Konvexní útvary

MATEMATIKŮ

KONVEXNÍ ÚTVARY

9

Vydal ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAN VYŠÍN

konvexní útvary

PRAHA 1964
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

Milí čtenáři, tento svazek naší sbírky je poněkud jiného rázu, než byly svazky předchozí. Vznikl ze snahy poskytnout vám příležitost procvičit a prohloubit si poznatky ze školské matematiky na trochu zajímavějším materiálu, než jsou běžné úlohy. V knížce se setkáte s několika novými pojmy a dozvíte se v ní snad něco nového, co ze školy neznáte. Výklad, a zejména řešení úloh, se opírá o jedenáct základních vět s pěti variantami (obměnami), které jsou vesměs označeny římskými číslicemi. Nic nevadí, že některé tyto věty nejsou dokázány; jejich obsahu můžete porozumět i bez důkazů a plně je pochopíte, když prostudujete vzorové příklady a rozřešíte si další úlohy. Všimněte si dobře, jak při řešení úloh volíme nejrůznější prostředky (poznatky z planimetrie, stereometrie, algebry, trigonometrie, analytické geometrie); umění vybrat si ze zásoby svých vědomostí to, co se hodí k řešení daného problému, je nejvýznačnější rys matematického vzdělání. Při studiu sledujte také roli geometrického názoru; vede nás sice při řešení úloh a při dokazování, je zdrojem nápadů, ale musíme jej stále kontrolovat úsudkem (dedukcí).

A nyní několik slov k vlastnímu tématu knížky. Teorie konvexních útvarů patří k novějším partiím matematiky*) a je dnes už velmi podrobně propracována v samostatný a ucelený obor. Ačkoli je to část geometrie, má četná

*) Většina výsledků pochází z druhé čtvrtiny XX. století.

použití i v jiných oborech matematiky, např. v algebře, matematické analýze, číselné teorii, ale i mimo matematiku, např. v krystalografii. Z vynikajících sovětských matematiků pracovali v teorii konvexních útvarů zejména L. Šnirelman, L. A. Ljusternik a známý leningradský vědec A. D. Alexandrov. Pěknou knížku o konvexních útvarech ve formě řešených úloh napsali sovětští autoři I. M. Jaglom a V. G. Boltjanskij. Materiálu z této knihy se užívalo při práci proseminářů a zájmových studentských kroužků na moskevské universitě i při soutěžích a olympiádách v Moskvě a Leningradě; použil jsem ho i já při sestavení této brožury, která je ovšem mnohem chudší a méně náročná než kniha Jaglomova a Boltjanského. Může však přece aspoň vzbudit váš zájem o tento nový úsek geometrie a podnítit vás ke studiu další literatury, např. Jaglomovy knihy. Na konci brožury najdete také dodatek, v němž jsou vysvětleny některé méně známé geometrické poznatky, které při čtení této brožurky potřebujete. Narazíte-li však přece při jejím studování na překážky, nedejte se jimi odradit a poraďte se se svým učitelem matematiky. Rovněž Ústřední výbor MO (Žitná 25, Praha 1) rád zodpoví vaše dotazy. Některé ze zadaných úloh jsou obtížnější; tyto úlohy jsou označeny hvězdičkou (*). Můžete je při prvním čtení brožury vynechat; vraťte se k nim však po přečtení celého textu, až získáte trochu zběhlosti v úvahách o konvexních útvarech.

Závěrem vám přeji hodně vytrvalosti a pozornosti při čtení textu a mnoho úspěchu při řešení úloh.

Autor

Kapitola 1.

ZKOUMÁNÍ KONVEXITY ÚTVARU

Představte si jezero s příkrými břehy, jehož hladina má takový tvar, že můžeme doplavat z kteréhokoli místa na jezeře po přímé trati na kterékoli jiné místo.

Představte si tovární halu nepravidelného půdorysu, která má tu vlastnost, že můžeme kterákoli dvě místa v ní spojit napjatým drátem.

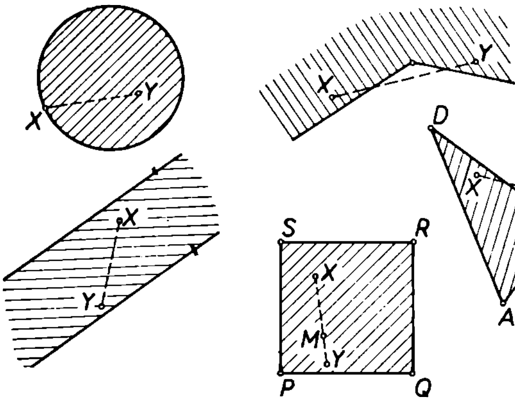
Tyto dvě představy nám budou východiskem pro definici konvexního útvaru. Rovná hladina jezera představuje útvar v rovině, tj. množinu bodů roviny; tovární hala představuje útvar v prostoru, tj. množinu bodů v prostoru. Přímá trať spojující dvě místa nebo napjatý drát představuje úsečku. Charakteristická vlastnost hladiny jezera i tovární haly je zřejmě vyjádřena touto matematickou definicí:

Geometrický útvar U (ležící na přímce, v rovině nebo v prostoru) nazýváme *konvexním*, jestliže úsečka spojující kterékoli jeho dva body náleží útvaru U.

Přitom slovem „útvar" rozumíme jakoukoli množinu bodů; výrok „úsečka náleží útvaru U" znamená, že všecky body této úsečky náležejí útvaru U.

Předchozí definici ještě doplníme: mezi konvexní útvary budeme počítat i útvar skládající se z jediného bodu; brzy uvidíte, proč jsme vyslovili tento doplněk definice.

Konvexní útvary tvoří důležitou skupinu geometrických útvarů, které mají poměrně jednoduché vlastnosti. Většina obrazců, těles, s nimiž se ve škole i v praxi setkáváte, jsou konvexní útvary. Konvexní útvar může být částí přímky (např. úsečka), roviny (čtverec) nebo prostoru (krychle). V této knížce budeme zkoumat hlavně konvexní útvary v rovině; příležitostně si však všimneme i konvexních útvarů na přímce a v prostoru.



Obr. 1

U většiny jednoduchých útvarů poznáme z názoru, zda jsou konvexní či nikoli. Tak na obr. 1 vidíme pět rovinných útvarů: je to kruh (s obvodem), pás roviny (i s hraničními přímkami), tzv. nevypuklý úhel (i s rameny), jistý čtyřúhelník $ABCD$ a konečně čtverec $PQRS$ (s obvodem), z něhož byl vynechán bod M. Názor nám napovídá, že první dva útvary jsou konvexní, zbývající tři nekonvexní; na obrázcích vidíme v těchto případech vždy úsečku XY, jejíž krajní body X, Y náležejí danému útvaru, ale některý bod úsečky XY tomuto útvaru nenáleží.

Všimněte si ještě, že první, čtvrtý a pátý útvar jsou *omezené*, tj. dají se umístit do vhodně zvoleného kruhu;

naproti tomu druhý a třetí útvar tuto vlastnost nemají, proto se nazývají *neomezené*. Je tedy vidět, že konvexní i nekonvexní útvar může být jak omezený, tak neomezený.

K odůvodnění toho, co jsme si právě ukázali, se ještě vrátíme.

Nejjednodušší konvexní útvary jsou *prostor*, *rovina* a *přímka*. Přijmeme za správné (bez důkazu), že také *poloprostor i vnitřek poloprostoru* (tj. poloprostor bez hraniční roviny) *jsou konvexní útvary*.

A nyní uvedeme jednu větu, která umožňuje tvořit ze známých konvexních útvarů další; tato věta zní:

I. *Mají-li dva konvexní útvary společný aspoň jeden bod, pak je jejich průnik také konvexní útvar.*

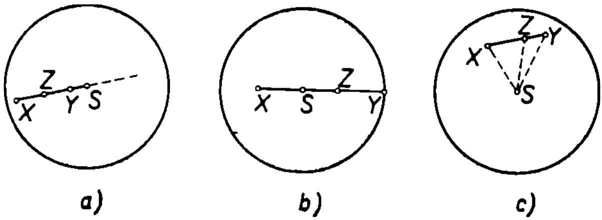
Co znamená v matematice slovo „průnik"? Všecky společné prvky dvou množin tvoří novou množinu, zvanou průnik. V našem případě jde o množinu bodů společných dvěma konvexním útvarům U_1, U_2; jejich průnik budeme zapisovat $U_1 \cap U_2$

Příklad 1. a) Máme dokázat větu Ib). Pomocí věty I máme odůvodnit, že polorovina, vnitřek poloroviny, polopřímka, vnitřek polopřímky, dutý úhel (i s rameny), trojúhelník (s obvodem) jsou konvexní útvary.

Řešení. a) Obsahuje-li množina $U_1 \cap U_2$ jediný bod, je konvexní podle doplňku definice konvexního útvaru. Obsahuje-li množina $U_1 \cap U_2$ aspoň dva různé body X, Y, pak libovolný bod Z úsečky XY náleží jednak do U_1 (neboť U_1 je konvexní), jednak do U_2 (neboť U_2 je konvexní). Proto náleží Z i do útvaru $U_1 \cap U_2$, tj. celá úsečka XY náleží do $U_1 \cap U_2$ a tento průnik je tedy konvexní útvar.

b) Polorovina je průnik poloprostoru a roviny, tj. dvou konvexních útvarů. Vnitřek poloprostoru je zřejmě konvexní útvar. Vnitřek poloroviny je průnik vnitřku poloprostoru a roviny.

Polopřímka (vnitřek polopřímky) je průnik poloprostoru (vnitřku poloprostoru) a přímky.



Obr. 2

Dutý úhel $\sphericalangle ABC$ je průnik polorovin ABC a BCA. Trojúhelník ABC je průnik dutého úhlu $\sphericalangle ABC$ a poloroviny ACB.

Příklad 2. Máme dokázat, že kruh i vnitřek kruhu jsou konvexní útvary.

Řešení. Dokažme nejprve, že kruh (i s obvodem) je konvexní útvar. Je dán kruh o středu S a poloměru r. Zvolíme dva různé body X, Y tohoto kruhu; každý z nich může náležet buď obvodu kruhu nebo jeho vnitřku. Mohou nastat v podstatě tři případy, které jsou načrtnuty na obr. 2abc (tyto případy se týkají vzájemné polohy bodů S, X, Y — popište je!). V každém z těchto tří případů máme dokázat, že libovolný bod Z úsečky XY náleží kruhu, tj., že platí $SZ \leqq r$. Důkaz v situacích z obr. 2ab ponecháváme čtenářům. Vznikne-li však trojúhelník SXY jako na obr. 2c, pak užijeme této planimetrické věty:

Každá příčka SZ v trojúhelníku SXY, kde Z je bod mezi X, Y, je menší než delší ze stran SX, SY. Z této věty vyplývá nerovnost $SZ < r$ a tím je konvexita kruhu dokázána.

Odůvodněte obdobně sami, že vnitřek kruhu je konvexní útvar!

Konvexitu kruhu však můžeme dokázat i jinak použitím věty I.

Příklad 3. Je dán kruh K se středem S; přímka t je jeho libovolná tečna. Máme zjistit, který útvar je vyplněn všemi společnými body nekonečně mnoha polorovin tS.

Řešení. Názor nám napovídá, že hledaný útvar U je daný kruh K. Abychom dokázali toto tvrzení, musíme odůvodnit dvě věci:

a) že každý bod kruhu K náleží útvaru U, neboli že kruh K je částí útvaru U — zápis $K \subset U$;

b) že každý bod útvaru U náleží kruhu K, neboli že útvar U je částí množiny K — zápis $U \subset K$.

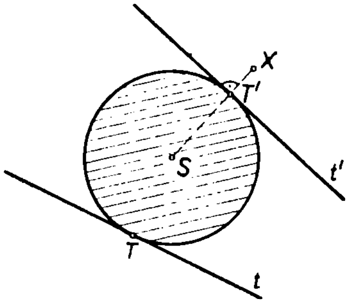
Vztah $K \subset U$ je zřejmý, neboť kruh K leží v každé polorovině tS; proto každý bod kruhu K je společným bodem všech polorovin tS.

Vztah $U \subset K$ odůvodníme takto: zvolíme libovolný bod, který nenáleží kruhu K (obr. 3) a dokážeme, že existuje aspoň jedna z polorovin tS, ve které X neleží. Tato polorovina $t'S$ je sestrojena na obr. 3; tím je řešení příkladu 3 provedeno.

Ve větě I jsme hovořili o průniku dvou útvarů jako o množině všech bodů společných těmto dvěma útvarům. Příklad 3 ukazuje, že můžeme utvořit průnik více útvarů, dokonce průnik nekonečně mnoha útvarů. V příkladě 3 je kruh K průnikem všech polorovin tS.

Větu I můžeme pak zobecnit takto:

I′. *Mají-li všecky útvary jisté množiny konvexních útvarů společný aspoň jeden bod, pak je průnik všech těchto útvarů konvexní útvar.*



Obr. 3

Úloha 1. Dokažte větu I′ týmž způsobem jako větu I. Pomocí věty I′ a výsledku příkladu 3 odůvodněte znovu, že kruh je konvexní útvar.

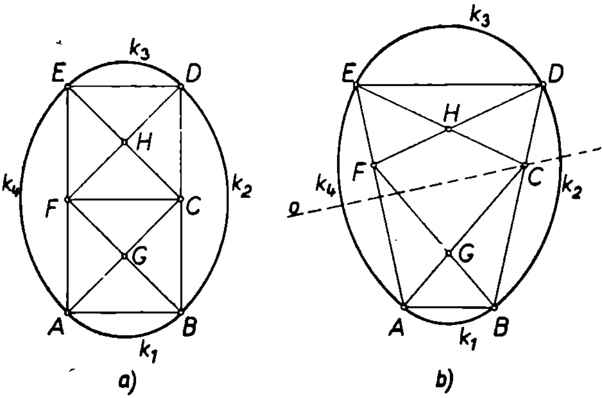
Úloha 2. a) Útvar U_1 se skládá z vnitřku kruhu a pěti bodů na jeho obvodu. Zjistěte, zda útvar U_1 je konvexní.

b) Útvar U_2 se skládá z vnitřku čtverce a ze dvou jeho stran (i s vrcholy). Zjistěte, zda je konvexní.

c) Útvar U_3 se skládá z vnitřku trojúhelníka a ze dvou bodů jeho obvodu. Zjistěte, zda je konvexní.

Úloha 3.* a) Jsou dány dva čtverce *ABCF*, *FCDE* (viz obr. 4a); oblouky k_1, k_2, k_3, k_4 kružnic mají po řadě středy *G*, *F*, *H*, *C*. Dokažte, že se tyto kružnice po dvou dotýkají v bodech *A*, *B*, *D*, *E* a že čára složená z oblouků k_1, k_2, k_3, k_4 omezuje konvexní útvar. (Postupujte tak jako v úloze 1.)

b) Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABDE$ (viz obr. 4b), C je bod ramene BD, který leží na ose o ramene AE; obdobně F je bod ramene AE, který leží na ose ramene BD. Ob-



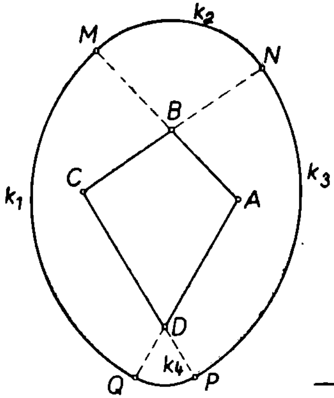
Obr. 4

louky k_1, k_2, k_3, k_4 kružnic mají po řadě středy G, F, H, C. Rozřešte obdobnou úlohu, jako je úloha 3a.

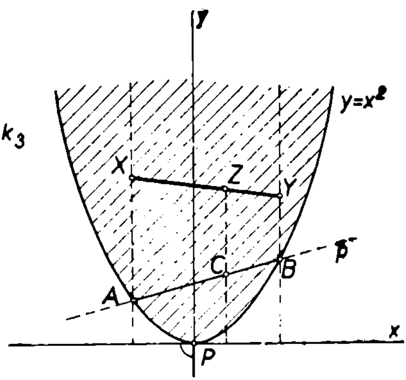
Čára na obr. 4a je souměrná podle dvou os (kterých?) a podle středu. Čára na obr. 4b je souměrná podle jediné osy. Obě tyto čáry jsou tzv. *ovály*.

Úloha 4.* Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí $AB + CD = AD + BC$ (tzv. *tečnový*). Sestrojte oblouky k_1, k_2, k_3, k_4 kružnic se středy A, B, C, D tak, aby se dotýkaly v bodech M, N, P, Q jako v obr. 5. Zjistěte, zda vzniklá čára omezuje konvexní útvar. Tato čára nemusí být souměrná podle žádné osy ani podle žádného středu.

Příklad 4. V soustavě pravoúhlých souřadnic je dána množina U všech bodů $[x, y]$, pro které platí $y \geqq x^2$. Máme dokázat, že U je konvexní útvar.



Obr. 5



Obr. 6

Řešení. Graf funkce $y = x^2$ je — jak známo — parabola, jejíž vrchol je v počátku souřadnic a která se otvírá ve smyslu kladné poloosy y (obr. 6). Množina U se skládá z bodů paraboly a z bodů ležících „nad křivkou“. Názor nasvědčuje tomu, že je tato množina konvexní útvar; pochybnosti ovšem můžeme mít o dvojicích bodů velmi vzdálených od vrcholu. Množina U je totiž neomezená a nemůžeme ji celou přehlédnout.

Deduktivní důkaz konvexnosti množiny U provedeme takto (obr. 6): Zvolíme libovolné dva body X, Y z U o souřadnicích $X = [x_1, y_1]$, $Y = [x_2, y_2]$; je tedy $y_1 \geqq x_1^2$, $y_2 \geqq x_2^2$. Sestrojíme úsečku AB, kde $A = [x_1, x_1^2]$, $B = [x_2, x_2^2]$; A, B jsou body paraboly ležící na rovnoběžkách s osou y, které procházejí po řadě body X, Y. Dokážeme-li, že každý bod C úsečky AB náleží útvaru U, platí to i o každém bodu Z úsečky XY; to si sami snadno odůvodněte s pomocí obr. 6.

Bod C má souřadnici x_3, pro niž platí $x_1 \leqq x_3 \leqq x_2$ (předpokládáme, že je $x_1 < x_2$). Souřadnici y bodu C vypočteme z rovnice přímky $AB \equiv p$. Tato rovnice má tvar

$$ax + by + c = 0;$$

koeficienty a, b, c určíme z podmínek

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_1^2 + c &= 0 \text{ (bod } A \text{ leží na } p), \\ ax_2 + bx_2^2 + c &= 0 \text{ (bod } B \text{ leží na } p). \end{aligned} \tag{1}$$

Odečtením obou rovnic (1) vyjde

$$a(x_2 - x_1) + b(x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Dělíme-li kladným číslem $x_2 - x_1$, dostaneme

$$a = -b(x_2 + x_1). \tag{2}$$

Dosadíme z (2) do první rovnice (1) a vyjádříme c:

$$c = bx_1x_2.$$

Rovnice přímky p tedy zní (dělíme číslem b, neboť je $b \neq 0$)

$$y = (x_1 + x_2)\,x - x_1\,x_2$$

a bod C má souřadnice

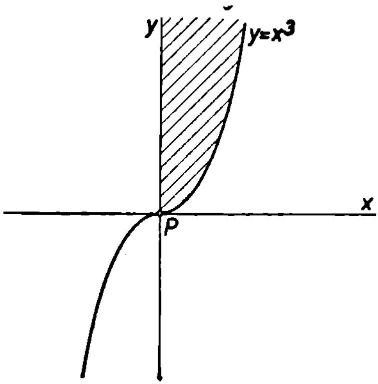
$$[x_3;\ (x_1 + x_2)\,x_3 - x_1\,x_2].$$

Abychom zjistili, zda bod C náleží útvaru U, vypočteme pro jeho souřadnice rozdíl $y - x^2$; vyjde

$$(x_1 + x_2)\,x_3 - x_1x_2 - x_3^2 = (x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

Oba činitelé na pravé straně jsou nezáporná čísla, neboť je $x_1 \leqq x_3 \leqq x_2$; platí tedy pro bod C nerovnost $y - x^2 \geqq 0$ neboli $y \geqq x^2$ a bod C náleží útvaru U.

Tím je důkaz úplně proveden.



Obr. 7

Úloha 5. Útvar U je množina všech bodů, jejichž kartézské souřadnice $[x, y]$ splňují nerovnosti $x > 0, y \geqq \dfrac{1}{x}$. Zjistěte, zda je útvar U konvexní.

Útvar je část roviny ležící nad jednou větví rovnoosé hyperboly; důkaz konvexity provedete obdobně jako u příkladu 4.

Úloha 6. Útvar U je množina všech bodů, jejichž kartézské souřadnice $[x, y]$ splňují nerovnosti

$x \geqq 0, y \geqq x^3$. Zjistěte, zda je útvar U konvexní. Na obr. 7 je narýsována křivka o rovnici $y = x^3$; útvar U je vyšrafovaná neomezená část roviny. Při důkazu konvexity použijte opět postupu z příkladu 4.

Úloha 7.* Je dána přímka p a na ní bod F. Útvar U je množina všech bodů X roviny, pro jejichž vzdálenosti x_1, x_2 od přímky p a od bodu F platí $x_1 + x_2 \leqq 1$.
Načrtněte útvar U a zjistěte, zda je konvexní. Lze zjistit, že útvar U je omezen dvěma oblouky shodných parabol. Důkaz konvexity můžete provést tak, že použijete výsledku příkladu 4 a věty I.

Úloha 8.* Načrtněte graf funkce $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Udejte souřadnice všech bodů vyplňujících část U roviny omezenou grafem a osou x. Vyslovte domněnku, zda je útvar U konvexní nebo nikoli. Dokažte vyslovenou domněnku! (K důkazu, že útvar není konvexní, stačí najít jednu dvojici takových jeho bodů A, B, že úsečka AB nenáleží danému útvaru. Zvolte za bod A v našem případě bod [0, 1].)

Úloha 9. Dokažte, že mnohoúhelník *tětivový*, tj. mnohoúhelník, jehož všecky vrcholy leží na kružnici, je konvexní útvar. K mnohoúhelníku počítejte i body jeho obvodu. Při důkazu použijte přímek, v nichž leží strany mnohoúhelníka.

Úloha 10. Dokažte, že každý hranol (kolmý nebo kosý), jehož podstavou je konvexní mnohoúhelník, je konvexní útvar. Přitom body povrchu počítejte k hranolu.

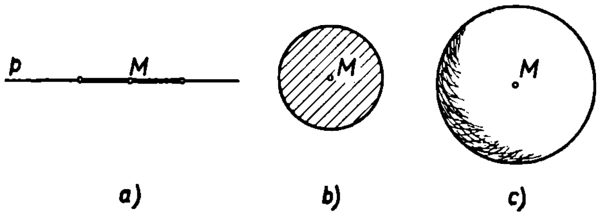
Úloha 11. Dokažte, že čtyřstěn i rotační kužel jsou konvexní útvary. [Návod: Vytvořte hranol, čtyřstěn i kužel jako průniky poloprostorů a použijte věty I.]

Úloha 12. Dokažte, že koule, vnitřek koule, kulová úseč a vrstva jsou konvexní útvary. Použijte obdobného postupu jako u kruhu.

Kapitola 2.

HRANICE KONVEXNÍHO ÚTVARU

Výklad této kapitoly vychází z pojmu *okolí bodu*. Zabýváme-li se jen body jedné přímky p, rozumíme okolím bodu M jakoukoli úsečku ležící v přímce p (i s krajními



Obr. 8

body), jejímž středem je bod M (obr. 8a). V planimetrii rozumíme okolím bodu M kruh (i s obvodem), jehož středem je bod M; ve stereometrii je pak okolí bodu M koule (i s povrchem), jejíž střed je opět bod M (obr. 8bc).

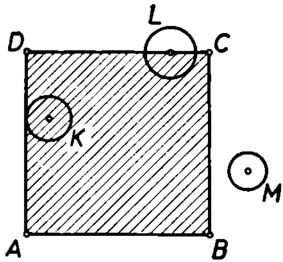
Okolí bodu je jedním z nejdůležitějších matematických pojmů; hned v dalším uvidíme jeho upotřebení.

Na obr. 9 je narýsován v rovině čtverec $ABCD$ a jsou tu vyznačeny tři body K, L, M. Bod K, který leží uvnitř čtverce, má tu vlastnost, že lze najít aspoň jedno jeho okolí, které obsahuje vesměs body čtverce $ABCD$. Bod L ležící na obvodě má tu vlastnost, že v každém jeho okolí jsou body čtverce a body, které čtverci nenáležejí. Bod M

je mimo čtverec; na obr. 9 je zakresleno okolí bodu M, které neobsahuje žádný bod čtverce.

Zavedeme tyto názvy:

Bod X je *vnitřním bodem útvaru* U, když aspoň jedno jeho okolí obsahuje vesměs body útvaru U.



Obr. 9

Bod Y je *hraničním bodem útvaru* U, když v každém jeho okolí jsou body útvaru i body, které útvaru U nenáležejí.

Bod Z je *vnějším bodem útvaru* U, když aspoň jedno jeho okolí neobsahuje žádný bod útvaru U.

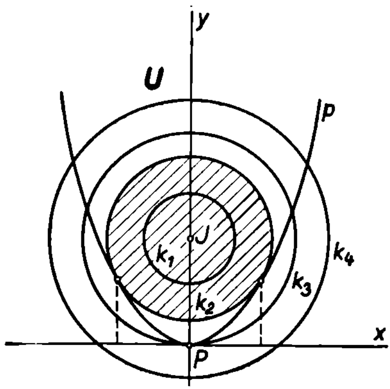
Ve všech těchto třech případech může být útvar konvexní nebo nekonvexní.

V našem příkladě z obr. 9 je tedy bod K vnitřním bodem čtverce, bod L jeho hraničním bodem, bod M jeho vnějším bodem.

Úloha 13. Udejte souřadnice (nejprve numericky) některého vnitřního bodu útvaru U z úlohy 5. Udejte jeho okolí, které obsahuje vesměs body útvaru U. Které body jsou hraniční pro tento útvar U?

Úloha 14.*Útvar z obr. 5 v úloze 4 má (podle názoru) vnitřní bod A. Sestrojte okolí bodu A s poloměrem co možná největším, které obsahuje vesměs body útvaru.

Příklad 6. Útvar U z příkladu 4 (část roviny omezená parabolou) má zřejmě vnitřní bod $\mathcal{J} = [0, 2]$. Máme určit



Obr. 10

okolí bodu $\mathcal{J}$ s poloměrem co možná největším, které obsahuje vesměs body útvaru U.

Řešení. Názor napovídá, že toto okolí je omezeno kružnicí k, která má střed v bodě $\mathcal{J}$ a dotýká se paraboly p o rovnici $y = x^2$. Označme r poloměr kružnice k; její rovnice pak zní

$$x^2 + (y - 2)^2 = r^2. \tag{3}$$

Souřadnice x společných bodů kružnice k a paraboly p vypočteme, když do (3) dosadíme $y = x^2$; po úpravě vyjde rovnice

$$x^4 - 3x^2 + (4 - r^2) = 0. \tag{4}$$

Rovnice (4) je kvadratická v x^2; její diskriminant je $D = 4r^2 - 7$. Na obr. 10 jsou zakresleny čtyři kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 se středem J a poloměry $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{7}$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$. Kružnice k_2 má s parabolou p právě dva společné body (v nich se paraboly dotýká). Kruhy omezené kružnicemi k_3, k_4 obsahují i vnější body útvaru U. Poloměr kružnice k_2 byl určen z podmínky, aby rovnice (4) měla jediný kořen x^2, tj. aby o diskriminantu D rovnice (4) platilo $D = 0$. Kruh omezený kružnicí k_2 se zdá být podle názoru hledaným okolím. Zbývá dokázat, že všecky body tohoto okolí náležejí útvaru U; k tomu však postačí dokázat, že všecky body kružnice k_2 náležejí útvaru U.

Rovnici kružnice k_2 dostaneme z rovnice (3) pro $r = \frac{1}{2}\sqrt{7}$; po úpravě vyjde

$$x^2 + y^2 - 4y + \frac{9}{4} = 0. \tag{5}$$

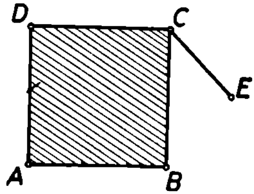
Vypočtěme pro body kružnice k_2 výraz $y - x^2$; pomocí (3) dostaneme

$$y - x^2 = y + y^2 - 4y + \frac{9}{4} = y^2 - 3y + \frac{9}{4} =$$
$$= (y - \frac{3}{2})^2 \geqq 0.$$

To však znamená, že každý bod kružnice k_2 náleží útvaru U; tím je řešení úplně provedeno.

Množina všech hraničních bodů útvaru se nazývá jeho *hranice*. Tak např. hranice kruhu je jeho obvod, hranice vnitřku kruhu je také jeho obvod. Hranice trojúhelníka je jeho obvod, hranice vnitřku trojúhelníka je také jeho obvod. Hranice krychle je její povrch, hranice poloprostoru ϱA je rovina ϱ.

Útvar, který obsahuje svou hranici, se nazývá *uzavřený*. Je tedy např. kruh uzavřený útvar, naproti tomu vnitřek kruhu není uzavřený útvar. Vyslovíme si na tomto místě úmluvu, že nadále *všecky útvary, které budeme studovat, budou uzavřené;* to znamená, že k nim budeme počítat všecky jejich hraniční body.



Obr. 11

Úloha 15. Určete hranici útvaru U z obr. 11; útvar U se skládá z uzavřeného čtverce $ABCD$ a úsečky CE. Je výsledek týž, pokládáme-li útvar U za část roviny nebo za část prostoru? [Uvědomte si, jak je definováno okolí v rovině a jak v prostoru.] Je útvar U konvexní?

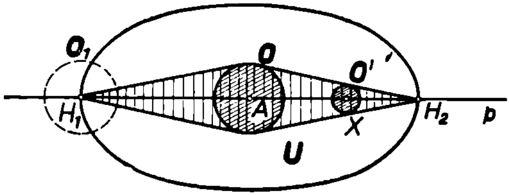
Hovořili jsme už o konvexních útvarech na přímce; mimo množinu o jednom bodě jsou to úsečka (s jedním nebo oběma krajními body, nebo vnitřek úsečky), polopřímka (s počátkem nebo bez něho) a sama přímka. Jiný konvexní útvar na přímce si nedovedeme představit. Tuto skutečnost vyslovujeme větou, která je jednou z nejdůležitějších vět geometrie:

II. *Omezený konvexní útvar na přímce, který má aspoň dva body, je úsečka**).

*) Tato věta je geometrickým zněním tzv. *Dedekindova* axiomu spojitosti.

Z věty II vyplývá tato základní vlastnost konvexních útvarů:

III. *Přímka, která obsahuje aspoň jeden vnitřní bod omezeného konvexního útvaru v rovině nebo v prostoru, protíná jeho hranici právě ve dvou bodech.*

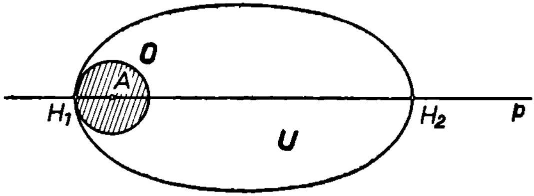


Obr. 12a

Příklad 7. Máme dokázat větu III pro konvexní útvary v rovině pomocí věty II.

Řešení. Označme U daný konvexní útvar v rovině, p přímku, která obsahuje jeho vnitřní bod A (obr. 12a). Dále označíme O okolí bodu A, které obsahuje vesměs body útvaru U. Průnik P přímky p s útvarem U je podle věty I konvexní útvar; protože útvar U je omezený, je i útvar P omezený. Mimo to obsahuje útvar P průnik přímky p s okolím O (proč?), tj. obsahuje nekonečně mnoho bodů. Je tedy podle věty II útvar P jistá úsečka H_1H_2. Krajní body H_1, H_2 této úsečky jsou hraniční body útvaru U; neboť např. v každém okolí O_1 bodu H_1 jsou body přímky p, které náležejí útvaru U (úsečce H_1H_2) a body, které mu nenáležejí.

Podle naší úmluvy o uzavřenosti útvarů náležejí body H_1, H_2 útvaru U. Vedeme-li z nich tečny ke kružnici omezující okolí O, dostaneme vyšrafovanou část roviny (obr. 12a), jejíž všecky body náležejí útvaru U (proč?). Nyní snadno sestrojíme ke každému bodu X ležícímu mezi H_1, H_2 okolí O′, které obsahuje vesměs body útvaru U; vyložte jeho konstrukci podrobně podle obr. 12a.



Obr. 12b

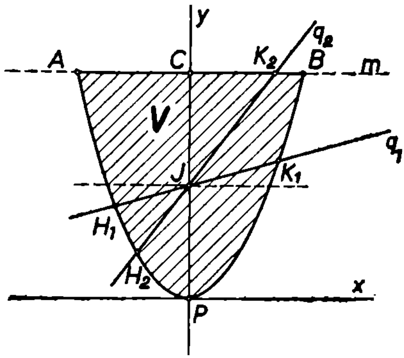
Závěr. Každý bod přímky p ležící mezi H_1, H_2 je vnitřní bod útvaru U; bod ležící vně úsečky H_1H_2, nenáleží útvaru U, proto není ani vnitřní, ani hraniční. Na přímce p leží tedy jen dva hraniční body H_1, H_2.

A nakonec všetečná otázka: Co kdyby situace vypadala např. tak, jako na obr. 12b?

Úloha 16. Dokažte větu III pro konvexní útvary v prostoru.

Úloha 17. Útvar V je průnik útvaru U z úlohy 5 a poloroviny mP, kde P je počátek souřadnic a m je přímka o rovnici $x + y - 4 = 0$. Načrtněte obrázek, vyjádřete útvar V nerovnostmi a zjistěte, zda bod $A = [1; 2]$ je jeho vnitřním bodem. Určete hraniční body útvaru V, které leží na přímce AP.

Příklad 8. Útvar V je průnik útvaru U z příkladu 4 a poloroviny mP, kde P je počátek souřadnic a m je přímka o rovnici $y = 4$. Bod $J = [0; 2]$ je vnitřním bodem útvaru V. Máme jím vést takovou přímku, aby hranice útvaru V na ní vyťala úsečku délky nejvýše 3.



Obr. 13

Řešení. Obr. 13 znázorňuje situaci. Zřejmě postačí zkoumat jen přímky procházející bodem J, které mají nezáporné směrnice, neboť útvar V a bod J jsou souměrné podle osy y. Dvě z těchto přímek jsou na obr. 13 zakresleny: je to přímka q_1, která protíná hranici útvaru V v hraničních bodech H_1, K_1, jež oba náležejí parabole; dále je to přímka q_2, která protíná hranici útvaru V v bodě H_2 náležejícím parabole a v bodě K_2 náležejícím přímce m.

Označme a ($\geqq 0$) směrnici přímky q_1, jejíž rovnice pak je

$$y = a\,x + 2. \tag{6}$$

Souřadnice x bodů H_1, K_1 dostaneme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 - a\,x - 2 = 0.$$

Tato rovnice má kořeny

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\,. \tag{7}$$

Souřadnice y bodů H_1, K_1 vypočteme z rovnice (6) pomocí (7); vyjde

$$y = \frac{1}{2}a^2 + 2 \pm a\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\,.$$

Je tedy

$$H_1 = \left[\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\,;\, \frac{1}{2}a^2 + 2 - a\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\right],$$

$$\tag{7'}$$

$$K_1 = \left[\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\,;\, \frac{1}{2}a^2 + 2 + a\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\right]$$

Přitom pro číslo a máme tyto nerovnosti

$$0 \leqq a \leqq 1,$$

neboť přímka q_1 má největší směrnici, splyne-li s přímkou JB (viz obr. 13).

Vzdálenost H_1K_1 vypočteme podle známého vzorce pro vzdálenost dvou bodů $H_1 = [x_1, y_1]$, $K_1 = [x_2, y_2]$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,;$$

v našem případě je podle (7')

$$\begin{aligned} H_1K_1^2 &= 4\left(\frac{1}{4}a^2 + 2\right) + 4a^2\left(\frac{1}{4}a^2 + 2\right) = \\ &= (a^2 + 8)(a^2 + 1). \end{aligned} \tag{8}$$

Podle podmínky úlohy má být $H_1K_1 \leqq 3$, tj. podle (8) $(a^2 + 8)(a^2 + 1) \leqq 9$ neboli po úpravě

$$a^4 + 9a^2 \leqq 1.$$

To je kvadratická nerovnost pro a^2; rozřešíme ji úpravami

$$a^4 + 9a^2 + \frac{81}{4} \leqq \frac{85}{4},$$

$$\left(a^2 + \frac{9}{2}\right)^2 \leqq \frac{85}{4},$$

$$a^2 \leqq \frac{\sqrt{85} - 9}{2};$$

protože je a nezáporné, dostáváme

$$a \leqq \sqrt{\frac{\sqrt{85} - 9}{2}} \doteq 0{,}33. \tag{9}$$

Obrácení postupu ukáže, že pro všecka a splňující nerovnost (9) je skutečně $H_1K_1 \leqq 3$.

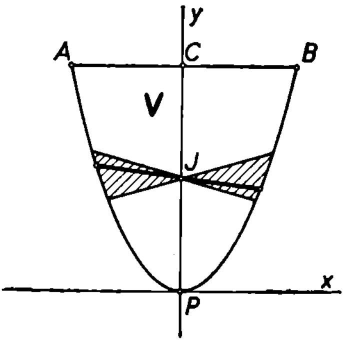
Zbývá dokázat to, co nám napovídá názor: že totiž pro všecky přímky q_2 je $H_2K_2 > 3$. Předně je $JK_2 > JC = 2$ (viz obr. 13). Nyní použijeme výsledku z příkladu 6; tam jsme zjistili, že kružnice se středem J a poloměrem $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ náleží útvaru U (a tedy i útvaru V); proto je jistě $H_2J \geqq \frac{1}{2}\sqrt{7}$. Sečteme-li nerovnosti $JK_2 > 2$, $H_2J \geqq \frac{1}{2}\sqrt{7}$, dostaneme

$$H_2K_2 > 2 + \frac{1}{4}\sqrt{7} < 2 + 1{,}32 = 3{,}32 > 3.$$

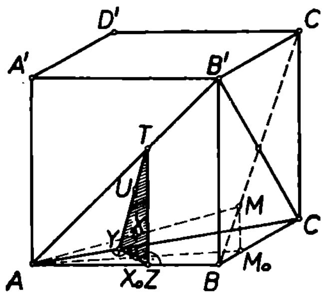
Protože je také $CP = 4 > 3$, jsou přímky žádané vlastnosti jen nalezené přímky q_1 a přímky s nimi souměrně sdružené podle osy y.

Všecka řešení úlohy jsou zakreslena na obr. 14; příslušné úsečky vyplňují vyšrafovanou část roviny.

Příklad 9. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1, M je bod úhlopříčky BC', pro který platí $C'M = 3\,BM$. Z krychle je oddělen čtyřstěn $ABCB'$ a je se-



Obr. 14



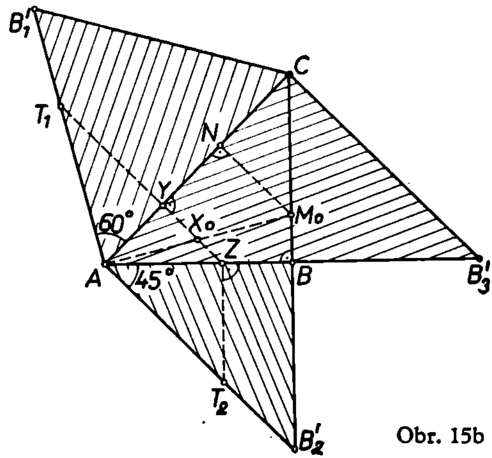
Obr. 15a

strojen střed X úsečky AM. Máme dokázat, že bod X je vnitřním bodem čtyřstěnu a máme určit největší okolí bodu X, které náleží čtyřstěnu.

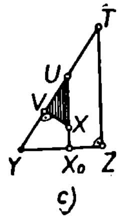
Řešení. Na obr. 15a jsou M_0, X_0 paty kolmic spuštěných po řadě z bodů M, X na rovinu ABC. Bod X náleží úsečce AM a není bodem povrchu čtyřstěnu $ABCB'$, je tedy jeho bodem vnitřním. Vzdálenost bodu X od roviny ABC je délka úsečky XX_0; pro ni platí

$$XX_0 = \frac{1}{2}MM_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}CC' = \frac{1}{8}. \qquad (10)$$

Vzdálenost bodu X od roviny ABB' je táž jako vzdálenost bodu X_0 od přímky AB, tj. $\frac{1}{2} BM_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} BC = \frac{1}{8}$. Vzdálenost bodu X od roviny BCB' je táž jako vzdálenost bodu X_0 od přímky BC, tj. $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$.



Obr. 15b



Obr. 15c

Bod X má tedy od rovin tří stěn čtyřstěnu $ABCB'$ vzdálenosti $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}$; zbývá zjistit jeho vzdálenost od roviny ACB'. K tomu použijeme pravoúhlého trojúhelníka YZT (viz obr. 15a), který dostaneme jako průsek čtyřstěnu $ABCB'$ s rovinou ϱ kolmou k přímce AC vedenou bodem X. Rovina ϱ je určena přímkou $XX_0 \perp AC$ a přímkou $YZ \perp AC$. Chceme-li trojúhelník YZT narýsovat, musíme zjistit skutečné délky jeho stran; to je možné pomocí sítě čtyřstěnu, která je narýsována na obr. 15b. Ze sítě zjistíme také skutečnou délku úsečky YX_0, z obr. 15a skutečnou délku úsečky XX_0; pak dovedeme narýsovat obr. 15c a z něho určíme vzdálenost VX bodu X od roviny ACB'.

Popsanou konstrukci budeme sledovat výpočtem. Platí (viz obr. 15b)

$$\left.\begin{aligned}
M_0N &= CN = \frac{3}{8} AC = \frac{3}{8}\sqrt{2},\\
YX_0 &= \frac{1}{2} M_0N = \frac{3}{16}\sqrt{2},\\
AY &= YZ = \frac{1}{2} AN = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\sqrt{2} = \frac{5}{16}\sqrt{2},\\
YT &= YT_1 = AY \operatorname{tg} 60^0 = \frac{5}{16}\sqrt{6},\\
ZT &= ZT_2 = AZ = AY\sqrt{2} = \frac{5}{8}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Z podobnosti $\triangle YX_0U \sim \triangle YZT$ plyne $UX_0 = \frac{ZT}{YZ}\cdot YX_0$ a dále podle (11)

$$UX_0 = \frac{3}{8}. \tag{12}$$

Nyní vypočteme pomocí (10), (12)

$$UX = UX_0 - XX_0 = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \tag{13}$$

Z podobnosti $\triangle XVU \sim \triangle YZT$ vyplývá podle vztahů (11), (13)

$$VX = \frac{UX}{YT} \cdot YZ = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\sqrt{3}. \qquad (14)$$

Podle (14) je tedy $VX > \frac{1}{12} \cdot 1{,}732 > 0{,}144 > \frac{1}{8}$. Nejmenší ze vzdáleností bodu X od stěn čtyřstěnu $ABCB'$ je tudíž $\frac{1}{8}$. Hledané okolí je koule se středem X a poloměrem $\frac{1}{8}$; tato koule se dotýká rovin ABC, ABB'.

Úloha 18. Určete konstruktivně i početně délku úsečky, kterou čtyřstěn $ABCB'$ z příkladu 9 vytíná na přímce $B'X$.

Úloha 19.* Je dán pravidelný hranol čtyřboký $ABCD A'B'C'D'$, jehož hrana podstavy $ABCD$ má délku a, hrana poboční AA' má délku v. Bod P je střed čtverce $A'B'C'D'$, M je střed úsečky AP. Bod X probíhá obvod čtverce $ABCD$. Zakreslete lomenou čáru, kterou probíhá druhý průsečík X' přímky MX s povrchem kvádru. Která z úseček XX' je nejdelší? Stačí vypočítat délky úseček XX' pro $X \equiv A$, $X \equiv B$, $X \equiv C$; je třeba provést diskusi vzhledem k proměnným a, v.

Úloha 20. a) Kolik hraničních bodů obsahuje přímka, procházející vnitřním bodem neomezeného konvexního útvaru? Udejte všecky možnosti, odůvodněte je a uveďte příklady z těch konvexních útvarů, které znáte.

b) Útvar U v rovině má tuto vlastnost: Každá přímka procházející *určitým* jeho vnitřním bodem obsahuje právě dva hraniční body. Lze tvrdit, že útvar U je konvexní?

Poznámka. Platí-li vlastnost v úloze 20b) pro *každý* vnitřní bod útvaru U, pak lze tvrdit, že útvar U je konvexní.

Kapitola 3.

OPĚRNÉ PŘÍMKY KONVEXNÍHO ÚTVARU V ROVINĚ

V kapitole 1. jsme vytvořili některé útvary, např. kruh, jako průniky nekonečně mnoha polorovin. Hranice těchto polorovin byly tečny příslušné kružnice; měly tedy tyto vlastnosti:

a) každá tečna obsahovala (aspoň jeden) hraniční bod kruhu;

b) celý útvar — kruh — ležel v téže polorovině vyťaté tečnou.

Obdobné přímky mají význam pro každý konvexní, ale i nekonvexní útvar; zavedeme pro ně název a vyslovíme definici.

Mějme útvar U v rovině ϱ. Nechť přímka p roviny ϱ má tyto vlastnosti:

a) obsahuje aspoň jeden hraniční bod útvaru U;

b) útvar U leží v jedné polorovině vyťaté přímkou p.

Takovou přímku p nazýváme *opěrnou přímkou* útvaru U; polorovinu s hranicí p, ve které leží útvar U, nazýváme *opěrnou polorovinou.*

Úloha 21. a) Udejte všecky opěrné přímky čtyřúhelníka $ABCD$ z obr. 1, které procházejí bodem A. Udejte všecky opěrné přímky téhož útvaru, které procházejí středem strany AB. Udejte všecky opěrné přímky téhož útvaru, které procházejí bodem C.

b) Udejte (z názoru) všecky opěrné přímky útvaru V z příkladu 8 (obr. 13), které procházejí bodem P; úlohu opakujte pro bod A. Udejte všecky opěrné přímky téhož útvaru, které jsou rovnoběžné s osou y. Obě svá tvrzení dokažte.

Poznámka. Úloha 21a ukazuje, že hraničním bodem nekonvexního útvaru nemusí procházet žádná opěrná přímka (takový je např. vrchol C čtyřúhelníka $ABCD$). Naproti tomu se dá dokázat, že *každým hraničním bodem konvexního útvaru prochází aspoň jedna opěrná přímka.* Některým hraničním bodem (ať konvexního či nekonvexního) útvaru může však procházet nekonečně mnoho opěrných přímek — jako např. bodem A v úloze 21a i 21b.

Příklad 10. Útvar U z úlohy 6 (obr. 7) má hraniční bod $H = [1, 1]$. Máme určit všecky opěrné přímky procházející bodem H.

Řešení. Žádná z hledaných opěrných přímek není rovnoběžná s osou y (proč?); rovnici každé hledané opěrné přímky p lze tedy napsat v tvaru

$$y = ax + b.$$

Protože přímka p prochází bodem $H = [1, 1]$, je $b = 1 - a$. Přímka p nemá žádný společný bod s kladnou poloosou y (obr. 16); proto je $a > 1$. Společné body křivky o rovnici $y = x^3$ a přímky p určíme řešením rovnice $x^3 = ax + 1 - a$ neboli

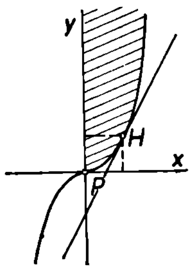
$$x^3 - ax + (a - 1) = 0. \tag{15}$$

Jak víme, má rovnice (15) kořen $x = 1$, neboť přímka p prochází bodem H. Proto se dá mnohočlen na levé straně (15) rozložit v součin dvojčlenu $x - 1$ a jistého kvadratického trojčlenu $x^2 + cx + d$. Koeficienty c, d určíme z rovnice

$$x^3 - ax + (a - 1) = (x - 1)(x^2 + cx + d), \tag{16}$$

která platí pro všecka x; vynásobením na pravé straně dostaneme

$$x^3 - ax + (a - 1) = x^3 + (c - 1)x^2 + (d - c)x - d. \tag{17}$$



Obr. 16

V rovnici (17) jsou koeficienty při týchž mocninách x sobě rovny; z toho vyplývá $c = 1$, $d = 1 - a$. Rovnice (15) má tedy podle (16) jednak kořen $x = 1$, jednak kořeny, které jsou řešením kvadratické rovnice

$$x^2 + x + 1 - a = 0.$$

Tato rovnice má při $a > 1$ vždy dva reálné kořeny

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}. \tag{18}$$

Protože je $a > 1$, je $\sqrt{a - \frac{3}{4}} > \frac{1}{2}$ a jeden z kořenů (18) je kladný, druhý záporný. Protože však p je opěrná přímka, neobsahuje dva hraniční body s kladnými souřadnicemi

x (jinak by útvar U neležel v téže polorovině vyťaté přímkou p). Odtud vyplývá, že je podle (18)

$$\sqrt{a - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = 1$$

a dále $a = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$. Bodem H prochází tedy nejvýše jedna opěrná přímka o rovnici $y = 3x - 2$.

Abychom dokázali, že tato přímka je skutečně opěrná, musíme odůvodnit, že všecky body $[x, x^3]$ pro $x \geqq 0$ leží v téže polorovině s hranicí p. Za tím účelem vypočteme rozdíl $x^3 - (3x - 2)$ a použijeme k tomu rozkladu (16).

$$x^3 - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) =$$
$$= (x - 1)^2 (x + 2).$$

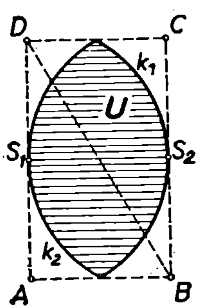
Odtud je vidět, že pro všecka $x \geqq 0$ je $x^3 - (3x - 2) \geqq$ $\geqq 0$, a tím je dokázáno, že přímka p je skutečně opěrná.

Jak ukazuje názor, našli jsme takto tečnu v bodě ke křivce o rovnici $y = x^3$, zvané *kubická parabola* (viz úlohu 6).

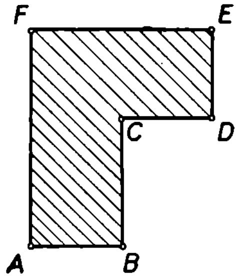
Úloha 22. Je dán útvar U omezený oblouky k_1, k_2 dvou shodných kružnic, jejichž středy jsou po řadě body S_1, S_2 (viz obr. 17), ležící vždy na druhém z oblouků. Útvaru U je opsán obdélník $ABCD$. Dokažte, že útvar U je konvexní a sestrojte všecky opěrné přímky rovnoběžné s úhlopříčkou BD (jsou dvě — jak ukazuje názor). Vyjádřete vzdálenost těchto dvou opěrných přímek pomocí poloměru r obou shodných kružnic. [Vyjde $r\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.]

Úloha 23. Na obr. 18 je nekonvexní šestiúhelník $ABCD$

EF; o jeho stranách platí $AB = CD = DE$, $BC = \frac{3}{2} AB$. Sestrojte opěrné polopřímky šestiúhelníka $ABCDEF$ rovnoběžné s přímkou AE a vypočtěte jejich vzdálenost. [Položte $AB = 1$.]



Obr. 17



Obr. 18

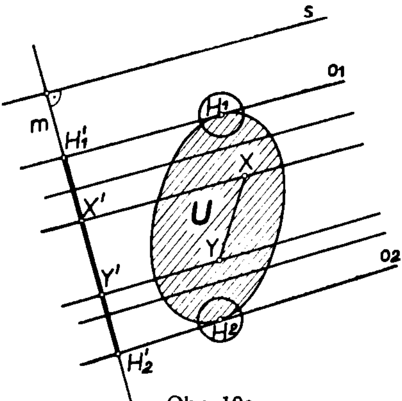
V úlohách 22 a 23 jsme viděli, že se nám podařilo uzavřít útvar konvexní či nekonvexní mezi dvě rovnoběžné opěrné přímky. Možnost této konstrukce vyplývá z jisté obecné věty, kterou nyní uvedeme.

IV. *Nechť je* U *útvar v rovině, s libovolná přímka této roviny. Pak existují nejvýše dvě opěrné přímky útvaru* U, *rovnoběžné s přímkou s.*

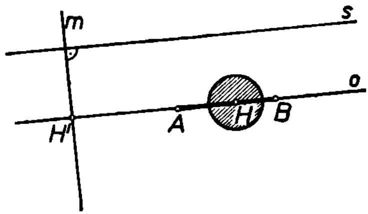
Dvě vysvětlivky: Slovo „nejvýše“ znamená, že počet opěrných přímek směru s je buď 2 nebo 1 nebo 0. Věta IV platí pro jakýkoli útvar v rovině — tedy i nekonvexní, jak nasvědčuje ukázka z úlohy 23.

Příklad 11. Máme dokázat větu IV pro konvexní útvary v rovině.

Řešení (obr. 19a). Promítneme všecky body konvexního útvaru U směrem s na pevnou přímku m kolmou k přímce s. Jsou X', Y' průměty dvou bodů X, Y útvaru U a je-li



Obr. 19a



Obr. 19b

$X' \not\equiv Y'$, pak každý bod úsečky $X'Y'$ je průmětem některého bodu úsečky XY, tj. některého bodu útvaru U, který je konvexní. Z toho vyplývá, že množina U′ průmětů všech bodů útvaru U*) je konvexní útvar na přímce m. Je tedy U′ podle věty II buď jediný bod nebo úsečka nebo polopřímka nebo přímka m sama.

Je-li útvar U′ jediný bod H' (to může nastat např., když U je úsečka rovnoběžná s přímkou s), pak přímka $o \parallel s$ procházející bodem H', obsahuje aspoň jeden bod H útvaru U, který je hraniční. Tato situace je na obr. 19b;

*) Stručně bychom mohli nazvat množinu U′ *průmětem útvaru* U.

vysvětlete sami, proč je bod H hraničním bodem útvaru U. Přímka o je v tomto případě zřejmě opěrná.

Je-li útvar U' úsečka — např. na obr. 19a úsečka $H_1'H_2'$, pak každá z přímek $o_1 \parallel s$, $o_2 \parallel s$ procházejících po řadě body H_1', H_2' buď obsahuje bod útvaru U nebo neobsahuje žádný bod útvaru U. Obsahuje-li např. přímka o_1 bod H_1 útvaru U, je tento bod hraničním bodem útvaru U; přímka o_1 je pak opěrnou přímkou útvaru, neboť celý útvar U leží v polorovině o_1H_2'. Zcela obdobné tvrzení platí i o přímce o_2.

V druhém případě, když o_1 neobsahuje žádný bod útvaru U, není to opěrná přímka. Jiné opěrné přímky mimo o_1, o_2 útvar U mít nemůže; proč? Jsou tedy v případě, že U' je úsečka, opět nejvýše dvě opěrné přímky.

Obdobně vyšetříme další případy: je-li U' polopřímka, má útvar U nejvýše jednu opěrnou polopřímku směru s, která prochází počátkem polopřímky U'. Je-li přímka U', nemá útvar U žádnou opěrnou přímku směru s.

Úloha 24. Postupem z příkladu 11 vyhledejte všecky opěrné přímky daného útvaru U rovnoběžné s danou přímkou s.

a) Útvar U je polopřímka AB; $s \equiv AB$.

b) Útvar U je úsečka AB; $s \not\equiv AB$.

c) Útvar U je dán (v kartézských souřadnicích) nerovností $y \geqq x^2$; přímka s je osa y.

d) Útvar U je dán nerovnostmi $y \geqq |\operatorname{tg} x|$, $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$; přímka s je osa y.

e) Útvar U je dán nerovnostmi $x > 0, y \geqq \frac{1}{x}$; přímka s je jednak osa x, jednak přímka $x + y = 0$.

Věty IV užíváme obyčejně v případě, kdy útvar U je jednak omezený, jednak když má aspoň jeden vnitřní bod; podle úmluvy ze str. 21 je také uzavřený. Takové jsou např. útvary z úloh 22 a 23.

Pro stručnější vyjadřování nazveme útvar v rovině, který má aspoň jeden vnitřní bod, *útvarem dvojrozměrným*. Je tedy např. čtverec útvar dvojrozměrný, naproti tomu jeho obvod nebo úsečka není útvar dvojrozměrný.

Větu IV pak lze nahradit určitější větou, která zní:

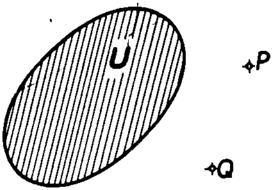
IV'. *Nechť je* U *omezený dvojrozměrný útvar, s libovolná přímka jeho roviny. Pak existují právě dvě (různé) opěrné přímky útvaru* U, *rovnoběžné s přímkou s.*

Větu IV' nebudeme dokazovat, neboť k jejímu důkazu nemáte potřebné znalosti. Hlavní obtíž při jejím dokazování je tato: musíme odůvodnit, že průmětem uzavřeného útvaru je uzavřený útvar, což vyžaduje jistý složitější postup.

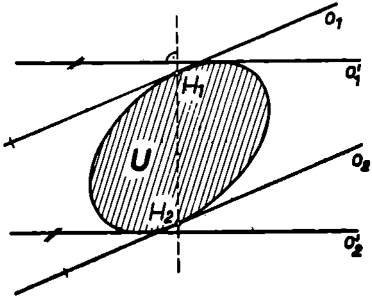
Větu IV' jsme už objasnili v úlohách 22 a 23; uvedeme ještě jednu ukázku.

Úloha 25.* Útvar U je omezen oválem z úlohy 3 (obr. 4a, b). Sestrojte v obou případech opěrné přímky rovnoběžné α) s přímkou AB, β) s přímkou GH. Vyjádřete vzdálenosti rovnoběžných opěrných přímek pomocí délek stran čtyřúhelníka $ABDE$.

Každé dvě navzájem rovnoběžné opěrné přímky omezeného dvojrozměrného útvaru mají určitou kladnou vzdálenost. Všecky tyto vzdálenosti tvoří jistou množinu čísel, která sice může být konečná (vzpomeňte na kruh!), ale zpravidla je nekonečná. Dá se dokázat, že mezi všemi vzdálenostmi rovnoběžných opěrných přímek je jedna největší a jedna nejmenší. To není samozřejmé: nekonečná množina kladných čísel nemusí obsahovat ani nejmenší ani největší číslo. Např. v množině $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \cdots\right\}$ není žádné nejmenší ani žádné největší číslo, ačkoli všecka čísla jsou v intervalu (0, 1); dovedete to dokázat?



Obr. 20



Obr. 21

Zavedeme si názvy: největší vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek omezeného dvojrozměrného útvaru nazveme jeho *průměrem*, nejmenší takovou vzdálenost nazveme jeho *šířkou*.

Jaký je názorný význam těchto dvou pojmů? Představme si, že útvar U je vystřižen z papíru (viz obr. 20). Na podložce jsou vyznačeny křížky dva body P, Q. Dáme dvě otázky:

1. Zda lze vystřižený útvar U položit na podložku tak, aby zakryl oba body P, Q.

2. Zda lze vystřižený útvar U „provléci“ mezi body P, Q bez deformací.

Odpověď na první otázku zní: Je to možné jen v případě, že *průměr* útvaru U je větší nebo roven vzdálenosti PQ. Odpověď na druhou otázku zní: Je to možné jen v případě, že *šířka* útvaru U je menší nebo rovná vzdálenosti PQ.

Dříve než začneme vyšetřovat průměr a šířku některých útvarů, uvedeme ještě jednu větu, která nám při tomto vyšetřování pomůže.

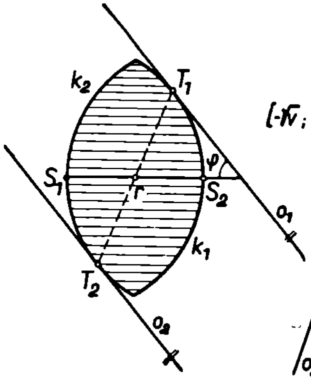
V. *Je-li vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek o_1, o_2 rovna průměru útvaru* U, *pak na každé z těchto přímek leží jediný hraniční bod a spojnice těchto dvou hraničních bodů je kolmá k přímkám o_1, o_2.*

Příklad 12. Máme dokázat (nepřímo) větu V.

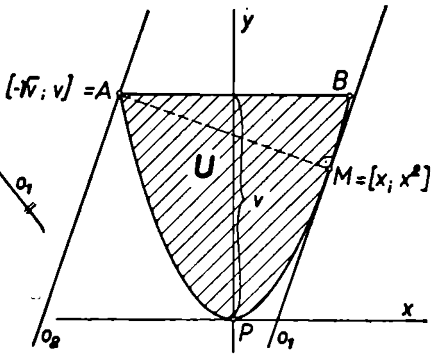
Řešení. Předpokládejme, že na opěrných přímkách o_1, o_2 lze najít po řadě hraniční body H_1, H_2 tak, že přímka H_1H_2 není kolmá k o_1 (obr. 21). Sestrojme obě opěrné přímky o_1', o_2' útvaru U, které jsou kolmé k přímce H_1H_2. Body H_1, H_2 náležejí pásu roviny omezenému přímkami o_1', o_2'; proto vzdálenost těchto dvou přímek je $d' \geqq H_1H_2$. Protože přímka H_1H_2 není kolmá k o_1, platí pro vzdálenost d přímek o_1, o_2 nerovnost $d < H_1H_2$. Spojením obou nerovností dostaneme vztah $d < d'$, což znamená, že d není průměr útvaru U. Tím jsme nalezli spor s předpokladem.

Úloha 26. a) Najděte průměr a šířku libovolného trojúhelníka. [Průměr je délka největší jeho strany, šířka je velikost nejmenší jeho výšky.]
b) Strany rovnoběžníka mají délky a, b, jeho výška na stranu a je v; přitom platí $a < b$. Vyjádřete průměr rovnoběžníka pomocí a, b, v a sestrojte obě opěrné přímky, jejichž vzdálenost je rovna průměru. Vyjádřete šířku rovnoběžníka pomocí proměnných a, b, v.

Úloha 27. Dokažte tuto větu: Je-li U omezený útvar v rovině a jsou-li A, B takové jeho dva body, že platí $AB \geqq XY$, kde X, Y jsou libovolné dva body útvaru U, pak vzdálenost AB je průměr útvaru U. [Návod: veďte opěrné přímky kolmé k přímce AB.]



Obr. 22



Obr. 23

Úloha 28. Vyšetřte průměr a šířku útvaru U z úlohy 22. Vyjádřete vzdálenost jeho dvou rovnoběžných opěrných přímek o_1, o_2 pomocí r, φ (viz obr. 22). [Vyjde $r\,(2 - \sin\varphi)$.]

Příklad 13. Útvar U je množina všech bodů v rovině, jejichž kartézské souřadnice splňují nerovnosti $y \geqq x^2$, $|x| \leqq \sqrt{v}$, kde v je dané kladné číslo. Máme zjistit průměr tohoto útvaru.

Řešení. Útvar U je úseč paraboly o rovnici $y = x^2$ načrtnutá na obr. 23. Jedna dvojice opěrných přímek navzájem rovnoběžných je přímka AB a osa x. Ty však neurčují podle věty V průměr útvaru, neboť přímka AB obsahuje nekonečně mnoho hraničních bodů. Průměr je tedy buď délka AB nebo vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek, z nichž jedna je tečna paraboly, druhá prochází bodem A. Nechť opěrná přímka o_1 je tečna v bodě $M = [x, x^2]$; pak její směrnice je — jak je známo z analytické geometrie — rovna $2x$. Směrnice přímky AM je číslo $\frac{x^2 - v}{x + \sqrt{v}} = x - \sqrt{v}$. Podmínka pro kolmost přímek o_1, AM zní $2x(x - \sqrt{v}) + 1 = 0$ neboli

$$2x^2 - 2\sqrt{v}\,x + 1 = 0. \tag{15}$$

Diskriminant rovnice (15) je roven $(4v - 2)$. Je-li tedy $v < 2$, nemá rovnice (15) reálný kořen; průměr útvaru U musí pak být délka $AB = 2\sqrt{v}$.

Je-li $v \geqq 2$, má rovnice (15) dva reálné kořeny dané vzorcem

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{v} \pm \sqrt{v - 2}). \tag{16}$$

Vypočteme pro oba kořeny vzdálenost AM. Platí

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x^2 - v)^2 + (x + \sqrt{v})^2 = \\ &= (x + \sqrt{v})^2 [1 + (x - \sqrt{v})^2]. \end{aligned} \tag{17}$$

Ze vzorce (16) dostaneme

$$x + \sqrt{v} = \frac{1}{2}(3\sqrt{v} \pm \sqrt{v - 2}),$$

$$x - \sqrt{v} = \frac{1}{2}(-\sqrt{v} + \sqrt{v-2});$$

dále je

$$\begin{aligned} (v + \sqrt{v})^2 &= \frac{1}{2}[5v - 1 \pm 3\sqrt{v(v-2)}], \\ 1 + (x - \sqrt{v})^2 &= \frac{1}{2}[v + 1 \mp \sqrt{v(v-2)}]. \end{aligned} \tag{18}$$

Přitom platí zároveň buď obě horní znaménka nebo obě dolní znaménka. Ze (17) a (18) dostaneme po úpravě

$$AM^2 = [2v^2 + 10v - 1 \mp 2(v-2)\sqrt{v(v-2)}]. \tag{19}$$

Protože je $v \geqq 2$, je větší z obou čísel (19) dáno dolním znaménkem (plus). Průměr d útvaru U je tedy dán poměrně složitou formulí

$$d = \sqrt{2v^2 + 10v - 1 + 2(v-2)\sqrt{v(v-2)}}.$$

Připomeňme si, že jsme v kapitole 1. dokazovali konvexitu kruhu (i jiných útvarů) tím, že jsme ho vytvořili jako průnik jeho opěrných polorovin. Tento postup je východiskem k zavedení dalšího důležitého pojmu.

Má-li útvar U ležící v rovině aspoň jednu opěrnou polorovinu (to však nemusí nastat, viz úlohu 29), je průnik $\overline{\mathrm{U}}$ všech jeho opěrných polorovin podle věty I′ konvexní útvar. Průnik $\overline{\mathrm{U}}$ zřejmě obsahuje útvar U; přitom je $\overline{\mathrm{U}}$ jakýsi „nejmenší" konvexní útvar obsahující daný útvar U. Dá se totiž dokázat, že jakýkoli konvexní útvar V, který obsahuje daný útvar U, obsahuje také útvar $\overline{\mathrm{U}}$.

Zavedeme název:

Průnik všech opěrných polorovin daného útvaru U ležícího v rovině (tj. konvexní útvar $\overline{U}$) nazýváme *konvexním obalem útvaru* U.

Nemá-li útvar U žádnou opěrnou polorovinu, pokládáme za jeho konvexní obal celou rovinu.

Úloha 29. V rovině je dána soustava kartézských souřadnic x, y. Útvar U se skládá ze všech bodů $[x, y]$, pro jejichž souřadnice platí $|xy| \leqq 1$. Načrtněte útvar U, dokažte, že je nekonvexní a že nemá žádnou opěrnou přímku (polorovinu).

Je-li daný útvar U omezený, má aspoň jednu opěrnou polorovinu, jeho konvexní obal není celá rovina — dokonce lze dokázat, že i jeho konvexní obal je omezený.

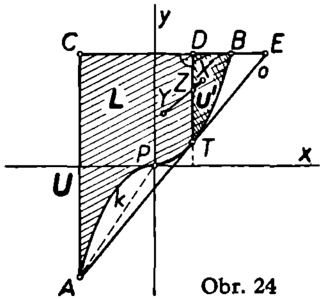
Úloha 30.* Dokažte, že konvexní obal omezeného útvaru je omezený útvar. Dokažte, že konvexní obal konvexního útvaru U je útvar U.

Úloha 31. Určete konvexní obal a) nekonvexního čtyřúhelníka $ABCD$ z obr. 1, b) nekonvexního šestiúhelníka $ABCDEF$ z obr. 18. Výsledky odůvodněte.

Příklad 14. V rovině je dána soustava kartézských souřadnic. Útvar U je množina všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují nerovnosti $|x| \leqq 1$, $x^3 \leqq y \leqq 1$. Máme načrtnout útvar U a zjistit, zda je konvexní či nekonvexní, po případě najít jeho konvexní obal.

Řešení. Na obr. 24 je načrtnuta část kubické paraboly k o rovnici $y = x^3$; dále je tu vyšrafován útvar U. Názor napovídá, že útvar U není konvexní; skutečně, např. bod $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ náleží sice úsečce AP, ale nenáleží útvaru U, neboť je $(-\frac{1}{2})^3 > -\frac{1}{2}$.

Odhadneme konvexní obal. Vedeme-li bodem A opěrnou přímku, která mimo A obsahuje jediný hraniční bod



Obr. 24

T ležící v prvním kvadrantě na křivce k, pak útvar V složený z lichoběžníka $\mathsf{L} \equiv ACDT$ a vyšrafovaného obrazce U′ omezeného úsečkami DT, BD a obloukem BT křivky k má tyto vlastnosti:

a) je konvexní;

b) obsahuje útvar U;

c) je obsažen v konvexním obalu $\overline{\mathsf{U}}$.

Z těchto tří vlastností můžeme usoudit podle poznámky na str. 44, že V je hledaný obal $\overline{\mathsf{U}}$.

a) Důkaz konvexity útvaru V: Protože lichoběžník L i obrazec U′ jsou konvexní (odůvodněte s pomocí úlohy 6), stačí dokázat, že úsečka XY, jejíž krajní bod X náleží obrazci U′ a krajní bod Y lichoběžníku L, náleží celá útvaru U. Úsečka XY náleží trojúhelníku ACE, body X, Y jsou odděleny přímkou DT; proto úsečky DT, XY

mají společný jistý bod Z. Úsečka XZ náleží do U′ (U′ je konvexní), a tedy i do U. Úsečka YZ náleží do L (L je konvexní) a tedy i do U. *Závěr:* úsečka XY náleží skutečně celá útvaru U. Vlastnost b) je zřejmá, stejně tak i vlastnost c). Obal $\overline{\mathrm{U}}$ obsahuje totiž jednak útvar U′ (část útvaru U), jednak body A, C, D, T, tedy i lichoběžník L.

Zbývá určit bod T. Opěrná přímka o má rovnici

$$y = t(x + 1) - 1,$$

neboť prochází bodem $A = [-1, -1]$. S křivkou k má mimo A společný bod jediný T. Jeho souřadnice x je kořenem rovnice $x^3 = t(x + 1) - 1$, neboli

$$x^3 - tx + (1 - t) = 0. \tag{20}$$

Rovnice (20) má kořen $x = -1$ (přímka o prochází bodem A). Proto lze mnohočlen na levé straně (20) rozložit:

$$\begin{aligned} x^3 - tx + (1 - t) &= (x + 1)(x^2 + ax + b) = \\ &= x^3 + (a + 1)x^2 + (a + b)x + b. \end{aligned}$$

Z porovnání koeficientů u týchž mocnin x dostaneme $a = -1$, $b = 1 - t$. Souřadnice x bodu T je tedy kořenem rovnice

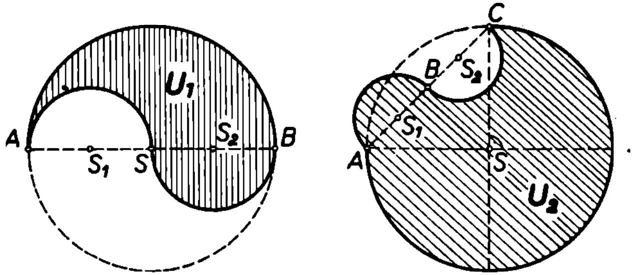
$$x^2 - x + (1 - t) = 0.$$

Tato rovnice musí mít kořen dvojnásobný, tj. platí $t - \frac{3}{4} = 0, t = \frac{3}{4}, T = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right]$.

Tím je úloha úplně rozřešena.

Úloha 32. Určete průměr a šířku útvaru $\overline{\mathrm{U}}$ z příkladu 14.

Úloha 33.*V rovině je dána soustava kartézských souřadnic. Útvar U je množina všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují nerovnosti $|x| \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$. Načrtněte útvar U, zjistěte, zda je konvexní či nikoli, popřípadě odhadněte jeho konvexní obal.



a) Obr. 25 b)

Úloha 34.* Na obr. 25ab jsou vyšrafovány útvary U_1, U_2 omezené vesměs polokružnicemi. Dokažte, že oba útvary jsou nekonvexní, sestrojte jejich konvexní obaly a vypočtěte průměry i šířky těchto obalů.

Kapitola 4.

OPĚRNÉ ROVINY KONVEXNÍHO ÚTVARU V PROSTORU

Pojmy z kapitoly 3 lze přenést s příslušnými obměnami z roviny do prostoru. Místo opěrné přímky tu bude opěrná rovina, místo opěrné poloroviny opěrný poloprostor, místo dvojrozměrného útvaru útvar trojrozměrný.

Úloha 35. Vyslovte definice opěrné roviny, opěrného poloprostoru a trojrozměrného útvaru. Uveďte příklady všech těchto tří pojmů.

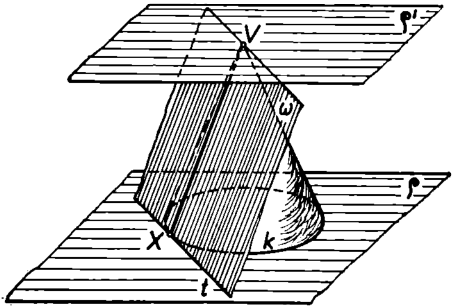
Není překvapující, že i v prostoru platí věty obdobné větám IV, IV′, V. Tyto věty (které nebudeme dokazovat) znějí:

VI. *Nechť je* U *útvar v prostoru, σ libovolná rovina. Pak existují nejvýše dvě opěrné roviny útvaru* U, *rovnoběžné s rovinou σ.*

VI′. *Nechť je* U *omezený trojrozměrný útvar, σ libovolná rovina. Pak existují právě dvě (různé) opěrné roviny útvaru* U, *rovnoběžné s rovinou σ.*

Právě tak jako v rovině lze zavést i v prostoru pojem průměru a šířky.

Úloha 36. Vyslovte definice průměru a šířky omezeného trojrozměrného útvaru. Najděte průměr a šířku čtyřstěnu a krychle. [Průměr čtyřstěnu je délka jeho nejdelší hrany, jeho šířka je velikost jeho nejmenší výšky anebo nejmenší vzdálenost dvou jeho protějších hran. Průměr krychle je délka její tělesové úhlopříčky, její šířka je délka hrany.]



Obr. 26

Jako v rovině platí i v prostoru věta obdobná větě V:

VII. *Je-li vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných rovin* ω_1, ω_2 *rovna průměru útvaru* U, *pak v každé z těchto rovin leží jediný hraniční bod a spojnice těchto dvou hraničních bodů je kolmá k rovinám* ω_1, ω_2.

Příklad 15. Je dán rotační kužel, jehož výška je v a jehož podstava má poloměr r. Máme určit všecky opěrné roviny kužele a určit jeho průměr.

Řešení. a) Každá opěrná rovina ω, která obsahuje vnitřní bod strany VX daného kužele, obsahuje celou stranu VX, neboť jinak by oddělovala body V, X a nebyla by opěrná (obr. 26). Rovinu ϱ podstavy kužele protne rovina ω v přímce t, která prochází bodem X; podstava kužele i její obvod — kružnice k — leží v téže polorovině vyťaté přímkou t. Proto je t tečna kružnice k v bodě X a rovina ω je tečná rovina kužele podél strany VX (obr. 26).

b) Jestliže opěrná rovina ω neobsahuje jiné hraniční body kužele než body podstavy, pak je to buď rovina ϱ podstavy, nebo obsahuje jediný bod X kružnice k; pak je to rovina procházející příslušnou tečnou t (různá od rovin tV, ϱ), která nemá s kuželem mimo X žádný společný bod. Vyložte podrobně!

c) Zbývají ještě ty opěrné roviny, které neobsahují jiný hraniční bod mimo vrchol V. Sem patří jednak vrcholová rovina ϱ' rovnoběžná s rovinou ϱ, jednak ty vrcholové roviny, které protínají rovinu ϱ v přímce, která nemá s kružnicí k žádný společný bod.

Odůvodněte, že jsou tím vyčerpány všecky opěrné roviny kužele.

Jsou-li ω_1, ω_2 dvě rovnoběžné opěrné roviny kužele, pak je to buď dvojice ϱ, ϱ', nebo opěrné roviny ω_1, ω_2 protínají rovinu ϱ ve dvou rovnoběžkách o_1, o_2; aspoň jedna z přímek o_1, o_2 je pak tečnou kružnice k (proč?).

Jsou tedy tři možnosti:

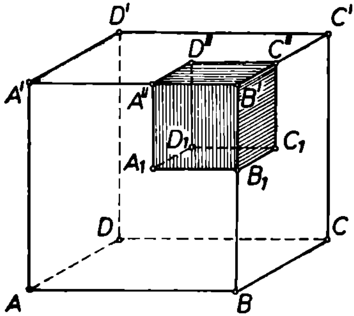
1. Jedna z rovin ω_1, ω_2 je typu a), druhá typu b);
2. jedna z rovin ω_1, ω_2 je typu b), druhá typu c);
3. obě roviny ω_1, ω_2 jsou typu b).

Pro určení průměru kužele užijeme věty VII. Podle této věty je vyloučen případ dvojice ϱ, ϱ' a případ 1 (proč?). V případě 2 musí být obě roviny ω_1, ω_2 kolmé k jedné straně kužele a průměr je roven délce této strany, tj. číslu $\sqrt{r^2 + v^2}$. V případě 3 musí být obě roviny ω_1, ω_2 kolmé k rovině ϱ a průměr je pak $2r$.

Je tedy třeba porovnat čísla $\sqrt{r^2 + v^2}$, $2r$. Je-li $2r \geqq \sqrt{r^2 + v^2}$, je $4r^2 \geqq r^2 + v^2$, tj. $v \leqq r\sqrt{3}$, a obráceně.

Závěr. Průměr kužele je roven průměru podstavy jen tehdy, je-li $v \leqq r\sqrt{3}$; jinak je průměr kužele roven délce jeho strany.

Úloha 37.*Určete šířku rotačního kužele z příkladu 15. (Je třeba opět provést diskusi vzhledem k číslům r, v).



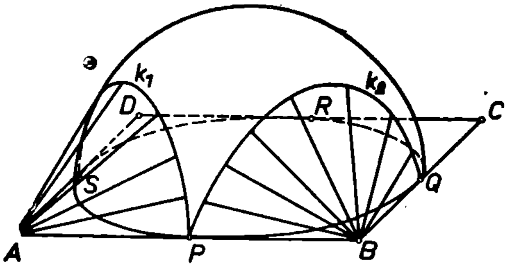
Obr. 27

Úloha 38.*Útvar U se skládá z rotačního kužele a polokoule (vně kužele) omezené kruhem, který je podstavou kužele. Určete všecky opěrné roviny tělesa, jeho průměr a šířku.

Další pojem, který lze přenést z roviny do prostoru, je pojem konvexního obalu.

Úloha 39. Vyslovte definici konvexního obalu trojrozměrného útvaru (pomocí opěrných poloprostorů). Jako příklad udejte konvexní obal nekonvexního tělesa U, které vznikne z krychle $ABCDA'B'C'D'$ oddělením krychle $A_1B_1C_1D_1A''B'C''D''$ (viz obr. 27).

Úloha 40.* V rovině ϱ je dán půlkruh K_1 o průměru AB, v rovině σ různoběžné s ϱ je dán půlkruh K_2 o průměru AB. Určete konvexní obal útvaru U složeného z obou obrazců. Určete průměr a šířku útvaru U.

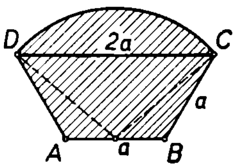


Obr. 28

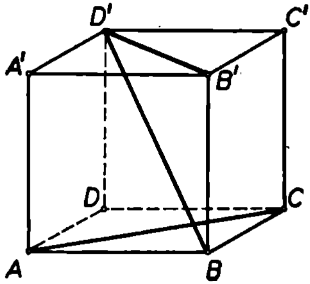
Příklad 16. Útvar U se skládá z čtverce $ABCD$ a polokoule, omezené kruhem vepsaným čtverci $ABCD$. Máme vyšetřit konvexní obal a průměr útvaru U.

Řešení (obr. 28). a) Pro rozřešení úlohy je třeba prozkoumat opěrné roviny útvaru U. Daná polokoule je omezena kruhem a jistým hlavním vrchlíkem V kulové plochy K. Vyšetříme, které tečné roviny kulové plochy K jsou opěrnými rovinami útvaru U. Jsou to takové tečné roviny kulové plochy K, jejichž dotykové body náležejí vrchlíku V a jimiž vyťaté poloprostory obsahují nejen danou polokouli, ale i čtverec $ABCD$. Dostaneme je takto: Vedeme z bodů A, B, C, D tečny ke kulové ploše K, ovšem jen ty, které se dotýkají v bodech vrchlíku V. Dotykové body těchto tečen vyplní čtyři shodné polokružnice k_1, k_2, k_3, k_4 (z nich dvě k_1 a k_2 jsou zakresleny na obr. 28). Tyto čtyři kružnice mají po dvou společné body — jsou to středy

P, *Q*, *R*, *S* stran *AB*, *BC*, *CD*, *DA*; vysvětlete proč. Z vrchlíku V vynecháme ty body, jež leží uvnitř kuželových ploch tečen, vedených z bodů *A*, *B*, *C*, *D* ke kulové ploše K. Zbude jistá část V′ hlavního vrchlíku V, omezená polokružnicemi k_1, k_2, k_3, k_4 (které k V′ patří). Z tečných rovin plochy K patří mezi opěrné roviny útvaru U právě všecky ty roviny, které se dotýkají v bodech útvaru V′.



Obr. 29



Obr. 30

Dále patří mezi opěrné roviny útvaru U všecky roviny procházející vrcholy *A*, *B*, *C*, *D*, které nemají s danou polokoulí žádný společný bod. Konečně patří k opěrným rovinám útvaru U i rovina čtverce *ABCD*.

Jiné opěrné roviny nejsou; odůvodněte to. Zejména dokažte, že žádným hraničním bodem útvaru U, který náleží vrchlíku V, ale nikoli útvaru V′, neprochází žádná opěrná rovina.

b) Z předchozí úvahy snadno odvodíme, co je průnikem $\overline{U}$ všech opěrných poloprostorů útvaru U; je to daný útvar U, doplněný „polokuželi“ s vrcholy *A*, *B*, *C*, *D* a řídícími „polokružnicemi“ k_1, k_2, k_3, k_4. Tento útvar $\overline{U}$ je konvexní obal útvaru U.

c) K určení průměru útvaru U je třeba podle věty VII najít takové dva hraniční body, jejichž spojnice je kolmá k opěrným rovinám, které jimi procházejí. Takové dvojice hraničních bodů jsou dvojice bodů ležících uvnitř protějších stran čtverce $ABCD$; ty však nepřicházejí podle věty VII v úvahu, neboť příslušné opěrné roviny obsahují více než jeden hraniční bod. Z téhož důvodu nepřichází v úvahu dvojice složená z roviny ABC a z tečné roviny kulové plochy K, která je s ní rovnoběžná. Zbývají tedy jen dvojice bodů A, C a B, D a opěrné roviny kolmé k úhlopříčkám čtverce $ABCD$. Průměr útvaru U (i jeho konvexního obalu $\overline{\text{U}}$) je proto délka úhlopříčky čtverce $ABCD$.

Úloha 41. Těleso T je složeno z komolého kužele, který vznikne rotací rovnoramenného lichoběžníka $ABCD$ kolem osy jeho základny AB, a z kulové úseče, která je omezena kruhem o průměru CD a je uťata z koule, jejíž střed je středem základny AB (osový řez je na obr. 29). Zjistěte, zda těleso propadne štěrbinou tvaru rovinného pásu, která má danou šířku d. Je dáno: $AB = BC = \frac{1}{2}\,CD = a$. Je těleso T konvexní?

Úloha 42.* a) Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Zjistěte konvexní obal útvaru složeného z úseček AC, BD', $B'D'$ (obr. 30).

b) Zjistěte konvexní obal útvaru složeného ze čtyř (různých) bodů, které neleží v rovině.

Kapitola 5.

DĚLENÍ KONVEXNÍHO ÚTVARU NA ČÁSTI TÉHOŽ OBSAHU

V této kapitole se budeme zabývat výhradně omezenými dvojrozměrnými útvary, většinou konvexními. První úloha, kterou budeme řešit, je rozdělení útvaru přímkou na dvě části téhož obsahu. Začneme dvěma příklady.

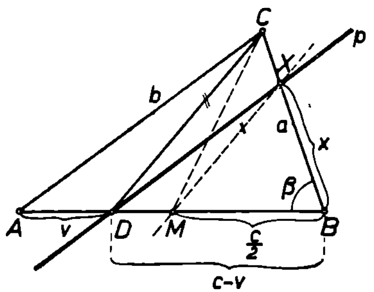
Příklad 17. Je dán trojúhelník ABC a mezi vrcholy A, B bod D. Bodem D máme vést přímku p tak, aby rozdělila daný trojúhelník na dva obrazce téhož obsahu.

Řešení. Označíme strany a úhly trojúhelníka obvyklým způsobem, vzdálenost AD označíme v a budeme předpokládat, že platí $v \leqq \frac{1}{2} c$. [Kdyby bylo $v > \frac{1}{2} c$, vyměnili bychom označení vrcholů A, B (a tím i stran a, b, úhlů α, β) a postupovali bychom dále naznačeným způsobem.] Je-li $v = \frac{1}{2} c$, pak trojúhelníky ADC, BDC mají týž obsah a úloha je rozřešena. Na obr. 31 je naznačena situace, kdy je $v < \frac{1}{2} c$, tj. $v < c - v$. V tomto případě pro obsahy trojúhelníků platí $\triangle ADC < \triangle BDC$ (proč?), kde např. znak $\triangle ADC$ značí obsah trojúhelníka ADC; hledaná přímka p bude tedy protínat stranu BC v jejím vnitřním bodě X. Označme $BX = x$ a uplatněme podmínku $\triangle ABC = 2 . \triangle BDX$. Podle známého vzorce je

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \quad \triangle BDX = \frac{1}{2} x (c - v) \sin \beta.$$

Z předchozí podmínky vyplývá $\frac{1}{2} ac \sin\beta = x\,(c - v)$. $\sin\beta$, neboli po úpravě

$$x : a = \frac{1}{2} c : (c - v). \qquad (21)$$



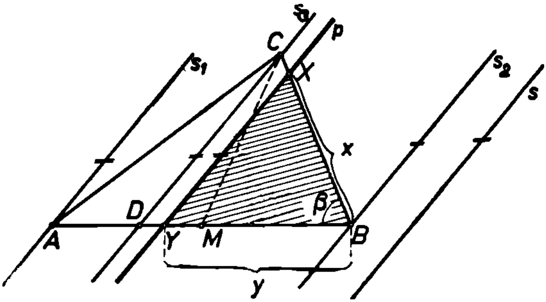
Obr. 31

Z rovnice (21) vyplývá podle známé věty konstrukce bodu X: patrně je $CD \parallel MX$; přitom M značí střed strany AB.

Tuto konstrukci můžeme ověřit i jinak: Protože je $CD \parallel MX$, platí pro obsahy trojúhelníků $\triangle CDM = \triangle CDX$; má tedy trojúhelník AMC týž obsah jako (vypuklý) čtyřúhelník $ADXC$, a to $\frac{1}{2} \triangle ABC$.

Příklad 18. Je dán trojúhelník ABC a přímka s. Máme vést přímku p rovnoběžnou s přímkou s tak, aby přímka p rozdělila daný trojúhelník ve dva obrazce téhož obsahu.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že přímka s není rovnoběžná se žádnou stranou trojúhelníka ABC. Vedeme vrcholy A, B, C po řadě přímky s_1, s_2, s_3 rovnoběžně s přímkou s. Právě dvě z těchto přímek jsou opěrné (proč?), třetí protíná protější stranu trojúhelníka v jejím vnitřním bodě. Zvolíme-li vhodně označení vrcholů trojúhelníka, jsou s_1, s_2 opěrné přímky, s_3 protíná stranu



Obr. 32

AB v jejím vnitřním bodě D (obr. 32). Můžeme ještě předpokládat, že je $AD \leqq AM$, kde M je střed strany AB; i toho můžeme dosáhnout případnou výměnou označení vrcholů A, B.

Je-li $AD = AM$, je hledaná přímka $p \equiv s_3$. Je-li $AD < AM$, je $\triangle ADC < \triangle BDC$ a hledaná přímka p protne strany BC, BA po řadě v bodech X, Y, pro něž platí $BX < BC$, $BY < BD$. Označme strany a úhly trojúhelníka ABC obvyklým způsobem, dále označme $BX = x$, $BY = y$. Z podmínky pro obsahy plyne

$$\frac{1}{2}\,ac\ \sin\beta = 2\cdot\frac{1}{2}\,xy\sin\beta,$$

neboli

$$2xy = ac. \tag{22}$$

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle BXY \sim \triangle BCD$ dostaneme $x : a = y : (c - v)$ neboli

$$x = \frac{a}{c - v} y. \tag{23}$$

Dosadíme-li z (23) do (22), vyjde po úpravě

$$y^2 = \frac{1}{2} c (c - v). \tag{24}$$

Z rovnice (24) vyplývá, že úsečka BY je střední geometrickou úměrnou úseček BM, BD. Sestrojení bodu Y např. pomocí Eukleidovy věty přenecháváme čtenáři.

Je-li přímka s rovnoběžná s některou stranou trojúhelníka ABC, je jeho „rozpůlení"*) známá školská úloha, kterou nebudeme řešit.

V příkladech 17, 18 šlo o rozpůlení konvexního útvaru — trojúhelníka — dvojím způsobem: jednak přímkou procházející daným bodem, jednak přímkou daného směru. Druhý způsob je důležitější a studuje se zejména u konvexních útvarů. Platí následující velmi obecná věta:

VIII. *Nechť je dán v rovině omezený dvojrozměrný útvar* U *obsahu* P *a dále přímka* s *této roviny. Pak existuje jediná přímka* p *rovnoběžná s přímkou* s, *která dělí útvar* U *na dvě části obsahu* $\frac{1}{2} P$.

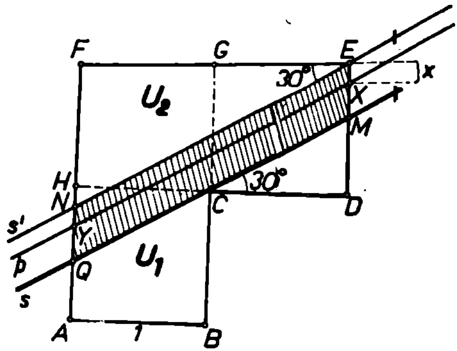
Přitom se ve větě VIII nepožaduje, aby útvar U byl konvexní; věta platí dokonce i v takovém případě, když se útvar U skládá z konečného počtu od sebe oddělených částí.

Věta VIII zaručuje sice existenci takové přímky p, ale neříká nic o jejím sestrojení. Je-li útvar U složitější než třeba v úloze 18, může být konstrukce přímky p velmi

*) Tím rozumíme rozdělení trojúhelníka v části téhož obsahu.

obtížná. Uvedeme ještě jeden příklad půlení nekonvexního útvaru.

Příklad 19. Je dán nekonvexní šestiúhelník $ABCDEF$, skládající se ze tří shodných čtverců $ABCH$, $CDEG$,



Obr. 33

$CGFH$ (obr. 33). Dále je dána přímka $s \equiv CM$ (bod M leží mezi D, E) tak, že $\sphericalangle MCD = 30°$. Daný šestiúhelník máme rozpůlit přímkou p rovnoběžnou s přímkou s.

Řešení. Zvolme úsečku AB za jednotku délky. Přímka s odděluje z daného šestiúhelníka U trojúhelník CDM a lichoběžník $ABCQ$, které dohromady tvoří útvar U_1 o obsahu 1; platí totiž shodnost trojúhelníků $\triangle CDM \cong \cong \triangle CHQ$, tj. obsah útvaru U_1 je roven obsahu čtverce $ABCH$.

Přímka $s' \parallel s$ vedená bodem E protne přímku AE v bodě N ležícím mezi A, H (odůvodněte!). Přímka s' oddělí od šestiúhelníka U trojúhelník $\triangle EFN \equiv U_2$, jehož obsah je

$$\frac{1}{2} EF \,.\, FN = \frac{1}{2} . EF^2 \operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, \frac{1}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} > 1.$$

Průnik pásu roviny omezený rovnoběžkami s, s' s šestiúhelníkem U je rovnoběžník $ENQM$ (na obr. 33 vyšrafovaný). Tento rovnoběžník je třeba rozdělit vhodnou příčkou $p \equiv XY \parallel s$ (X mezi E, M, Y mezi N, Q) tak, aby obsah lichoběžníka $EFYX$ byl roven $\frac{3}{2}$. Obsah P tohoto lichoběžníka vyjádříme podle známého vzorce

$$P = \frac{1}{2} (EX + EX + EF \operatorname{tg} 30^\circ) \,.\, EF. \qquad (25)$$

Označíme-li $EX = x$, dostaneme ze vztahu (25) rovnici

$$2x + \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

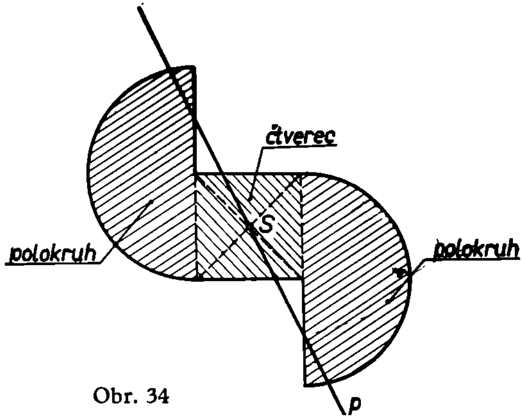
a odtud

$$x = \frac{1}{12} (9 - 4\sqrt{3}).$$

Přemýšlejte, zda dovedete udat eukleidovskou konstrukci bodu X.

Úloha 43. Je dán pravoúhlý nerovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB. Nad jeho odvěsnami jsou sestrojeny (vně trojúhelníka) čtverce $ADEC$, $BCFG$. Veďte přímku rovnoběžnou s AB tak, aby rozpůlila útvar složený z obou čtverců.

Úloha 44.* Dokažte, že rovinný útvar (konvexní či nekonvexní) souměrný podle středu S je půlen jenom všemi těmi přímkami, které procházejí jeho středem souměrnosti S. Vyložte na nekonvexním útvaru vyšrafovaném na obr. 34.



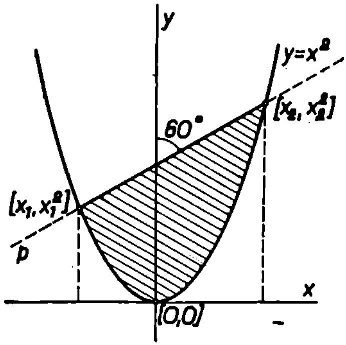
Obr. 34

Příklad 20. Je dán útvar V z příkladu 8. Útvar V je tedy úseč paraboly omezená přímkou m, kolmou k její ose. Útvar V máme rozpůlit přímkou p, která svírá s osou paraboly úhel velikosti 60°.

Řešení. Nejprve uvedeme bez odvození vzorec pro obsah tzv. úseče paraboly, tj. konvexního omezeného útvaru, který je průnikem útvaru z příkladu 4 a poloroviny (vyšrafovaný útvar na obr. 35). Nechť je úseč omezena tětivou, jejíž krajní body jsou $[x_1, x_1^2]$, $[x_2, x_2^2]$, $x_1 < x_2$; přitom je lhostejno, zda obě souřadnice x_1, x_2 jsou čísla kladná nebo záporná, či zda jedno je kladné a druhé záporné (jako na obr. 35), či zda jedno z nich je rovno nule. Ohlášený vzorec pro obsah P vyšrafované úseče zní

$$P = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3. \tag{26}$$

Přímka p v naší úloze má směrnici $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (případem směrnice $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ se nemusíme zabývat,



Obr. 35

neboť útvar V je souměrný podle osy y). Předpokládejme, že hledaná přímka p protne ve dvou bodech oblouk paraboly a nikoli v jednom bodě oblouk a v druhém tětivu AB. Výpočtem se ukáže, zda byl tento předpoklad správný. Jsou-li $[x_1, x_1^2]$, $[x_2, x_2^2]$ průsečíky přímky p s parabolou ($x_1 < x_2$), pak platí

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2,$$

tj.

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \tag{27}$$

Obsah útvaru V podle vzorce (26) je $P_V = \frac{1}{6}[2 - (-2)]^3 = \frac{32}{3}$. Podle téhož vzorce (26) pak platí

$$\frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} = \frac{16}{3}. \tag{28}$$

Z rovnice (28) dostaneme $x_2 - x_1 = \sqrt[3]{32}$, tj.

$$x_2 - x_1 = 2\sqrt[3]{4}. \tag{29}$$

Spojením rovnic (27), (29) vyjde

$$x_1 = \frac{1}{6}\sqrt{3} - \sqrt[3]{4}, \quad x_2 = \frac{1}{6}\sqrt{3} + \sqrt[3]{4}, \tag{30}$$

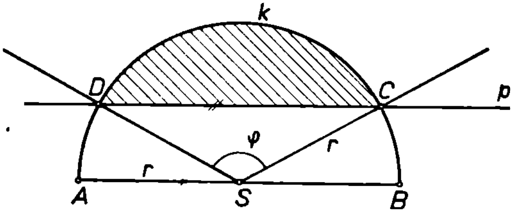
numericky $x_1 \doteq 0{,}289 - 1{,}587 \doteq -1{,}298$, $x_2 \doteq 0{,}289 + 1{,}587 = 1{,}876$. Náš předpoklad se tedy potvrdil, neboť je $-2 < x_1 < x_2 < 2$ (-2, 2 jsou souřadnice x krajních bodů A, B).

Z výsledků (30) a z rovnice paraboly $y = x^2$ dostaneme souřadnice obou bodů, v nichž protíná hledaná přímka p hranici útvaru V.

Úloha 45. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $AB < CD$. Sestrojte přímku a) rovnoběžnou se základnami, b) rovnoběžnou s úhlopříčkou AC, která dělí lichoběžník ve dva obrazce téhož obsahu.

Příklad 21. Je dán půlkruh omezený průměrem $AB = 2r$. Máme půlkruh rozpůlit přímkou, rovnoběžnou s AB.

Řešení. Hledaná přímka p oddělí od půlkruhu úseč, jež má obsah $\frac{1}{4}\pi r^2$ (obr. 36). Označme C, D průsečíky přímky p s polokružnicí k, dále φ velikost (ve stupních)



Obr. 36

úhlu $\sphericalangle\, CSD$ (S je střed průměru AB). Obsah vyšrafované úseče je pak

$$\frac{1}{360}\pi r^2\varphi - \frac{1}{2}r^2 \sin\varphi;$$

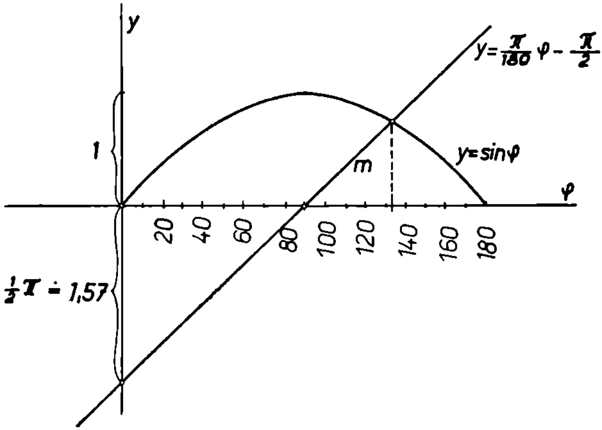
platí tedy

$$\frac{1}{360}\pi r^2\varphi - \frac{1}{2}r^2 \sin\varphi = \frac{1}{4}\pi r^2.$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{180}\pi\varphi - \frac{1}{2}\pi = \sin\varphi. \qquad (31)$$

Položíme-li $y = \sin\varphi$, je $y = \frac{1}{180}\pi\varphi - \frac{1}{2}\pi$, což je klíč ke grafickému řešení rovnice (31). Řešení je naznačeno na obr. 37; vysvětlete je podrobně! (Přímka m na obr. 37 je sestrojena pomocí úseků, které vytíná na osách souřadnic.)

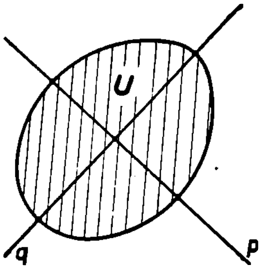


Obr. 37

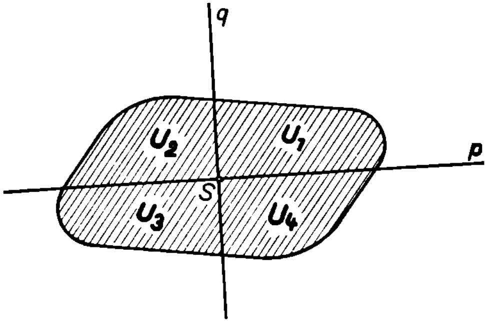
Další úlohy se týkají rozdělení omezeného dvojrozměrného konvexního útvaru U dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části téhož obsahu. Lze dokázat, že takové rozdělení je vždy možné; ovšem směry těchto přímek nejsou libovolně volitelné a také jejich průsečík není libovolný bod útvaru U. Rozdělení konvexního útvaru navzájem kolmými přímkami p, q na čtyři části téhož obsahu ukazuje obr. 38.

Příklad 21. Máme dokázat, že obě navzájem kolmé přímky, které dělí omezený konvexní středově souměrný útvar na čtyři části téhož obsahu, se nutně protínají v jeho středu souměrnosti.*)

Řešení (obr. 39). Nechť je útvar U rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části téhož obsahu;



Obr. 38



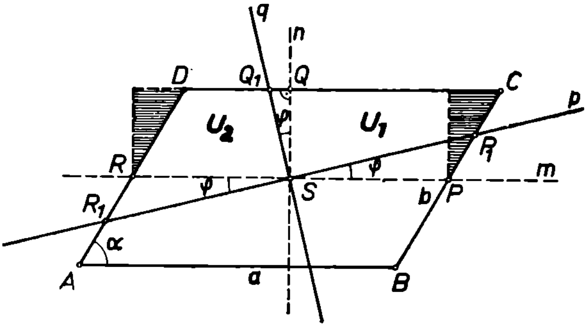
Obr. 39

označíme tyto části (i jejich obsahy) U_1, U_2, U_3, U_4 podle obrázku 39. Protože je $U_1 = U_2 = U_3 = U_4$, je též $U_1 + U_2 = U_3 + U_4$ a $U_1 + U_4 = U_2 + U_3$, tj. každá z přímek p, q půlí útvar U. Podle výsledku úlohy 44 procházejí obě přímky p, q středem souměrnosti S.

Poznámka. Sestrojíme-li dvě navzájem kolmé přímky, z nichž každá půlí konvexní útvar U, není tím zaručeno, že je útvar rozdělen na čtyři části téhož obsahu. Podržíme-li totiž označení z obr. 39, platí $U_1 + U_2 = U_3 + U_4$ a $U_1 + U_3 = U_2 + U_3$; z těchto dvou rovností dostaneme (odečtením druhé od první) $U_1 = U_3$ a pak i $U_2 = U_4$; tím však není zaručeno, že platí rovnost

*) Dá se dokázat, že omezený útvar má nejvýše jeden střed souměrnosti.

$U_1 = U_2$ a pak i rovnost $U_3 = U_4$. Aby tato rovnost platila, je třeba zvolit určitou dvojici navzájem kolmých „půlících" přímek, jak ukazuje třeba příklad 22.



Obr. 40

Příklad 22. Je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a$, $BC = b$ a vnitřní úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost α; přitom je $a \geqq b$, $\alpha \leqq 90°$. Máme rozdělit rovnoběžník $ABCD$ dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části téhož obsahu.

Řešení. Podle výsledku příkladu 21 procházejí hledané přímky p, q středem souměrnosti S daného rovnoběžníka. Veďme bodem S přímku $m \parallel AB$, přímku $n \perp AB$ a označme body P, Q, R podle obr. 40. Označme dále U_1 lichoběžník $SPCQ$, U_2 lichoběžník $RSQD$; pro jejich obsahy zřejmě platí $U_1 > U_2$, určitěji

$$U_1 = U_2 + \frac{1}{8} b^2 \sin 2\alpha, \tag{31'}$$

jak si snadno ověříte; oba obsahy se totiž liší o obsah obou vodorovně šrafovaných trojúhelníků v obr. 40.

Hledané, navzájem kolmé přímky p, q dostaneme otočením dvojice m, n kolem středu S o ostrý nebo nulový úhel velikosti φ, jak je naznačeno na obr. 40. Označíme-li body P_1, Q_1, R_1 podle tohoto obrázku a označíme-li dále Δ, Δ', Δ'' po řadě obsahy trojúhelníků SPP_1, SQQ_1, SRR_1, pak pro obsahy obrazců U_1, U_2, Δ, Δ', Δ'' platí

$$\mathsf{U}_1 - \Delta + \Delta' = \mathsf{U}_2 - \Delta' + \Delta''. \tag{32}$$

Trojúhelníky s obsahy Δ, Δ'' jsou souměrně sdruženy podle středu S, proto jsou shodné; pro jejich obsahy pak platí $\Delta = \Delta''$. Z rovnosti (32) pak dostaneme

$$2(\Delta - \Delta') = \mathsf{U}_1 - \mathsf{U}_2. \tag{33}$$

Spojením vztahů (31), (33) vyjde

$$\Delta - \Delta' = \frac{1}{16} b^2 \sin 2\alpha. \tag{34}$$

Nyní vyjádříme obsahy Δ, Δ'. Platí

$$\begin{gathered} SQ = \frac{1}{2} b \sin\alpha, \quad QQ_1 = \frac{1}{2} b \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi, \\ SR = \frac{1}{2} a, \quad SR_1 = \frac{1}{2} a \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)}; \end{gathered} \tag{35}$$

poslední ze vztahů (35) se dostane použitím sinové věty na trojúhelník SRR_1. Dále dostaneme s použitím vztahů (35)

$$\Delta = \frac{1}{2} SQ \,.\, QQ_1 = \frac{1}{8} b^2 \sin^2\alpha \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\Delta' = \frac{1}{2} SR \,.\, SR_1 \sin\varphi = \frac{1}{8} a^2 \frac{\sin\alpha \sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}.$$

Dosadíme z (36) do (34) a dělíme rovnici číslem $\frac{1}{8}\sin\alpha$ (které je různé od nuly); vyjde

$$a^2\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}-b^2\sin\alpha\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=b^2\cos\alpha.$$

Po odstranění zlomků a další úpravě dostaneme

$$a^2\sin\varphi\cos\varphi=b^2(\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi)\sin(\alpha-\varphi),$$

neboli

$$\frac{1}{2}a^2\sin 2\varphi=b^2\cos(\alpha-\varphi)\,.\,\sin(\alpha-\varphi),$$

neboli dále

$$\frac{1}{2}a^2\sin 2\varphi=\frac{1}{2}b^2\sin(2\alpha-2\varphi).$$

Rozvedeme-li $\sin(2\alpha-2\varphi)$ podle vzorce, dostaneme konečně rovnici

$$(a^2+b^2\cos 2\alpha)\sin 2\varphi=b^2\sin 2\alpha\cos 2\varphi, \tag{37}$$

což je jednoduchá goniometrická rovnice pro neznámou φ a s parametry a, b, α. Obrácením předcházejícího postupu zjistíme, že každý ostrý nebo nulový úhel, jehož velikost φ splňuje rovnici (37), dává řešení dané úlohy.

Např. pro $\alpha=90°$ (obdélník) nabude rovnice (37) tvaru

$$(a^2-b^2)\sin 2\varphi=0; \tag{38}$$

dostaneme jediné řešení $\varphi=0$ — střední příčky obdélníka, pokud je $a>b$. Je-li $a=b$ (čtverec), má rovnice (38) za řešení kteroukoli velikost φ intervalu $0°\leqq\varphi<90°$.

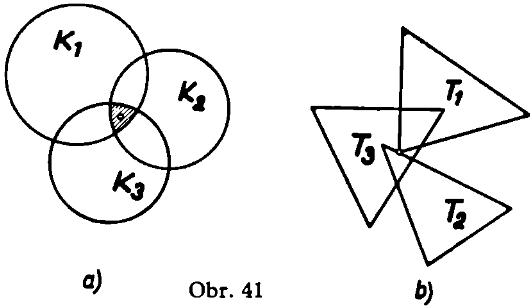
Vyšetřte podobně případ $a=b$ (kosočtverec) a ověřte si, že každý rovnoběžník, který není čtverec, lze rozdělit ve čtyři části téhož obsahu jen jedinou dvojicí navzájem kolmých přímek.

Úloha 46. Rozdělte na čtyři části téhož obsahu dvěma navzájem kolmými přímkami některé útvary osově souměrné, a to a) rovnoramenný lichoběžník (použijte výsledku úlohy 45); b) útvar V z příkladu 20 (použijte výsledku tohoto příkladu); c) útvar U z úlohy 3b); zde volte lichoběžník $ABCD$ tak, aby platilo $\sphericalangle ACE = 60°$, $\sphericalangle DHE = 150°$ a vypočtěte velikosti ostatních potřebných úhlů z obr. 4b.

Kapitola 6.

VĚTA HELLYOVA A NĚKTERÉ JEJÍ DŮSLEDKY

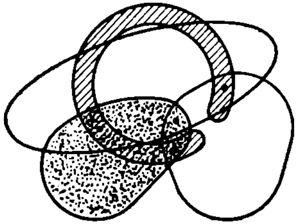
Úloha 47. a) Na obr. 41a jsou nakresleny tři kruhy K_1, K_2, K_3, které mají aspoň jeden společný bod (jejich společné body vyplňují vyšrafovanou část roviny). Pokuste se nakreslit čtvrtý kruh K_4 tak, aby průnik každé trojice kruhů K_1, K_2, K_4; K_1, K_3, K_4; K_2, K_3, K_4 obsahoval aspoň jeden bod, ale aby všechny čtyři kruhy neměly žádný společný bod.



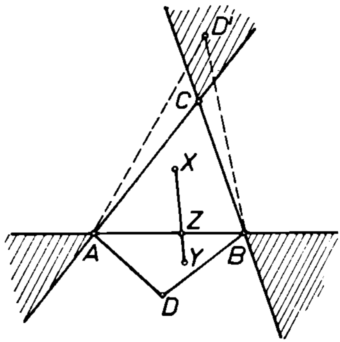
Obr. 41

b) Na obr. 41b jsou nakresleny tři trojúhelníky T_1, T_2, T_3, které mají (aspoň) jeden společný bod. Opakujte úlohu 47a pro trojúhelníky, tj. pokuste se nakreslit trojúhelník T_4, který by měl obdobné vlastnosti jako kruh K_4.

Pokusy z úloh 47a, b skončily nezdarem; stejně neúspěšné by byly obdobné pokusy, kdybychom kruhy nebo trojúhelníky nahradili libovolnými čtyřmi konvexními útvary. To v nás budí domněnku, že platí tato věta:



Obr. 42



Obr. 43

IX. *Jsou-li dány čtyři konvexní útvary v rovině, z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod, pak všecky čtyři útvary mají aspoň jeden společný bod.*

Věta IX, která vyjadřuje velmi důležitou vlastnost konvexních útvarů, se skutečně dá dokázat. Je to tzv. věta HELLYOVA, která se dá přenést na přímku, do prostoru, dá se zobecnit tak, že počet daných útvarů může být libovolný, po případě může být daných útvarů nekonečně mnoho. Věta HELLYOVA má značný dosah; to znamená, že s její pomocí lze odvodit řadu dalších zajímavých vlastností.

Obrázek 42 ukazuje, že předpoklad věty IX o konvexitě útvarů je nezbytný; vysvětlete to podrobněji.

Důkaz HELLYOVY věty je jednoduchý a používá jedné pomocné věty, kterou odvodíme v následujícím příkladu.

Příklad 23. Máme dokázat tuto větu: Jsou dány čtyři body v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce a žádný z nich nenáleží trojúhelníku určenému třemi zbývajícími. Pak tyto čtyři body jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka.

Řešení. Dané čtyři body označme A, B, C, D. Na obr. 43 jsou zakresleny body A, B, C a je tu vyznačeno 7 oblastí, na které dělí rovinu přímky AB, BC, CA. Bod D leží mimo přímky AB, BC, CA; proč?); Bod D nemůže ležet v žádné ze tří vyšrafovaných částí! jinak by např. bod C ležel v trojúhelníku ABD'. Leží-li bod D v některé ze zbývajících tří nevyšrafovaných částí, ovšem mimo trojúhelník ABC, pak spojením trojúhelníků ABC, ABD vznikne konvexní čtyřúhelník $ADBC$. Na obr. 43 je naznačena úsečka XY, jejíž krajní bod X leží uvnitř trojúhelníka ABC a krajní bod Y uvnitř trojúhelníka ABD. Tato úsečka obsahuje bod Z strany AB, neboť leží v (konvexním) úhlu $\sphericalangle ACB$. Obě úsečky XZ i YZ, a tedy i úsečka XY, náležejí čtyřúhelníku $ADBC$.

Příklad 24. Máme dokázat větu HELLYOVU.

Řešení. Označíme U_1, U_2, U_3, U_4 dané čtyři konvexní útvary. Dále označíme po řadě A_1, A_2, A_3, A_4 bod společný útvarům U_2, U_3, U_4, resp. U_1, U_3, U_4, resp. U_1, U_2, U_4, resp. U_1, U_2, U_3. Dále je třeba rozlišit tři případy:

a) Některé tři z bodů A_1, A_2, A_3, A_4, např. body A_1, A_2, A_3 leží v přímce.

b) Žádné tři z bodů A_1, A_2, A_3, A_4 neleží v přímce, ale některý z nich, např. A_4 náleží trojúhelníku $A_1A_2A_3$.

c) Žádné tři z bodů A_1, A_2, A_3, A_4 neleží v přímce a žádný z nich neleží v trojúhelníku daném zbývajícími třemi.

Uvědomte si, že případy a), b), c) vyčerpávají všecky možnosti a pokuste se ke každé sestrojit náčrtek. (Přitom vyjděte od bodů A_1, A_2, A_3, A_4 a pak nakreslete útvary U_1, U_2, U_3, U_4.)

Probereme nyní postupně všecky případy a), b), c). V případě a) nechť např. bod A_2 náleží úsečce A_1A_3. Oba body A_1, A_3 náleží průniku $U_2 \cap U_4$ (proč?); podle věty I náleží i bod A_2 průniku $U_2 \cap U_4$. Protože však bod A_2 náleží také průniku $U_1 \cap U_3$, náleží všem čtyřem útvarům.

V případě b) náležejí všecky tři body A_1, A_2, A_3 útvaru U_4, tj. i trojúhelník $A_1A_2A_3$ náleží útvaru U_4 (odůvodněte podrobně z definice konvexního útvaru!). Proto i bod A_4 trojúhelníka $A_1A_2A_3$ náleží útvaru U_4; mimoto však náleží A_4 průniku $U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Bod A_4 tedy náleží všem čtyřem daným útvarům.

V případě c) jsou splněny předpoklady věty z příkladu 23; proto body A_1, A_2, A_3, A_4 jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka, např. v pořádku $A_1A_2A_3A_4$. Pak průsečík úhlopříček A_1A_3, A_2A_4 náleží jednak průniku $U_2 \cap U_4$ (protože náleží úsečce A_1A_3), jednak průniku $U_1 \cap U_3$ (protože náleží úsečce A_2A_4).

Tím je HELLYOVA věta úplně dokázána.

Na přímce je rozmanitost konvexních útvarů mnohem menší než je tomu v rovině; jsou to — víme jak — jen úsečka (nenulová či nulová, tj. pouhý bod) polopřímka a přímka. Zde lze dokázat HELLYOVU větu v tomto znění:

IX'. *Jsou-li dány tři konvexní útvary na přímce, z nichž každé dva mají aspoň jeden společný bod, pak všecky tři útvary mají aspoň jeden společný bod.*

Pro útvary v prostoru zní HELLYOVA věta takto:

IX''. *Je-li dáno pět konvexních útvarů v prostoru, z nichž každé čtyři mají aspoň jeden společný bod, pak všecky dané útvary mají aspoň jeden společný bod.*

Úloha 48.* a) Dokažte HELLYOVU úlohu pro útvary na přímce. (Stačí, dokážete-li ji pro úsečky nulové či nenulové.)

b) Pokuste se dokázat HELLYOVU větu pro útvary v prostoru. (Postup je obdobný k postupu v příkladu 24. Je však třeba rozlišit tyto případy: 1) čtyři z bodů $A_1, \ldots, A_5$, zavedených obdobně jako body $A_1, \ldots, A_4$ v příkladě 24, leží v rovině; 2) žádné čtyři z bodů $A_1, \ldots, A_5$ neleží v rovině, ale např. čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$ obsahuje bod A_5; 3) žádný ze čtyřstěnů určených čtyřmi z bodů $A_1, \ldots, A_5$ neobsahuje bod zbývající.)

Větu HELLYOVU (a to větu IX, IX', IX'') lze indukcí rozšířit na libovolný počet konvexních útvarů.

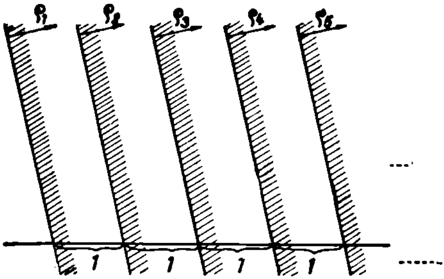
Příklad 25. Máme dokázat toto rozšíření věty HELLYOVY: Je-li dáno v rovině n konvexních útvarů ($n \geqq 4$), z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod, pak všecky útvary mají aspoň jeden společný bod.

Řešení. Větu dokážeme matematickou indukcí. Víme, že platí pro $n = 4$; předpokládejme, že platí pro jisté n a dokažme, že pak platí pro $n + 1$.

Nechť je tedy dáno $n + 1$ konvexních útvarů v rovině, označených $\mathsf{U}_1, \mathsf{U}_2, \ldots, \mathsf{U}_n, \mathsf{U}_{n+1}$, z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod. Vyšetřujeme n útvarů

$$\mathsf{U}_1, \mathsf{U}_2, \ldots, \mathsf{U}_{n-1}, \mathsf{U}'_n = \mathsf{U}_n \cap \mathsf{U}_{n+1}; \tag{39}$$

ty jsou vesměs konvexní (proč?) a každé tři z nich mají aspoň jeden společný bod. Skutečně, zvolíme-li např. trojici U_1, U_2, U_3, pak je tato podmínka splněna podle předpokladu věty. Zvolíme-li např. trojici U_1, U_2, U_n',



Obr. 44

pak užijeme první věty HELLYOVY: podle ní mají útvary U_1, U_2, U_n, U_{n+1} aspoň jeden společný bod (odůvodněte podrobně!) a tento bod náleží i útvaru $U'_n = U_n \cap U_{n+1}$.

Podle indukčního předpokladu mají útvary (39) aspoň jeden společný bod a ten náleží všem útvarům U_1, $U_2, \ldots$, U_n, U_{n+1}; tím je rozšíření HELLYOVY věty dokázáno.

Poznámka. Větu HELLYOVU lze rozšířit i na nekonečně mnoho konvexních útvarů v rovině; v tomto případě však je potřeba ještě požadovat, aby útvary byly *omezené*. Obr. 44 ukazuje nekonečně mnoho konvexních útvarů neomezených (jsou to poloroviny ϱ_1, ϱ_2, $\varrho_3, \ldots$), z nichž každé tři mají sice aspoň jeden společný bod, ale žádný bod není společný všem těmto polorovinám.

Příklad 26. V rovině je vyznačeno n bodů ($n \geqq 4$). Pokusy jsme zjistili, že každé tři z nich lze zakrýt korunovou mincí. Dokonce se nám podařilo zakrýt korunovou mincí všech n bodů zároveň. Máme zjistit, zda tato poslední skutečnost je náhodná, způsobená jen zvláštní polohou daných bodů, nebo zda se dá odvodit z výsledků pokusů.

Řešení. Výsledek pokusu se dá geometricky formulovat takto: v rovině je dáno n bodů, z nichž každé tři leží v kruhu o poloměru r. Máme zjistit, zda z toho vyplývá, že všech n bodů leží v jistém kruhu o témž poloměru r.

Kolem každého z daných bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ opíšeme kruh o poloměru r. Tak dostaneme kruhy $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_n$. Existuje-li kruh K o poloměru r, který obsahuje všechny dané body, má jeho střed S od každého z daných bodů vzdálenost menší nebo rovnou číslu r, tj. střed S náleží všem kruhům $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_n$.

Existenci kruhu K, resp. jeho středu S zjistíme podle věty HELLYOVY. Zvolme libovolné tři z kruhů $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_n$, např. kruhy $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3$. Jejich středy A_1, A_2, A_3 leží v jistém kruhu K_{123} o středu S_{123} a poloměru r. Bod S_{123} má tedy od každého z bodů A_1, A_2, A_3 vzdálenost menší nebo rovnou r, proto náleží všem třem kruhům $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3$.

To znamená, že každé tři z kruhů $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_n$ mají aspoň jeden společný bod; tyto kruhy splňují tedy předpoklad věty HELLYOVY a tím je existence středu S zaručena.

Další důsledky věty HELLYOVY, které uvedeme bez odvození, jsou věta JUNGOVA a věta BLASCHKEOVA.

X. *Každý rovinný útvar konvexní či nekonvexní o průměru d se dá umístit do kruhu o poloměru* $\frac{d}{\sqrt{3}}$ (věta JUNGOVA).

XI. *Do každého omezeného konvexního útvaru v rovině, který má šířku s, lze umístit kruh o poloměru* $\frac{1}{2}s$ (věta BLASCHKEOVA).

Poznámky k obsahu vět X, XI.

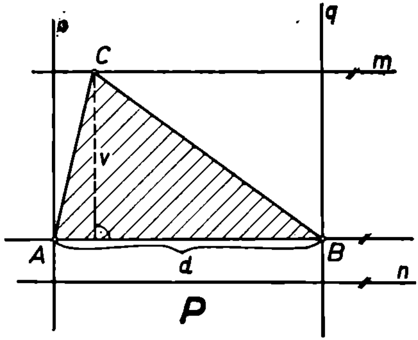
Je-li U rovinný útvar o průměru d, pak je patrné, že jej lze umístit do kruhu K o poloměru d. Stačí totiž zvolit za střed S kruhu K libovolný bod útvaru U; pro vzdálenost kteréhokoli bodu X útvaru U od bodu S platí podle úlohy 27 vztah $SX \leqq d$. Proto leží všechny body útvaru U v kruhu K.

Význam věty JUNGOVY spočívá v jejím tvrzení, že poloměr kruhu K lze (při vhodné volbě středu S) zmenšit na hodnotu $\frac{d}{\sqrt{3}} < d$.

Obdobně je tomu s větou BLASCHKEOVOU. Tato věta vyjadřuje výsledek, ke kterému se dospělo při hledání co největšího kruhu, který se dá umístit do omezeného konvexního útvaru šířky s. Ukázku hledání takového kruhu předvádí příklad 27.

Příklad 27. Je dán omezený konvexní rovinný útvar U šířky s. Máme zjistit, zda existuje kruh, jehož poloměr závisí jen na šířce s a o němž lze bezpečně tvrdit, že jej lze umístit do útvaru U.

Řešení. Označme d průměr útvaru U, p, q obě opěrné přímky, jejichž vzdálenost je d. Každá z přímek p, q obsahuje právě jeden hraniční bod; označme tyto hraniční body A, B; podle věty V víme, že je $AB \perp p$, $AB \perp q$, $AB = d$ (obr. 45). Veďme dále obě opěrné přímky m, n rovnoběžné s přímkou AB. Protože vzdálenost přímek m, n je aspoň s a protože pás roviny P jimi omezený obsahuje úsečku AB (která náleží útvaru U), má aspoň jedna z přímek m, n od přímky AB vzdálenost větší nebo rovnou $\frac{1}{2}s$; budiž to přímka m. Na přímce m leží v pásu P aspoň jeden hraniční bod C útvaru U.



Obr. 45

Tak jsme dostali trojúhelník ABC, jehož všechny vrcholy náležejí útvaru U; proto trojúhelník ABC i kruh K omezený kružnicí k jemu vepsanou náleží útvaru U. Odhadneme poloměr ϱ kružnice k; k tomu použijeme známého vzorce

$$\varrho = \frac{2\Delta}{o} \tag{40}$$

kde Δ je obsah trojúhelníka ABC, o délka jeho obvodu. Pro výšku v na stranu AB platí zřejmě

$$\frac{1}{2}s \leqq v \leqq s \leqq d; \tag{41}$$

obsah Δ tedy splňuje vztah

$$\Delta = \frac{1}{2} d\, v \geqq \frac{1}{4} d\, s. \tag{42}$$

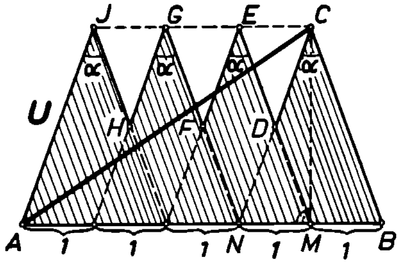
Protože vrchol C leží uvnitř pásu P, je velikost každé ze stran AC, BC nejvýše $\sqrt{d^2 + v^2}$, platí tedy podle (41)

$$o \leqq d + 2\sqrt{d^2 + v^2} \leqq d + 2\, d\sqrt{2} \leqq 3d\sqrt{2}. \tag{43}$$

Spojíme-li nerovnosti (42), (43) s formulí (40), dostaneme

$$\varrho \geqq \frac{1}{2} \frac{ds}{3d\sqrt{2}} = \frac{s\sqrt{2}}{12} \doteq 0{,}118\, s.$$

Tím je odhad pro poloměr ϱ kruhu K nalezen. Tento odhad je však příliš nízký; věta BLASCHKEOVA dává odhad příznivější $\varrho = \frac{1}{3}\, s \doteq 0{,}333\, s$.



Obr. 46

Větu JUNGOVU i BLASCHKEOVU budeme nyní ilustrovat několika příklady.

Příklad 28. Na obr. 46 je nakreslen nekonvexní devítiúhelník $ABCDEFGHJ$; jeho konstrukce je patrná z náčrtu:

$AB = 5$, $CE = EG = GJ = DF = FH = 1$, $\sphericalangle AJH = \sphericalangle HGF = \sphericalangle FED = \sphericalangle DCB = \alpha < 90°$. Máme stanovit úhel α tak, aby průměrem devítiúhelníka byla délka úsečky AC a máme ověřit větu JUNGOVU.

Řešení. Abychom zjistili průměr, musíme najít dvě rovnoběžné opěrné přímky, z nichž každá obsahuje jediný hraniční bod; spojnice těchto dvou hraničních bodů musí být kolmá k oběma opěrným přímkám (věta V). To je možné u daného devítiúhelníka U jen dvojím způsobem: příslušné hraniční body jsou buď A, B, nebo A, C (B, J). Vypočteme vzdálenost AC z pravoúhlého trojúhelníka AMC: platí $AM = 4$, $CM = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$, tj.

$$AC = \sqrt{16 + \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \alpha}. \tag{44}$$

Položíme podmínku $AC > AB$, tj.

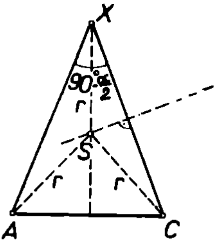
$$\sqrt{16 + \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \alpha} > 5;$$

odtud plyne po úpravě

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha > 3,$$

tj. $\alpha < 18°26'$ (přibližně). Dále je $\sphericalangle ABC = 90° - \frac{1}{2} \alpha$, $\sphericalangle AJC = 90° + \frac{1}{2} \alpha$. To znamená, že všemi čtyřmi body A, B, C, J lze proložit kružnici k o středu S, která obsahuje uvnitř i body E, G, D, F, H, tj. celý devítiúhelník $ABCDEFGHJ$.

Vypočteme poloměr kružnice k z délky tětivy AC a obvodového úhlu velikosti $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Z rovnoramenného trojúhelníka ACX se základnou AC a protějším úhlem velikosti $90° - \frac{1}{2}\alpha$ (viz obr. 47) vyplývá pro poloměr r kružnice k:



Obr. 47

$$r = \frac{\frac{1}{2}AC}{2\sin\left(45° - \frac{1}{4}\alpha\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(45° - \frac{1}{4}\alpha\right)} =$$

$$= \frac{AC}{2\sin\left(90° - \frac{1}{2}\alpha\right)} = \frac{AC}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}. \tag{45}$$

Střed S tedy sestrojíme jako vrchol rovnoramenného trojúhelníka ACS se základnou AC, ležícího v polorovině ACB; přitom známe ze vzorců (44), (45) délky všech stran tohoto trojúhelníka. Protože je $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha > 3$, je

$$\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\alpha > 10, \qquad -\sin^2\frac{1}{2}\alpha > -\frac{1}{10},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\alpha > \frac{9}{10}, \qquad \cos\frac{1}{2}\alpha > \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha} < \frac{\sqrt{10}}{3}$$

tj. podle (45) platí

$$r = \frac{1}{2}\,\frac{AC}{\cos\frac{1}{2}\alpha} < AC\,\frac{1}{6}\sqrt{10} < AC\,\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{*)}$$

což souhlasí s větou JUNGOVOU.

Úloha 49.* Na obr. 48 je nekonvexní útvar U omezený dvěma polokružnicemi k_1, k_2 a dvěma úsečkami BC, CS; je $AS = BS = 2BC = 1$. Zjistěte průměr útvaru U a ověřte větu JUNGOVU.

Úloha 50. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož průměr je délka strany AB. Nad tětivou AB sestrojte kružnici o poloměru $\frac{AB}{\sqrt{3}}$ tak, aby její střed ležel v polorovině ABC a ověřte větu JUNGOVU. [Návod: zkoumejte velikost úhlů $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ADB$.]

b) Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož průměr je délka úhlopříčky AC. Ověřte větu JUNGOVU obdobně jako v úloze 50 a).

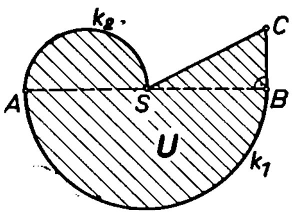
c) Pokuste se rozřešit obdobné úlohy pro nekonvexní čtyřúhelník.

Úloha 51. a) Ověřte větu JUNGOVU pro rovnostranný trojúhelník. Jaký význam má tato zcela jednoduchá úloha?

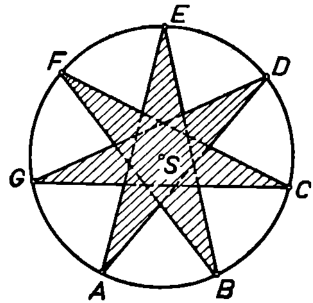
*) Platí $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{12}$; odtud plyne správnost poslední nerovnosti.

b) Na obr. 49 je nakreslen pravidelný hvězdicový sedmiúhelník. Zjistěte jeho průměr a ověřte větu JUNGOVU.

Poznámka. Je-li v kruhu o poloměru r umístěn (omezený) útvar (konvexní či nekonvexní), lze tvrdit, že pro jeho



Obr. 48



Obr. 49

průměr d platí nerovnost $d \leqq 2r$; to plyne z výsledku úlohy 28. Obráceně, když omezený útvar U v rovině má průměr d, pak zřejmě pro poloměr r nejmenšího kruhu K, do něhož se dá útvar U umístit, platí $r \geqq \frac{1}{2} d$; význam věty Jungovy je v tom, že omezuje poloměr r kruhu K shora.

Příklad 29. V devítiúhelníku U z příkladu 28 máme zvolit úhel α tak, aby šířkou útvaru U byla vzdálenost rovnoběžek AB, CJ. Máme zjistit, zda pro nekonvexní útvar U platí či neplatí tvrzení věty BLASCHKEOVY.

Řešení. Vzdálenost rovnoběžek AB, CJ je $\cot g\, \alpha$. Opěrné přímky útvaru U, které jsou navzájem rovnoběžné, procházejí buď vrcholy A, C (B, J) nebo vrcholy A, B. V prvním případě se vzdálenost rovnoběžných opěrných přímek pohybuje mezi vzdálenostmi AC, CM, přičemž je vždy $AC > CM$, a mezi vzdáleností AC a výškou v trojúhelníku ABC na stranu BC. V druhém případě se vzdálenost rovnoběžných opěrných přímek pohybuje mezi výškou v trojúhelníka ABC na stranu BC a větší z obou vzdáleností AB, AC. Pro výšku v dostaneme z $\triangle ABC$

$$v = 5 \cos \frac{1}{2} a, \tag{46}$$

neboť $\sphericalangle ABC = 90° - \frac{1}{2} a$. Vzdálenost CM je tedy šířkou útvaru U jen v tom případě, když platí zároveň $CM \leqq AB$, $CM \leqq v$; protože je $v < AB$ (úhel $\sphericalangle ABC$ je ostrý), je vzdálenost CM šířkou útvaru U jen v tom případě, když platí $CM \leqq v$, neboli vzhledem k (46)

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} a \leqq 5 \cos \frac{1}{2} a. \tag{47}$$

Úpravou nerovnosti (47) dostaneme nerovnost $\sin \frac{1}{2} a \geqq \frac{1}{5}$ a odtud z tabulek přibližně $a \geqq 23°04'$.

Největší kruh, který lze umístit do devítiúhelníka U, je omezen kružnicí k, opsanou rovnoramennému trojúhelníku DFN (obr. 50); pokuste se toto tvrzení dokázat. K výpočtu poloměru r kružnice k užijeme vzorce pro poloměr opsané kružnice

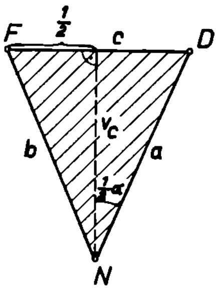
$$r = \frac{abc}{4\Delta}.$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníka, Δ jeho obsah.

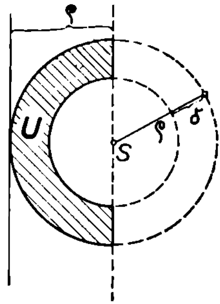
V našem případě (obr. 50) vypočteme $a = b = \dfrac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha}$,

$c = 1$, $v_c = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$; odtud dále $\Delta = \frac{1}{4} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$ a konečně

$$r = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2 \sin \alpha}. \tag{48}$$



Obr. 50



Obr. 51

Protože v našem příkladě je šířka útvaru U dána vzorcem $s = CM = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$, je $\frac{1}{3} s = \frac{1}{3} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$. Podle (48) snadno zjistíme, že je $r > \frac{1}{3} s$, neboť tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností $\frac{3}{2} > \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ a ta je splněna pro každé α.

Tvrzení věty BLASCHKEOVY tedy platí v tomto případě i pro nekonvexní útvar.

Úloha 52. Na obr. 51 je nekonvexní útvar U, který je vyťat z mezikruží šířky δ, a to průměrem větší kružnice; poloměr větší kružnice je ϱ. Zjistěte, za jaké podmínky neplatí pro útvar U tvrzení BLASCHKEOVY věty. [Vyjde $\delta < \frac{2}{3}\varrho$.]

Úloha 53.*Zjistěte, zda pro nekonvexní útvar U z úlohy 49 (obr. 48) platí tvrzení věty BLASCHKEOVY. Určete konvexní obal $\overline{U}$ útvaru U a ověřte si pro něj větu BLASCHKEOVU.

Úloha 54. Pomocí šířky trojúhelníka (úloha 26) ověřte, že pro trojúhelník platí věta BLASCHKEOVA. Jaký poloměr má největší kruh, který lze umístit do trojúhelníka? Vyslovte domněnku a odůvodněte ji.

DODATEK

V teorii konvexních útvarů se pracuje ustavičně s některými pojmy, které se týkají tzv. *uspořádání bodů na přímce, v rovině i v prostoru.* Základním vztahem uspořádání je vztah „*mezi*"; říkáme, že *bod C leží mezi body A, B* (nebo B, A), když náleží vnitřku úsečky s krajními body A, B. Táž skutečnost se někdy také vyjadřuje rčením, že *bod C odděluje body A, B.*

Daná přímka m je rozdělena libovolným svým bodem P ve dvě části (množiny bodů), které nazýváme *polopřímkami*, a to polopřímkami navzájem *opačnými*. Bod P nazýváme *počátkem polopřímky* a počítáme ho k oběma opačným polopřímkám. Leží-li tedy např. bod C mezi body A, B, jsou polopřímky CA, CB opačné.

Rovina je rozdělena libovolnou svou přímkou p ve dvě části, které nazýváme *polorovinami*, a to polorovinami navzájem *opačnými*. Přímku p nazýváme jejich *hranicí* a počítáme ji k oběma opačným polorovinám. Jak poznáme, zda dva body X, Y roviny, ležící mimo přímku p, náležejí téže polorovině s hranicí p nebo polorovinám opačným? Neleží-li mezi body X, Y žádný bod přímky p, jsou X, Y body téže poloroviny; leží-li mezi nimi bod přímky p, jsou to body polorovin navzájem opačných. Leží-li mezi body X, Y nějaký bod přímky p (na níž body X, Y neleží), říkáme stručně, že *přímka p odděluje body X, Y.* To je jen jiné vyjádření situace, že body X, Y náležejí opačným polorovinám s hranicí p.

Je-li dán trojúhelník ABC a přímka p jeho roviny, která neprochází žádným jeho vrcholem, ale odděluje např. body A, B, pak přímka p odděluje buď body A, C nebo body B, C. Tato, z názoru zcela zřejmá věta má v geometrii veliký význam a nazývá se větou PASCHOVOU.

Situace v prostoru je obdobná jako v rovině. Rovinou ϱ je prostor rozdělen ve dvě části, které nazýváme *poloprostory*, a to poloprostory navzájem *opačnými*. Rovinu ϱ nazýváme jejich *hraniční rovinou* a počítáme ji k oběma poloprostorům. Čtenář si dovede jistě sám vysvětlit rčení, že *rovina* ϱ *odděluje body* X, Y a dovede také vyslovit podmínku pro to, aby dva body X, Y ležící mimo rovinu ϱ náležely témuž poloprostoru s hraniční rovinou ϱ nebo opačným poloprostorům s touž hraniční rovinou.

V několika úlohách naší brožury se hovoří o *čtyřúhelníku*. Čtyřúhelník — jako všecky mnohoúhelníky — skládáme obvykle z nepřekrývajících se trojúhelníků. Trojúhelník XYZ je množina všech bodů, které jsou společné polorovinám XYZ, YZX, ZXY: neboli je to průnik těchto polorovin (viz příklad 1). Podle tohoto vytvoření patří k trojúhelníku i všecky jeho strany, tj. jeho obvod. Říkáme, že dva trojúhelníky se nepřekrývají, když buď nemají žádný společný bod nebo když jejich společné body náležejí jen jejich obvodům.

Čtyřúhelník $ABCD$ je množina všech bodů dvou trojúhelníků ACB, ACD, které leží v opačných polorovinách s hranicí AC; přitom žádné tři z bodů A, B, C, D nesmějí ležet v přímce. Oba vytvořující trojúhelníky ACB, ACD se podle předchozího nepřekrývají; obvykle říkáme, že čtyřúhelník $ABCD$ (záleží na pořádku vrcholů!) je sjednocením nepřekrývajících se trojúhelníků ACB, ACD. Protože přímka AC odděluje body B, D, leží mezi nimi bod Q přímky AC. A nyní mohou nastat dvě situace:

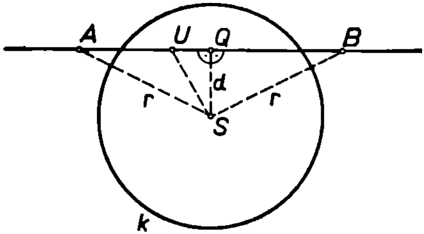
a) buď bod Q leží mezi body A, C; b) nebo bod Q leží mimo úsečku AC. Načrtněte si příslušné obrázky a uvědomte si, proč nemůže být $Q \equiv A$ nebo $Q \equiv C$.

V prvním případě říkáme, že *se úhlopříčky* AC, BD *protínají v bodě* Q; dá se dokázat, že v tomto případě je čtyřúhelník $ABCD$ *konvexní* útvar. V druhém případě dostaneme čtyřúhelník, jaký je např. na obr. 1; je to útvar *nekonvexní*.

Věta II na str. 21 byla označena názvem DEDEKINDŮV *axiom spojitosti* s upozorněním, že jde o jednu z nejdůležitějších vět matematiky. Její význam je v tom, že mnoho geometrických poznatků, zdánlivě velmi různorodých, lze z DEDEKINDOVA axiomu odvodit deduktivně. To činíme, i když mnohé z těchto poznatků se zdají zřejmé z názoru, neboť jejich odvození nám ukazuje jejich vzájemnou souvislost a souvislost s jinými matematickými disciplínami. Z DEDEKINDOVA axiomu spojitosti lze odvodit např. větu, že dvě kružnice, jejichž vzdálenost středů je menší než součet obou poloměrů a větší než rozdíl obou poloměrů, se protínají ve dvou bodech. Z axiomu spojitosti lze odvodit větu, že každé kladné číslo je při pevně zvolené jednotce délky velikostí některé úsečky. Z axiomu spojitosti lze odvodit větu, že každé dva mnohoúhelníky téhož obsahu se dají rozložit v konečný počet trojúhelníků po dvou shodných, a mnohé jiné věty. Z axiomu DEDEKINDOVA lze však také odvodit větu VIII i větu, že každý omezený dvojrozměrný konvexní útvar lze rozdělit dvěma navzájem kolmými přímkami ve čtyři části téhož obsahu a další.

Pro zvídavého čtenáře uvedeme na ukázku aspoň jedno odvození geometrické věty z DEDEKINDOVA axiomu spojitosti. Naznačíme důkaz věty: *Má-li přímka p od středu S kružnice $k \equiv (S; r)$ vzdálenost $d < r$, má s kružnicí dva navzájem různé společné body.*

Důkaz. Prochází-li přímka p středem S, není co dokazovat. Neprochází-li přímka p středem S, označíme Q patu kolmice spuštěné z bodu S na p; pak je $SQ = d < r$. Na obou polopřímkách vymezených na přímce p bodem Q sestrojíme body A, B tak, aby platilo $QA = QB = r$



Obr. 52

(viz obr. 52). Pak je $SA = SB > AQ = BQ = r$. Utvoříme množinu M všech bodů X přímky p, pro něž platí $SX \leqq r$. Do množiny M patří bod Q, ale nepatří body A, B. Snadno dokážeme, že množina M je konvexní útvar (pokuste se o to!); množina M náleží úsečce AB (proč?); je proto omezená. Množina M však obsahuje ještě další body mimo bod Q; tak např. sestrojíme-li na polopřímce QA bod U, pro který platí $QU = r - d$, je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$SU < SQ + QU = d + (r - d) = r;$$

bod $U \neq Q$ náleží tedy také do množiny M.

Podle DEDEKINDOVA axiomu spojitosti je množina M jistá úsečka CD. Dá se dokázat nepřímým důkazem, že např. pro bod C neplatí ani nerovnost $SC > r$ ani nerovnost $SC < r$; je tedy $SC = r$, tj. bod C náleží kružnici k*). Stejný závěr dostaneme pro bod D. Protože přímka p nemůže mít s kružnicí více než dva společné body, je tím naše věta dokázána.

Důkazy vět pomocí axiomu spojitosti nejsou nijak jednoduché, i když jde o zdánlivě průzračné situace. Proto je pochopitelné, že se o axiomu spojitosti a o jeho důsledcích na střední škole nemluví.

*) Kdyby platilo např. $SC < r$, sestrojili bychom na polopřímce QC bod C' tak, aby bylo $QC' = QC + (r - SC)$. Podle trojúhelníkové nerovnosti bychom dostali z trojúhelníka SCC'

$$SC' < SC + CC' = SC + (QC' - QC) = r.$$

To znamená, že bod C' by náležel množině M; to je však nemožné, neboť bod C' leží mimo úsečku CD.

REJSTŘÍK*)

Bod útvaru hraniční . . . 18
— vnější 18
— vnitřní 18
Hranice útvaru 20
Obal konvexní 45
Okolí bodu 17
Parabola kubická 35
Poloprostor opěrný . . . 49
Polorovina opěrná 32
Průměr útvaru 40
Přímka opěrná 32
Rovina opěrná 49
Šířka útvaru 40
Útvar dvojrozměrný . . . 39
— geometrický 5
— konvexní 5
— neomezený 7
— omezený 6
— trojrozměrný 49
— uzavřený 21

Věta BLASCHKEOVA . . . 79
— HELLYOVA . . 73, 75, 76
— JUNGOVA 78
— PASCHOVA 90
— o konvexních útvarech na přímce (DEDIKINDŮV axiom spojitosti) . . . 21
— o opěrných přímkách daného směru . . . 36, 39
— o opěrných rovinách daného zaměření . . . 49
— o půlení dvojrozměrného útvaru 59
— o průměru útvaru . 41, 50
— o průniku konvexních útvarů 7, 10
— o průsečících přímky s hranicí konvexního útvaru 22

*) Číslo značí stranu, kde je zaveden pojem nebo uvedena věta.

O B S A H

Předmluva - - - - - - - - - - - - - - - - - - 3

Kapitola 1. Zkoumání konvexity útvaru - - - - - - 5

Kapitola 2. Hranice konvexního útvaru - - - - - - 17

Kapitola 3. Opěrné přímky konvexního útvaru v rovině - - - - - - - - - - - - - - 32

Kapitola 4. Opěrné roviny konvexního útvaru v prostoru - - - - - - - - - - - - - 49

Kapitola 5. Dělení konvexního útvaru na části téhož obsahu - - - - - - - - - - - - 56

Kapitola 6. Věta HELLYOVA a některé její důsledky - - - - - - - - - - - - - - - 72

Dodatek - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 89

Rejstřík - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 94

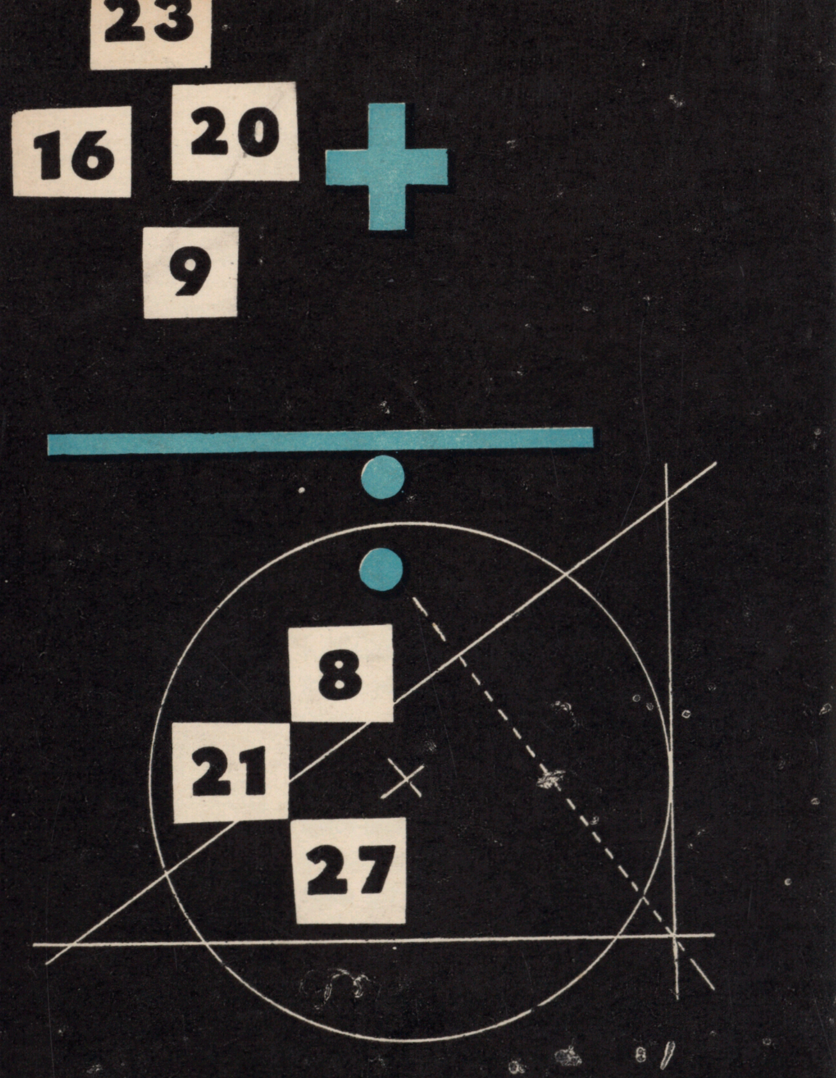
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAN VYŠÍN

konvexní útvary

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědná redaktorka Helena Benešová
Publikace číslo 2106
Edice Škola mladých matematiků, svazek 9
Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provozovna 22,
Praha 2, Legerova 22
3,56 AA, 3,69 VA. D-10*40197
Náklad 7000 výtisků. 1. vydání
96 stran. Praha 1964. 63/III-7

23-088-64 03-2 Cena brož. výt. Kčs 3,–



23-088-64
03-2
Cena brož.