou přesností a měníme pak pouze přímku $y = -Az - B$. Pomocí vztahu $x = z - \frac{a}{3}$ pak dostaneme nazpět kořeny původní rovnice.

Příklad 23. Řešme graficky kubickou rovnici

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0.$$

Provedeme substituci $x = z + \frac{2}{3}$ (je $a = -2$). Dostaneme tak rovnici

$$\left(z + \frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(z + \frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(z + \frac{2}{3}\right) - 4 = 0.$$



Obr. 7.

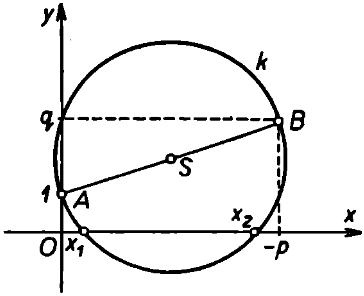
Úpravou dostaneme rovnici

$$z^3 = -\frac{2}{3}z + \frac{88}{27}.$$

Na obr. 7 vidíme, že kubická parabola $y = z^3$ a přímka $y = -\frac{2}{3}z + \frac{88}{27}$ mají jediný průsečík $z \doteq 1{,}3$. Ze substitučního vzorce $x = z + \frac{2}{3}$ dostaneme jediný reálný kořen původní rovnice

$$x \doteq 1{,}3 + \frac{2}{3} \doteq 2\,.$$

Na závěr ukažme elegantní grafické řešení kvadratické rovnice, které má proti předchozím oběma způsobům výhodu v tom, že je přesné, neboť kořeny dané kvadratické rovnice lze sestrojit euklidovským způsobem (tj. konstrukcí užívající pouze kružítka a pravítka).



Obr. 8.

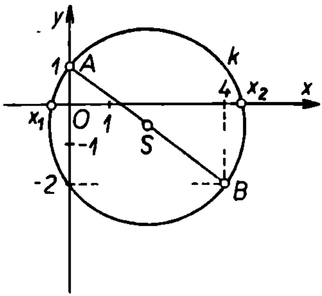
Mějme kvadratickou rovnici tvaru

$$x^2 + px + q = 0.$$

V rovině s kartézskými souřadnicemi sestrojme body $A \equiv [0, 1]$, $B \equiv [-p, q]$ (viz obr. 8). Sestrojme dále střed S úsečky AB a kružnici k a středu S procházející body A a B. Tato kružnice buď protne osu x ve dvou bodech x_1, x_2 (jako je tomu např. na obr. 8), nebo se osy x dotýká v bodě x_1, anebo konečně osa x kružnici k neprotíná. V prvém případě má daná kvadratická rovnice dva reálné různé kořeny x_1, x_2, v druhém případě má jeden dvojnásobný kořen a ve třetím případě nemá rovnice reálné kořeny vůbec.

K tomu, abychom se mohli přesvědčit o správnosti právě popsané konstrukce, nám stačí školní znalosti analytické geometrie. Protože je bod S středem úsečky AB, jsou jeho souřadnice rovny aritmetickému průměru souřadnic bodů A a B, tedy $S \equiv \left[-\frac{p}{2}, \frac{1+q}{2}\right]$. Poloměr r kružnice k je roven vzdálenosti bodů A, S, tedy

$$r = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$



Obr. 9.

Rovnice kružnice k je tedy

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1+q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

Průsečíky této kružnice s osou x jsou body, jejichž druhá souřadnice je rovna nule. Dosadíme-li tedy do rovnice kružnice k za y číslo 0, přejde tato rovnice po úpravě v rovnici

$$x^2 + px + q = 0.$$

To znamená, že čísla x_1, x_2 vyhovují této rovnici a jsou to tedy skutečně hledané kořeny.

Příklad 24. Řešme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 4x - 2 = 0.$$

V našem případě je $A \equiv [0, 1]$, $B \equiv [4, 2]$ (viz obr. 9). Kružnice k protíná osu x ve dvou bodech $x_1 \doteq -0{,}5$, $x_2 \doteq 4{,}5$.

Cvičení 38. Řešte graficky tyto kvadratické rovnice (užívejte střídavě různých způsobů):

a) $x^2 + x - 1 = 0$; d) $2x^2 + 7{,}2x + 7 = 0$;

b) $2x^2 + x - 2 = 0$; e) $x^2 + x = 0$;

c) $x^2 - 4x + 3 = 0$; f) $x^2 - 1 = 0$.

7. Goniometrické řešení kvadratické rovnice

Vzorce udávající kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty nejsou vhodné pro výpočet pomocí logaritmů. Tato nevýhoda je obzvláště zřejmá, jsou-li koeficienty rovnice mnohociferná čísla. V tomto případě můžeme použít tzv. goniometrického řešení kvadratické rovnice, které nám umožňuje vyjádřit kořeny ve tvaru vhodném pro výpočet pomocí logaritmických tabulek. Nevýhodou goniometrického řešení je však to, že lze použít jen v případě, kdy rovnice má reálné kořeny (to je případ, který často nastává zvláště při řešení praktických úloh, kdy lze očekávat, že existuje reálné řešení).

Každou kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty můžeme psát ve tvaru

$$x^2 \pm 2ax \pm b^2 = 0, \quad \text{kde } a > 0,\ b > 0, \tag{42}$$

(případ, kdy $a = 0$ nás nezajímá, neboť se pak jedná o ryze kvadratickou rovnici, jejíž řešení je snadné; poznamenejme dále, že zápis (42) chápeme jako zápis pro čtyři rovnice, které dostaneme pomocí všech kombinací znamének). Je-li totiž dána normovaná kvadratická rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \quad p \neq 0, \tag{43}$$

a položíme-li $\left|\frac{p}{2}\right| = a > 0$ a $\sqrt{|q|} = b > 0$, je $|p| = 2a$ a $|q| = b^2$. Je tedy $p = \pm 2a$ a $q = \pm b^2$. Dosazením do (43) dostáváme rovnici tvaru (42).

Všimněme si nyní podmínek pro to, aby rovnice (42) měla reálné kořeny. Platnost těchto podmínek je pak vždy třeba ověřit, dříve než přistoupíme k vlastnímu výpočtu kořenů.

Budeme rozeznávat dva případy:

I. Ve (42) je u b^2 znaménko minus. Potom je diskriminant rovnice (42)

$$D = 4a^2 + 4b^2 = 4(a^2 + b^2) > 0$$

bez ohledu na to, zda je u $2a$ znaménko plus nebo minus. Ostrá nerovnost pak platí v důsledku toho, že $a \neq 0$. V případě I tedy vždy existují dva reálné různé kořeny.

II. Ve (42) je u b^2 znaménko plus. Potom je diskriminant rovnice (42)

$$D = 4a^2 - 4b^2 = 4(a^2 - b^2).$$

Aby měla rovnice reálné různé kořeny, musí být $D > 0$, tj. $a^2 > b^2$. Protože je $a > 0$, $b > 0$, dostáváme podmínku

$$a > b.$$

Je-li $D = 0$, pak je $a = b$ a rovnice má jeden dvojnásobný kořen. Rovnice (42) je pak tvaru

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = 0$$

čili

$$(x \pm a)^2 = 0.$$

Dvojnásobný kořen je pak roven číslu a nebo $-a$ podle toho, je-li v rovnici (42) u $2a$ znaménko plus nebo minus.

Je tedy zřejmé, že stačí, budeme-li se zabývat jen případy, kdy rovnice (42) má právě dva reálné různé kořeny. Můžeme tedy učinit tento závěr: Rovnice (42) má dva reálné různé kořeny v případě I (tj. je-li u b^2 znaménko minus) vždy a v případě II (tj. je-li u b^2 znaménko plus) tehdy, je-li $a > b$.

Uveďme nyní postup goniometrického řešení v případech I a II. V obou případech budeme dále rozlišovat, zda u koeficientu $2a$ je znaménko plus nebo minus.

Ia. Rovnice (42) je tvaru

$$(44) \qquad x^2 - 2ax - b^2 = 0, \quad \text{kde} \quad a > 0,\ b > 0.$$

V tomto případě má rovnice dva různé reálné kořeny

$$(45) \qquad x_1 = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Položme

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 2\varphi,$$

kde $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$, neboť $\frac{b}{a} > 0$.

Nyní budeme postupně upravovat výrazy pro kořeny (45). Úpravy budeme dělat paralelně pro oba kořeny.

$$x_1 = a + a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \qquad x_2 = a - a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$x_1 = a + a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}, \qquad x_2 = a - a\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi},$$

$$x_1 = a + \frac{a}{\cos 2\varphi}, \qquad x_2 = a - \frac{a}{\cos 2\varphi},$$

$$x_1 = a\,\frac{\cos 2\varphi + 1}{\cos 2\varphi}, \qquad x_2 = a\,\frac{\cos 2\varphi - 1}{\cos 2\varphi},$$

$$x_1 = \frac{2a\cos^2\varphi}{\cos 2\varphi}, \qquad x_2 = -\,\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi},$$

$$x_1 = \frac{2a\cos^2\varphi\sin\varphi}{\cos 2\varphi\sin\varphi}, \qquad x_2 = -\,\frac{2a\sin^2\varphi\cos\varphi}{\cos 2\varphi\cos\varphi},$$

$$x_1 = \frac{a\sin 2\varphi\cos\varphi}{\cos 2\varphi\sin\varphi}, \qquad x_2 = -\,\frac{a\sin 2\varphi\sin\varphi}{\cos 2\varphi\cos\varphi},$$

$$x_1 = a\operatorname{tg} 2\varphi\operatorname{cotg}\varphi, \qquad x_2 = -\,a\operatorname{tg} 2\varphi\operatorname{tg}\varphi,$$

$$x_1 = b\operatorname{cotg}\varphi. \qquad x_2 = -\,b\operatorname{tg}\varphi.$$

Tím se nám podařilo vyjádřit kořeny (45) ve tvaru

(46) $$x_1 = b\operatorname{cotg}\varphi, \quad x_2 = -b\operatorname{tg}\varphi,$$

který je již vhodný pro výpočet pomocí logaritmů.

Ib. Rovnice (42) je tvaru

(47) $$x^2 + 2ax - b^2 = 0, \quad \text{kde} \quad a > 0,\ b > 0.$$

Také v tomto případě má rovnice dva reálné různé kořeny

(48) $$x_1 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x_2 = -a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nyní platí

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} = -(a - \sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$x_2 = -a - \sqrt{a^2 + b^2} = -(a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Kořeny x_1, x_2 jsou až na znaménko rovny kořenům v případě Ia. Je tedy

(49) $$x_1 = b \operatorname{tg} \varphi, \quad x_2 = -b \operatorname{cotg} \varphi,$$

kde φ je voleno tak, že $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 2\varphi$, $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$.

IIa. Rovnice (42) je tvaru

(50) $$x^2 - 2ax + b^2 = 0, \quad \text{kde} \quad a > 0, b > 0.$$

Aby měla tato rovnice dva reálné, různé kořeny, musí být $a > b$, tj. $0 < \frac{b}{a} < 1$. Potom jsou kořeny dány vzorci

(51) $$x_1 = a + \sqrt{a^2 - b^2}, \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Položme

$$\frac{b}{a} = \sin 2\varphi,$$

kde $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{takový úhel } 2\varphi \text{ existuje, neboť je } 0 < \frac{b}{a} < 1\right)$. Pro kořeny (51) proveďme tyto paralelní úpravy:

$$x_1 = a + a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad x_2 = a - a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$x_1 = a + a\sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}, \qquad x_2 = a - a\sqrt{1 - \sin^2\varphi},$$

$$x_1 = a + a\cos 2\varphi, \qquad x_2 = a - a\cos 2\varphi,$$

$$x_1 = 2a\cos^2\varphi, \qquad x_2 = 2a\sin^2\varphi,$$

$$x_1 = \frac{2a\cos^2\varphi\sin\varphi}{\sin\varphi}, \qquad x_2 = \frac{2a\sin^2\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi},$$

$$x_1 = \frac{a\sin 2\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}, \qquad x_2 = \frac{a\sin 2\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$x_1 = a\sin 2\varphi\operatorname{cotg}\varphi, \qquad x_2 = a\sin 2\varphi\operatorname{tg}\varphi,$$

$$x_1 = b\operatorname{cotg}\varphi. \qquad x_2 = b\operatorname{tg}\varphi.$$

Tím jsme vyjádřili kořeny (51) ve tvaru

(52) $$x_1 = b\operatorname{cotg}\varphi, \quad x_2 = b\operatorname{tg}\varphi,$$

který je vhodný k logaritmování.

IIb. Rovnice (42) je tvaru

(53) $$x^2 + 2ax + b^2 = 0, \quad \text{kde} \quad a > 0, b > 0.$$

Aby měla tato rovnice dva reálné různé kořeny, musí být opět splněna podmínka $a > b$. Kořeny rovnice (53) jsou pak tvaru

(54) $$\begin{aligned} x_1 &= -a + \sqrt{a^2 - b^2} = -(a - \sqrt{a^2 - b^2}),\\ x_2 &= -a - \sqrt{a^2 - b^2} = -(a + \sqrt{a^2 - b^2}). \end{aligned}$$

Jsou tedy až na znaménko rovny kořenům rovnice (50), takže je

(55) $$x_1 = -b\operatorname{tg}\varphi, \quad x_2 = -b\operatorname{cotg}\varphi,$$

kde $0 < 2\varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{b}{a} = \sin 2\varphi$.

Příklad 25. Řešme goniometricky rovnici
$$x^2 - 6{,}642x + 10{,}017 = 0.$$
Převeďme ji nejprve na tvar (42). Zřejmě je
$$a = \left|\frac{-6{,}642}{2}\right| = 3{,}321, \quad b = \sqrt{10{,}017}.$$
Rovnice je tvaru (50) a protože je $a > b$ (jest $3{,}321 > \sqrt{10{,}017}$), nastává případ IIa. Určíme tedy úhel φ takový, že
$$\sin 2\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{10{,}017}}{3{,}321} \quad \text{a} \quad 0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}.$$
Je tedy $\varphi = 36°11'$. Podle vzorců (52) je pak
$$x_1 = \sqrt{10{,}017}\,\mathrm{cotg}\, 36°11' \doteq 4{,}327,$$
$$x_2 = \sqrt{10{,}017}\,\mathrm{tg}\, 36°11' \doteq 2{,}315.$$
Naše rovnice má tedy dva reálné kořeny $x_1 \doteq 4{,}327$ a $x_2 \doteq 2{,}315$.

Cvičení 39. Řešte goniometricky tyto kvadratické rovnice:

a) $x^2 - 2{,}379x + 1{,}38785 = 0;$
b) $x^2 - 1{,}121x + 0{,}15575 = 0;$
c) $x^2 + x + 0{,}2211 = 0;$
d) $x^2 + 0{,}39672x - 0{,}05164 = 0.$

8. Odmocniny komplexních čísel s celými kladnými odmocniteli

V odstavci 2 této kapitoly jsme zavedli druhou odmocninu komplexního čísla $x \neq 0$ jako komplexní číslo y, které umocněno na druhou dá dané číslo x, tj. $y^2 = x$.

Viděli jsme také, že taková čísla y existují ke každému číslu $x \neq 0$ právě dvě (jsou vzájemně opačná). Zvláštní význam mají druhé odmocniny z čísla 1, tj. čísla 1 a —1.

Podobným způsobem lze definovat k danému komplexnímu číslu x i n-tou odmocninu pro $n > 2$; n je přirozené číslo.

Řekneme, že *číslo y je n-tou odmocninou komplexního čísla $x \neq 0$, platí-li*

$$y^n = x.$$

Lze dokázat tuto větu:

Věta 8. *K danému komplexnímu číslu $x \neq 0$ existuje právě n různých čísel $y_1, \ldots, y_n$ takových, že $y_1^n = y_2^n = \ldots = y_n^n = x$ (tj. n různých n-tých odmocnin).*

Důkaz této věty provedeme později. Ukážeme nejprve některé příklady. Tak např. existují tři třetí odmocniny čísla 1. Jsou to čísla

$$1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

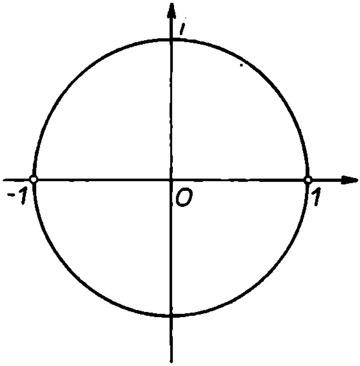
(přesvědčte se sami umocněním těchto čísel na třetí!).

Podobně se můžeme přesvědčit, že čtvrtými odmocninami čísla 1 jsou čísla

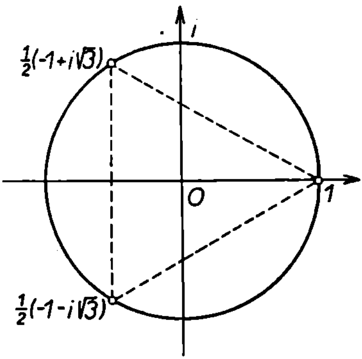
$$1, -1, i, -i.$$

Jejich umocněním na čtvrtou dostáváme vždy číslo 1.

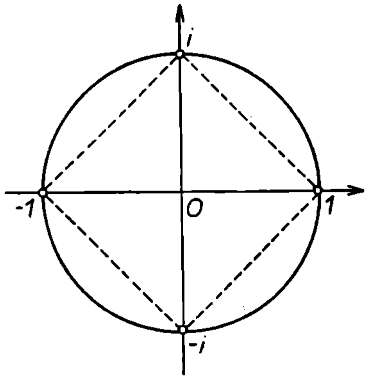
Podívejme se nyní na polohu těchto n-tých odmocnin z čísla 1 v Gaussově rovině. Na obr. 10 jsou zakresleny obě druhé odmocniny, na obr. 11 jsou všechny třetí odmocniny a na obr. 12 jsou čtvrté odmocniny z čísla 1. Ihned vidíme, že obrazy odmocnin leží vesměs na jednotkové kružnici. Obrazy druhých odmocnin jsou přitom souměrně sdruženy podle počátku, obrazy třetích odmocnin tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka a obrazy čtvrtých odmocnin tvoří vrcholy čtverce. Jsou tedy obrazy těchto odmocnin na jednotkové kružnici rozmístěny pravidelně. A skutečně lze dokázat, že n-té



Obr. 10.



Obr. 11.



Obr. 12.

odmocniny z čísla 1 leží na jednotkové kružnici a tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka o středu v počátku, přičemž jedním vrcholem je číslo 1.

Toto tvrzení plyne ihned z následující obecné věty, která stanoví hodnoty n-tých odmocnin z libovolného komplexního čísla $x \neq 0$.

Věta 9. *Dané komplexní číslo $x \neq 0$ vyjádřeme v goniometrickém tvaru*

$$x = r(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi).$$

Hodnoty jeho n-tých odmocnin jsou pak dány těmito vzorci:

$$(56)\quad \begin{cases} y_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos \dfrac{\varphi}{n} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\varphi}{n}\right), \\ y_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos \dfrac{\varphi + 2\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\varphi + 2\pi}{n}\right), \\ y_3 = \sqrt[n]{r}\left(\cos \dfrac{\varphi + 4\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\varphi + 4\pi}{n}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos \dfrac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right). \end{cases}$$

Důkaz věty 9 je snadný. Plyne ihned ze známého *Moivreova vzorce**) pro n-tou mocninu komplexního

*) *Moivreův vzorec* zní takto: Je-li $x = r(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$, pak

$$x^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi),$$

kde n je libovolné přirozené číslo.

čísla, umocníme-li čísla $y_1, \ldots, y_n$ daná vzorci (56) na n-tou. Vezměme totiž číslo

$$y_i = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(i-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2(i-1)\pi}{n}\right),$$

kde $i = 1, \ldots, n$. Podle Moivreova vzorce nyní platí

$$y_i^n = r[\cos(\varphi + 2(i-1)\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + 2(i-1)\pi)] =$$
$$= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = x,$$

a to jsme měli dokázat.

Je-li speciálně $x = 1$, je jeho goniometrické vyjádření

$$x = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 \quad (\text{je } r = |1| = 1).$$

Pro $n = 2$ dávají vzorce (56) dvě různé hodnoty y_1, y_2 pro druhé odmocniny čísla 1:

$$y_1 = \cos\frac{0}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{0}{2} = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1,$$

$$y_2 = \cos\frac{0+2\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{0+2\pi}{2} =$$
$$= \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1.$$

Pro $n = 3$ dostáváme pro třetí odmocniny čísla 1 hodnoty

$$y_1 = \cos\frac{0}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{0}{3} = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1,$$

$$y_2 = \cos\frac{0+2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{0+2\pi}{3} =$$
$$= \cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y_3 = \cos \frac{0 + 4\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{0 + 4\pi}{3} =$$

$$= \cos \frac{4}{3} \pi + \mathrm{i} \sin \frac{4}{3} \pi = -\frac{1}{2} - \mathrm{i} \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Konečně pro $n = 4$ vycházejí tyto čtvrté odmocniny z čísla 1:

$$y_1 = \cos \frac{0}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{0}{4} = \cos 0 + \mathrm{i} \sin 0 = 1,$$

$$y_2 = \cos \frac{0 + 2\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{0 + 2\pi}{4} =$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{2} = \mathrm{i} ,$$

$$y_3 = \cos \frac{0 + 4\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{0 + 4\pi}{4} =$$

$$= \cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi = -1 ,$$

$$y_4 = \cos \frac{0 + 6\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{0 + 6\pi}{4} =$$

$$= \cos \frac{3}{2} \pi + \mathrm{i} \sin \frac{3}{2} \pi = -\mathrm{i} .$$

Tyto hodnoty jsou v souhlasu s hodnotami pro odmocniny čísla 1 uvedenými výše.

Podobně pro n-té odmocniny čísla 1 vycházejí podle (56) tyto hodnoty:

$$y_1 = \cos 0 + \mathrm{i} \sin 0 = 1,$$

$$y_2 = \cos \frac{2\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{n} ,$$

$$y_3 = \cos\frac{4\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_n = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Čísla $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mají vesměs absolutní hodnoty rovny jedné a leží proto na jednotkové kružnici. Je dále vidět, že amplituda každého následujícího čísla y_i je o $\frac{2\pi}{n}$ větší než amplituda předcházejícího, přičemž $\frac{2\pi}{n}$ je středový úhel v pravidelném n-úhelníku odpovídající jeho straně. Je tedy skutečně platné výše uvedené tvrzení, že n-té odmocniny z čísla 1 leží na jednotkové kružnici a tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka s jedním vrcholem v bodě 1 (je to vrchol y_1).

Ze vzorců (56) plyne dále, že tato pravidelnost rozložení n-tých odmocnin v Gaussově rovině není jen vlastností n-tých odmocnin čísla 1. Stejnou úvahou jako v předchozím odstavci zjistíme ze vzorců (56), že všechny n-té odmocniny libovolného čísla $x \neq 0$ o absolutní hodnotě r a amplitudě φ leží na kružnici o poloměru $\sqrt[n]{r}$ (neboť toto číslo je absolutní hodnotou čísel $y_1, \ldots, y_n$ ve vzorcích (56)) a tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem v počátku (zde je opět amplituda každého čísla y_i větší o pevné číslo $\frac{2\pi}{n}$ než amplituda čísla y_{i-1}).

Vzorce (56) ve větě 9 nám udávají n různých komplexních odmocnin $y_1, \ldots, y_n$ ke každému komplexnímu číslu $x \neq 0$. Z věty 9 však neplyne, že čísla $y_1, \ldots, y_n$

představují již všechny odmocniny čísla x. Plyne to však ihned z věty 8, jejíž důkaz nyní provedeme.

Podle definice jsou n-té odmocniny čísla $x \neq 0$ kořeny rovnice $y^n = x$, tj. rovnice

$$y^n - x = 0.$$

To je algebraická rovnice n-tého stupně a má tedy podle věty 4 nejvýše n různých kořenů. Čísla $y_1, \ldots, y_n$ daná vzorci (56) jsou tedy všechny kořeny této rovnice, čímž je věta 8 dokázána.

Cvičení 40. Dokažte, že absolutní hodnota čísla

$$y_i = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2(i-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2(i-1)\pi}{n}\right),$$

$i = 1, \ldots, n$, je rovna číslu $\sqrt[n]{r}$.

Příklad 26. Nalezněme všechny šesté odmocniny čísla i.

Číslo i vyjádříme v goniometrickém tvaru

$$\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}.$$

Ze vzorců (56) dostáváme pro šesté odmocniny čísla

$$y_1 = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12} = \cos 15° + \mathrm{i}\sin 15°,$$

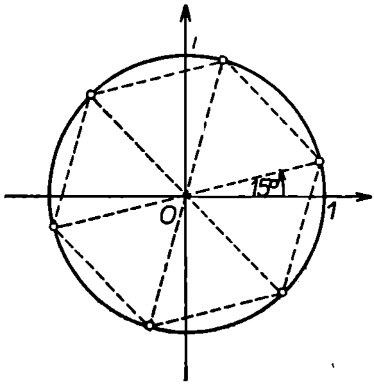
$$y_2 = \cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12} = \cos 75° + \mathrm{i}\sin 75°,$$

$$y_3 = \cos\frac{9\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{12} = \cos 135° + \mathrm{i}\sin 135°,$$

$$y_4 = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12} = \cos 195° + i\sin 195°,$$

$$y_5 = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12} = \cos 255° + i\sin 255°,$$

$$y_6 = \cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12} = \cos 315° + i\sin 315°.$$



Obr. 13.

Obrazy čísel y_1, y_2, ..., y_6 vidíme na obr. 13. Tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníka.

Cvičení 41. Nalezněte všechny hodnoty 5-tých odmocnin čísla 1 a nakreslete jejich obrazy v Gaussově rovině.

Na závěr poznamenejme, že zatímco výpočet n-tých odmocnin komplexního čísla umíme provést jen pomocí goniometrického vyjádření, máme u druhých odmocnin na vybranou i algebraický vzorec (28).

9. Kubické rovnice a rovnice čtvrtého stupně

Pro kořeny kvadratické rovnice s komplexními koeficienty jsme odvodili vzorec (38), který vyjadřuje její kořeny x_1, x_2 pomocí algebraického výrazu sestaveného z koeficientů rovnice a z druhých odmocnin racionálních výrazů sestavených z koeficientů rovnice. Podobné vzorce obsahující ovšem i třetí odmocniny je možno odvodit pro rovnici kubickou a pro rovnici čtvrtého stupně, zatímco pro kořeny rovnic pátého a vyššího stupně neexistují vůbec žádné takové algebraické vzorce. To je velmi zajímavá vlastnost algebraických rovnic stupně vyššího než 4.

Otázkou neřešitelnosti algebraických rovnic stupně vyššího než 4 pomocí odmocnin se zabývala řada vynikajících matematiků jako např. Ruffini, Cauchy, Abel, Galois. Jejich úsilí vedlo nejen k rozřešení této otázky, ale také k vytvoření teorie grup, která se dnes velmi usilovně studuje v algebře. To ovšem neznamená, že rovnice stupně vyššího než 4 by byly neřešitelné. To by byl velice chybný závěr. Matematika zná dnes velice mnoho různých způsobů, jak kořeny takovýchto rovnic vypočítat. Charakteristické pro tyto metody je však to, že nedávají obecné vzorce pro kořeny dané rovnice a umožňují po jistém konečném počtu aritmetických operací získat přibližné hodnoty kořenů s předem danou přesností. O některých z těchto přibližných metod si něco povíme v kapitole 3.

Jak již bylo řečeno, existují pro kubické rovnice a pro rovnice čtvrtého stupně vzorce udávající kořeny pomocí algebraických výrazů obsahujících koeficienty rovnice a odmocniny. Tyto vzorce jsou však tak složité (zejména u rovnice čtvrtého stupně), že nemají téměř žádný praktický význam. I tyto rovnice se proto vyplatí řešit pomocí přibližných metod. Přesto ukažme pro zajímavost, jak vypadají tyto vzorce pro kubickou rovnici.

Buď dána rovnice tvaru

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{57}$$

Podobně jako v odstavci 5 této kapitoly zavedeme novou neznámou y pomocí substituce

$$x = y - \frac{a}{3}. \tag{58}$$

Tím dostaneme kubickou rovnici tvaru

$$y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0, \tag{59}$$

ve které již chybí člen s y^2. Tuto rovnici napišme ve tvaru

$$y^3 + py + q = 0, \tag{60}$$

kde $p = -\frac{a^2}{3} + b$, $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

Kořeny rovnice (60) lze nyní vyjádřit pomocí tzv. *Cardanova vzorce*

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{61}$$

Tento vzorec obsahuje druhé a třetí odmocniny komplexních čísel, jejichž výpočet je obtížný. Přitom nelze hodnoty třetích odmocnin libovolně kombinovat. Lze dokázat, že je možno v prvém sčítanci zvolit kteroukoliv že tří hodnot třetí odmocniny, avšak ve druhém sčítanci je pak nutno vzít tu hodnotu odmocniny, aby součin obou odmocnin byl roven číslu $-\frac{p}{3}$. Přípustnými kombinacemi různých třetích odmocnin pak dostáváme kořeny rovnice (60). Kořeny rovnice (57) pak dostaneme z kořenů rovnice (60) pomocí vzorce (58).

Ze vzorce (61) je vidět, že velmi záleží na čísle

$$D = -\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right),$$

které nazýváme *diskriminantem* rovnice (57). V případě, kdy je $D > 0$, je výraz pod druhou odmocninou záporný a jsme nuceni počítat i v případě rovnice s reálnými koeficienty třetí odmocniny komplexních čísel, což je úloha obtížná a zdlouhavá. V tomto případě je praktický význam vzorce (61) velmi malý.

Zde je velmi zajímavá tato skutečnost: lze dokázat, že v případě, kdy $D > 0$, má kubická rovnice tři vzájemně různé reálné kořeny, ačkoliv právě v tomto případě je výraz pod druhou odmocninou záporný, takže reálné kořeny dostáváme oklikou přes odmocniny z komplexních čísel. To je proslulý tzv. „*casus ireducibilis*" kubické rovnice.

Příklad 27. Kubická rovnice

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

má tři reálné různé kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Položme

$$x = y + \frac{2}{3}.$$

Dostaneme tak rovnici

$$y^3 - \frac{19}{3} y + \frac{56}{27} = 0 .$$

Je tedy $p = -\frac{19}{3}$ a $q = \frac{56}{27}$, takže je

$$D = -\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -\left[\left(\frac{56}{27}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{19}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{27}\right] \doteq 8 ,$$

tj. $D > 0$ a nastává tzv. casus ireducibilis.

Vzorce pro kořeny rovnice čtvrtého stupně nebudeme uvádět, neboť jsou ještě mnohem složitější.

Cvičení 42. Řešte pomocí Cardanova vzorce rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0.$$

10. Binomické rovnice

Důležitým typem algebraických rovnic n-tého stupně, které již vlastně umíme obecně řešit, jsou tzv. *binomické rovnice*, tj. rovnice typu

$$x^n + a = 0, \tag{62}$$

kde a je dané komplexní číslo.

Přepíšeme-li rovnici (62) na tvar

$$x^n = -a, \tag{63}$$

vidíme, že jejími kořeny jsou ta čísla x, která umocněna na n-tou dají číslo $-a$. Tato čísla již známe: jsou to právě všechny n-té odmocniny z čísla $-a$. Binomická rovnice má tedy n různých kořenů. Kořeny každé binomické rovnice pak můžeme snadno spočítat pomocí vzorců (58).

Příklad 28. Řešme binomickou rovnici

$$x^6 - i = 0.$$

Je tedy $x^6 = i$, čili kořeny jsou právě všechny šesté odmocniny z čísla i. Ty jsme však již spočítali v příkladu 26.

Je samozřejmé, že se při řešení binomické rovnice snažíme vyhnout goniometrickému vyjádření komplexních čísel. V případě reálného a lze v dané rovnici (62) zavést novou neznámou y susbtitucí

$$x = \sqrt[n]{|a|}\, y \,. \tag{64}$$

Je-li $a > 0$, dostaneme novou rovnici

$$ay^n + a = 0,$$

tj.

$$y^n + 1 = 0. \tag{65}$$

Kořeny rovnice (65) jsou n-té odmocniny čísla $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ a lze je snadno napsat pomocí vzorce (64).

Pro $n = 3$ můžeme řešit rovnici (65) i jiným způsobem. Lze ji totiž napsat ve tvaru

$$(y + 1)(y^2 - y + 1) = 0,$$

odkud je patrno, že jedním kořenem je číslo $y_1 = -1$ a druhé dva jsou kořeny kvadratické rovnice

$$y^2 - y + 1 = 0,$$

tj. čísla $y_1 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Příklad 29. Řešme rovnici

$$x^3 + 27 = 0.$$

Protože je $a = 27 > 0$, dostaneme substitucí $x = \sqrt[3]{27}y$ rovnici

$$27y^3 + 27 = 0,$$

tj. rovnici

$$y^3 + 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou — jak již víme —

$$y_1 = -1,\ y_2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y_3 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kořeny dané rovnice jsou tedy tyto:

$$x_1 = \sqrt[3]{27}y_1 = 3.(-1) = -3,$$

$$x_2 = \sqrt[3]{27}y_2 = 3\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \mathrm{i}\,\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = \sqrt[3]{27}y_3 = 3\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \mathrm{i}\,\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Probereme nyní druhý případ, kdy je $a < 0$. V tom případě plyne ze (64) vztah $x = \sqrt[n]{-a}y$ čili $x^n = -ay^n$. Dosazením do rovnice (62) dostaneme rovnici

$$-ay^n + a = 0$$

čili rovnici

$$y^n - 1 = 0. \tag{66}$$

Kořeny rovnice (66) jsou známé n-té odmocniny z čísla 1, které jsou uvedeny na str. 71 a lze je ihned obdržet ze vzorců (56).

Je-li n sudé, je možno rovnici (66) napsat ve tvaru

$$(y^{\frac{n}{2}} - 1)\,(y^{\frac{n}{2}} + 1) = 0$$

a řešit dvě binomické rovnice polovičního stupně

$$y^{\frac{n}{2}} - 1 = 0\,,$$
$$y^{\frac{n}{2}} + 1 = 0\,.$$

Pro $n = 3$ je možno rovnici (66) napsat ve tvaru

$$(y - 1)\,(y^2 + y + 1) = 0,$$

odkud je vidět, že jedním kořenem je číslo $y_1 = 1$ a druhé dva kořeny jsou kořeny kvadratické rovnice

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

tj. $y_2 = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y_3 = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Příklad 30. Řešme rovnici

$$x^4 - 16 = 0.$$

Zde je $a < 0$. Položíme-li $x = \sqrt[4]{16}y$, dostaneme rovnici

$$16y^4 - 16 = 0$$

čili rovnici

$$y^4 - 1 = 0.$$

Tato rovnice je sudého stupně, takže ji lze psát ve tvaru

$$(y^2 - 1)\,(y^2 + 1) = 0$$

čili ve tvaru

$$(y - 1)\,(y + 1)\,(y^2 + 1) = 0.$$

Jejími kořeny jsou tedy čísla

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1$$

a kořeny rovnice

$$y^2 + 1 = 0,$$

tj. čísla $y_3 = \mathrm{i}$ a $y_4 = -\mathrm{i}$. Pro kořeny dané rovnice pak dostáváme hodnoty

$$x_1 = \sqrt[4]{16}\, y_1 = 2.1 = 2,$$
$$x_2 = \sqrt[4]{16}\, y_2 = 2.(-1) = -2,$$
$$x_3 = \sqrt[4]{16}\, y_3 = 2.\mathrm{i} = 2\mathrm{i},$$
$$x_4 = \sqrt[4]{16}\, y_4 = 2.(-\mathrm{i}) = -2\mathrm{i}.$$

Cvičení 43. Řešte tyto rovnice:

a) $2(x^3 + 1) = 3(x^3 - 2)$;
b) $a^3x^3 + b^3 = 0$ (proveďte diskusi);
c) $216x^3 + 1 = 0$;
d) $729x^3 = 512$;
e) $27x^4 + 1000x = 0$;
f) $x^3 + 0{,}001331 = 0$;
g) $(x + 2)^3 + (x - 2)^3 = 8(3x - 128)$;
h) $x^4 - 256 = 0$;
i) $16x^4 + 81 = 0$;
j) $8x^4 - 14x^2 = 7(x^2 - 1)^2 + 9$;
k) $(3x - 4)^4 = 625$ (návod: položte $3x - 4 = z$);
l) $20x^2 + \dfrac{97}{x^2} + 16 = \dfrac{4(x^2 + 2)^2}{x^2}$.

44. Poměr kvádru o čtvercové podstavě k jeho výšce je 3 : 7. Jaké jsou rozměry kvádru, je-li jeho objem 4032 cm³?

45. Prodloužením jedné strany krychle na pětinásobek vznikl pravidelný čtyřboký hranol s pětinásobnou výškou, přičemž se objem tělesa zvětšil o 216 cm^3. Jak veliká byla hrana krychle?

46. Součet objemů dvou krychlí, jejichž hrany jsou navzájem v poměru 7 : 9, je 8576 cm^3. Jak veliké jsou jejich hrany?

47. Rohy krychle o hraně a jsou seříznuty rovinami, které na každé hraně utínají tytéž úseky. Jak velký je tento úsek, je-li objem tělesa tak vzniklého pěti šestinami objemu krychle?

11. Trinomické rovnice

Ukážeme nyní jeden typ rovnic vyššího stupně, které lze snadno převést na rovnici kvadratickou a dvě rovnice binomické. Jsou to tzv. *rovnice trinomické* (trinom = trojčlen) typu

(67) $$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

kde $a \neq 0$ a $n \geqq 2$ je přirozené číslo. Trinomické rovnici stupně 4 se někdy říká *rovnice bikvadratická.*

Probereme nejprve nejjednodušší případ, kdy $c = 0$. Potom je rovnice (67) tvaru

$$ax^{2n} + bx^n = 0$$

čili

$$x^n(ax^n + b) = 0.$$

Odtud je patrno, že rovnice má n-násobný kořen $x = 0$ a ostatní n kořeny dostaneme jako kořeny binomické rovnice

$$ax^n + b = 0.$$

Předpokládejme nyní, že $c \neq 0$ a zaveďme novou neznámou y vztahem

$$x^n = y. \tag{68}$$

Potom je $x^{2n} = y^2$, takže rovnice (67) přejde v rovnici

$$ay^2 + by + c = 0, \tag{69}$$

což je kvadratická rovnice s kořeny y_1, y_2.

Je-li y_1, y_2, pak plyne ze vztahu (68), že kořeny původní rovnice jsou kořeny dvou binomických rovnic $x^n = y_1$, $x^n = y_2$, tj. rovnic

$$\begin{cases} x^n - y_1 = 0\,, \\ x^n - y_2 = 0\,. \end{cases} \tag{70}$$

Protože je $c \neq 0$, nemůže být žádný z kořenů y_1, y_2 rovnice (69) roven nule, takže každá z rovnic (70) má n různých kořenů. Celkem dostáváme $2n$ kořenů původní rovnice (67).

Je-li $y_1 = y_2$, pak ze vztahu (68) plyne jediná rovnice

$$x^n - y_1 = 0. \tag{71}$$

Protože je $c \neq 0$, je $y_1 \neq 0$ a binomická rovnice (71) má n různých kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Lze ji tedy psát podle věty 3 první kapitoly ve tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0. \tag{72}$$

Protože má rovnice (69) jeden dvojnásobný kořen y_1, lze ji obdobně psát ve tvaru

$$a(y - y_1)^2 = 0$$

čili vzhledem k (68) ve tvaru

$$a(x^n - y_1) = 0. \tag{73}$$

Vzhledem k (71) a (72) lze napsat rovnici (73) ve tvaru

$$a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2 = 0,$$

odkud je zřejmo, že v případě $y_1 = y_2$ jsou kořeny binomické rovnice (71) dvojnásobnými kořeny původní rovnice (67).

Příklad 31. Řešme rovnici

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Substitucí $x^2 = y$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

o kořenech $y_1 = 9$, $y_2 = 1$. Kořeny dané rovnice jsou pak kořeny binomické rovnice

$$x^2 - 9 = 0,$$

tj. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ a binomické rovnice

$$x^2 - 1 = 0,$$

tj. $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. Daná rovnice má tedy čtyři různé reálné kořeny $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Příklad 32. Řešme rovnici

$$x^6 + 19x^3 - 216 = 0.$$

Položíme-li $x^3 = y$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 + 19y - 216 = 0$$

o kořenech $y_1 = 8$, $y_2 = -27$.

Řešme nejprve binomickou rovnici

$$x^3 - 8 = 0.$$

Provedením substituce $x = \sqrt[3]{8}\, z$ dostaneme rovnici

$$8z^3 - 8 = 0$$

čili rovnici

$$z^3 - 1 = 0.$$

Ta má, jak již víme z odstavce 9, za kořeny čísla

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rovnice $x^3 - 8 = 0$ má pak kořeny

$$x_1 = \sqrt[3]{8}\, z_1 = 2,$$
$$x_2 = \sqrt[3]{8}\, z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3},$$
$$x_3 = \sqrt[3]{8}\, z_3 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Nyní řešme druhou binomickou rovnici

$$x^3 + 27 = 0.$$

Ta již byla řešena v příkladu 29 a má kořeny

$$x_4 = -3, \quad x_5 = \frac{3}{2} + \mathrm{i}\,\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad x_6 = \frac{3}{2} - \mathrm{i}\,\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_6$ jsou pak kořeny dané trinomické rovnice.

Příklad 33. Řešme rovnici

$$2x^8 - 64x + 512 = 0.$$

Danou rovnici lze dělit číslem dvě. Substitucí $x^4 = y$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 - 32y + 216 = 0,$$

která má jeden dvojnásobný kořen $y_1 = 16$. Dostáváme tak binomickou rovnici

$$x^4 - 16 = 0,$$

jež byla řešena v příkladu 30. Má čtyři kořeny

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2i, \quad x_4 = -2i,$$

jež jsou vesměs dvojnásobnými kořeny dané rovnice.

Cvičení 48. Řešte tyto trinomické rovnice:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
b) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$;
c) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$;
d) $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$;
e) $x^8 - 620x^4 - 3125 = 0$;
f) $x^8 - 272x^4 + 4096 = 0$;
g) $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 - b^4 = 0$ (proveďte diskusi!);
h) $x^4 - (m^2 + n^2)x^2 + m^2n^2 = 0$ (proveďte diskusi!).

49. Řešte tyto rovnice:

a) $4x^4 - x^2 = 18$;
b) $x^2(x^2 - 44) = 12(12 - x^2)$;
c) $(x^2 - 10)^2 - 20(x^2 - 10) - 741 = 0$;
d) $(9x^4 + 82x^2 + 9)(x^2 - 1) = 0$;
e) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x - 5) = 40(5 + x)$;
f) $x^6 - 75x^3 = 25(125 + x^3)$;
g) $200(x^3 - 1) + 16x^3(x^3 + 1) - 264 = 101x^3$;
h) $x^3(x^3 - 10) = 6(16 - x^3)$;
i) $x \cdot (81x^4 - 276) = 64(x^4 - 1)$.

50. Řešte rovnice

a) $100x^{-4} + 21x^{-2} - 1 = 0$;
b) $x^3 - \dfrac{215}{x^3} = \dfrac{1}{x^3} - 215$.

51. Vypočtěte délku odvěsen pravoúhlého trojúhelníka, je-li jeho obsah 270 cm^2 a přepona 39 cm.

52. Obsah obdélníka je 6 dm^2. Krychle o hraně rovné jeho delší straně má objem o 19 cm^3 větší, než krychle o hraně rovné jeho kratší straně. Určete délku stran obdélníka.

53. Úhlopříčky bočních stěn kvádru mají délky 10 cm a 24 cm. Poměr součtu délek obou stran obdélníka podstavy k prvé úhlopříčce je roven poměru druhé úhlopříčky k výšce kvádru. Určete rozměry kvádru.

Podobnou metodou jako trinomické rovnice lze řešit i rovnice tvaru

$$\sqrt[n]{x} + a\sqrt[2n]{x} + b = 0. \tag{74}$$

Zde je třeba pro potíže s mnohoznačností komplexní odmocniny se omezit jen na reálný obor. Levá strana rovnice (74) má pak smysl pro $x \geqq 0$, takže hledáme jen nezáporné kořeny. V rovnici (74) provedeme substituci

$$y = \sqrt[2n]{x}. \tag{75}$$

Potom je $y^2 = \sqrt[n]{x}$ a rovnice (74) pak nabude tvaru

$$y^2 + ay + b = 0. \tag{76}$$

Jsou-li kořeny y_1, y_2 kvadratické rovnice (76) nezáporné, dostaneme kořeny rovnice (74) pomocí (75), tj. jako kořeny iracionálních rovnic

$$\sqrt[2n]{x} = y_1, \quad \sqrt[2n]{x} = y_2. \tag{77}$$

Příklad 34. Řešme rovnici

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12.$$

Předpokládáme-li, že je $x \geqq 0$, dostaneme pomocí substituce $y = \sqrt[4]{x}$ kvadratickou rovnici

$$y^2 + y - 12 = 0$$

s kořeny $y_1 = 3$, $y_2' = -4$. Řešíme tedy iracionální rovnice

$$\sqrt[4]{x} = 3,$$

$$\sqrt[4]{x} = -4.$$

Prvá rovnice má reálný kladný kořen $x = 3^4 = 81$, který je kořenem dané rovnice (proveďte zkoušku!). Druhá iracionální rovnice nemá žádný reálný kořen, neboť čtvrtá odmocnina kladného čísla v reálném oboru je podobně jako druhá odmocnina číslo kladné.

Cvičení 54. Řešte rovnice

a) $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54$;

b) $3x^3 - 45x\sqrt{x} = 243$;

c) $x\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[3]{x^2} - 375 = 0$;

d) $5\sqrt[6]{\dfrac{x^4}{x^2 - 12}} - 2x\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2 - 12}} = 2$;

e) $\sqrt{x} - 10\sqrt[4]{x} = 24$.

12. Zjednodušení odmocnin ze surdických výrazů

Příklad 35. Řešme tuto kvadratickou rovnici

$$x^2 + x\sqrt{7} + \sqrt{3} = 0.$$

Podle vzorců pro kořeny kvadratické rovnice dostáváme

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \frac{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{2}.$$

Výraz $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$, ke kterému jsme takto dospěli, je pro počítání nepohodlný. Protože k takovým výrazům často dospíváme při algebraickém řešení i jiných typů rovnic, ukážeme si proto způsob, kterým lze takovéto výrazy v některých případech upravit na výrazy jednodušší.

Výraz $7 - 4\sqrt{3}$ můžeme snadno upravit na tvar

$$7 - \sqrt{48},$$

dáme-li číslo 4 pod odmocninu. V dalším se proto omezíme na zkoumání výrazů tvarů

$$a \pm \sqrt{b},$$

kterým říkáme *surdické dvojčleny*. Úkolem tohoto odstavce bude pak nalezení způsobu, jak napsat výraz

$$\text{(78)} \qquad \sqrt{a \pm \sqrt{b}}, \quad \text{kde} \quad a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a \geqq \sqrt{b},$$

v jednodušším tvaru, tj. ve tvaru, který již neobsahuje opakované odmocniny. To se nám podaří jen tehdy, je-li číslo $a^2 - b$ čtvercem celého čísla. Za tohoto předpokladu můžeme postupovat takto:

Položme

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = x, \quad \sqrt{a - \sqrt{b}} = y. \tag{79}$$

Podle (78) je $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ a $x \geqq y$. Umocněním obou rovností na druhou dostaneme

$$x^2 = a + \sqrt{b}, \quad y^2 = a - \sqrt{b}.$$

Sečtením těchto vztahů dostáváme vztah

$$x^2 + y^2 = 2a \tag{80}$$

a jejich vynásobením dostaneme vztah

$$x^2 y^2 = a^2 - b. \tag{81}$$

Zde je vidět, proč musí být výraz $a^2 - b$ čtvercem celého čísla. Potom je totiž číslo $\sqrt{a^2 - b}$ celé kladné a rovnost (81) lze odmocnit. Protože je $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, dostaneme

$$xy = \sqrt{a^2 - b}$$

čili

$$2xy = 2\sqrt{a^2 - b}. \tag{82}$$

Z rovností (80) a (82) dostáváme sečtením a odečtením rovnosti

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2(a + \sqrt{a^2 - b}),$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2(a - \sqrt{a^2 - b})$$

a odtud

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= 2(a + \sqrt{a^2 - b}), \\ (x - y)^2 &= 2(a - \sqrt{a^2 - b}). \end{aligned} \tag{83}$$

Výraz $a + \sqrt{a^2 - b}$ je zřejmě nezáporný (je součtem dvou nezáporných čísel). Dokažme, že je i výraz $a -$

$-\sqrt{a^2-b}$ nezáporný. Kdyby bylo $a-\sqrt{a^2-b}<0$, bylo by $a<\sqrt{a^2-b}$. Protože jsou obě strany této nerovnosti nezáporné, lze ji umocnit na druhou a dostaneme nerovnost $a^2<a^2-b$. Odečteme-li na obou stranách poslední nerovnosti číslo a^2, dostaneme nerovnost $0<-b$ čili $b<0$. To je však spor se (78). Lze tedy odmocnit rovnice (83) a dostaneme

$$\begin{aligned} x+y &= \sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})}\,, \\ x-y &= \sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}\,. \end{aligned} \tag{84}$$

(Jak víme, je $x-y \geqq 0$, neboť $x \geqq y$.)
Sečtením a odečtením rovnic (84) dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} 2x &= \sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}\,, \\ 2y &= \sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})}-\sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$x=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}\,, \tag{85}$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}-\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}\,. \tag{86}$$

Protože je číslo a^2-b čtvercem celého čísla, jsou čísla $\sqrt{a^2-b}$, která se vyskytují pod odmocninami, přirozená. Výrazy (79) jsme tak za výše uvedených předpokladů vyjádřili vzorci (85), (86), které již neobsahují opakované odmocniny.

Vraťme se nyní k příkladu uvedenému na počátku této kapitoly. Ve výrazu $\sqrt{7-\sqrt{48}}$ je $a=7>0$, $b=$ $=48>0$ a je $a \geqq \sqrt{b}$, neboť $7 \geqq \sqrt{48}$ (výraz má tedy reálný smysl). Podle vzorce (86), který odpovídá znaménku minus, dostaneme vyjádření

$$\sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{1}{2}(7+1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(7-1)} = 2-\sqrt{3}.$$

To je již velmi jednoduché vyjádření. Daná kvadratická rovnice má tedy tyto kořeny:

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Cvičení 55. Zjednodušte tyto výrazy:

a) $\sqrt{6+\sqrt{11}}$; b) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$; c) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$;
d) $\sqrt{a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}}$ (proveďte diskusi!).

56. Řešte následující kvadratické rovnice a řešení pište v co nejjednodušším tvaru:

a) $x^2 + x\sqrt{7} + \sqrt{3} = 0$;
b) $x^2 + x\sqrt{23} - 2\sqrt{7} = 0$;
c) $2x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{2} = 0$;
d) $2x^2 + 2x\sqrt{5} - \sqrt{6} = 0$.

13. Reciproké rovnice třetího stupně

Reciprokou rovnicí stupně n rozumíme algebraickou rovnici tvaru

(87) $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$, obecně $a_i = a_{n-i}$,

$i = 0, \ldots, n$. (Slovy lze definovat reciproké rovnice jako algebraické rovnice, ve kterých koeficienty, jejichž indexy se doplňují na číslo n, jsou stejné.) Tak např.

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad \text{kde } a \neq 0,$$

je reciprokou rovnicí stupně třetího, rovnice

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad \text{kde } a \neq 0, \tag{88}$$

je reciprokou rovnicí stupně čtvrtého.

Reciproké rovnice mají některé zajímavé vlastnosti. Tak např. jsou všechny jejich kořeny různé od nuly, neboť absolutní člen a_n, který je jak známo součinem kořenů, je roven koeficientu a_0, tj. je různý od nuly.

Další zajímavou vlastnost reciprokých rovnic si ukažme pro jednoduchost na reciproké rovnici čtvrtého stupně (88). Je-li x_1 kořenem rovnice (88), je $x_1 \neq 0$ a můžeme tedy dělit rovnice (88) číslem $\frac{1}{x_1^4}$. Dostáváme tak rovnici

$$a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{1}{x_1^2}\right) + b\left(\frac{1}{x_1^3}\right) + a\left(\frac{1}{x_1^4}\right) = 0,$$

tj. rovnici

$$a\left(\frac{1}{x_1}\right)^4 + b\left(\frac{1}{x_1}\right)^3 + c\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + a = 0.$$

Porovnáním této rovnice a rovnice (88) vidíme, že číslo $\frac{1}{x_1}$ je kořenem rovnice (88). Je-li tedy x_1 kořenem rovnice (88), je i převrácená (reciproká) hodnota $\frac{1}{x_1}$ kořenem reciproké rovnice (88). To je také důvod pro termín „reciproká rovnice“.

Reciproké rovnice třetího, čtvrtého a pátého stupně lze snadno řešit pomocí kvadratických rovnic. Ukážeme si nejprve metodu řešení reciproké rovnice třetího stupně. To je rovnice tvaru

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad \text{kde } a \neq 0.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0.$$

Dalšími úpravami dostáváme postupně rovnice

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0,$$
$$(x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0,$$
$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0.$$

Rovnice má tedy kořen $x_1 = -1$ a ostatní dva kořeny jsou kořeny kvadratické rovnice

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Normováním této rovnice dostaneme rovnici

$$x^2 + \frac{b - a}{a}x + 1 = 0,$$

odkud je vidět, že kořeny x_1, x_2 této rovnice jsou vzájemně převrácené hodnoty, neboť je $x_1x_2 = 1$, tj. $x_2 = \frac{1}{x_1}$.

Příklad 36. Řešme rovnici

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Rovnici upravíme jak bylo výše uvedeno. Dostáváme postupně rovnice

$$2(x^3 + 1) + 7x(x + 1) = 0,$$
$$2(x + 1)(x^2 - x + 1) + 7x(x + 1) = 0,$$
$$(x + 1)[2(x^2 - x + 1) + 7x] = 0,$$
$$(x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0.$$

Je tedy $x_1 = -1$ a další kořeny x_2, x_3 vyhovují kvadratické rovnici

$$2x^2 + 5x + 2 = 0,$$

takže je

$$x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -2.$$

Cvičení 57. Řešte reciprokou rovnici

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0.$$

58. Analogickou metodou jako reciproké rovnice řešte tyto rovnice:

a) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$;

b) $12x^3 + 13x^2 - 13x^2 - 12 = 0$;

c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$;

d) $x^2 - 3x + 3 = \dfrac{x-1}{6} + \dfrac{1}{x}$;

e) $32^{x^3-1} . 2^{-1x(x-1)} = 1$.

59. Řešte tyto rovnice (postupujte opět analogicky, jako při řešení reciproké rovnice):

a) $3x^3 + 26x^2 + 52x + 24 = 0$;

b) $27x^3 - 9x^2 - 3x + 1 = 0$.

60. Z lepenkové čtvercové desky o straně délky 4 dm máme vystřihnout v rozích stejné čtverečky tak, aby ze zbytku desky bylo možno zhotovit otevřenou krabici o objemu 4 dm³.

14. Reciproké rovnice čtvrtého stupně

Při řešení rovnice

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \tag{88}$$

postupujeme takto: Rovnici (88) dělme nejprve výrazem x^2. Lze předpokládat, že $x^2 \neq 0$, neboť $x = 0$ není kořenem rovnice (88). Dostaneme rovnici

$$ax^2 + bx + c + b\frac{1}{x} + a\frac{1}{x^2} = 0$$

čili rovnici

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \tag{89}$$

Zavedeme nyní novou neznámou substitucí

$$x + \frac{1}{x} = y. \tag{90}$$

Z (90) plyne umocněním a úpravou, že

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2. \tag{91}$$

Dosazením z (90) a (91) do (89) dostáváme rovnici

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

čili

$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0.$$

To je kvadratická rovnice pro y s kořeny y_1, y_2. Je-li $y_1 \neq y_2$, pak z rovnic

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2$$

vynásobením výrazem $x \neq 0$ dostáváme dvě kvadratické rovnice pro x

$$x^2 - xy_1 + 1 = 0, \quad x^2 - xy_2 + 1 = 0,$$

jejichž kořeny jsou hledané čtyři kořeny rovnice (88). Je-li $y_1 = y_2$, pak dostaneme jedinou kvadratickou rovnici $x^2 - xy_1 + 1 = 0$, jejíž každý kořen je dvojnásobným kořenem rovnice (88).

Příklad 37. Řešme reciprokou rovnici

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Rovnici upravíme takto:

$$x^2 - 7x + 14 - 7\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Položme $x + \dfrac{1}{x} = y$. Potom je $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$ a dostáváme rovnici

$$y^2 - 2 - 7y + 14 = 0,$$

tj. kvadratickou rovnici

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

s kořeny $y_1 = 4$, $y_2 = 3$. Řešme dále rovnice

$$x + \frac{1}{x} = 4, \quad x + \frac{1}{x} = 3.$$

Dostaneme tak kvadratickou rovnici

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

s kořeny $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ a kvadratickou rovnici

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

s kořeny $x_3 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Daná rovnice má tedy čtyři kořeny x_1, x_2, x_3, x_4. Přesvědčte se, že je $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$, $x_4 = \dfrac{1}{x_3}$.

Cvičení 61. Řešte tyto reciproké rovnice:

a) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$;
b) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$;
c) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$;
d) $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$.

62. Analogickým způsobem jako reciproké rovnice čtvrtého stupně řešte tyto rovnice:

a) $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$;
b) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = 0$;
c) $12x^2 - 25x^{\frac{3}{2}} + 25x^{\frac{1}{2}} - 12 = 0$.

V dalším příkladu ukážeme, jak lze někdy užít reciprokých rovnic při řešení rovnic binomických.

Příklad 38. Řešme binomickou rovnici

$$32x^5 - 243 = 0.$$

Je tedy
$$x^5 - \frac{243}{32} = 0,$$

a substitucí $x = y\sqrt[5]{\dfrac{243}{32}}$ dostaneme rovnici

$$y^5 - 1 = 0.$$

Levou stranu této rovnice můžeme rozložit takto:

$$(y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0.$$

Ihned dostáváme kořen $y_1 = 1$. Ostatní kořeny jsou kořeny reciproké rovnice

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Řešíme-li tuto rovnici metodou uvedenou výše, dostaneme kořeny

$$y_{2,3} = \frac{(\sqrt{5} - 1) \pm i\sqrt{2\sqrt{5}\,(\sqrt{5} + 1)}}{4},$$

$$y_{4,5} = \frac{-(\sqrt{5} + 1) \pm i\sqrt{2\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 1)}}{4}.$$

Kořeny $x_1, \ldots, x_5$ dané binomické rovnice dostaneme z kořenů $y_1, \ldots, y_5$ užitím vztahu $x_i = y_i \sqrt[5]{\dfrac{243}{32}}$, $i = 1, \ldots, 5$.

Cvičení 63. Řešte rovnici

a) $(x - 4)^5 = 64$;
b) $(2x - 1)^5 - (x + 2)^5 = 0$.

(Návod: V obou případech lze vhodnou substitucí převést danou rovnici na rovnici binomickou.)

64. Řešte rovnici

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1025 = 0.$$

(Návod: Užitím binomické věty převeďte danou rovnici na rovnici binomickou.)

15. Reciproké rovnice pátého stupně

Reciprokou rovnici pátého stupně

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \tag{92}$$

kde $a \neq 0$, řešíme podobně jako reciprokou rovnici třetího stupně. Rovnici (92) upravujeme postupně takto:

$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0,$$

$$a(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) +$$
$$+ bx(x + 1)(x^2 - x + 1) + cx^2(x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)[a(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) +$$
$$+ bx(x^2 - x + 1) + cx^2] = 0,$$

$$(x + 1)[ax^4 - (a - b)x^3 +$$
$$+ (a - b + c)x^2 - (a - b)x + a] = 0.$$

Jedním kořenem je zřejmě číslo $x_1 = -1$. Ostatní kořeny jsou kořeny rovnice

$$ax^4 - (a - b)x^3 + (a - b + c)x^2 - (a - b)x + a = 0,$$

což je reciproká rovnice čtvrtého stupně, kterou jsme se naučili řešit v odstavci 14.

Příklad 39. Řešme rovnici

$$4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Úpravami dostáváme postupně tyto rovnice:

$$4(x^5 + 1) + 12x(x^3 + 1) + 11x^2(x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)[4(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) +$$

$$+ 12x(x^2 - x + 1) + 11x^2] = 0,$$

$$(x + 1)(4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4) = 0.$$

Jeden kořen je $x_1 = -1$ a zbývající kořeny dostaneme jako kořeny reciproké rovnice

$$4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = 0.$$

Tuto rovnici nyní vyřešíme. Nejprve ji upravíme na tvar

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0.$$

Substitucí $x + \dfrac{1}{x} = y$ přejde rovnice na kvadratickou rovnici

$$4y^2 + 8y - 5 = 0$$

s kořeny $y_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = -\dfrac{5}{2}$. Rozeznávejme nyní dva případy:

I. $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$. Odtud

$$2x^2 - x + 2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice s kořeny $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{15}}{4}$.

II. $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{5}{2}$. Odtud

$$2x^2 + 5x + 2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice s kořeny $x_4 = -\dfrac{1}{2}$, $x_5 = -2$.

Daná reciproká rovnice má tedy kořeny

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1 + i\sqrt{15}}{4},\ x_3 = \frac{1 - i\sqrt{15}}{4},$$

$$x_4 = -\frac{1}{2},\ x_5 = -2.$$

Přesvědčte se, že je $x_3 = \frac{1}{x_2}$, $x_5 = \frac{1}{x_4}$.

Cvičení 65. Řešte tyto reciproké rovnice:

a) $8x^5 - 6x^4 - 83x^3 - 83x^2 - 6x + 8 = 0;$
b) $4x^5 - 11x^3 - 11x^2 + 4 = 0.$

66. Analogickou metodou jako reciprokou rovnici pátého stupně řešte tyto rovnice:

a) $3x^5 - 19x^4 + 42x^3 - 42x^2 + 19x - 3 = 0;$
b) $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0;$
c) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 24x - 6 = 0.$

3. kapitola

PŘIBLIŽNÉ METODY ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC VYŠŠÍHO STUPNĚ

1. Všeobecně o přibližných metodách

V minulých kapitolách jsme probrali metody řešení algebraických rovnic některých speciálních typů (rovnice kvadratické, kubické, binomické, reciproké a rovnice, jež lze na tyto typy převést). V této kapitole si ukážeme metody, které jsou vhodné k výpočtu reálných kořenů libovolné algebraické rovnice s reálnými koeficienty. Jsou to tzv. *přibližné metody* jejich řešení, které sice neudávají pro kořeny žádné algebraické vzorce, avšak umožňují vypočítat reálné kořeny s dostatečnou, předem stanovenou přesností. To není na závadu, neboť není ani většinou nutné znát kořeny přesně. Může se totiž stát, že daná algebraická rovnice popisuje nějakou fyzikální, technickou či jinou úlohu, přičemž její koeficienty jsou čísla získaná měřením, a tedy již předem zatížená jistou chybou. Zcela přesný výpočet kořenů pak pozbývá smyslu.

2. Význam grafu pro řešení algebraické rovnice

Velmi názornou metodou k přibližnému získání reálných kořenů dané algebraické rovnice je užití grafu.

Buď dána algebraická rovnice

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{93}$$

Z kapitoly 2 (odstavec 5) víme, že stačí nalézt průsečíky grafu funkce f s osou x. Tyto průsečíky jsou pak reálnými kořeny algebraické rovnice (93) (mnohočlen $f(x)$ v těchto bodech nabývá totiž nulové hodnoty).

Je samozřejmé, že přesnost takto získaných hodnot pro kořeny velmi závisí na přesnosti, se kterou je narýsován graf mnohočlenu $f(x)$. Tato přesnost je tím větší, čím více v uvažovaném intervalu, ve kterém kreslíme graf funkce f, sestrojíme bodů $[x, f(x)]$. Je tedy třeba počítat mnoho hodnot $f(x)$, což je obtížné, počítáme-li tyto hodnoty jen prostým dosazením. Zde nám může velmi pomoci tzv. Hornerovo schéma.

Hornerovo schéma je velmi známou a užívanou metodou výpočtu hodnoty mnohočlenu v daném bodě. Jeho velikou výhodou je, že postup výpočtu je rychlý a přehledný a je výhodný i pro strojový výpočet. Ukažme si jeho princip na mnohočlenu třetího stupně

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Zvolme číslo x a počítejme postupně posloupnost těchto čísel:

$$a_0,\ a_0x,\ a_0x + a_1,\ (a_0x + a_1)x,\ (a_0x + a_1)x + a_2,$$
$$[(a_0x + a_1)x + a_2]x,\ [(a_0x + a_1)x + a_2]x + a_3.$$

Je zřejmé, že každé číslo v posloupnosti vznikne z předchozího střídavě jen vynásobením x či přičtením dalšího koeficientu. Snadno se přesvědčíme, že poslední číslo v posloupnosti, které dostaneme po vyčerpání všech koeficientů mnohočlenu, tj. číslo

$$[(a_0x + a_1)x + a_2]x + a_3,$$

je již hodnotou daného kubického mnohočlenu $f(x)$ v bodě x. Je totiž

$$[(a_0x + a_1)x + a_2]x + a_3 = (a_0x + a_1)x^2 + a_2x + a_3 = \\ = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = f(x).$$

Celý výpočet upravujeme do tohoto schématu:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_0 & c_1 & c_2 & \underline{c_3} \end{array}$$

Při výpočtu postupujeme tak, že do prvního a třetího řádku zapíšeme na příslušná místa koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3 daného mnohočlenu. Místa pro b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 ponecháme zatím volná. Tato čísla pak postupně počítáme a zapisujeme do schématu. Nejprve vypočteme číslo $b_1 = a_0x$ a zapíšeme na příslušné místo. Číslo c_1 vznikne pak sečtením nad sebou stojících čísel a_1, b_1. To pak zapíšeme na příslušné místo a násobíme jej číslem x. Vznikne tak číslo b_2. Opět sečteme pod sebou stojící čísla a_2, b_2 a dostaneme číslo c_2. Podobně dostáváme dále $b_3 = c_2x$ a $c_3 = a_3 + b_3$. Vzhledem k tomu, co bylo výše řečeno, je poslední podtržené číslo c_3 hledanou hodnotou $f(x)$, tj. $c_3 = f(x)$. Stejně postupujeme i v případě mnohočlenu libovolně vysokého stupně. Schéma je pak delší.

Příklad 40. Vypočteme hodnotu mnohočlenu

$$f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 3$$

v bodě $x = 2$.

Hornerovo schéma vypadá takto:

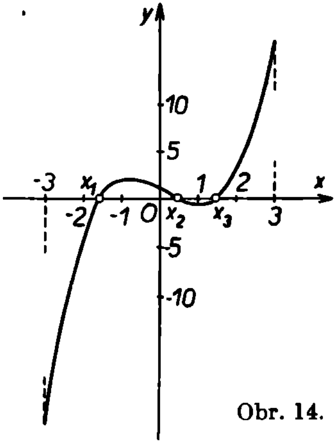
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ & 2 & 4 & 12 & 18 & 38 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 9 & 19 & \underline{35} \end{array}$$

Je tedy $f(x) = 35$. Výpočet je zcela mechanický a velice rychlý.

Příklad 41. Zjistěme pomocí grafu přibližné hodnoty reálných kořenů rovnice

$$x^3 - 0{,}5x^2 - 2{,}25x + 1{,}125 = 0$$

např. v intervalu $\langle -3, 3 \rangle$.



Obr. 14.

Pomocí Hornerova schématu sestrojíme tabulku

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-23{,}625$	$-4{,}375$	$1{,}875$	$1{,}125$	$-0{,}625$	$2{,}625$	$16{,}875$

Na obr. 14 vidíme graf funkce $f(x)$ v intervalu $\langle -3, 3 \rangle$. Vidíme, že protíná osu x ve třech bodech x_1, x_2, x_3, tj. daná rovnice má v intervalu $\langle -3, 3 \rangle$ tři reálné kořeny

x_1, x_2, x_3. Kdybychom sestrojili graf funkce f ve větším intervalu než $\langle -3, 3\rangle$, nedostali bychom již žádné další kořeny, neboť kubická rovnice může mít nejvýše 3 různé kořeny. Odhadem nyní zjistíme, že je $x_1 \doteq -1,6$, $x_2 \doteq 0,5$, $x_3 \doteq 1,4$. (Přesné hodnoty jsou $x_1 = -1,5$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 1,5$.)

3. Odhady polohy reálných kořenů na číselné ose

Podívejme se ještě jednou na příklad 41. Zde jsme graf funkce f kreslili v intervalu $\langle -3, 3\rangle$ a dostali jsme náhodou všechny reálné kořeny dané rovnice. Stejně dobře jsme však mohli nakreslit graf mnohočlenu $f(x)$ jen v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ či $\langle 0, 2\rangle$. V posledních dvou případech bychom zřejmě nedostali všechny reálné kořeny (v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ leží jen kořen x_2 a v intervalu $\langle 0, 2\rangle$ jen kořeny x_2, x_3). Vzniká tedy tato otázka: jak volit interval, aby v něm ležely všechny existující reálné kořeny dané rovnice? Lze dokázat tento odhad:

Věta 10. *Mějme rovnici*

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

s reálnými koeficienty. Potom všechny reálné kořeny této rovnice leží v intervalu $\langle -A - 1, A + 1\rangle$, *kde*

$$A = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|).$$

(A je tedy rovno maximální z absolutních hodnot koeficientů normované rovnice.)

Důkaz této věty provedeme později. Užijme odhad z věty 10 pro rovnici z příkladu 41. Zde je

$$A = \max(|-0,5|, |-2,25|, |1,125|) = 2,25,$$

takže podle našeho odhadu leží všechny reálné kořeny zaručeně v intervalu $\langle -3{,}25,\ 3{,}25\rangle$. Vidíme, že tento odhad není příliš přesný. Kořeny ve skutečnosti leží v menším intervalu $\langle -1{,}5,\ 1{,}5\rangle$. Pro informaci to však často stačí. Je také vidět, že jsou-li koeficienty normované rovnice v absolutní hodnotě malé, lze očekávat, že reálné kořeny se vyskytují jen v blízkém okolí bodu 0.

Ve větě 10 ukázaný odhad není jediným existujícím odhadem. V algebře byla dokázána řada jiných odhadů, které umožňují dospět k přesnějším výsledkům. Z nich uvedeme následující odhad horní hranice reálných kořenů (*horní hranicí* reálných kořenů rozumíme jakékoli číslo, které je větší nebo rovno než všechny reálné kořeny):

Věta 11. *Buď a_k prvý ze záporných koeficientů normované rovnice*

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n = 0.$$

Potom jsou všechny reálné kořeny této rovnice menší než číslo $1 + \sqrt[k]{B}$, kde B je největší z absolutních hodnot záporných koeficientů rovnice.

Příklad 42. V rovnici z příkladu 41 je

$$a_1 = -0{,}5,\ a_2 = -2{,}25,\ a_3 = 1{,}125.$$

Je tedy $B = |-2{,}25| = 2{,}25$; prvým záporným koeficientem je dále koeficient a_1, tj. $k = 1$. Náš odhad pak dává pro horní hranici reálných kořenů číslo

$$1 + 2{,}25 = 3{,}25,$$

tedy stejné číslo, jako jsme dostali minulým odhadem. Na tomto příkladě je tedy patrno, že přes větší složitost druhého odhadu nemusíme vždy dostat pro horní hranici reálných kořenů menší číslo.

Cvičení 67. Porovnejte oba výše uvedené odhady pro rovnice

a) $x^4 + 0,5x^3 - 2,5x + 4 = 0$;
b) $x^5 - 3x^4 - 4x^2 + 8 = 0$.

68. Na rovnici

$$x^5 + 4x^3 + 2x + 5 = 0$$

si uvědomte, že druhý odhad nelze použít, protože rovnice nemá záporné koeficienty. Udejte některou hranici reálných kořenů!

Všimněme si ještě jedné věci. Druhý odhad na rozdíl od odhadu prvého dává jen horní hranici reálných kořenů. To je však spíše výhodou než závadou. Odhadu můžeme stejně tak užít ke stanovení dolní hranice reálných kořenů dané rovnice. Platí totiž toto zřejmé tvrzení:

Věta 12. Je-li x_i kořenem rovnice $f(x) = 0$, pak je číslo $-x_i$ kořenem rovnice $f(-x) = 0$, tj. rovnice, která z původní rovnice $f(x) = 0$ vznikne tím, že napíšeme všude $-x$ místo x.

Tak např. je-li

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4 = 0,$$

je

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + (-x) + 4 = 0,$$

tj.

$$f(-x) = -x^3 - 3x^2 - x + 4 = 0.$$

Tato rovnice je ekvivalentní s normovanou rovnicí

$$x^3 + 3x^2 + x - 4 = 0.$$

Odtud plyne, že chceme-li nalézt dolní hranici reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$, vezmeme místo této rovnice rovnici $f(-x) = 0$ a nalezneme horní hranici jejích reálných kořenů. Tato horní hranice je pak až na znaménko rovna dolní hranici kořenů rovnice původní. Ukažme to opět na příkladě.

Příklad 43. Uvažujme opět rovnici

$$f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 2{,}25x + 1{,}125 = 0$$

z příkladu 41 a stanovme užitím druhého odhadu a výše uvedené úvahy dolní hranici reálných kořenů této rovnice. Jest

$$f(-x) = (-x)^3 - 0{,}5(-x)^2 - 2{,}25(-x) + 1{,}125 = 0$$

čili

$$f(-x) = -x^3 - 0{,}5x^2 + 2{,}25x + 1{,}125 = 0.$$

Normovaný tvar této rovnice je

$$x^3 + 0{,}5x^2 - 2{,}25x - 1{,}125 = 0.$$

Nalezneme nyní horní hranici reálných kořenů této rovnice podle druhého odhadu. Zde je opět $B = 2{,}25$, neboť v absolutní hodnotě největší záporný koeficient je $a_2 = -2{,}25$. Tento koeficient je zároveň prvým záporným koeficientem, takže $k = 2$. Druhý odhad z věty 11 pak dává číslo

$$1 + \sqrt{2{,}25} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5.$$

Reálné kořeny původní rovnice jsou tedy všechny větší než číslo $-2{,}5$. To je již lepší odhad, než jsme dostali pomocí odhadu z věty 10 (tam vyšlo pro dolní hranici reálných kořenů číslo $-3{,}5$).

Výhoda druhého odhadu je obzvláště patrna, jedná-li se např. o rovnici mající pouze např. kladné kořeny. Zde totiž odhad z věty 10 dává interval $\langle -A - 1,$

$A + 1)$, tj. dolní odhad může být v absolutní hodnotě veliké záporné číslo, ačkoliv v tomto případě je dolní hranicí kořenů např. číslo 0. Odhad z věty 11 v tomto případě dává zpravidla příznivější výsledek. Podobně je tomu v případě rovnice s vesměs zápornými kořeny (viz rovnici b) ze cvičení 63).

Důkaz věty 11 je celkem snadný. Stačí totiž dokázat, že pro $x > 1 + \sqrt[k]{B}$ je již $f(x) > 0$ (tj. rovnice nemůže mít žádný kořen větší než číslo $1 + \sqrt[k]{B}$).

V dalších úvahách lze předpokládat, že $x > 1$ (předpokládáme totiž, že je $x > 1 + \sqrt[k]{B} > 1$). Pro $x > 1$ však platí, že

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n \geqq x^n + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n,$$

neboť $a_1 \geqq 0, \ldots, a_{k-1} \geqq 0$ a $x > 1$. Protože je podle definice $B = \max |a_i|$, kde a_i probíhá všechny záporné koeficienty v rovnici, je dále

$$x^n + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n \geqq x^n - Bx^{n-k} - \ldots - B = x^n - B(x^{n-k} + \ldots + 1) = x^n - B\frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}$$

(zde jsme užili vzorce pro součet konečné geometrické řady). Poslední výraz lze upravit takto:

$$x^n - B\frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}[x^n(x - 1) - B(x^{n-k+1} - 1)] = \frac{1}{x - 1}[x^n(x - 1) - Bx^{n-k+1} + B] = \frac{1}{x - 1}\{x^{n-k+1}[x^{k-1}(x - 1) - B] + B\}.$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že pro $x > 1$ platí

$$x^{k-1} \geqq (x-1)^{k-1}.$$

Poslední výraz lze tedy dále odhadnout takto:

$$\frac{1}{x-1}\{x^{n-k+1}[x^{k-1}(x-1)-B]+B\} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{x-1}\{x^{n-k+1}[(x-1)^k-B]+B \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{x-1}\{x^{n-k+1}[(x-1)^k-B]\}.$$

Protože je $x > 1 + \sqrt[k]{B}$, je $x - 1 > \sqrt[k]{B}$ čili $(x-1)^k > B$, tj.

$$(x-1)^k - B > 0.$$

Je tedy poslední výraz kladný, neboť číslo v hranaté závorce je kladné a $x > 1$. Hodnotu $f(x)$ jsme pro $x > 1 + \sqrt[k]{B}$ odhadli zdola kladným číslem, takže je $f(x) > 0$, což jsme chtěli dokázat.

Nyní již můžeme konečně dokázat větu 10. Postup je obdobný, jako postup v důkaze věty 11. Předpokládejme, že je $x > A + 1$, kde $A = \max |a_i|$, $i = 1, \ldots, n$ (a_i jsou koeficienty normované rovnice). Pro $x > 1$ však postupně platí

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \geqq x^n - Ax^{n-1} -$$

$$- \ldots - Ax - A = x^n - A(x^{n-1} + \ldots + x + 1) =$$

$$= x^n - A\,\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}\,[x^n(x-1) - A(x^n - 1)] =$$

$$= \frac{1}{x - 1} [x^n(x - 1) - Ax^n + A] \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{x - 1} [x^n(x - 1) - Ax^n] = \frac{x^n}{x - 1} (x - 1 - A)$$

(užili jsme vzorce pro součet konečného úseku geometrické posloupnosti a toho, že je $A \geqq 0$). Dospěli jsme tak k odhadu

$$f(x) \geqq \frac{x^n}{x - 1} (x - 1 - A).$$

Protože je $x > A + 1$, je $x - 1 - A > 0$, a výraz v závorce je kladný. Protože je dále $x > 1$, je celý výraz kladný a tedy $f(x) > 0$. Tím jsme dokázali, že číslo $A + 1$ je horní hranicí reálných kořenů.

Podle věty 12 je dále dolní hranicí reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$ horní hranice reálných kořenů rovnice $f(-x) = 0$, tj. rovnice

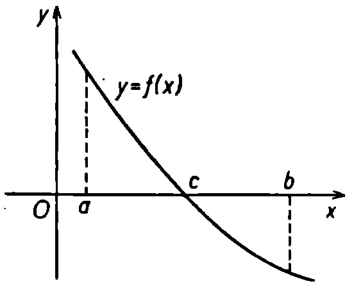
$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n = 0.$$

Tato rovnice má však kořeny se stejnou absolutní hodnotou, jako původní rovnice $f(x) = 0$ (liší se jen znaménky). Je tedy horní hranicí reálných kořenů rovnice $f(-x) = 0$ podle prvé části důkazu věty 10 opět číslo $A + 1$. To však znamená, že číslo $-A - 1$ je hledanou dolní hranicí reálných kořenů původní rovnice $f(x) = 0$. Všechny kořeny rovnice $f(x)$ leží tedy v intervalu $\langle -A - 1, A + 1 \rangle$. Tím je věta 10 dokázána.

4. Separace (oddělení) kořenů

Všechny úvahy tohoto odstavce spočívají na velmi názorné a zároveň velmi důležité *větě Bolzano-Weierstrassově.* Pro mnohočleny ji lze vyslovit takto:

Věta 13. *Je-li f libovolný mnohočlen v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a)\,f(b) < 0$ (tj. $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka),*



Obr. 15.

existuje uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$ alespoň jeden bod c takový, že $f(c) = 0$.

Větu ovšem dokazovat nebudeme. Názornost věty je však dobře patrna z obr. 15. Představíme-li si graf nějakého mnohočlenu f v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak se v případě, že $f(a)\,f(b) < 0$ dostane graf z bodu $[a, f(a)]$ do bodu $[b, f(b)]$ jen tak, že protne osu x.

Z výše uvedené věty je však zřejmé, že k nalezení intervalu obsahujícího reálný kořen není třeba sestrojovat pracně celý graf mnohočlenu na levé straně dané rovnice $f(x) = 0$, nýbrž lze pohledem na tabulku funkčních hodnot přímo vybrat ty sousední hodnoty x, pro které má funkce opačné znaménko*). Tak dostáváme již užší intervaly pro kořeny. Tyto intervaly jsou tím užší, čím „hustší“ tabulku funkčních hodnot vypočteme. Výhodněji můžeme postupovat tímto způsobem (postupným dělením intervalu obsahujícího kořen): Mějme rovnici

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

a vypočtěme tabulku funkčních hodnot pro hodnoty 0, 1, 2, 3. Dostaneme tabulku

x	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-2	6	28

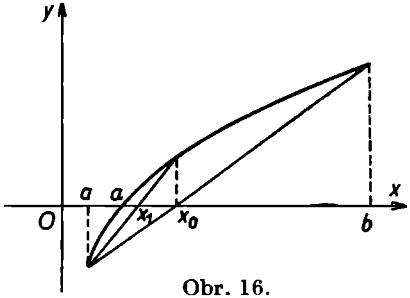
Protože $f(1)$ a $f(2)$ mají opačná znaménka, musí v intervalu $\langle 1, 2\rangle$ ležet reálný kořen. Interval $\langle 1, 2\rangle$ rozdělíme na dva intervaly $\langle 1, 1{,}5\rangle$ a $\langle 1{,}5, 2\rangle$ a vypočteme funkční hodnotu v dělícím bodu 1,5. Je $f(1{,}5) = 0{,}625$. Protože je $f(1) = -2$ a $f(1{,}5) = 0{,}625$, musí kořen ležet v užším intervalu $\langle 1, 1{,}5\rangle$. Interval $\langle 1, 1{,}5\rangle$ opět rozdělíme na dva intervaly $\langle 1, 1{,}25\rangle$, $\langle 1{,}25, 1{,}5\rangle$. Protože je $f(1{,}25) < < 0$ a $f(1{,}5) > 0$, leží kořen v ještě užším intervalu $\langle 1{,}25, 1{,}5\rangle$. Tento interval opět rozdělíme na dva intervaly $\langle 1{,}25, 1{,}4\rangle$, $\langle 1{,}4, 1{,}5\rangle$. Protože je $f(1{,}4) < 0$ a $f(1{,}5) > 0$, leží kořen v intervalu $\langle 1{,}4, 1{,}5\rangle$. Dalším dělením tohoto intervalu bychom našli, že kořen leží postupně v intervalech $\langle 1{,}4, 1{,}45\rangle$, $\langle 1{,}4, 1{,}42\rangle$ atd. To

*) Je však třeba poznamenat, že by byl omyl se naopak domnívat, že mají-li hodnoty $f(a)$, $f(b)$ stejné znaménko, nemá mnohočlen f v intervalu $\langle a, b\rangle$ žádný reálný kořen. Tak např. je-li $f(x) = x^2 - 1$, je $f(-2) = 3$ i $f(2) = 3$, tj. $f(a)$ $f(b) > 0$ a funkce f má v intervalu $\langle -2, 2\rangle$ dokonce dva kořeny 1 a -1. To však znamená, že při postupu, který uvádíme, nemusíme dostat v každém případě všechny reálné kořeny.

jsou již dosti úzké hranice pro hledaný kořen (přesná hodnota kořenu je $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$). Poznamenejme, že interval lze dělit např. půlením, avšak je výhodné volit dělící bod přibližně uprostřed intervalu tak, abychom nemuseli počítat se zbytečně mnoha desetinnými místy.

5. Metoda regula falsi

V předchozím článku jsme uvedli postup, jak je možno získat s dostatečnou přesností kořen rovnice $f(x) = 0$, známe-li dva body a, b takové, že funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka.



Obr. 16.

Metoda spočívající na postupném dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je příliš mechanická, neboť dělící bod volíme celkem mechanicky bez ohledu na průběh funkce v děleném intervalu. Tento nedostatek odstraňuje tzv. metoda *regula falsi* (někdy ji též nazýváme *metodou tětiv*). Ukažme si nejprve její princip na obrázku.

Na obr. 16 je nakreslen průběh grafu funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka. Oblouk grafu funkce f mezi body a a b nahradíme nyní tětivou. Tato tětiva protne osu x v bodě x_0. Nyní mohou nastat tyto možnosti: buď $f(x_0) = 0$, čímž jsme hotovi, nebo $f(x_0) < 0$ či $f(x_0) > 0$. V našem případě je $f(x_0) > 0$. Vezměme nyní bod x_0 a ten z bodů a, b, ve kterém má funkce f opačné znaménko než hodnota $f(x_0)$. V našem případě je to bod a (je $f(a)\,f(x_0) < 0$). V intervalu $\langle a, x_0\rangle$ nyní graf funkce f nahradíme opět tětivou. Ta protne osu x v bodě x_1. Protože je v našem případě $f(x_1)\,f(a) < 0$, nahradíme graf funkce f v intervalu $\langle a, x_1\rangle$ tětivou a jejím průsečíkem s osou x je pak bod x_2. Stejným způsobem dostáváme další body x_3, x_4, x_5, ..., které se pak stále více blíží hledanému kořenu. Body x_0, x_1, x_2, x_3 ... nazýváme *postupnými aproximacemi* hledaného kořenu.

Nyní odvodíme vzorec pro výpočet průsečíku tětivy spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ s osou x. Rovnice přímky určená body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ jak víme z analytické geometrie v rovině je tato:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)\,.$$

Průsečík x_0 této přímky s osou x je bod na této přímce, jehož druhá souřadnice y je rovna nule. Musí tedy být

$$0 - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x_0 - a)\,.$$

Z této rovnice plyne ihned pro x_0 vzorec

$$x_0 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(a) - f(b)}\,. \tag{94}$$

Praktický postup pro výpočet postupných aproximací je tento: Je-li $f(a)\,f(b) < 0$, vypočteme ze vzorce

(94) číslo x_0 (v tom případě však dosadíme místo hodnot a, b hodnoty a, x_0). Je-li $f(b)\,f(x_0) < 0$, dosadíme do vzorce (94) za a, b hodnoty b, x_0. Jakmile vypočteme x_1, zjistíme znaménko $f(x_1)$ a za a, b položíme ve vzorci (94) buď a, x_1 či b, x_1, podle toho, zda je $f(x_1)\,f(a) < 0$ či $f(x_1)\,f(b) < 0$. Tak vypočteme x_2 a stejně počítáme i další postupné aproximace $x_3, x_4, x_5, \ldots$, až dospějeme k aproximaci, která se liší od hledaného kořenu dostatečně málo.

Příklad 44. Vypočtěme metodou regula falsi kořen rovnice

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0,$$

ležící v intervalu $\langle 1, 2\rangle$.
Protože je $f(1)\,f(2) < 0$, lze užít vzorce (94). Dostaneme

$$x_0 = \frac{1.f(2) - 2.f(1)}{f(2) - f(1)} = \frac{1.6 - 2.(-2)}{6 - (-2)} = 1{,}25.$$

Protože je $f(1{,}25) = -0{,}984 < 0$ a $f(2) = 6 > 0$, můžeme položit ve vzorci (94) $a = 1{,}25$, $b = 2$. Potom je

$$x_1 = \frac{1{,}25.f(2) - 2.f(1{,}25)}{f(2) - f(1{,}25)} =$$

$$= \frac{1{,}25.6 - 2.(-0{,}984)}{6 - (-0{,}984)} = 1{,}355.$$

Protože je $f(1{,}355) = -0{,}386 < 0$ a $f(2) = 6 > 0$, vypočteme x_2 ze vzorce (94), kde klademe $a = 1{,}355$, $b = 2$.

$$x_2 = \frac{1{,}355.f(2) - 2.f(1{,}355)}{f(2) - f(1{,}355)} =$$

$$= \frac{1{,}355.6 - 2.(-0{,}386)}{6 - (-0{,}386)} = 1{,}394.$$

Další výpočet již zapíšeme jen stručně:

$$f(1{,}394) = -0{,}136 < 0,\ f(2) = 6 > 0,$$

$$x_3 = \frac{1{,}394 . f(2) - 2 . f(1{,}394)}{f(2) - f(1{,}394)} =$$

$$= \frac{1{,}394 . 6 - 2 . (-0{,}136)}{6 - (-0{,}136)} = 1{,}407\,,$$

$$f(1{,}407) = -0{,}049 < 0, \quad f(2) = 6 > 0,$$

$$x_4 = \frac{1{,}407 . f(2) - 2 . f(1{,}407)}{f(2) - f(1{,}407)} =$$

$$= \frac{1{,}407 . 6 - 2 . (-0{,}049)}{6 - (-0{,}049)} = 1{,}412\,,$$

$$f(1{,}412) = -0{,}015 < 0, \quad f(2) = 6 > 0,$$

$$x_5 = \frac{1{,}412 . f(2) - 2 . f(1{,}412)}{f(2) - f(1{,}412)} =$$

$$= \frac{1{,}412 . 6 - 2 . (-0{,}015)}{6 - (-0{,}015)} = 1{,}413\,.$$

Vidíme, že prvá dvě desetinná místa se již při dalším výpočtu nemění. Dostáváme tak aproximaci hledaného kořene $\alpha \doteq 1{,}41$ s přesností na dvě desetinná místa (skutečná hodnota je $\alpha = \sqrt{2} \doteq 1{,}414$).

Cvičení 69. Vypočtěte kořen rovnice

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = 0$$

ležící v intervalu $\langle 3,\ 4{,}5 \rangle$ s přesností na dvě desetinná místa.

6. Tečna ke grafu mnohočlenu. Pojem derivace

Tento odstavec a následující odstavec 7 jsou určeny pro vyspělejší čtenáře, kteří se již někdy setkali s pojmem limity a derivace. Je však třeba probrat některé základní poznatky z diferenciálního počtu, abychom mohli vyložit tzv. Newtonovu metodu, která je proti právě vyložené metodě regula falsi podstatně rychlejší a účinnější. Méně vyspělý čtenář může tento odstavec vynechat a číst až odstavec 7. Musí se spokojit s tím, když řekneme, že výraz $f'(x)$ vyskytující se ve vzorci (100) označuje opět jakýsi mnohočlen, který se nazývá *derivací mnohočlenu* $f(x)$ a který se vypočte takto: *je-li*

$$(95) \quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

daný mnohočlen n-tého stupně, pak je

$$(96) \quad f'(x) = na_0x^{n-1} + (n - 1)a_1x^{n-2} + (n - 2)a_2x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Derivací mnohočlenu f v bodě x_0 pak nazýváme hodnotu $f'(x_0)$, tj. hodnotu mnohočlenu f' v bodě x_0.

Vzorec (96) je sice zcela jasný, avšak vypočtěme pro jistotu tento příklad:

Příklad 45. Vypočtěme derivaci mnohočlenu

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 6$$

v bodě $x_0 = 2$.

Ze vzorce (96) dostáváme pro mnohočlen f tuto derivaci:

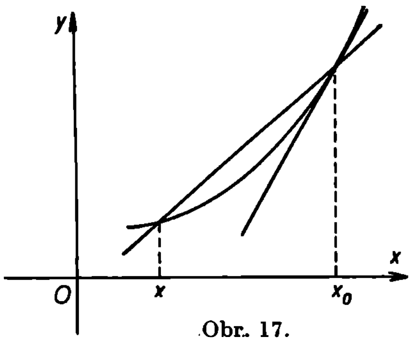
$$f'(x) = 3.4x^2 - 2.6x + 5,$$

tj. $$f'(x) = 12x^2 - 12x + 5.$$

Derivace v bodě $x_0 = 2$ je tedy rovna číslu

$$f'(2) = 12.4 - 12.2 + 5 = 29.$$

Nyní přistupme k odvození směrnice tečny grafu mnohočlenu $f(x)$. Poznamenejme, že grafy mnohočlenů



Obr. 17.

patří ke křivkám, jejichž průběh je velmi „hladký“, tj. které mají v každém bodě tečnu. Na obr. 17 je graf mnohočlenu $y = f(x)$. Ptáme se, jaká je směrnice grafu v bodě x_0. Zvolme nějaký bod $x \neq x_0$. Směrnice sečny grafu procházející body $[x, f(x)]$ a $[x_0, f(x_0)]$ je rovna číslu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{97}$$

Jestliže se nyní bod x pohybuje směrem k bodu x_0, blíží se sečna stále více tečně v bodě x_0, až v limitním případě, kdy $x = x_0$, obě přímky splynou. Limitní hodnota výrazu (97) pro směrnici sečny je pak směrnicí tečny grafu funkce f v bodě x_0. Směrnice tečny v bodě x_0 je tedy rovna číslu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

což je právě podle definice derivace hodnota derivace funkce f v bodě x_0 (značíme ji obvykle $f(x_0)$).

Lze tedy vyslovit toto tvrzení: *Směrnice tečny grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je rovna derivaci funkce f v bodě x_0, tj. číslu $f'(x_0)$.*

Rovnice tečny grafu mnohočlenu v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je tedy tato:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \tag{98}$$

(jedná se o rovnici přímky dané bodem $[x_0, f(x_0)]$ a směrnicí $f'(x_0)$).

Závěrem naznačíme odvození již uvedeného vzorce (96) pro derivaci mnohočlenu (95). Vzorec 95 lze snadno odvodit z definice derivace. Pro jednoduchost se omezíme jen na speciální případ mnohočlenu třetího stupně

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Buď x libovolný bod. Pro $z \neq x$ platí

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} =$$

$$= \frac{a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 - a_0x^3 - a_1x^2 - a_2x - a_3}{z - x} =$$

$$= \frac{a_0(z^3 - x^3) + a_1(z^2 - x^2) + a_2(z - x)}{z - x} =$$

$$= \frac{a_0(z - x)(z^2 + xz + x^2) + a_1(z - x)(z + x) + a_2(z - x)}{z - x} =$$

$$= a_0(z^2 + xz + x^2) + a_1(z + x) + a_2.$$

Podle definice derivace funkce f v bodě x a podle předchozího výpočtu je

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} [a_0(z^2 + xz + x^2) +$$

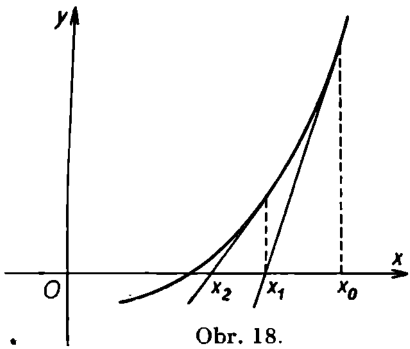
$$+ a_1(z + x) + a_2] = a_0(x^2 + x^2 + x^2) + a_1(x +$$

$$+ x) + a_2 = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2,$$

což je speciální případ vzorce (96).

7. Newtonova metoda

Jak již bylo řečeno, je *Newtonova metoda* ve srovnání s metodou regula falsi podstatně rychlejší a dává zpravidla po několika málo krocích hledaný kořen s velkou



Obr. 18.

přesností. Princip této metody je nejlépe patrný z obrázku 18. Obrázek nám i umožní pochopit, proč se Newtonově metodě někdy říká *metoda tečen.*

Na obr. 18 je nakreslen graf jistého mnohočlenu f. Hledáme na ose x bod α takový, pro který je $f(\alpha) = 0$. Zvolme proto nějaký bod x_0 v blízkosti kořenu α a veďme bodem $[x_0, f(x_0)]$ tečnu ke grafu funkce f. Tato tečna protne osu x v bodě x_1. V bodě $[x_1, f(x_1)]$ vedeme opět tečnu ke grafu funkce f; ta protne osu x v bodě x_2. Dostáváme tak postupně body $x_3, x_4, x_5, \ldots$, které se velmi rychle blíží k hledanému kořenu α rovnice $f(x) = 0$, jak je patrno z obr. 18.

Pokusme se napsat vzorec pro výpočet hodnoty x_1 z hodnoty x_0. Rovnice tečny v bodě x_0 ke grafu funkce f je podle vzorce (98)

$$(99) \qquad y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Je-li x_1 průsečík tečny s osou x, je $y = 0$ a z (99) dostáváme rovnost

$$-f(x_0) = f'(x_0)\,(x_1 - x_0).$$

Odtud plyne vzorec

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Je patrno, že další aproximaci x_1 lze z tohoto vzorce vypočíst jen v případě, že $f'(x_0) \neq 0$ (tj. tečna v bodě x_0 není rovnoběžná s osou x). Analogicky počítáme i další aproximace $x_2, x_3, x_4, \ldots$. Platí obecně tento vzorec:

$$(100) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Příklad 46. Počítejme opět kořen rovnice z příkladu 43 ležící v intervalu $\langle 1, 2 \rangle$. Jako počáteční aproximaci x_0 vezměme krajní bod tohoto intervalu $x_0 = 2$.

Ve vzorci (100) je

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2, \quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 2.$$

Počítejme nyní postupné aproximace $x_1, x_2, x_3, \ldots$ pomocí vzorce (100).

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{6}{14} = 1{,}571,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}571 - \frac{f(1{,}571)}{f'(1{,}571)} =$$

$$= 1{,}571 - \frac{1{,}203}{8{,}546} = 1{,}430,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}430 - \frac{f(1{,}430)}{f'(1{,}430)} =$$

$$= 1{,}430 - \frac{0{,}109}{6{,}995} = 1{,}414.$$

To je již při třetím kroku velmi dobrý výsledek, neboť kořenem je číslo $\alpha = \sqrt{2} \doteq 1{,}414$.

Cvičení 70. Řešte rovnici ze cvičení 64 Newtonovou metodou.

71. Vypočtěte Newtonovou metodou číslo $\sqrt[5]{22, 24}$.

(Návod: Řešte rovnici $x^5 - 22{,}84 = 0$ Newtonovou metodou. Jako počáteční aproximaci vezměte např. číslo $x_0 = 2$.)

OBSAH

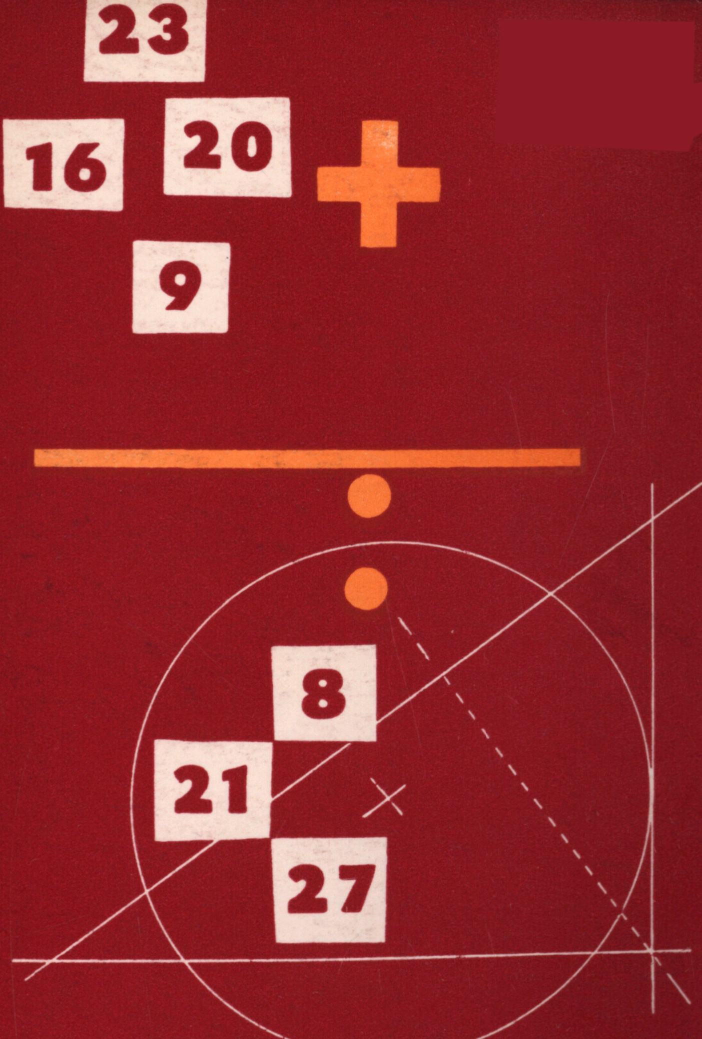
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MIROSLAV ŠISLER — JOSEF ANDRYS

o řešení algebraických rovnic

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2326
Edice Škola mladých matematiků, svazek 13
Vytiskl Mír, n. p., závod 1,
Praha 1, Václavské náměstí 15
4,37 AA. 4,53 VA. D-02*50311
Náklad 7500 výtisků. 1. vydání
128 stran. Praha 1966

23-017-66 03-2 Cena brož. výtisku Kčs 4,—



23 - 017 - 66
03-2
Cena brož.
Kčs 4,—