Geometrická místa bodů v prostoru

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

GEOMETRICKÁ MÍSTA BODŮ V PROSTORU

11

Vydal matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JOSEF HOLUBÁŘ

geometrická místa bodů v prostoru

PRAHA 1965
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

Odbornou recenzi provedli prof. dr. Alois Urban a doc. Jan Vyšín.

1. kapitola

ÚVOD

Vám, mladí přátelé, je ze střední školy dobře znám *pojem geometrického místa bodů* neboli *pojem množiny všech bodů, které mají určitou vlastnost*, pokud se jedná o útvary v rovině.[1]) V planimetrii jste už řešili četné konstruktivní úlohy, při jejichž řešení se g. m. b. často používá. Vždyť má konstruktivní geometrická úloha mnohdy řešení, které dostaneme jako průnik dvou nebo více množin bodů, tj. g. m. b., která jsme před tím nalezli (srovn. např. úlohu 8 řešenou v našem textu na str. 30). Potom je odvození příslušných g. m. b. vlastně řešením jistých „obecnějších" úloh konstruktivních, s kterými jsou g. m. b. v úzké souvislosti.

Ve škole jste se však dosud málokdy setkali s pojmem g. m. b., který se vztahuje na útvary prostorové. V této knížce chtěl bych vás, zvláště pak účastníky Matematické olympiády, seznámit s některými g. m. b. v prostoru. Prostorem zde rozumíme *trojrozměrný prostor Euklidův*, v němž se vyskytují všecky geometrické útvary, které jste probírali ve škole. Také g. m. b. v prostoru docházejí hojného použití v konstruktivních úlohách, a to prostorových. V našich úvahách, zvláště na počátku knížky, zdůrazníme obdobu a souvislosti g. m. b. prostorových s g. m.

[1]) Název *množiny všech bodů určité vlastnosti* je novější termín pro pojem, který je dosud běžně označován starším a stále vžitým názvem *geometrické místo bodů*. Toho budeme používat i v této knížce a slova geometrické místo bodů zapisovat zkráceně „g. m. b.".

b. v rovině. Uvidíme, jak se vyšetřování g. m. b. v prostoru často a výhodně převádí na vyšetřování g. m. b. v rovině a jak se z těchto g. m. b. rovinných přejde do prostoru zobrazením, např. otáčením, rovnoběžným posunutím nebo stejnolehlostí apod., čímž se studium g. m. b. v prostoru značně usnadní.

Při vyšetřování g. m. b. v prostoru se nám vyskytnou plochy běžné v prostorové geometrii, s kterými jste se však na střední škole nesetkali, jako např. další *rotační plochy druhého stupně (tzv. kvadriky)*. Z nich jste poznali rotační plochu válcovou, kuželovou a kulovou i jejich vznik. Pokud jde o kulovou plochu, připomeňme k její známé definici pomocí středu a poloměru a k jejímu vytvoření pomocí rotace kružnice kolem jejího průměru ještě Thaletovo a Apolloniovo vytvoření kulové plochy. Tato vytvoření jsou jenom prostorovým zobecněním Thaletova a Apolloniova vytvoření kružnice, která znáte z planimetrie. (Viz příklad 4 kapitoly 2 na str. 12.)

Další rotační kvadriky vznikají *rotací kuželoseček* kolem některé z jejich os:

Rotací elipsy, která má ohniska v bodech F, G, kolem její hlavní osy vznikne *rotační elipsoid protáhlý* s ohnisky v bodech F, G, definovaný jako g. m. b. v prostoru, které mají od daných bodů F, G daný součet vzdáleností rovný $2a > FG$, kde a je velikost hlavní poloosy výchozí elipsy a také hlavní poloosy vzniklého elipsoidu. Rotací téže elipsy kolem její vedlejší osy vznikne další kvadrika, *rotační elipsoid zploštělý*.

Otáčením hyperboly s ohnisky F, G kolem její hlavní osy vznikne *rotační hyperboloid dvoudílný* s ohnisky v bodech F, G, definovaný jako g. m. b. v prostoru, které mají od daných bodů F, G daný rozdíl vzdáleností rovný $2a < FG$. Při této rotaci vytvářejí asymptoty rotující hyperboly asymptotickou kuželovou plochu vzniklého hyperboloidu. Rotuje-li táž hyperbola kolem své vedlejší osy, vznikne *rotační hyperboloid jednodílný*, který má mnoho zajímavých vlastností (např. obsahuje přímky a lze jej také vytvořit rotací každé takové přímky).

Rotuje-li parabola (s ohniskem v bodě F a řídicí přímkou d) kolem své osy, vzniká rotační paraboloid s ohniskem v bodě F a řídicí rovinou ϱ, která prochází přímkou d a která je kolmá na osu výchozí paraboly. Rotační paraboloid je definován jako g. m. b. v prostoru, které mají od daného bodu F a od dané roviny ϱ vzdálenosti sobě rovné.

Při našich úvahách o g. m. b. v prostoru se nám vyskytnou *kuželosečky*, jejichž ohniskové definice znáte, které tu však vzniknou jako *rovinné průseky na kvadrikách*. Uveďme zde aspoň některé věty, a to bez důkazů (příslušná odůvodnění najde čtenář v [3]).

Rotační válcová plocha V (o ose v přímce o) a rovina σ dává v průseku vznik:

a) *dvěma přímkám* plochy V, je-li $\sigma \parallel o$, pokud rovina σ není tečnou rovinou plochy V anebo pokud rovina σ nemá takovou polohu, že by neměla s plochou V žádný společný bod;

b) *kružnici*, je-li rovina σ kolmá k přímce o;

c) *elipse*, je-li rovina σ kosá k přímce o.

Na rotační kuželové ploše K (o ose v přímce o) může v rovině σ vzniknout průsek:

a) složený ze *dvou přímek* plochy K, prochází-li rovina σ vrcholem plochy K (rovina σ je v tomto případě tzv. vrcholovou rovinou kuželové plochy K), pokud však rovina σ není tečnou rovinou plochy K anebo pokud rovina σ nemá takovou polohu, že by s plochou K neměla kromě vrcholu žádný jiný společný bod;

není-li rovina σ vrcholovou rovinou plochy K, potom vznikne:

b) *elipsa* (ve zvláštním případě kružnice), je-li rovina σ různoběžná se všemi přímkami plochy K,

c) *hyperbola*, je-li rovina σ rovnoběžná právě se dvěma přímkami plochy K,

d) *parabola*, je-li rovina σ rovnoběžná právě s jednou přímkou plochy K.

V naší knížce půjde v podstatě o řešení příkladů g. m. b. v prostoru vybraných tak, aby vás mohly zaujmout i poučit. Geometrické myšlení pěstované studiem planimetrických útvarů si tím rozšíříte a hlavně prohloubíte. Pro názornost budeme často používat vedle pravoúhlých průmětů také náčrtů prostorových útvarů sestrojovaných v známém *volném rovnoběžném zobrazení*. Tyto náčrty vám usnadní porozumění vztahům mezi prostorovými útvary a pomohou vám i v dalším rozvoji prostorové představivosti. Některé příklady g. m. b. jsou ponechány jako úlohy doprovázené aspoň částečnými výsledky k řešení vám samotným. Na konci knížky uvedeme *literaturu*, která jednak obsahuje hojně dalších úloh na vyšetřování g. m. b. v prostoru, jednak doplňuje teoretické poznatky v textu použité a nedokazované. Tuto literaturu vám doporučujeme k dalšímu studiu.

2. kapitola

NĚKTERÁ ANALOGICKÁ G. M. B. V ROVINĚ A V PROSTORU

Především je třeba, abyste si uvědomili, že právě tak jako při vyšetřování g. m. b. v rovině, musí být i při vyšetřování g. m. b. v prostoru dokazovány vždycky dvě věty:

a) *každý bod, který má danou vlastnost V, náleží určitému geometrickému útvaru G, o němž chceme dokázat, že je hledaným g. m. b.,*

b) *každý bod, který náleží útvaru G, má vlastnost V. Pak teprve platí, že útvar G je hledaným geometrickým místem.*

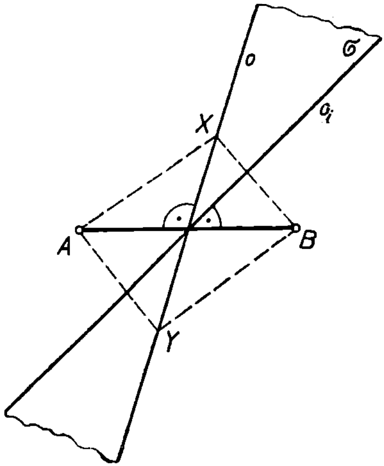
Všimněme si nyní některých g. m. b. v prostoru v souvislosti s příslušnými g. m. b. v rovině a ukažme postup vyšetřování nejdříve na nejjednodušším příkladě.

1. Víme, že v rovině platí věta: G. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B vzdálenosti sobě rovné, je osa úsečky AB.

Vyšetřme v prostoru *g. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B sobě rovné vzdálenosti.* Je to rovina σ kolmá k přímce AB a procházející středem úsečky AB, tj. rovina souměrnosti bodů A, B.

Důkaz. Nechť o určitém bodu X v prostoru, který neleží na přímce AB, platí vztah $AX = BX$. Potom body A, B, X určují rovinu ϱ. V této rovině, jak víte, náleží bod X přímce o, která je osou úsečky AB, a obráceně, každý další bod Y zvolený na přímce o, má od daných bodů A, B vzdálenosti sobě rovné.[2]) Přímka o je tedy v rovině ϱ g. m. b., které mají od bodů A, B sobě rovné vzdálenosti.

Můžeme však také v každé jiné rovině ϱ_i[3]) proložené



Obr. 1

[2]) Tuto vlastnost můžeme pro body Y dokázat ze shodných trojúhelníků pravoúhlých $\triangle AYS \cong BYS$, kde bod $S \equiv AB.o$ je střed úsečky AB. V trojúhelnících $\triangle AYS$, $\triangle BYS$ totiž platí: $\sphericalangle ASY = \sphericalangle BSY$, $SY \equiv SY$. Bod S má ovšem také dokazovanou vlastnost.

[3]) Indexu i používáme zde pro vyloučení omylu k označení libovolného útvaru množiny (zde např. roviny ϱ_i) vedoucího k bodům g. m. b. (zde roviny σ na přímkách o_i). Písmeno i zde použité neznamená přirozené číslo, protože prvky opatřené indexem i, jako např. roviny ϱ_i, přímky o_i, netvoří obyčejně v našich úlohách spočetné množiny.

přímkou AB (v rovině ϱ_i tzv. svazku rovin o ose v přímce AB) určit přímku o_i, která je opět osou úsečky AB (viz obr. 1). Všecky přímky o_i vyplňují, jak známo, rovinu σ kolmou k AB, procházející středem úsečky AB, tj. rovinu souměrnosti úsečky AB. O bodech roviny σ (tj. o bodech přímek o_i jako o bodech přímky o) jsme tak dokázali obě věty nahoře označené a), b). Tím je dokázáno, že rovina σ je hledaným prostorovým g. m. b.

Všimněme si, že všechny přímky o_i vyplňující rovinu σ vzniknou z přímky o jejím otáčením kolem přímky AB jakožto osy rotace, tedy určitým *shodným zobrazením.*

2. V rovině platí: G. m. b., které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný součet vzdáleností rovný $2a > AB$, je elipsa s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a.

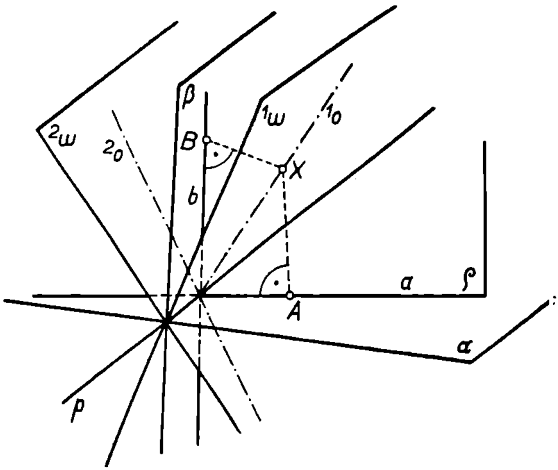
V prostoru dostáváme: *G. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B daný součet vzdáleností rovný $2a > AB$, je rotační protáhlý elipsoid ε s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a.* Přímka AB je osou rotace plochy ε.

Důkaz tohoto prostorového g. m. b. bychom provedli obdobně jako v předchozím příkladě pomocí svazku rovin o ose v přímce AB při použití otáčení jedné z rovin tohoto svazku. Proveďte sami!

Úloha 1. Určete g. m. b., které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný rozdíl vzdáleností rovný $2a < AB$. [Rotační dvoudílný hyperboloid.]

Úloha 2. Určete g. m. b., které mají od dané roviny ϱ a od daného bodu A, jenž neleží v rovině ϱ, vzdálenosti sobě rovné. [Rotační paraboloid s ohniskem v bodě A a s řídicí rovinou ϱ.]

3. V rovině platí: G. m. b., které mají od dvou daných různoběžných přímek a, b sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě přímky $o_1 \perp o_2$, a to osy souměrnosti přímek a, b (osy úhlů, které přímky a, b tvoří).



Obr. 2

Snadno přejdeme do prostoru. Platí: *G. m. b., které mají od daných dvou různoběžných rovin α, β sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě roviny ${}^1\omega \perp {}^2\omega$, a to roviny souměrnosti rovin* α, β (roviny souměrnosti klínů, které roviny α, β tvoří).[4])

[4]) *Klín* se definuje jako průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny mají společnou přímku (hranu klínu). Pro velikost úhlu a klínu platí $0 \leqq a \leqq 2R$; je-li $a = 0$, je klín *nulový*, a je-li $a = 2\,R$, je klín *přímý*.

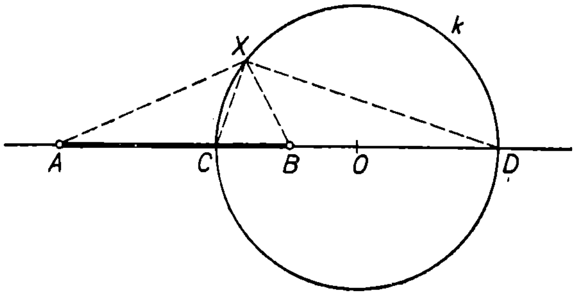
Důkaz. Nechť v prostoru pro určitý bod X, který neleží ani v rovině α ani v rovině β, platí vztah $XA = XB$, kde body A a B jsou paty kolmic sestrojených bodem X k rovinám α, β. Potom je rovina $\varrho \equiv (XAB)$ kolmá k průsečnici p rovin α, β a protíná roviny α, β v přímkách $a \equiv \alpha . \varrho$, $b \equiv \beta . \varrho$. Přímky a, b tvoří úhly, jimiž měříme velikosti daných čtyř klínů, určených rovinami α, β. (Viz obr. 2.) V rovině ϱ lze sestrojit osy souměrnosti ${}^1o$, ${}^2o$ přímek a, b a zvolený bod X je zřejmě jeden z bodů, který náleží g. m. b. tvořenému dvojicí přímek ${}^1o \perp {}^2o$. Jejich body mají od přímek a, b stejné vzdálenosti. Obdobně je tomu také v každé rovině $\varrho_i \perp p$. V ní dostaneme obdobně dvojici přímek ${}^1o_i \perp {}^2o_i$, jejichž body tvoří v ϱ_i g. m. b. požadované vlastnosti. Všecky dvojice přímek ${}^1o_i$, ${}^2o_i$ vyplňují dvě roviny ${}^1\omega \perp {}^2\omega$, jejichž body mají požadovanou vlastnost. Ze vzniku rovin ${}^1\omega$, ${}^2\omega$ vyplývá, že o jejich bodech platí, že a) každý bod, mající požadovanou vlastnost, náleží některé z rovin ${}^1\omega$, ${}^2\omega$, b) každý bod náležející rovině ${}^1\omega$ nebo ${}^2\omega$ má onu vlastnost (také ovšem body přímky p, kde jde o vzdálenosti nulové).

Připomeňme si, že každá dvojice přímek ${}^1o_i$, ${}^2o_i$, vyplňující roviny našeho prostorového g. m. b., vznikne z přímek ${}^1o$, ${}^2o$ roviny ϱ opět určitým shodným zobrazením, a to *rovnoběžným posunutím* přímek ${}^1o$, ${}^2o$ ve směru daném přímkou p.

Úloha 3. Určete g. m. b., které mají stejné vzdálenosti od dvou daných rovnoběžných (různých) rovin. [Rovina souměrnosti daných rovin s nimi rovnoběžná.]

Úloha 4. Určete g. m. b., které mají od dané roviny vzdálenost rovnou dané délce $d > 0$. [Dvě roviny s danou rovinou rovnoběžné.]

Úloha 5. Určete g. m. b., které mají od daných dvou a) různoběžných, b) rovnoběžných rovin vzdálenosti v daném poměru $0 < p : q \neq 1$. [a) Dvě roviny náležející svazku daných rovin, b) dvě roviny s danými rovinami rovnoběžné.]



Obr. 3

4. V rovině platí: G. m. b., které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný poměr vzdáleností λ, $0 < \lambda \neq 1$, je kružnice k (A, B, λ), tzv. Apolloniova. Její střed O leží na přímce AB a o krajních bodech C, D jejího průměru platí (viz obr. 3):

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \lambda \neq 1.$$

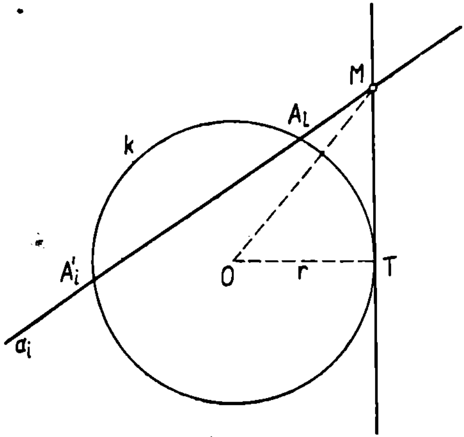
Důkaz najde čtenář v knížce: *Jaroslav Šedivý*, O podobnostech v geometrii, str. 14—16. (Škola mladých matematiků, sv. 7, 1963.)

V prostoru platí: *G. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B daný poměr vzdáleností λ,* $0 < \lambda \neq 1$, *je kulová plocha $\varkappa$ (A, B, λ) Apolloniova*, jejíž střed O leží na přímce AB a pro jejíž krajní body C, D průměru AB platí:

$$|(ABC)| = |(ABD)| = \lambda.$$

(Přitom symbol (ABC) značí tzv. *dělicí poměr* bodu C na přímce AB vzhledem k základním bodům A, B; je tedy $(ABC) = AC : BC$.)

Důkaz této věty se provede pomocí svazku rovin o ose v přímce AB a plochu $\varkappa$ dostaneme otáčením Apolloniovy kružnice k (A, B, λ) kolem přímky AB. Proveďte sami!



Obr. 4

Úloha 6. Je dána rovina ϱ a mimo ni dva různé body A, B; přitom přímka AB není kolmá k ϱ. Určete v rovině ϱ g. m. b., jichž spojnice s body A, B mají od roviny ϱ stejné odchylky $\neq 90°$. [Apolloniova kružnice k $(A',$ $B',$ $\lambda)$, kde body A', B' jsou pravoúhlé průměty bodů A, B do roviny ϱ a poměr $\lambda = \dfrac{A'M}{B'M} = \dfrac{AM}{BM}$ (body M náležejí kružnici k). V případě, že dané body A, B jsou od dané roviny ϱ stejně vzdáleny, je hledaným g. m. b. osa úsečky $A'B'$.]

Poznámka. Pro vyšetřování některých g. m. b. v prostoru budeme později potřebovat pojem tzv. *mocnosti bodu ke kulové ploše;* proto si zde tento pojem vysvětlíme.

Začneme opět s obdobným pojmem v rovině. Je-li dána kružnice k a v její rovině bod M, pak víme, že o kružnici k (O, r) a bodu M platí důležitá planimetrická vlastnost, která dochází hojného užití při konstruktivních úlohách o kružnici, a která vyjadřuje tzv. mocnost bodu M ke kružnici k. Viz obr. 4.

Sestrojíme-li bodem M sečny a_i kružnice k a označíme-li A_i, A'_i společné body kružnice k a sečen a_i, pak platí o velikostech úseček MA_i, MA'_i vztah

$$(*) \qquad MA_i . MA'_i = MO^2 - r^2 \ (= \text{konst.}).$$

Číslo $MO^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k.[5]) Důkaz vztahu (*) viz v knížce *J. Šedivého*, citované v odst. 4 na str. 23—24.

Nyní snadno dokážeme platnost prostorového vztahu, který vyjadřuje mocnost bodu M ke kulové ploše $\varkappa$ (O, r).

Plochu $\varkappa$ můžeme vytvořit otáčením kružnice k (O, r) kolem osy MO, takže vztah (*) platí hned také pro všechny kružnice plochy $\varkappa$, vzniklé otáčením kružnice k kolem osy MO (za předpokladu $M \not\equiv O$) a číslo $MO^2 - r^2$ udává i mocnost bodu M k ploše $\varkappa$. Je-li $M \equiv O$, otáčíme kružnici k kolem libovolné přímky procházející bodem O.

Než přistoupíme k dalším výkladům, bude prospěšné, když čtenář sám rozřeší následující úlohy, jejichž výsledky v dalším použijeme.

[5]) Je-li $MO > r$, tj. leží-li bod M vně kružnice k, je mocnost $MO^2 - r^2$ bodu M kladné číslo rovné MT^2, druhé mocnině délky tečny sestrojené z bodu M ke kružnici k; je-li $MO = r$, tj. leží-li bod M na kružnici k, je jeho mocnost rovna nule; je-li $MO < r$, tj. leží-li bod M uvnitř kružnice k, je jeho mocnost záporné číslo.

Úloha 7. Určete g. m. středů kulových ploch, které procházejí danými třemi body $A \neq B \neq C$. [Přímka kolmá k rovině $\varrho \equiv (ABC)$, která prochází středem kružnice opsané trojúhelníku $\triangle ABC$.]

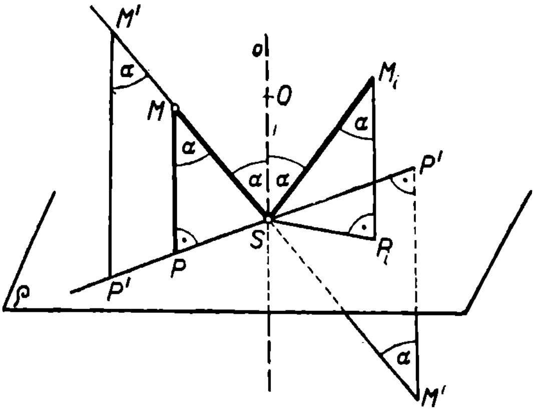
Úloha 8. Jsou dány rovnoběžné roviny ϱ, σ ($\varrho \neq \sigma$). Určete g. m. středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod v rovině ϱ a druhý krajní bod v rovině σ. [Rovina souměrnosti $\omega \parallel \varrho$ ($\parallel \sigma$) rovinové vrstvy (ϱ, σ) určené rovinami ϱ, σ.]

Úloha 9. Jsou dány mimoběžné přímky a, b. Určete g. m. středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod na přímce a, druhý krajní bod na přímce b. [Rovina σ souměrnosti nejkratší příčky XY daných mimoběžek ($\sigma \perp XY$), srovn. s obr. 7.]

3. kapitola

DALŠÍ PŘÍKLADY G. M. B. V PROSTORU

1. *Je dána rovina ϱ a v ní bod S. Určete g. m. b., které mají stálý poměr vzdáleností od roviny ϱ a od bodu S, rovný danému kladnému číslu $\lambda < 1$.*



Obr. 5

Řešení. Nechť o bodu M platí pro úsečky MP a MS vztah

$$(*) \qquad MP : MS = \lambda,$$

kde bod P je pata kolmice sestrojené bodem M k rovině ϱ. Protože je $\lambda < 1$, je $P \not\equiv S$. (Viz obr. 5.) Bod M náleží tedy hledanému g. m. b. a zřejmě i každý další bod M' přímky MS (až na bod S) náleží tomuto g. m. b. To vyplývá z vlastnosti podobných pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MSP \sim \triangle M' S P'.$$

V nich označme α velikost úhlu při vrcholu M resp. M', což je vzhledem k vztahu (*) známé číslo, neboť $\cos \alpha = \lambda$. Sestrojíme-li bodem S přímku $o \perp \varrho$, pak i úhel $\sphericalangle OSM = \alpha$ (bod $O \neq S$ je libovolně zvolený bod na přímce o). To znamená: Každý bod M, který má vlastnost požadovanou v úloze, náleží rotační ploše kuželové K o vrcholu v bodě S a ose kolmé k rovině ϱ; úhly tvořících přímek plochy K vzniklé rotací kolem přímky o svírají s osou plochy úhly velikosti α, přičemž $\cos \alpha = \lambda$.

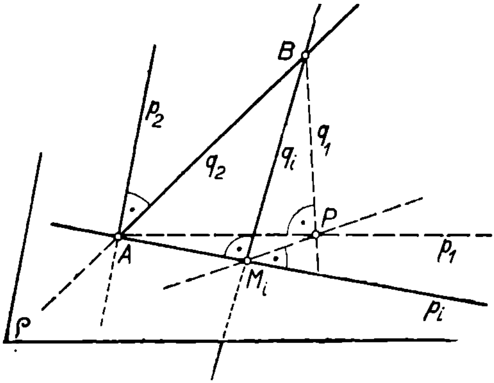
Obráceně, zvolíme-li libovolný bod $M_i \neq S$ na kuželové ploše K, pak bod M_i má vlastnost předepsanou v úloze a náleží tedy našemu g.m. b. To vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle M_iSP_i$ (viz obr. 5), v němž velikost úhlu $\sphericalangle P_iM_iS$ je α a v němž platí vztah $M_iP_i : M_iS = \lambda$. Proto: *G. m. b., které mají daný poměr λ vzdáleností od roviny ϱ a od jejího bodu S, je rotační plocha kuželová K s vyloučením jejího vrcholu S.*

Má-li mít úloha řešení, musí být $0 < \lambda < 1$, což odpovídá tomu, že ze všech úseček, které spojují bod M (neležící na přímce o) s body roviny ϱ, je délka MP kolmice k rovině ϱ nejkratší.

Úloha 10. Jak by vypadalo g. m. b. v předchozím příkladě, kdyby dané číslo $\lambda = 1$? [Přímka o s vyloučením bodu S.]

2. *Je dána rovina ϱ, v ní bod A a mimo ni bod B. Určete g. m. b. společných přímkám p_i, které tvoří v rovině ϱ svazek* *o středu v bodě A, a přímkám q_i, které procházejí bodem B a z nichž každá je kolmá k příslušné přímce p_i.*

Řešení. Hledané g. m. b., jestliže existuje, obsahuje zřejmě jenom body M, které leží v rovině ϱ.

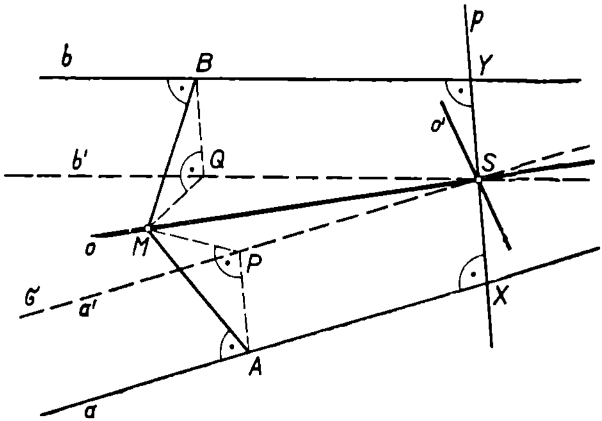


Obr. 6

Nejprve předpokládejme, že kolmice, sestrojená bodem B k rovině ϱ, protíná ϱ v bodě $P \neq A$ (viz obr. 6). Bod P je jeden bod našeho g. m. b., neboť zvolíme-li přímku $p_1 \equiv AP$, potom je příslušná přímka $q_1 \equiv BP$. Rovněž bod A je bodem našeho g. m. b., protože sestrojíme-li bodem A přímku $p_2 \perp p_1$, dostaneme na příslušné přímce $q_2 \perp p_2$ bod $M_2 \equiv A$. Dále zvolme v rovině ϱ přímku $p_i \neq AP$ a sestrojme v rovině (Bp_i) přímku $q_i \perp p_i$. Průsečík $M_i \equiv p_i . q_i$ je dalším bodem našeho g. m. b. Snadno dokážeme, že přímka PM_i je kolmá k přímce $p_i \equiv AM_i$. Je totiž $AM_i \perp BM_i$ (podle sestrojení daného podmínkou úlohy) a $AM_i \perp BP$ (protože je $BP \perp \varrho$). Odtud vyplývá, že je $AM_i \perp (BM_iP)$, a je tedy $AM_i \perp PM_i$. Vyplní tedy body M_i v rovině ϱ Thaletovu kružnici k, sestrojenou nad průměrem AP.

Jestliže obráceně zvolíme libovolný bod $M_i \neq A$, $M_i \neq P$ na kružnici k, pak platí

$AM_i \perp PM_i$ (bod M_i leží na k), $AM_i \perp BP$ (protože je $BP \perp \varrho$), a tedy je i $AM_i \perp (BPM_i)$ a proto je $AM_i \perp BM_i$.



Obr. 7

Protože také body A, P kružnice k náležejí hledanému g. m. b., dokázali jsme větu: *G. m. b.* $M_i \equiv p_i . q_i$ $(p_i \perp q_i)$ *je Thaletova kružnice k.*

Ve zvláštním případě, který jsme zpočátku vyloučili, kdyby splynul bod P s daným bodem A, tj. kdyby přímka AB byla kolmá k dané rovině ϱ, pak g. m. b. naší úlohy bude zřejmě pouze bod A.

Úloha 11. Je dána přímka p a mimo ni bod A. Určete g. m. b. společných rovinám ϱ_i svazku rovin o ose p a přímkám q_i, které procházejí bodem A, a je-li $q_i \perp \varrho_i$. [Kružnice Thaletova ležící v rovině $\sigma \perp p$; σ prochází bodem A.]

3. *Je dána rovina σ a dvě mimoběžné přímky a, b, které jsou rovnoběžné s rovinou σ a které mají od roviny σ stejnou vzdálenost. Určete v rovině σ g. m. středů kulových ploch $\varkappa$, které se dotýkají daných přímek a, b.*

Řešení. Jestliže bod M (viz obr. 7) roviny σ je středem kulové plochy $\varkappa$, která se dotýká přímek a, b, potom je přímka MA kolmá k přímce a (bod A je pata kolmice MA na přímce a), přímka MB je kolmá k přímce b (bod B je pata kolmice MB na přímku b) a je $MA = MB$. Takový bod M lze snadno sestrojit. Sestrojme dále kolmice $AP \perp \perp a'$, $BQ \perp b'$, kde přímky a', b' jsou pravoúhlé průměty přímek a, b do roviny σ. Protože je $AP = BQ$ a o úhlech $\sphericalangle APM$, $\sphericalangle BQM$ platí

$$\sphericalangle APM = \sphericalangle BQM = \mathrm{R},$$

jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle MAP$, $\triangle MBQ$, které mají shodné přepony $MA = MB$ a shodné odvěsny $AP = BQ$, navzájem shodné. Proto je $MP = MQ$. Leží tedy bod M roviny σ na ose o úhlu přímek a', b'.

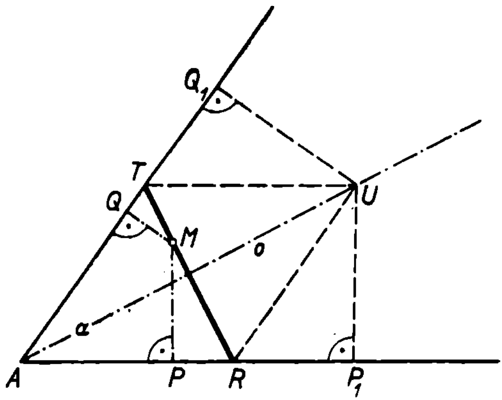
Obráceně, zvolíme-li na jedné z os $o \perp o'$ přímek a', b' libovolný bod M_i, pak ze shodných pravoúhlých trojúhelníků $\triangle M_iA_iP_i$, $\triangle M_iB_iQ_i$ snadno dokážeme, že z bodu M_i jakožto středu lze sestrojit kulovou plochu $\varkappa_i$, která se dotýká přímek a, b. Zřejmě i z bodu $S \equiv o . o'$ lze sestrojit určitou kulovou plochu naší úlohy.

Tím jsme dokázali, že *g. m. středů kulových ploch $\varkappa$ požadovaných v naší úloze jsou osy o, o' přímek a', b'.*

4. *Je dán klín K o úhlu velikosti α, $0 < \alpha < 2\,\mathrm{R}$, a kladné* *číslo s. Určete g. m. b., které náležejí klínu K a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu K je konstantní, rovný s.*

Řešení. Nechť bod M vyhovuje podmínce naší úlohy, tj. o jeho vzdálenostech $MP = v_1$, $MQ = v_2$ od rovin stěn klínu K (viz obr. 8) platí vztah

$$v_1 + v_2 = s. \tag{1}$$



Obr. 8

Protože přímky MP, MQ jsou kolmé k hraně a klínu K, určují rovinu ω kolmou k přímce a. V rovině ω dostáváme jako průnik roviny ω a klínu K úhel $\sphericalangle PAQ$, kde bod A je průsečík $\omega . a$.

Nyní řešme planimetrickou úlohu: V úhlu $\sphericalangle PAQ$ máme určit g. m. b., jejichž součet vzdáleností od ramen úhlu $\sphericalangle PAQ$ je konstantní, rovný s.

Bod M je jeden takový bod. Pokus s několika body M_i přivede nás k tomuto řešení:

Bodem M veďme mezi rameny úhlu $\sphericalangle PAQ$ úsečku kolmou na osu o úhlu $\sphericalangle PAQ$; její koncové body označme: R na AP, T na AQ. V pravoúhlých trojúhelnících $\triangle MRP$ a $\triangle MTQ$ jsou úhly $\sphericalangle RMP = \sphericalangle TMQ = \frac{1}{2}\alpha$ (ramena těchto ostrých úhlů jsou kolmá na ramena ostrých úhlů $\sphericalangle uAP = \sphericalangle uAQ = \frac{1}{2}\alpha$), takže je

$$v_1 = MR.\cos\tfrac{1}{2}\alpha,\ v_2 = MT.\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Proto o úsečce RT platí:

$$RT = MR + MT = (v_1 + v_2)\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s}{\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

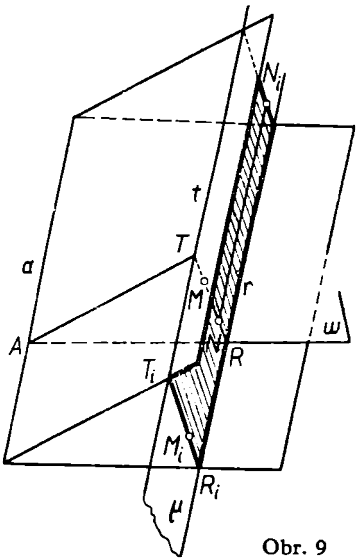
tj. že je konstantní délky a pro daný úhel velikosti α a daný součet vzdáleností s jediná, a lze ji snadno sestrojit.[6]) Z naší úvahy vyplývá: a) Platí-li o bodu M vztah (1), pak bod M náleží úsečce RT, b) leží-li bod M na úsečce RT, potom o jeho vzdálenostech v_1, v_2 od ramen úhlu $\sphericalangle PAQ$ platí vztah (1). Je tedy hledaným g. m. b. úsečka RT.

Nyní už snadno přejdeme k řešení naší úlohy v prostoru, a to s pomocí shodného zobrazení, v tomto případě s pomocí rovnoběžného posunutí úsečky RT ve směru přímky a. Proto sestrojíme přímkou RT rovinu μ rovnoběžnou s přímkou a. Rovina μ protne roviny aP, aQ stěn klínu K (viz obr. 9) v přímkách $r \parallel t \parallel a$, které určují přímý pás $P \equiv (r, t)$. Sestrojíme-li nyní libovolný bod M_i, jehož vzdálenosti od stěn klínu K vyhovují podmínce naší úlohy, lze bodem M_i proložit rovinu $\omega_i \perp a$ a v ní bodem M_i úsečku $R_iT_i \;\#\; RT$. Úsečka R_iT_i, vzniklá zmíněným posunutím z úsečky RT, tvoří v rovině μ g. m. b., které

[6]) Úsečku RT sestrojíme jako úhlopříčku kosočtverce $ARUT$, jehož vrchol U protilehlý k vrcholu A dostaneme jako bod ležící uvnitř úhlu $\sphericalangle PAQ$ a vzdálený od přímky AP i AQ o délku rovnou $s = P_1U = Q_1U$.

mají vlastnost požadovanou v naší úloze, a náleží zřejmě uvažovanému pásu P a s ní i zvolený bod M_i.

Obráceně: Každý jiný bod N_i pásu P, jehož vzdálenosti od rovin stěn klínu K jsou v_i, v'_i, má vlastnost požadovanou



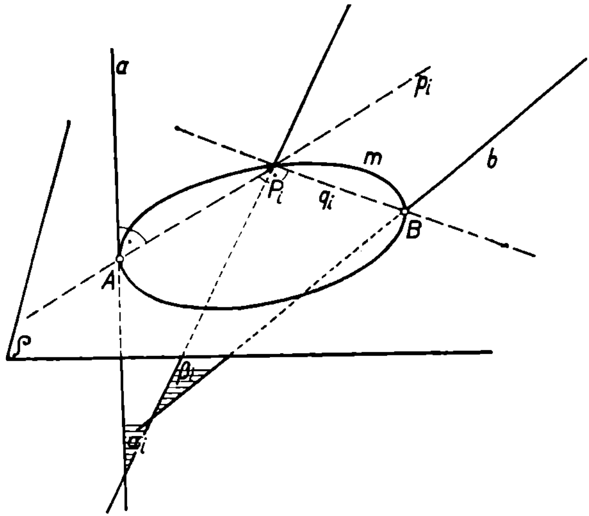
Obr. 9

v naší úloze, tj. platí vztah: $v_i + v'_i = s$. Bod N_i vznikl totiž z určitého bodu N úsečky RT zmíněným posunutím.

Proto nakonec platí: *G. m. b., které náležejí klínu a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu* K *je roven danému číslu* s, *je přímý pás* P roviny μ určený přímkami r, t.

Úloha 12. Určete g. m. b., jejichž součet vzdáleností od daných dvou různoběžných rovin je konstantní, rovný kladnému číslu s. [Jsou to čtyři přímé pásy tvořící stěny přímé hranolové plochy s obdélníkovým řídicím mnohoúhelníkem a s osou rovnoběžnou s průsečnicí daných rovin.]

5. *Jsou dány dvě přímky $a \neq b$ a rovina ϱ, která je kolmá k přímce a. Každé rovině β_i svazku rovin o ose b přiřaďme ve svazku rovin o ose a rovinu α_i, která je kolmá k rovině β_i.*



Obr. 10

Určete g. m. b. společných rovinám ϱ, α_i, β_i. Rozlište různé polohy přímky b vzhledem k rovině ϱ.

Řešení. *Případ* [1]. Nechť přímka b je různoběžná s rovinou ϱ a průsečíky přímek a, b s rovinou ϱ jsou body $A \neq B$ (viz obr. 10). Průsečnice rovin α_i s rovinami β_i jsou přímky $p_i \equiv \alpha_i . \varrho$ svazku o středu v bodě A a průsečnice rovin β_i s rovinou ϱ tvoří svazek přímek $q_i \equiv \beta_i . \varrho$ o středu v bodě B. Hledané g. m. b. naší úlohy jsou tedy body $P_i \equiv p_i . q_i$.

Každá rovina α_i obsahuje přímku a a určitou přímku p_i. Příslušná rovina β_i, kolmá k rovině α_i, obsahuje jistou přímku c, která prochází bodem B a která je kolmá k rovině α_i. Proto přímka c je kolmá k přímce a; leží tedy přímka c v rovině ϱ a je tedy $c \equiv q_i$. Protože však je přímka c kolmá i k přímce p_i roviny α_i, je $q_i \perp p_i$. Hledané body $P_i \equiv p_i . q_i$ vyplní proto v rovině ϱ *Thaletovu kružnici m*, sestrojenou nad průměrem AB.

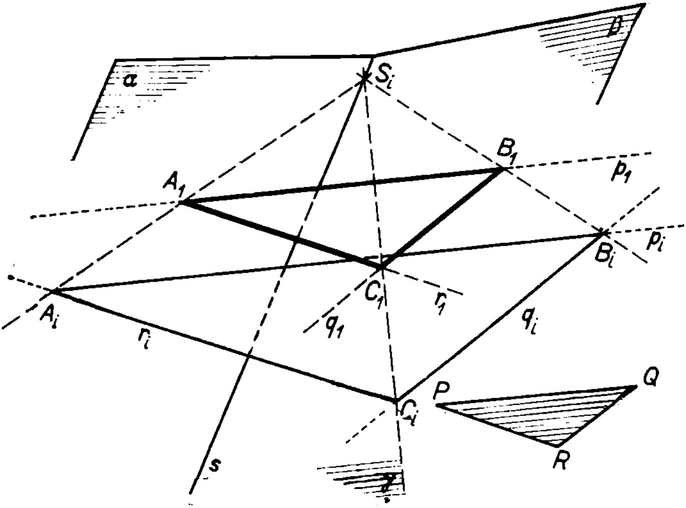
Případ [2]. Přímka b je různoběžná s rovinou ϱ a protíná ji v bodě $B \equiv A$. Tu každá dvojice rovin α_i, β_i má s rovinou ϱ společný právě jen bod A. Hledaným g. m. b. je tedy *pouze bod A*.

Případ [3]. a) Přímka b je rovnoběžná s rovinou ϱ (ale neleží v rovině ϱ). V tomto případě je přímka a kolmá k přímce b, takže ke všem rovinám β_i svazku o ose v přímce b je kolmá jediná rovina α_0, která obsahuje přímku a; α_0 je kolmá k přímce b. G. m. b. společných rovinám ϱ, α_0, β_i (s vyloučením roviny $\beta_0 \parallel \varrho$) je *přímka* $m_0 \equiv$ $\equiv \varrho . \alpha_0$.

b) Kdyby přímka b ležela v rovině ϱ, pak naše g. m. b. je *celá rovina* ϱ.

6. *Jsou dány dvě roviny $\alpha \not\equiv \beta$ a trojúhelník $\triangle PQR$, přičemž žádná jeho strana není rovnoběžná ani s rovinou α ani s rovinou β. Určete g. m. vrcholů C trojúhelníků ABC, jestliže vrchol A každého z nich leží v rovině α, vrchol B v rovině β a jestliže pro jeho strany platí: $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$.*

Řešení. *Případ* [1]: Nechť dané roviny α, β jsou různoběžné o společné průsečnici s. Zvolme přímku $p_1 \parallel PQ$ a ta nechť protíná rovinu α resp. β v bodě A_1 resp. B_1, přitom je $A_1 \neq B_1$. Potom veďme přímku $q_1 \parallel QR$ bodem B_1 a přímku $r_1 \parallel RP$ bodem A_1 (viz obr. 11). Vznikne trojúhelník $\triangle A_1B_1C_1$, jehož rovina je rovnoběžná s rovinou (PQR). Jeho vrchol C_1 je jedním bodem hledaného



Obr. 11

g. m. b. naší úlohy. Bod C_1 nepadne na přímku s, neboť ani úsečka PR ani úsečka QR není rovnoběžná s rovinami α, β. *Bod C_1 s přímkou s určují rovinu γ*, o níž dokážeme, že *s vyloučením bodů přímky s je hledaným g. m. b. C.*

a) Nejprve dokážeme, že každá přímka $p_i \parallel PQ$ bez společného bodu s přímkou s vede k bodu C_i, který leží v rovině γ (ne však na přímce s). Nechť tedy přímka p_i (různá od p_1) protíná rovinu α resp. β v bodě A_i resp. B_i

a rovina (p_i, p_1) přímku s v bodě S_i. Potom přímka $r_i \parallel r_1$ vedená bodem A_i a přímka $q_i \parallel q_1$ vedená bodem B_i určují dvě roviny (r_i, S_i), (q_i, S_i) s průsečnicí $S_i C_1$; na přímce $S_i C_1$ leží i bod C_i, jakožto společný bod tří rovin (r_i, S_i), (q_i, S_i), (p_i, p_1). Leží tedy bod C_i v rovině γ.

b) Obráceně: Zvolme v rovině γ libovolný bod $C \neq C_i$, ($C \neq C_1$), který neleží na přímce s, a sestrojme přímku $C C_1$; ta nechť protne přímku s v bodě S. Snadno dokážeme obráceným postupem úvahy provedené v a), že lze pro bod C sestrojit $\triangle ABC$ se stranou $CA \parallel RP$ a $CB \parallel RQ$ s vrcholy A resp. B v rovině α resp. β. (Úvahu možno sledovat na obr. 11 s pomocí bodu C_i místo C a bodu S_i místo S.)

Bod C nemůžeme volit na přímce s, neboť by pak přímky CA, CB měly ležet v rovině α resp. β, protože bod A má být v rovině α a bod B v rovině β, takže by úsečky RP ($\parallel CA$), RQ ($\parallel CB$) byly rovnoběžné s rovinou α resp. β, což odporuje textu naší úlohy.

Všimněme si ještě, že náš předpoklad o existenci bodu S ležícího na přímce s není pro důkaz podstatný, neboť kdyby byla přímka CC_1 rovnoběžná s přímkou s, přešla by jehlanová plocha $S_iA_1B_1C_1$, vzniklá za existence bodu S_i, v tomto případě v plochu hranolovou obsahující body $A_1B_1C_1$ s tvořícími přímkami směru s.

Případ [2]: Jsou-li dané roviny rovnoběžné, tj. $\alpha \parallel \beta$, pak zcela obdobnou cestou dokážeme, že g. m. b. C je rovina $\gamma \parallel \alpha \parallel \beta$, kterou určíme jedním bodem C_1, který sestrojíme jako v případě [1]. Příslušnou úvahu ponecháme čtenáři.

Poznámka. Trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_iB_iC_i$ tvoří v prostoru dvojice trojúhelníků stejnolehlých o středu stejnolehlosti v bodě S_i (v případě [1]). V případě [2] jsou všechny trojúhelníky $A_iB_iC_i$ shodné.

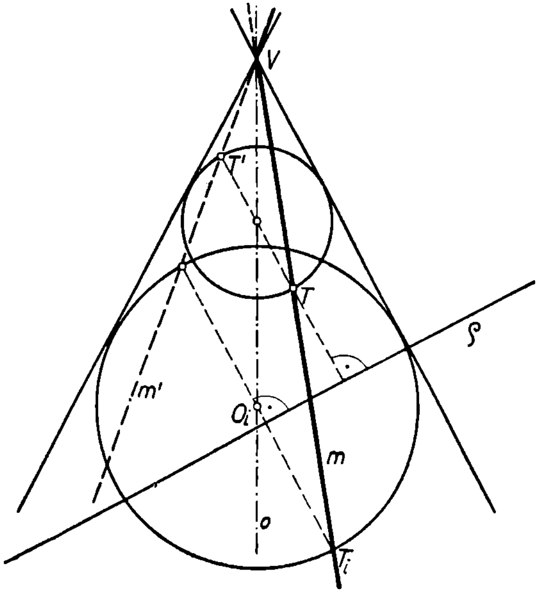
Úloha 13. Je dána přímka a, rovina β neobsahující přímku a a trojúhelník $\triangle PQR$, jehož žádná strana není rovnoběžná ani s přímkou a ani s rovinou β. Určete g. m. vrcholů C trojúhelníků $\triangle ABC$, jestliže vrchol A každého z nich leží na přímce a, vrchol B v rovině β a o jehož stranách platí: $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$. [Jestliže: a) přímka a a rovina β jsou různoběžné, potom g. m. vrcholů C je přímka procházející bodem $P \equiv a . \beta$ s vyloučením bodu P; b) jestliže přímka a je rovnoběžná s β (nejsou však podle textu úlohy incidentní), je g. m. vrcholů C přímka rovnoběžná s a, určená jedním bodem C_1, který splňuje podmínky úlohy a jejž snadno sestrojíme.]

7. *Je dána rotační kuželová plocha K a rovina ϱ. Do plochy K jsou vepsány kulové plochy $\varkappa_i$. Určete g. m. b. dotyku těch tečných rovin τ_i ploch $\varkappa_i$, jsou-li roviny τ_i rovnoběžné s rovinou ϱ.*

Řešení. Kulové plochy $\varkappa_i$ vepsané ploše K jsou, jak známo, navzájem v dvojicích stejnolehlé (homotetické) v stejnolehlosti (homotetii) S se středem stejnolehlosti ve vrcholu V plochy K. Středy O_i ploch $\varkappa_i$ vyplňují osu o plochy K (až na bod V) a dotykové body T_i tečných rovin τ_i ploch $\varkappa_i$ rovnoběžných s rovinou ϱ leží na kolmicích vedených body přímky o k rovině ϱ.

Rozeznávejme dva případy: *Případ* [1]. Nechť daná rovina není kolmá k ose o plochy K. Dotykové body T_i leží v rovině $\sigma \perp \varrho$ proložené přímkou o a odpovídají sobě v stejnolehlosti S, jakožto diametrálně protilehlé body na plochách $\varkappa_i$, takže leží na dvou přímkách m, m' stejnolehlosti v rovině σ a procházejí bodem V. Přímky m, m' snadno určíme, sestrojíme-li na jedné ploše $\varkappa$ vepsané do plochy K příslušné dotykové body T, T' tečných rovin rovnoběžných s rovinou ϱ. Potom je $m \equiv VT$, $m' \equiv VT'$ (viz obr. 12).

Obráceně, zvolíme-li na m (nebo na m') libovolný bod T_i (nebo T'_i) různý od V, lze sestrojit plochu $\varkappa_i$ se středem O_i (nebo $\varkappa'_i$ se středem O'_i), vedeme-li v rovině σ přímky $T_iO_i \perp \varrho$ (nebo $T'_iO'_i \perp \varrho$). Ze stejnolehlosti



Obr. 12

ploch $\varkappa_i$ a $\varkappa$ (nebo $\varkappa'_i$ a $\varkappa$) vyplývá, že plochy $\varkappa_i$ a $\varkappa'_i$ jsou vepsány do plochy K. Jsou tedy body T_i a T'_i body našeho g. m. b.

Proto platí: *G. m. b. dotyku ploch $\varkappa_i$ vepaných ploše K, v nichž sestrojené tečné roviny jsou rovnoběžné s rovinou ϱ, jsou přímky m, m' s vyloučením jejich společného bodu V.*

Případ [2]. Je-li ve zvláštním případě daná rovina ϱ kolmá k přímce o, pak přímky m, m' splývají s přímkou o, která (kromě bodu V) je hledaným g. m. b. dotyku.

Úloha 14. Je dána rovina α, v ní bod A a rovina ϱ. Jsou sestrojeny kulové plochy $\varkappa_i$, které se dotýkají roviny α v bodě A. Určete g. m. b. dotyku tečných rovin ploch $\varkappa_i$, které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ. [Jsou-li roviny α, ϱ různoběžné, pak dvě navzájem kolmé přímky procházející bodem A, z nichž je vyňat bod A, a ležící v rovině, která je kolmá k průsečnici rovin α a ϱ. Ve zvláštním případě obě výsledné přímky splývají.]

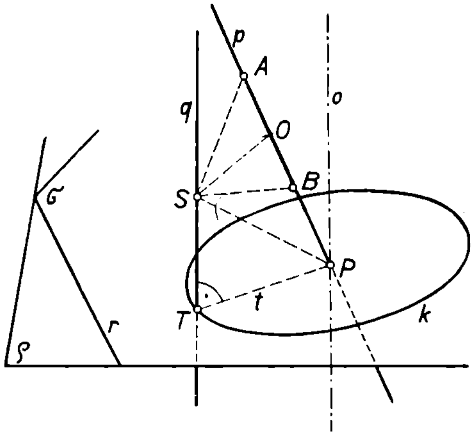
8. *Je dána rovina ϱ a uvnitř jednoho s poloprostorů vyťatých rovinou ϱ dva body A, B různě vzdálené od roviny ϱ. Určete g. m. středů kulových ploch $\varkappa_i$, které se dotýkají roviny ϱ a které procházejí body A, B* (nebo v jiné formulaci, g. m. b., které mají od roviny ϱ a bodů A, B vzdálenosti ($\neq 0$) sobě rovné).

Řešení. Nechť přímka $p \equiv AB$ protíná rovinu ϱ v bodě P. Použijeme mocnosti M bodu P ke kulovým plochám $\varkappa_i$, které procházejí body A, B. Platí vztah (viz kapitolu 2, poznámku):

$$M = PA \,.\, PB = t^2, \tag{1}$$

kde t značí délku tečen vedených z bodu P ke všem kulovým plochám, které procházejí body A, B. Délka t je vztahem (1) jednoznačně určena. Tečny PT_i ploch $\varkappa_i$, které se dotýkají roviny ϱ v bodech T_i, mají tedy dotykové body na kružnici $k \equiv (P, t)$ roviny ϱ.

Nechť tedy bod S je středem jedné z kulových ploch $\varkappa_i$. Potom a) musí být splněn vztah $SA = SB$, b) dále musí pata T kolmice z bodu S sestrojená k rovině ϱ ležet na kružnici k (viz obr. 13). Vztah a) vyžaduje, aby bod S ležel v rovině $\sigma \perp p$, a to v rovině souměrnosti bodů A, B. Aby bylo vyhověno i požadavku b), musí bod S náležet rotační válcové ploše V s řídicí kružnicí k. Proto je nutné, aby bod S byl zvolen na průseku $e = \sigma . V$. Průsekem e je,



Obr. 13

jak známo, elipsa, ve zvláštním případě kružnice, a to je-li přímka p kolmá k rovině ϱ.

Ještě dokážeme, že všecky body elipsy e náležejí poloprostoru (ϱ, A):

Podle vztahu (1) platí

$$PT = \sqrt{PA . PB}.$$

Označme O střed úsečky AB; pak je

$$PO = (PA + PB) : 2.$$

Z vlastnosti velikostí aritmetického a geometrického průměru čísel, protože je $PA \neq PB$, vyplývá nerovnost

$$\sqrt{PA \, . \, PB} < (PA + PB) : 2,$$

tj. $PO > PT$. Protože rovina $\sigma \perp AB$ prochází bodem O, platí o vzdálenosti d její průsečnice s s rovinou ϱ tím spíše, že $d > PT$, takže přímka s leží vně kružnice k a tím i všecky body elipsy e v poloprostoru (ϱ, A).

Obráceně, zvolíme-li na elipse e libovolný bod S_i, náleží rovině σ, v níž leží elipsa e, takže platí vztah: $S_iA = S_iB$. Sestrojíme-li dále bodem S_i přímku $q_i \perp \varrho$, náleží přímka q_i ploše V a protíná rovinu ϱ v bodě T_i na kružnici k. Sestrojíme-li nyní kulovou plochu $\varkappa$ o středu S_i, která prochází body A, B a má tedy poloměr $r_i = S_iA = S_iB$, pak pro mocnost M bodu P vzhledem k ploše $\varkappa$ platí jednak vztah

$$M = PA \, . \, PB = PT_i^2 \tag{1}$$

a dále vztah

$$M = (PS_i + r_i) \, . \, (PS_i - r_i) = PS_i^2 - r_i^2,$$

takže je $PS_i^2 - r_i^2 = PT_i^2$.

Ale v pravoúhlém trojúhelníku $\triangle S_iT_iP$ (viz obr. 13) platí

$$PT_i^2 = PS_i^2 - S_iT_i^2,$$

takže z posledních dvou rovnic dostáváme, že

$$PS_i^2 - ST_i^2 = PS_i^2 - r_i^2$$

a odtud

$$S_iT_i = r_i \, (= S_iA = S_iB).$$

To znamená, že kulová plocha $\varkappa$ se dotýká roviny ϱ a že náleží množině $\varkappa_i$, což jsme chtěli dokázat.

Závěr. *G. m. středů kulových ploch $\varkappa_i$, které se dotýkají dané roviny ϱ a které procházejí danými body A, B (pokud přímka AB není rovnoběžná s rovinou ϱ), je elipsa, která ve zvláštním případě, je-li $AB \perp \varrho$, je kružnicí.*

Poznámka. K řešení naší úlohy jsme mohli také použít, kromě roviny σ, rotačního paraboloidu P s ohniskem v bodě A a s řídicí rovinou ϱ (viz úlohu 2, kap. 2). Protože je možno každou rovinu (která není rovnoběžná s osou paraboloidu P) považovat za rovinu souměrnosti ohniska A paraboloidu P a určitého bodu B, je průsek této roviny s plochou P g. m. středů kulových ploch naší úlohy. Podle řešení uvedeného dříve, dospíváme tu k známé geometrické větě o průseku e roviny σ, která není kolmá k rovině ϱ, s rotačním paraboloidem:

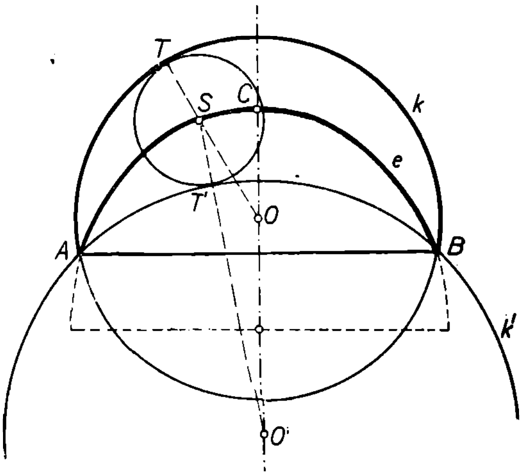
Elipsy ležící na rotačním paraboloidu promítají se kolmo na roviny, které jsou kolmé k ose paraboloidu, do kružnic (v našem případě elipsa e do kružnice k).

(Použití této věty viz v autorově stati „Užití plochy rotačního paraboloidu k řešení planimetrických úloh“ v publikaci: *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*, Cesta k vědění, svazek 47, JČMF 1944, str. 35—41.)

Úloha 15. Je dána rovina ϱ, přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod $A \not\equiv \varrho . p$. Určete g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A. [Buď elipsa nebo kružnice.]

9. *Je dána plocha P skládající se z dvou kulových vrchlíků o společné hraně: První vrchlík náleží kulové ploše K (O, r) a má výšku $v > r$, druhý vrchlík, který leží uvnitř prvního vrchlíku, náleží kulové ploše K' (O', r') a má výšku $v' < r'$. Určete g. m. středů S_i kulových ploch $\varkappa_i$, které jsou vepsány do plochy P.*

Řešení. Nechť bod S je středem jedné kulové plochy $\varkappa$ (S, x), která je vepsána do plochy P. Označme T dotykový bod plochy $\varkappa$ s plochou K a T' dotykový bod plochy $\varkappa$ s plochou K'. Potom leží bod T na přímce OS a bod T' na přímce $O'S$. Leží tedy body T, T', S v rovině ω, která



Obr. 14

obsahuje i body O, O'. Rovina ω prochází proto osou OO' rotační plochy P a určuje na ploše P její meridián (k, k') — viz obr. 14 — omezený oblouky kružnic k (O, r), k' (O', r') o společné tětivě AB. Na ploše $\varkappa$ určuje rovina ω její hlavní kružnici m (S, x).

Nyní lze naši prostorovou úlohu převést na úlohu planimetrickou v rovině ω: Hledejme g. m. středů kružnic m_i, které jsou vepsány rovinnému útvaru (k, k') jako kružnice m.

Podle obrázku 14 platí tyto vztahy:

$OS = OT - ST = r - x, O'S = O'T' + T'S = r' + x.$

Proto je

$$OS + O'S = r + r' > OO',$$

což znamená, že součet vzdáleností bodu $\dot{S}$ od daných bodů O, O' je konstantní. Odtud vyplývá, že bod S leží na oblouku ABC elipsy e, která má ohniska v bodech O, O' a která prochází body A, B. Úsečka OO' má délku, jež udává velikost dvojnásobku lineární excentricity elipsy e, a střed úsečky OO' je středem elipsy e. Tím je elipsa e určena.

Obráceně platí, že každý bod S_i, který leží uvnitř oblouku ACB (rovněž i bod C), může být středem kružnice k_i, kterou lze vepsat do útvaru (k, k'), což vyplývá z předchozích úvah.

Rotací roviny ω a oblouku ACB kolem osy $o \equiv 00'$ vytvoří oblouk ACB plochu E, a to část plochy rotačního protáhlého elipsoidu s ohnisky v bodech O, O', omezenou kruhovou hranou, která je společnou hranou daných vrchlíků. *Plocha E s vyloučením bodů své kruhové hrany je pak g. m. středů kulových ploch hledaných* v naší úloze, neboť obsahuje zřejmě středy S_i kulových ploch $\varkappa_i$, a obráceně, každý bod plochy E kromě bodů její kruhové hrany dává střed jedné kulové plochy $\varkappa_i$, jak vyplývá z předchozích úvah.

Úloha 16. Je dáno těleso T, které je průnikem dvou koulí K (O, r), K' (O', r') různých poloměrů.[7]) Určete g. m. středů kulových ploch, které jsou vepsány do tělesa T. [Část rotačního hyperboloidu dvoudílného, jehož ohniska jsou v bodech O, O'.]

[7]) Tj. za předpokladu $| r - r' | < 00' < r + r'$.

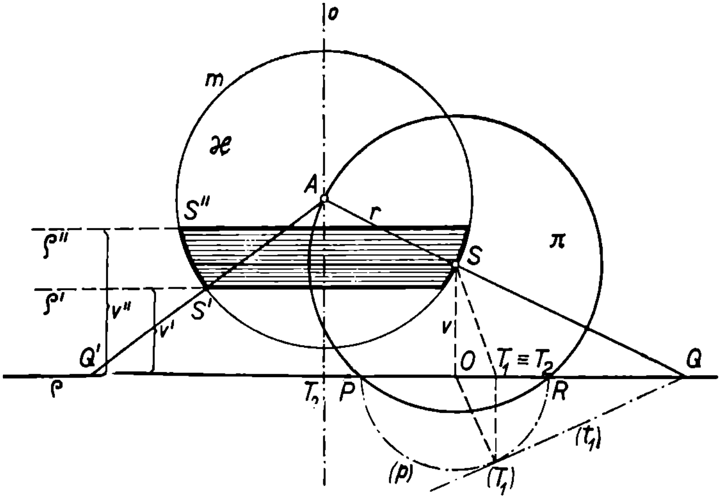
Úloha 17. Je dána polosféra na kulové ploše $\varkappa_1 \equiv (O, r)$ sestrojená nad rovinou ϱ rovníku plochy $\varkappa_1$ a kulová plocha $\varkappa_2 \equiv (O', \frac{1}{2}r)$, které se dotýká $\varkappa_1$ a ϱ. Určete g. m. středů koulí, které se dotýkají $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a ϱ. [Kružnice v rovině rovnoběžné s ϱ o středu na úsečce OO' a poloměru velikosti $r\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

10. *Je dána rovina ϱ a bod A, který má od roviny ϱ vzdálenost d $(0 < d \leqq 2r)$. Určete g. m. středů kružnic k_i daného poloměru $r > 0$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí bodem A.*

Řešení. Rovina ϱ se dotýká kružnice k, má-li s ní společný právě jeden bod. Potom i průsečnice roviny kružnice k s rovinou ϱ je tečnou kružnice k.

Střed S_i každé kružnice k_i o poloměru r, která prochází daným bodem A, má od bodu A vzdálenost $S_iA = r$. Body S_i hledaného g. m. b., pokud existují, leží tedy jedině na kulové ploše $\varkappa$ se středem v bodě A a s poloměrem velikosti r. Sestrojíme-li jeden bod S našeho g. m., pak všechny body S_i vzniklé z bodu S otočením kolem přímky o, která prochází bodem A a je kolmá k rovině ϱ, náležejí hledanému g. m. Přímka o je totiž osou nejen plochy $\varkappa$, ale i roviny ϱ. Body S_i odvozené z bodu S touto rotací vyplní na ploše $\varkappa$ kružnici ležící v rovině rovnoběžné s rovinou ϱ. Stačí tedy vyhledat body S_i na meridiánu m (viz obr. 15a) plochy $\varkappa$, který tvoří obrys pravoúhlého průmětu plochy $\varkappa$ do roviny proložené přímkou o. Z nich dostaneme potom všecky ostatní body hledaného g. m. otočením kolem přímky o.

Nechť bod S zvolený na meridiánu m plochy $\varkappa$ je tedy bodem našeho g. m. Pak přímka SA je průměrem kružnice k o středu S. Všecky kružnice o středu S a poloměru rovném r vyplní kulovou plochu π (S, r). Z nich vedou k řešení dané úlohy ty kružnice na ploše π, jež se dotýkají průsečnice své roviny σ s rovinou ϱ. Rovina σ protne tedy rovinu ϱ v tečně kulové plochy π.



Obr. 15a

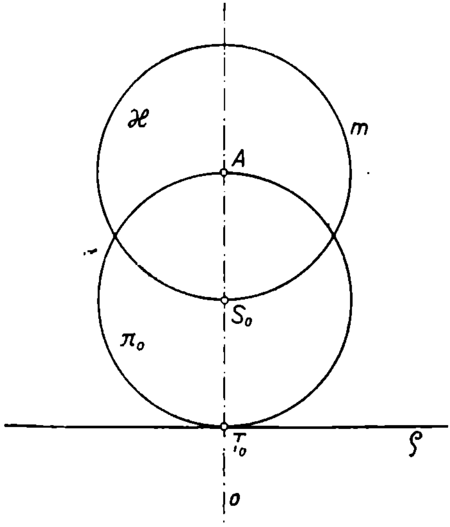
Aby bylo možno tento požadavek splnit, je třeba a stačí, aby

a) kulová plocha π měla s rovinou ϱ alespoň společný bod a aby současně

b) průsečík Q přímky AS s rovinou ϱ, jímž jde průsečnice hledané roviny σ s rovinou ϱ, neležel uvnitř koule omezené plochou π. Poznamenejme, že v případě, že bod Q neexistuje, tj. je-li $AS \parallel \varrho$, je průsečnice roviny hledané kružnice s rovinou ϱ rovnoběžná s přímkou AS.

Je tedy zřejmě nutné, aby o vzdálenosti v bodu S od roviny ϱ platilo:

Jednak a) $v \leqq r$ a dále b) $v \geqq \frac{1}{2} d$ (neboť musí platit $SQ \geqq SA$, tj. $SQ \geqq \frac{1}{2} AQ$ a proto $v \geqq \frac{1}{2} d$). Body S_i nemohou podle toho ležet vně kulového pásu omezeného



Obr. 15b

rovinami $\varrho' \parallel \varrho$, $\varrho'' \parallel \varrho$, přičemž roviny ϱ' a ϱ'', ležící v poloprostoru (ϱ, A), mají od roviny ϱ vzdálenosti $\frac{1}{2} d$ resp. r.

Odtud ihned vyplývá:

a) G. m. naší úlohy je *jediný bod* S_0 plochy $\varkappa$ v případě, kdy je $d = 2r$ (viz obr. 15 b). Všechny kružnice k_i (S_0, r), které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ v společněm bodě T_0 ($AT_0 \perp \varrho$), vyhovují požadavkům úlohy a žádné jiné.

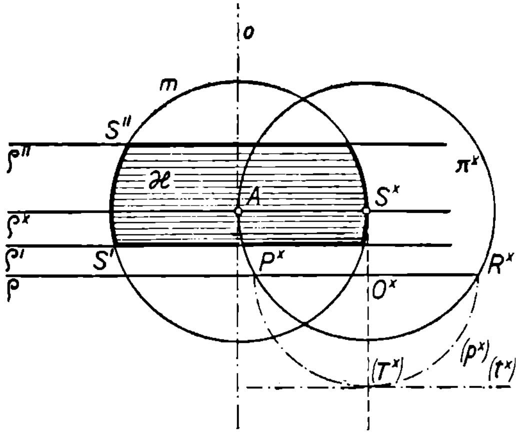
b) Jestliže je $d > 2r$, je třeba body S_i hledat jenom na té části meridiánu m plochy $\varkappa$, která náleží kulovému pásu určenému rovinami ϱ', ϱ''. A skutečně, zvolíme-li na oblouku m libovolný bod S uvnitř kulového pásu (ϱ', ϱ''), tj. ve vzdálenosti v od roviny ϱ, o níž platí $\frac{1}{2}d < v < r$, potom plocha π (S, r) protne rovinu ϱ v kružnici p. (Na obr. 15a je (p) obrazem kružnice p sklopené do roviny meridiánu m.) Dále: z bodu Q, který leží v tomto případě vně plochy π a tedy i vně kružnice p, lze vésti k p dvě tečny, t_1 a t_2, — dvě průsečnice rovin σ_1 a σ_2 s rovinou ϱ; v rovině $\sigma_1 \equiv (A, t_1)$ a $\sigma_2 \equiv (A, t_2)$ lze sestrojit dvě kružnice, k_1 a k_2, které procházejí bodem A, mají poloměr velikosti r a dotýkají se roviny ϱ, jak žádá naše úloha.

Zvolíme-li dále bod S' v rovině ϱ', tj. ve vzdálenosti $v' = \frac{1}{2}d$ od roviny ϱ, potom příslušný bod Q' padne na kružnici p' a tečna v něm sestrojená k p' je průsečnicí roviny jediné kružnice k', která vyhovuje požadavkům úlohy. Její rovina je kolmá k rovině meridiánu m.

Konečně, zvolíme-li bod S'' v rovině ϱ'', tj. ve vzdálenosti $v'' = r$ od roviny ϱ, pak plocha π'' (S'', r) se dotýká roviny ϱ v bodě T''. Rovina $\sigma_2 \equiv (AS''T'')$ je totožná s rovinou meridiánu m a v té leží také kružnice k'', jež splňuje podmínky úlohy.

Podle toho každý bod oblouku $\widehat{S'S''}$ patří vyšetřovanému g. m. Otočením oblouku $\widehat{S'S''}$ kolem osy o vznikne *kulový pás* (ϱ', ϱ'') *omezený kružnicemi plochy* $\varkappa$, *které leží v rovinách* ϱ' *a* ϱ''; ten *tvoří hledané g. m.*

Poznámka. Na obr. 15 c) je znázorněn případ b) takový, kdy naše g. m. obsahuje také rovník plochy $\varkappa$ v rovině $\varrho^\star$. Pro body $S^\star$ rovníku dostaneme dvě kružnice, ${k^\star}_1$, ${k^\star}_2$, neboť sestrojíme-li plochu $\pi^\star \equiv (S^\star, r)$ potom $\pi^\star$ nutně protne rovinu ϱ v kružnici $p^\star$ o středu $O^\star$ (její obraz na obr. 15 c) je úsečka $P^\star R^\star$). Její dvě tečny rovnoběžné s přímkou AS určují s bodem A roviny kružnic $k^\star_1, k^\star_2$, které odpovídají podmínkám naší úlohy.



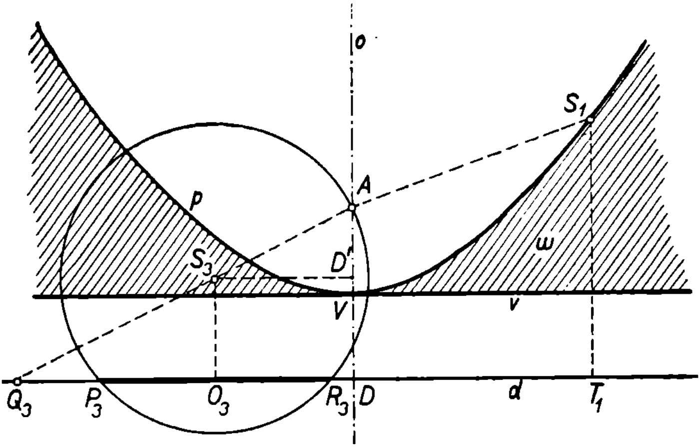
Obr. 15c

11. *Je dána rovina ϱ a bod A, jehož vzdálenost od roviny ϱ má velikost $d > 0$. Určete g. m. středů kružnic, které procházejí bodem A a které se dotýkají roviny ϱ.*

Řešení. Víme, že rovina ϱ a bod A určují plochu P rotačního paraboloidu jakožto g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a které procházejí bodem A. Přitom bod A je ohniskem a rovina ϱ řídicí rovinou paraboloidu P (viz úlohu 2 kapit. 2). Libovolná rovina μ proložená bodem A kolmo k rovině ϱ má s plochou P společnou parabolu p, která má ohnisko v bodě A a řídicí přímku v průsečnici d roviny μ s rovinou ϱ (viz obr. 16). Parabola p tvoří jeden meridán plochy P.

Protože daný útvar, tj. rovina ϱ a bod A nemění svou polohu při otáčení kolem osy o, je hledané g. m. útvarem rotačním s osou o.

Najdeme-li tedy v rovině μ středy S_i kružnic k_i, které vyhovují podmínkám naší úlohy, pak body vzniklé otočením všech bodů S_i kolem přímky o vyplní hledané g. m.



Obr. 16

Hledejme proto zatím jenom body S_i v rovině paraboly p.

a) Každý bod S_1, který leží na parabole p, náleží hledanému g. m., neboť lze z každého bodu paraboly p sestrojit kružnici k_1 (S_1, S_1A), která se dotýká přímky d, a proto i roviny ϱ, v bodě T_1 na přímce d, jak plyne z definice paraboly p.

b) Body S_2, zvolené uvnitř paraboly p, mají tu vlastnost, že jejich vzdálenosti od přímky d jsou větší než délka úsečky S_2A, takže příslušná kulová plocha π_2 (S_2, S_2A) nemá s rovinou ϱ žádný společný bod, což znamená, že body S_2 nenáležejí hledanému g. m.

c) Zvolíme-li dále bod S_3 vně paraboly p, a jak hned ukážeme, pouze v oblasti ω roviny μ, ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, náleží i bod S_3 našemu g. m. Každý bod S_3 ležící uvnitř oblasti ω má, jak známo, tu vlastnost, že jeho vzdálenost od přímky d je menší než délka úsečky S_3A. Sestrojíme-li tedy kulovou plochu π_3 (S_3, S_3A), protne rovinu ϱ v kružnici p_3 o středu O_3 (na obr. 16 je zobrazena kružnice p_3 jako úsečka P_3R_3). Přímka AS_3, pokud není rovnoběžná s přímkou d, protne rovinu ϱ (a přímku d) v bodě Q_3, který padne vně kružnice p_3. Je totiž $S_3O_3 > S_3A$ (neboť je $D'D > AD'$), a tedy bod O_3 vně plochy π_3. Z bodu Q_3 lze pak vést ke kružnici p_3 dvě tečny t_3 a t'_3 s dotykovými body T_3 a T'_3. Potom je už možno sestrojit kružnice k_3 (S_3, S_3A) a k'_3 (S_3, S_3A) v rovinách $\sigma_3 \equiv (S_3, t_3)$ a $\sigma'_3 \equiv (S_3, t'_3)$, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ, tj. její přímky t_3 resp. t'_3 v bodě T_3 resp. T'_3. Kružnice k_3 a k'_3 splňují podmínky naší úlohy, takže bod S_3 náleží hledanému g. m.

Ještě poznamenejme, že v případě, kdyby bylo $AS_3 \parallel d$, byly by příslušné tečny t_3 a t'_3 rovnoběžné s přímkou AS_3.

d) Rovněž body S_i přímky v náležejí našemu g. m.; odůvodnění je stejné jako pro body S_3 jen s tím rozdílem, že v tomto případě padne příslušný bod $Q_i \equiv S_iA.d$ na kružnici $p_i \equiv \pi_i.\varrho$, kde π_i je kulová plocha obdobná ploše π_3.

e) Zvolíme-li konečně bod S_4 uvnitř poloroviny vyťaté přímkou v, která obsahuje přímku d, nevede bod S_4 k řešení naší úlohy. Důkaz ponecháme už čtenáři.

V odstavcích a) až e) jsme uvažovali o všech bodech roviny μ, takže naše úloha je úplně řešena. Odtud vyplývá tento z á v ě r :

G. m. středů kružnic, které procházejí daným bodem A a které se dotýkají dané roviny ϱ, je část poloprostoru (ϱ', A), vyťatého vrcholovou tečnou rovinou ϱ' paraboloidu P, vzniklá z něho vyloučením všech bodů, které leží uvnitř rotačního paraboloidu P.

Body tohoto g. m. dostaneme z bodů rovinné oblasti ω, ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, rotací oblasti ω kolem přímky o, která je osou souměrnosti oblasti ω.

12. *Jsou dány dvě rovnoběžné (různé) roviny $\varrho \parallel \sigma$ a přímka p, která neleží v žádné z nich. Určete g. m. středů* a) *kulových ploch,* b) *kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p.*

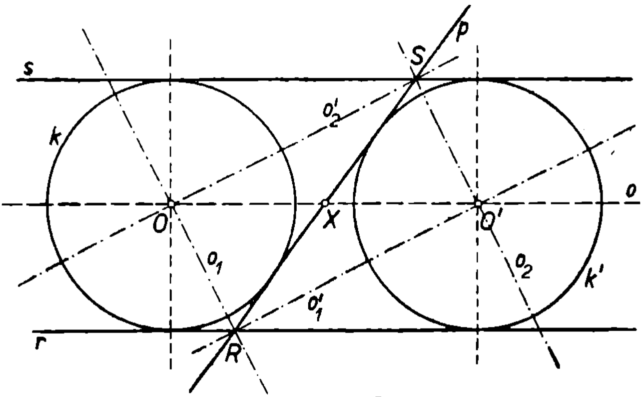
Řešení. a) Kulové plochy $\varkappa_i$, které se dotýkají dvou rovnoběžných rovin ϱ, σ, jichž vzdálenost má velikost $v > 0$, tj. jsou vepsány do rovinové vrstvy o výšce velikosti v, mají průměr rovný $v = 2r$, kde r je velikost poloměru ploch $\varkappa_i$. Středy ploch $\varkappa_i$ vyplňují rovinu $\omega \parallel \varrho$ (σ) souměrnosti dané vrstvy.

Je-li přímka p tečnou kulové plochy $\varkappa$, která má poloměr velikosti r, potom střed S plochy $\varkappa$ má od přímky p vzdálenost velikosti r. Středy S_i všech ploch $\varkappa_i$ (r), které se dotýkají přímky p, vyplní rotační válcovou plochu V o ose v přímce p a poloměru řídicí kružnice o velikosti rovné r.

Odtud plyne, že střed S_i kulové plochy $\varkappa_i$, která se dotýká rovin ϱ, σ a přímky p, leží na průseku e roviny ω a plochy V. Obráceně, zvolíme-li na průseku e libovolný bod S_i, potom jeho vzdálenost od rovin ϱ a σ i od přímky p má velikost r; lze tedy okolo bodu S_i opsat kulovou plochu $\varkappa_i$, která se dotýká roviny ϱ a σ i přímky p. Proto *g. m. b. S_i je průsek $e \equiv \omega . V$*, a to:

(1) *elipsa (nebo kružnice)* v případě, že je daná přímka p různoběžná s rovinou ϱ (i σ),

(2) *dvě přímky* (náležející ploše V) ležící v rovině ω v případě, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ a σ a leží uvnitř rovinové vrstvy (ϱ, σ).



Obr. 17

(3) Úloha *nemá řešení*, leží-li přímka $p \parallel \varrho$ (σ) vně rovinové vrstvy (ϱ, σ). Případ, kdy p leží v ϱ (nebo σ) je v textu úlohy vyloučen.

b) *Případ* (1). Nechť přímka p je různoběžná s rovinou ϱ (i σ). Je-li přímka p tečnou kružnice k, o níž předpokládáme, že vyhovuje naší úloze, leží k v rovině α proložené přímkou p. Má-li se dále kružnice k dotýkat roviny ϱ a σ, musí rovina α obsahovat dvě tečny kružnice k, které tvoří průsečnice $r \equiv \alpha . \varrho$ a $s \equiv \alpha . \sigma$; při tom zřejmě platí, že je $r \parallel s$ (viz obr. 17). Proto kružnice k je vepsána do rovnoběžného pásu (r, s) roviny α a dotýká se přímky p. Jsou tedy v rovině α dvě kružnice k (O, u) a k' (O', u), které vyhovují podmínkám úlohy. Jejich poloměr má velikost $u = \frac{1}{2} d$, kde d značí vzdálenost přímek $r \parallel s$.

Protože osy vedlejších úhlů přímek r, p a s, p jsou dvojice přímek o_1, o'_1 a o_2, o'_2 k sobě kolmých a přitom je $o_1 \parallel o_2$ a $o'_1 \parallel o'_2$, jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle ROS$, $\triangle SO'R$ shodné s pravými úhly ve vrcholu O a O'. Označíme-li velikost jejich společné přepony $RS = q$, platí o jejich těžnicích OX a $O'X$ vztah

$$OX = O'X = \tfrac{1}{2} RS = \tfrac{1}{2} q,$$

což je úsečka dané velikosti. A to platí analogicky pro všechny roviny α_i svazku rovin o ose v přímce p. Leží tedy body O_i, O'_i na kružnici m $(X, \frac{1}{2} q)$, která leží v rovině $\omega \parallel \varrho$ (σ), v rovině souměrnosti dané vrstvy (ϱ, σ).

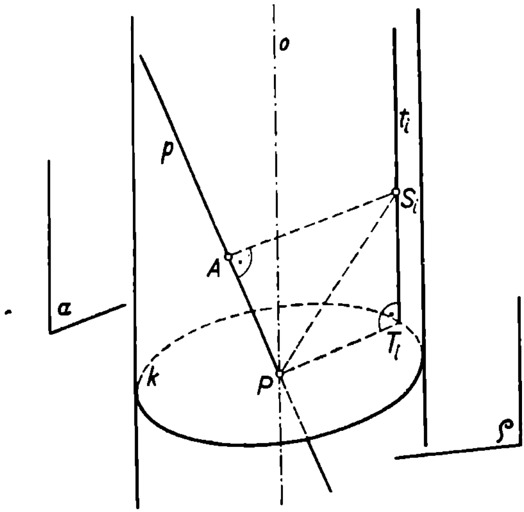
Obráceně, zvolíme-li na kružnici m libovolný bod O_i, potom lze v rovině $\alpha_i \equiv (O_i p)$ vždy sestrojit kružnici k_i, která vyhovuje podmínkám úlohy. Proto *g. m. středů kružnic, které se dotýkají daných rovin ϱ, σ a přímky p je kružnice m právě popsaná.*

Případ (2). Je-li daná přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ (σ), ale neleží v žádné z nich, *nemá úloha řešení.*

Úloha 18. Jsou dány dvě rovnoběžné roviny (různé) ϱ, σ a přímka p, která leží v jedné z nich. Určete g. m. středů a) kulových ploch, b) kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p. [a) Přímka $m \parallel p$, která je průsečnicí dvou rovin: roviny $\omega \parallel \varrho$ (σ) souměrnosti vrstvy (ϱ, σ) a roviny γ, proložené přímkou p tak, že je $\gamma \perp \omega$, b) rovina ω.]

13. *Je dána rovina ϱ, přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod A, který neleží v rovině ϱ. Určete g. m. středů* a) *kulových ploch,* b) *kružnic, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A.*

Řešení. a) Nechť přímka p protíná rovinu ϱ v bodě P. Označme T dotykový bod roviny ϱ a plochy $\varkappa$, která splňuje podmínky úlohy. Potom délky úseček PA a PT, tj. délky tečen vedených z bodu P k ploše $\varkappa$ jsou si rovny,

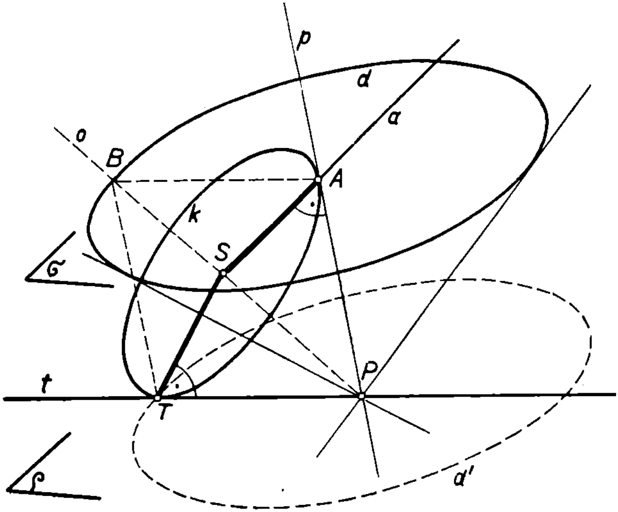


Obr. 18

tedy $PA = PT$. Pro různé plochy $\varkappa_i$ naší úlohy leží jejich dotykové body T_i s rovinou ϱ na kružnici k (P, PT_i) a středy S_i ploch $\varkappa_i$ na přímkách t_i vedených body T_i kolmo k rovině ϱ. (Viz obr. 18.) Přímky t_i vytvoří tedy rotační válcovou plochu V o ose $o \perp \varrho$ procházející bodem P; kružnice k je její řídicí kružnicí.

Dále víme, že g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají přímky p v bodě A, je rovina α vedená bodem A kolmo k přímce p. Proto leží středy ploch $\varkappa_i$ na průseku e roviny

α s plochou V. Obráceně, zvolíme-li na e libovolný bod S_i, potom lze z bodu S_i opsat kulovou plochu $\varkappa_i$ (S_i, r_i), která se dotýká přímky p v jejím bodě A, a jak hned dokážeme, i roviny ϱ v určitém bodě T.



Obr. 19

Důkaz. Bod S_i leží jednak v rovině α, jednak na ploše V, jejíž povrchová přímka $t_i \perp \varrho$ prochází zvoleným bodem S_i a protíná rovinu ϱ v bodě T_i; přitom platí rovnost $PT_i =$ $= PA$. Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle$ PS_iA a $\triangle$ PS_iT_i shodné (mají společnou přeponu PS_i a shodné odvěsny PT_i, PA), takže je také $S_iA = S_iT_i = r_i$. Proto předpokládaný dotykový bod $T \equiv T_i$.

Je tedy *g. m. středů kulových ploch, které splňují podmínky* *naší úlohy, elipsa $e \equiv a.V$, která je v případě, že je $p \perp \varrho$, kružnicí.*

b) Kružnice k, která vyhovuje podmínkám úlohy b), leží v určité rovině α proložené přímkou p, jíž se kružnice k dotýká v bodě A; kružnice k se dotýká také přímky $t \equiv \equiv \alpha.\varrho$ v bodě T. Střed S kružnice k leží proto na ose o úhlu $\sphericalangle APT$ a dále na přímce a roviny α, vedené bodem A kolmo k přímce p (viz obr. 19). Bude účelné sestrojit v rovině α přímku o jako úhlopříčku PB rovnoběžníka $PABT$, který je kosočtvercem (případně čtvercem), neboť platí rovnost $PA = PT$ (délky tečen vedených z bodu P ke kružnici k jsou stejně dlouhé).

Protože v každé rovině α_i svazku rovin o ose p platí $AB_i \# PT_i = AP$, vyplní body B_i kružnici d (A, AB), která leží v rovině $\sigma \parallel \varrho$. Přímky PB_i, tj. osy úhlů $\sphericalangle APT_i$, vytvoří kuželovou plochu K, která má vrchol v bodě P a řídicí kružnici d. Protože dále přímky a_i jakožto kolmice sestrojené k přímce p v bodě A leží v rovině $\omega \perp p$, jsou body S_i na průseku m roviny ω s plochou K.

K tomu ještě připomeňme, že body T_i leží v rovině ϱ na kružnici d' (P, PA), shodné s kružnicí d.

Obráceně, zvolíme-li na průseku m libovolný bod S_i, potom lze kolem bodu S_i opsat kružnici k_i (S_i), která se dotýká přímky p v bodě A a roviny ϱ v určitém bodě T_i.

Důkaz. Bodem S_i prochází na kuželové ploše K povrchová přímka PS_i, která určuje na kružnici d bod B_i. Rovina $\alpha_i \equiv (p, S_i)$ protíná rovinu σ v přímce AB_i a rovinu ϱ v přímce $PT_i \parallel AB_i$, kde bod T_i je bodem kružnice d'. Úhlopříčka vzniklého kosočtverce B_iAPT_i je přímka PB_i, která obsahuje bod S_i. Přímka $S_iA \equiv \sigma.\omega$ je kolmá k přímce p. Ze souměrnosti kosočtverce B_iAPT_i podle jeho úhlopříčky PS_i vyplývá, že úsečka S_iT_i kolmá k PT_i je rovna úsečce S_iA, takže $S_iT_i = S_iA$ je poloměr hledané kružnice k_i.

Odtud vyplývá: *G. m. středů kružnic k_i, které splňují podmínky úlohy, je průsek $m \equiv \omega . K$, tj.* buď *elipsa,*[8]) *nebo kružnice,* a to ve zvláštním případě, je-li přímka p kolmá k rovině ϱ.

Úloha 19. Je dána rovina ϱ, přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ (neleží však v ϱ) a na přímce p bod A. Určete g. m. středů kružnic, které se dotýkají přímky p v bodě A a roviny ϱ. [Přímka $m \equiv \omega . \sigma$, průsečnice roviny ω vedené bodem A kolmo k přímce p a roviny $\sigma \parallel \varrho$, při čemž rovina σ má od přímky p i od roviny ϱ vzdálenosti sobě rovné.]

14. *Je dána kulová plocha $\varkappa$ (S, r) a vně plochy $\varkappa$ bod V. Do plochy $\varkappa$ jsou vepsány komolé kužele K_i tak, že bod V je společným vrcholem úplných kuželů, příslušných kuželům K_i. Určete g. m. b., které náležejí obvodům středních řezů M_i komolých kuželů K_i.*

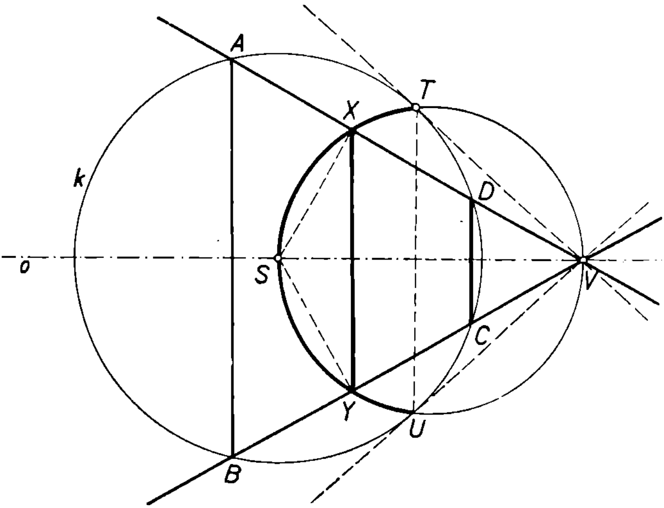
Poznámka. Ke každému komolému kuželi lze sestrojit příslušný kužel doplňkový, který spolu s ním tvoří příslušný kužel úplný. Z tohoto kužele vznikne obráceně daný komolý kužel řezem, který leží ve vhodné rovině rovnoběžné s rovinou podstavy úplného kužele.

Řešení úlohy. Komolý kužel K vepsaný do plochy $\varkappa$ je nutně rotační, neboť obvody jeho podstav leží na ploše $\varkappa$; jsou to tedy kružnice v rovnoběžných rovinách, takže přímka o, která obsahuje středy těchto podstav, prochází středem S plochy $\varkappa$ a je osou komolého kužele K i plochy $\varkappa$. Osa o prochází zřejmě i bodem V.

Sestrojme libovolnou rovinu ω obsahující přímku o. Řez vzniklý na našem útvaru rovinou ω je znázorněn na obr. 20. Na ploše $\varkappa$ je to kružnice k (S, r) a na kuželi K

[8]) Elipsa je to proto, že všechny přímky PB_i kuželové plochy K svírají s přímkou PA úhly menší než R, při čemž rovina průseku je kolmá k přímce PA, takže protíná všechny přímky kuželové plochy K.

rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož ramena se v prodloužení protínají v bodě V. Náš prostorový útvar vznikne otáčením uvažovaného řezu ležícího v rovině ω kolem přímky o, takže se vyšetřování hledaných obvodů M_i převede na planimetrickou úlohu v rovině ω.



Obr. 20

Střední řez M na kuželi K protíná rovinu ω v úsečce XY, která tvoří střední příčku lichoběžníka $ABCD$. Její krajní body X, Y, jakožto středy úseček AD resp. BC leží na kruhovém oblouku $\widehat{TSU}$, který náleží Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem SV, neboť je $SX \perp AD$ a $SY \perp BC$.

Obráceně: Zvolíme-li kterýkoliv vnitřní bod X_i oblouku $\widehat{TSU}$ (kromě bodu S), lze jím sestrojit tětivu X_iY_i v oblouku $\widehat{TSU}$, kolmou k přímce o; úsečka X_iY_i určuje střední příčku příslušného lichoběžníka $A_iB_iC_iD_i$, kde body A_i, D_i leží na přímce VX_i a body B_i, C_i na přímce VY_i. Je totiž $SX_i \perp A_iD_i$ a proto platí $A_iX_i = X_iD_i$. Z vnitřních bodů oblouku $\widehat{TSU}$ je nutno vyloučit bod S, neboť nedává na oblouku $\widehat{TSU}$ žádnou tětivu. Také krajní body T, U oblouku $\widehat{STU}$ nevedou ke konstrukci lichoběžníka, protože přímky VT, VU jsou tečnami kružnice k a nevzniknou na nich žádné tětivy kružnice k, jež by měly být rameny lichoběžníka. Tím jsme dokázali planimetrickou větu: G. m. středů ramen všech rovnoramenných lichoběžníků vepsaných do dané kružnice k, přičemž ramena každého z těchto lichoběžníků se protínají v bodě V daném vně kružnice k, je kruhový oblouk $\widehat{TSU}$ až na jeho body T, S, U.

Rotací bodů X_i, Y_i kolem přímky o vznikají pak obvody středních řezů M_i kuželů K_i. Proto platí: *Obvody středních řezů M_i komolých kuželů K_i naší úlohy vyplní kulový vrchlík*, který je průnikem plochy $\varkappa$ a Thaletovy kulové plochy sestrojené nad průměrem SV *s vyloučením jeho hrany a jeho bodu ležícího na jeho ose*. Tím je hledané g. m. b. určeno.

15. *Je dán rotační válec V, jehož podstava má poloměr r a výška válce je v. Určete g. m. středů S_i koulí $\varkappa_i$ o poloměru dané velikosti ϱ, které lze celé umístit ve válci V.*

Řešení. Předpokládejme, že jsme z bodu S sestrojili kouli $\varkappa$ (S, ϱ), která je celá umístěna ve válci V. Potom bod S leží uvnitř válce V a má od všech bodů jeho povrchu vzdálenosti, které jsou větší nebo rovné ϱ. Musí tedy bod S splňovat dvě podmínky; označme je A a B:

A) Bod S musí být od rovin podstav válce V vzdálen o délku větší nebo rovnou ϱ. Leží proto v průniku P dvou poloprostorů: jednoho opačného k (σ, O), druhého opačného k (σ', O'), kde body O, O', jsou středy podstav daného válce, a to O střed podstavy ležící v rovině π, O' střed podstavy ležící v rovině π'; přitom rovina $\sigma \parallel \pi$ náleží poloprostoru (π, O') a je od roviny π vzdálena o délku rovnou ϱ a rovina $\sigma' \parallel \pi$ náleží poloprostoru (π', O) a je od roviny π' vzdálena opět o délku rovnou ϱ.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S_p v útvaru P, lze z bodu S_p opsat kouli $\varkappa_p$ (S_p, ϱ), která nemá společné body s žádnou z rovin π, π', nebo se v krajním případě roviny π nebo π' dotýká. To znamená, že průnik P, pokud není prázdný, tj. pokud je $\varrho \leqq \frac{v}{2}$, je g. m. středů S_p koulí $\varkappa_p$, které splňují podmínku A.

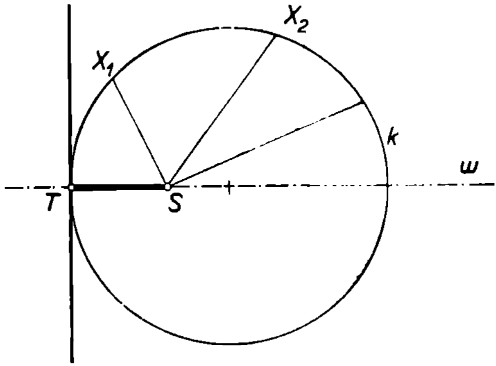
B) Bod S musí být od všech bodů pláště válce V vzdálen o délku větší nebo rovnou ϱ.

Tažme se dříve po vzdálenostech bodu S, který leží uvnitř válce V, od jeho stran.

Tyto vzdálenosti zjistíme v rovině μ proložené bodem S kolmo ke stranám válce V, tj. k jeho ose o. Jedná se zřejmě o vzdálenosti bodu S od bodů T, X_1, X_2, ... ležících na obvodu k kruhového řezu, který je průsekem válce V s rovinou μ (viz obr. 21a). Kdyby bod S ležel na ose OO' válce V, byly by jeho vzdálenosti od všech stran válce V stejné a měly by velikost rovnou r. Leží-li bod S mimo úsečku OO', lze mluvit o jeho nejmenší vzdálenosti od stran válce V. Je to úsečka $ST = d < r$, obsažená v rovině $\omega \equiv (S, o)$.

Úsečka ST je také nejmenší ze všech úseček, které bychom dostali spojením bodu S s body pláště válce V; nazveme ji *vzdáleností bodu S od pláště válce V.*

Rovnoběžným posunutím bodu S ve směru přímky o tak, aby zůstal ve válci V, nebo otočením bodu S kolem přímky o, se vzdálenost d od pláště nezmění. Body tak

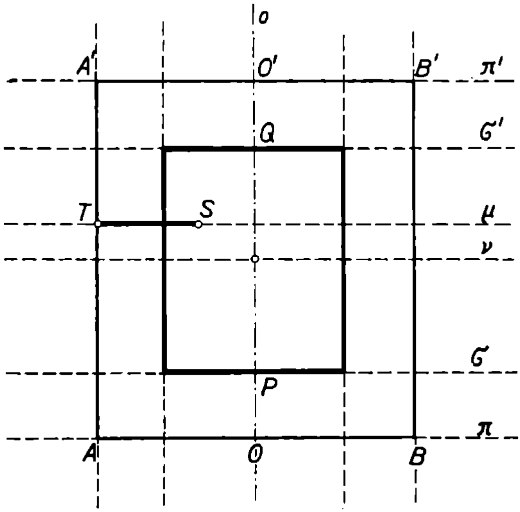


Obr. 21a

vzniklé vyplní plášť rotačního válce o ose OO' a poloměru rovném $r - d$. Každý bod tohoto válce má od pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou d a současně menší nebo rovnou r.

Podmínce B je tedy možno vyhovět jenom tehdy, když daný poloměr ϱ je menší nebo roven r, takže bod S náleží buď rotačnímu válci V' o ose OO' a poloměru $r - \varrho$, když je $\varrho < r$, nebo náleží úsečce OO' v případě, že je $\varrho = r$.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S_0 tak, aby náležel válci V' případně úsečce OO', je podle předchozí úvahy vzdálen od všech bodů pláště válce V o délku větší nebo rovnou ϱ a lze z něho opsat kouli $\varkappa_v$ (S_v, ϱ), která nemá s pláštěm válce V žádný společný bod, nebo se v krajním případě pláště válce V dotýká. Dospěli jsme tak ke g. m. středů S_v koulí $\varkappa_v$, které splňují podmínku B.



Obr. 21b

V průniku obou g. m. P a V', odvozených v odstavcích A, B, dostáváme už řešení naší úlohy, aniž je třeba pro důkaz tohoto řešení úvahu ještě obracet. *G. m. hledaných středů S_i koulí $\varkappa_i$ naší úlohy je průnik útvarů P a V'.*

Závěr. a) Je-li $\varrho < r$ a také $\varrho < \dfrac{v}{2}$, je g. m. středů koulí $\varkappa_i$ *válec* (na obr. 21b je vyznačen jeho osový řez) souosý a soustředný s válcem V; jeho podstavy mají poloměr rovný $r - \varrho$ a jeho výška má velikost $v - 2\varrho$.

b) Je-li $\varrho < r$ a $\varrho = \frac{v}{2}$ (možno jen když je $v < 2r$), je g. m. středů koulí $\varkappa_i$ *kruh*, a to průsek roviny $\nu \parallel \pi$, která je rovinou souměrnosti rovinové vrstvy (π, π'), s válcem V'. Tento kruh má střed na přímce o a poloměr rovný $r - \varrho$.

c) Je-li $\varrho = r$ a $\varrho < \frac{v}{2}$ (možno jen když je $v > 2r$) je g. m. středů ploch $\varkappa_i$ *úsečka* PQ ležící na ose o válce V (viz obr. 21b).

d) Je-li $\varrho = r$ a také $\varrho = \frac{v}{2}$, je hledaným g. m. pouze *jeden bod*, a to střed válce V. Je to střed koule vepsané rovnostrannému válci V.

e) Je-li $\varrho > r$ nebo $\varrho > \frac{v}{2}$, *nemá* naše úloha *řešení*.

Úloha 20. Určete g. m. středů koulí o daném poloměru ϱ, které lze celé umístit do kvádru o daných rozměrech $a \geqq b > c$. [Kvádr, který má týž střed jako daný kvádr, stěny rovnoběžné se stěnami daného kvádru z rozměry $a - 2\varrho$, $b - 2\varrho$, $c - 2\varrho$.]

Úloha 21. Je dán rotační kužel K, jehož podstava má poloměr $r > 0$ a výška kužele je $v > 0$. Určete g. m. středů koulí, o daném poloměru $\varrho > 0$, které lze celé umístit do kužele K. [Rotační kužel souosý s daným kuželem a jemu podobný (popř. jediný bod, když je $\varrho = \frac{rv}{r + \sqrt{r^2 + v^2}}$).]

DOSLOV

Mnoho úloh, které se týkají vyšetřování g. m. b. v prostoru, najde čtenář v těchto knihách:

[1] V druhé části obsáhlé knihy *J. Hadamarda*, Léçons de géométrie élémentaire, která je snadno u nás dostupná v ruském překladu pod názvem: Elementarnaja geometrija II, Stereometrija, 3. vydání, Moskva 1958. Překlad byl pořízen za redakce prof. *D. I. Perepelkina* a kromě vlastního textu obsahuje řešení všech úloh z původní knihy Hadamardovy. Cena R 14,90.

[2] Dále v knize: *A. A. Straževskij*, Zadači na geometričeskije mesta toček; celá třetí kapitola knihy pojednává o g. m. b. v prostoru. Vyd. v Moskvě 1954. Cena R 3,40.

[3] Jako doplňkovou literaturu doporučujeme čtenáři učebnici: *J. Kounovský, F. Vyčichlo*, Deskriptivní geometrie pro samouky, vydanou JČMF v Praze 1948.

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JOSEF HOLUBÁŘ

geometrická místa bodů v prostoru

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2203
Edice Škola mladých matematiků, svazek 11
Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provozovna 22,
Praha 2, Legerova 22
2,60 AA. 2,70 VA. D-03*50021
Náklad 7500 výtisků. 1. vydání
60 stran. Praha 1965. 63/III-7

23-016-65 03-2 Cena brož. výtisku Kčs 2,50

23-116-65
03-2
Cena brož.
Kčs 2,50