

O funkcích

Miroslav Šisler (author); Jiří Jarník (author): O funkcích. (Czech).
Praha: Mladá fronta, 1962.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403455>

Terms of use:

© ÚV Matematické olympiády

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O FUNKCÍCH

Vydal matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MIROSLAV ŠISLER – JIŘÍ JARNÍK

O funkcích



PRAHA 1962

VYDAL MATEMATICKÝ ÚSTAV ČSAV A ÚV ČSM
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA



Úlohy o funkcích se vyskytují v každém ročníku naší i mezinárodní matematické olympiády, neboť pojem funkce je jedním ze základních pojmů moderní matematiky a nelze se bez něj obejít ani ve vědách technických a přírodních. A to je jeden z důvodů, proč v této knižnici vychází svazek, věnovaný právě funkcím.

Knižka má pomoci především účastníkům matematické olympiády v samostatném řešení úloh o funkcích. Proto opakujeme v prvních dvou článcích některé základní pojmy, známé ze školního výkladu, a zavádíme i některé další pojmy, které umožňují hlubší pochopení vlastností funkcí bez podstatného rozšiřování školní látky. Ve třetí části je řešena řada úloh, které ukazují, jak se zavedené pojmy užívají k vyšetřování průběhu funkcí. Používá se přitom jen elementárních matematických prostředků, především počítání s nerovnostmi. Úlohy dávají dobrou příležitost k procvičení metody nepřímého důkazu.

Pro samostatnou práci čtenářů jsou na konci knížky připojeny neřešené úlohy a několik odkazů na přístupnou literaturu z této oblasti.

1. ZÁKLADNÍ POJMY



V tomto článku zopakujeme základní pojmy z nauky o funkcích, s nimiž se již čtenář seznámil ve škole. V celé knížce budeme pracovat pouze s reálnými čísly. Nejprve připomeneme definici funkce.

Funkce je předpis, který každému číslu x z určité množiny M přiřazuje právě jedno číslo.

V matematice označujeme funkce většinou písmeny (f , g , h , ..., F , G , ...). Některé často používané funkce mají svá stálá označení (např. \sin , \log , tg apod.). Množinu čísel, kterou jsme v definici označili M , nazýváme *oborem funkce* nebo *definičním oborem funkce*; x je tzv. *proměnná*. Číslo y , přiřazené funkcí f číslu x , označujeme obvykle $f(x)$ a nazýváme je *funkční hodnotou funkce f pro číslo x* nebo *hodnotou funkce f v bodě x* .

Aby nějaký předpis definoval funkci, musí každému číslu x z definičního oboru přiřazovat právě jedno číslo y . Jinými slovy, je-li dáno číslo x z oboru funkce f , musíme vždy umět jednoznačně rozhodnout, které číslo je funkční hodnota $f(x)$. Není tedy funkcí např. předpis: „Danému kladnému číslu x přiřad číslo, které umocněno na druhou dá x “. Existují totiž vždy dvě taková čísla, lišící se znaménkem: \sqrt{x} a $-\sqrt{x}$.

Funkce v naší knížce budou zadávány vzorcem, z kterého vypočteme hodnotu funkce pro libovolné číslo z jejího oboru. Např. říkáme „buď dána funkce $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ “.

nebo „buď dána funkce $y = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ “. Při zadávání funkce tedy často vůbec nehovoříme o jejím oboru. V takovém případě mlčky předpokládáme, že oborem funkce je množina všech čísel x , pro která má výraz definující funkci smysl. Pro funkci $y = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ je tedy oborem množina všech čísel s výjimkou čísla $x = 1$. Stanovení definičního oboru je prvořadou otázkou při zkoumání každé funkce.

V této knížce se budeme zabývat hlavně úlohami, které souhrnně nazýváme zkoumáním průběhu funkce. Slovo „průběh“ naznačuje, že půjde o názorné vlastnosti funkce, těsně svým významem spjaté s grafem funkce. Zopakujeme si proto své poznatky o grafickém znázorňování funkcí.

Zvolme v rovině pravoúhlou soustavu souřadnic. To znamená, jak víme, že v rovině nakreslíme dvě číselné osy tak, aby byly navzájem kolmé a aby jejich průsečík byl na obou osách počátkem.

Na ose x zvolme bod x z oboru zkoumané funkce f a v tomto bodě vztyčme k ose x kolmici. Na ni nanesme délku $|f(x)|$ a to ve směru kladné poloosy y , je-li $f(x) > 0$ a ve směru záporné poloosy y , je-li $f(x) < 0$. Dostaneme tak v rovině bod, který označujeme $[x, f(x)]$. Čísla x a $f(x)$ jsou souřadnice tohoto bodu.

Grafem funkce f nazýváme množinu bodů $[x, f(x)]$, kde x je libovolné číslo z oboru funkce f .

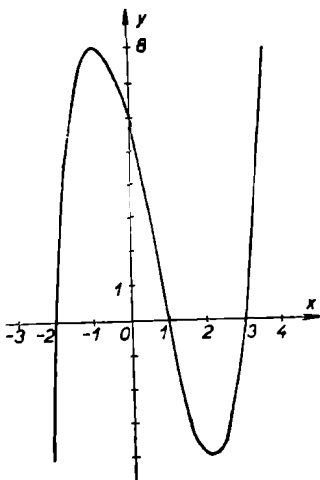
Graf funkce nemůžeme zpravidla sestavit přesně. Při kreslení grafu můžeme postupovat tak, že sestavíme tabulku, do níž zapisujeme funkční hodnoty $f(x)$ pro určité zvolené hodnoty proměnné x . Podle této tabulky nakreslíme body $[x, f(x)]$ a spojíme je pokud možno plynulou, co nejjedno-

dušší křivkou. Tato křivka je pak přibližným grafickým znázorněním funkce f .

Příklad 1. Nakreslíme graf funkce $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Oborem této funkce je celá množina reálných čísel. Při kreslení grafu se omezíme např. na hodnoty proměnné, pro něž platí $-3 \leq x \leq 4$. Sestavíme tabulku funkčních hodnot dané funkce pro celočíselné hodnoty proměnné:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-24	0	8	6	0	-4	0	18

Sestrojíme-li podle této tabulky příslušné body $[x, f(x)]$ a spojíme-li je plynulou křivkou, dostaneme obr. 1.

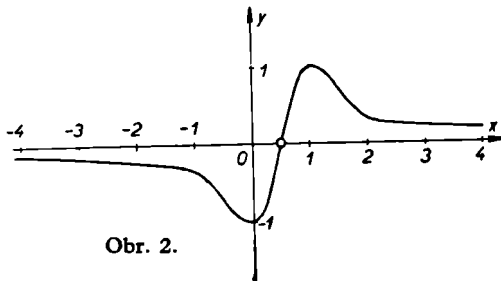


Obr. 1.

Příklad 2. Nakreslíme graf funkce $g(x) = \frac{1}{2x-1}$. Obo-
rem této funkce je celá množina reálných čísel s výjimkou
čísla $x = \frac{1}{2}$, pro něž zlomek nemá smysl. Sestavme tabulku
jako v minulém příkladu:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	-1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$

Nakreslíme-li podle této tabulky příslušné body $[x, g(x)]$
a spojíme-li je plynulou křivkou, dostaneme obr. 2. (Bod
 $[\frac{1}{2}, 0]$ označený kroužkem ovšem do grafu nepatří.) Snadno
se však přesvědčíme, že v blízkosti hodnoty proměnné
 $x = \frac{1}{2}$ zobrazuje tato křivka graf funkce g velmi nepřesně,
ba přímo chybně. K tomuto závěru nás dovede následující
úvaha:



Obr. 2.

Zvolíme-li hodnotu proměnné hodně blízko číslu $\frac{1}{2}$, liší
se číslo $2x-1$ jen velmi málo od nuly a tedy jeho převrá-
cená hodnota je (v absolutní hodnotě) velmi velká. Např.

pro $x = 0,51$ dostaneme $g(0,51) = 50$, pro $x = 0,49$ je $g(0,49) = -50$. Na obr. 2 však naopak body grafu pro hodnoty proměnné blízké číslu $\frac{1}{2}$ leží blízko osy x .

Na uvedeném příkladu vidíme, že i poměrně jednoduché funkce vyžadují hlubšího zkoumání než je pouhý výpočet některých funkčních hodnot. Proto si v následujícím článku zavedeme některé pojmy, usnadňující nám zkoumání funkcí.

2. DALŠÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ



Je vhodné zavést nejdříve označení pro některé množiny, se kterými budeme často pracovat.

Jsou-li a, b dvě čísla, $a < b$, pak množinu čísel x , pro něž současně platí nerovnosti $a \leq x, x \leq b$ (stručně píšeme často $a \leq x \leq b$), nazýváme *uzavřený interval* a označujeme ji symbolem $\langle a, b \rangle$. Množina čísel, pro něž platí obdobné ostré nerovnosti (tj. $a < x < b$), je *otevřený interval*, který označujeme (a, b) . Podobně definujeme i další typy intervalů, jak je ukázáno v tabulce na str. 11.

Všimněte si zejména intervalů neomezených a rozmyslete si jejich geometrické znázornění na číselné ose! Např. interval $\langle 3, \infty \rangle$ je znázorněn polopřímkou s počátečním bodem 3, na niž jsou znázorněna čísla větší než 3. Také číslo 3 patří do tohoto intervalu.

Často hovoříme o *vnitřních bodech* intervalu. Jsou to všechna čísla z daného intervalu s výjimkou čísel a a b , tzv. „krajních bodů“. V případě omezeného intervalu jsou tedy jeho vnitřní body právě všechna čísla z otevřeného intervalu (a, b) . Podobně v případě neomezeného intervalu jsou vnitřní body intervalu právě všechna čísla tohoto intervalu s výjimkou „krajního bodu“ a .

Jistě jste si povšimli, že často hovoříme o číslech jako o bodech. K tomu nás vede geometrické znázornění čísel jako bodů na číselné ose. Tento způsob vyjádření je v matematice běžný a je třeba si na něj zvyknout.

Obraťme se nyní již k pojmům, týkajícím se přímo funkcí. Ze školy známe funkci $y = \log x$, definovanou pro

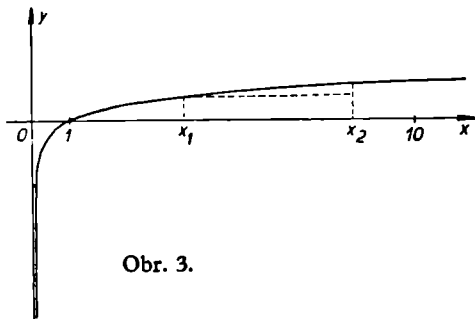
Množina čísel x , pro něž platí nerovnosti	Název	Označení	
$a \leq x \leq b$	uzavřený interval	} omezené intervaly	
$a < x < b$	otevřený interval		
$a \leq x < b$	} polouzavřený interval		$\langle a, b \rangle$
$a < x \leq b$			(a, b)
$x \leq a$	} uzavřený interval	} neomezené intervaly	
$a \leq x$			$(-\infty, a)$
$x < a$	} otevřený interval		$\langle a, \infty \rangle$
$a < x$			$(-\infty, a)$
	množina reálných čísel	(a, ∞)	
		$(-\infty, \infty)$	

všechna kladná čísla x . Její graf je křivka, nakreslená na obr. 3. Jdeme-li po této křivce zleva doprava (tj. ve směru kladné poloosy x), vidíme, že křivka stoupá. Je to způsobeno tím, že funkční hodnoty logaritmické funkce rostou, což můžeme matematicky říci takto: Zvětšíme-li číslo x , zvětší se i logaritmus; nebo přesněji: Je-li $0 < x_1 < x_2$, je $\log x_1 < \log x_2$.

Tuto názornou vlastnost funkcí budeme nyní definovat

obecně. Uvažujme nějaký interval I (lhostejno jakého typu) a funkci f .

Nechť x_1, x_2 jsou libovolná dvě čísla z intervalu I , pro něž je $x_1 < x_2$. Platí-li nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$, říkáme, že funkce f je rostoucí v intervalu I . Platí-li za stejných předpokladů nerovnost $f(x_1) > f(x_2)$, nazýváme funkci f klesající v intervalu I .



Obr. 3.

Příklad 3. V příkladu 2 jsme se snažili nakreslit graf funkce $g(x) = \frac{1}{2x-1}$. Dokážeme nyní, že tato funkce je klesající v intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ a také v intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$.

Uvažujme nejdříve první interval. Jsou-li x_1, x_2 čísla z intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$, platí $x_1 < \frac{1}{2}, x_2 < \frac{1}{2}$. Nechť zároveň platí $x_1 < x_2$. Z této nerovnosti plyne, že $2x_1 - 1 < 2x_2 - 1$, při čemž výrazy na obou stranách nerovnosti jsou čísla téhož znaménka (záporná). Pro převrácené hodnoty platí tedy obrácená nerovnost

$$\frac{1}{2x_1 - 1} > \frac{1}{2x_2 - 1}$$

čili $g(x_1) > g(x_2)$. Tím jsme dokázali, že funkce $g(x) = \frac{1}{2x-1}$ je klesající v intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$. Pro interval $(\frac{1}{2}, \infty)$ je důkaz obdobný.

Nyní již vidíme, že graf funkce g , jak je na obr. 2, není správný, neboť přibližně v intervalech $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ nakreslená křivka stoupá, zatímco podle našeho výsledku má klesat.

Další pojmy, související dosti úzce s pojmy právě zavedenými, jsou pojmy maxima a minima funkce.

Maximum (minimum) funkce f v intervalu I je největší (nejmenší) hodnota, již funkce v intervalu I nabývá.

Matematicky můžeme naši definici formulovat takto:

Číslo m nazýváme maximem (minimem) funkce f v intervalu I , jestliže platí:

1. Existuje číslo x_0 z intervalu I tak, že $f(x_0) = m$.
2. Pro libovolné číslo x z intervalu I platí $f(x) \leq m$ ($f(x) \geq m$).

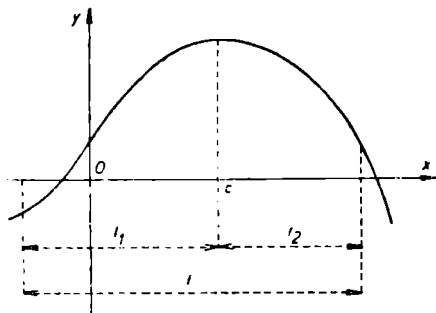
Příklad 4. Stanovíme maximum funkce $h(x) = 2 \sin x - \cos 2x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Protože $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, platí pro libovolné x
 $h(x) = 2 \sin x - \cos 2x = 2 \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$.

Protože pro každé x platí $|\sin x| \leq 1$, je také $\sin^2 x \leq 1$ a tedy i $h(x) \leq 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$. Přitom funkce h skutečně nabývá hodnoty 3, např. pro $x_0 = 90^\circ$. Je tedy číslo 3 maximem funkce h v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Všimněte si, že téže hodnoty 3 nabývá funkce h pro nekonečně mnoho hodnot proměnné, totiž pro $x_k = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, kde k je libovolné celé číslo. To však neodporuje definici maxima.

Nyní dokážeme větu, která je někdy výhodná při stanovení maxima či minima funkce v daném intervalu.

Mějme dán interval I a jeho vnitřní bod c . Definujme dále intervaly I_1 a I_2 takto (viz obr. 4):



Obr. 4.

I_1 je množina čísel x z intervalu I , pro která platí nerovnost $x \leq c$;

I_2 je množina čísel x z intervalu I , pro která platí nerovnost $x \geq c$.

(Přesvědčte se, že takto definované množiny I_1 , I_2 jsou skutečně intervaly!) Platí věta:

Je-li funkce f , definovaná pro všechna čísla x z intervalu I , rostoucí v intervalu I_1 a klesající v intervalu I_2 , potom nabývá v bodě $x = c$ maxima v intervalu I , rovného číslu $f(c)$.

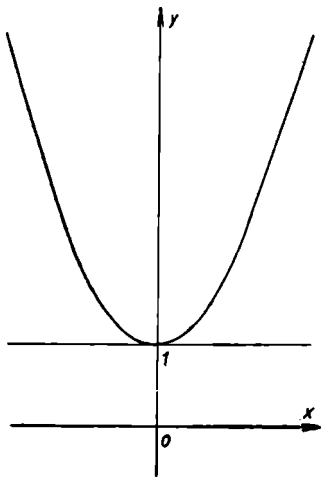
Důkaz této věty je snadný a plyne přímo z definic. Máme dokázat, že číslo $f(c)$ je maximem v intervalu I , tj. že pro každé x z intervalu I platí $f(x) \leq f(c)$. Buď tedy x libovolné číslo z intervalu I a necht' $x \neq c$. Potom leží x buď v intervalu I_1 nebo v intervalu I_2 . Leží-li x v I_1 , je $x < c$. Protože funkce f je v I_1 rostoucí, platí podle definice $f(x) < f(c)$. Leží-li x v I_2 , je $c < x$. Protože funkce f je v I_2 klesající, platí podle definice $f(c) > f(x)$. Je-li $x = c$,

je $f(x) = f(c)$. Pro libovolné číslo x z intervalu I platí tedy nerovnost $f(x) \leq f(c)$ (rovnost nastává jen pro $x = c$). Číslo $f(c)$ je tedy maximem funkce f v intervalu I . Důkaz je ukončen.

Pro minimum platí obdobná věta:

Je-li funkce f , definovaná pro všechna čísla z intervalu I , klesající v intervalu I_1 a rostoucí v intervalu I_2 , potom nabývá v bodě $x = c$ minima v intervalu I , rovného číslu $f(c)$.

Velmi jednoduchým a přitom závažným pojmem je pojem ohraničenosti a neohraničenosti funkce. Všimněme si např. funkce $y = x^2 + 1$. Graf této funkce je parabola, která leží v „horní“ polorovině, určené rovnoběžkou s osou x ve vzdálenosti jedna (viz obr. 5). Funkční hodnoty naší



Obr. 5.

funkce jsou tedy zdola ohraničeny číslem jedna: ať zvolíme jakékoliv číslo x , je vždy $y \geq 1$. To nás vede k obecné definici, kterou nyní vyslovíme.

Říkáme, že funkce f je v intervalu I shora (zdola) ohraničená, jestliže existuje číslo c tak, že pro každé x z intervalu I platí $f(x) \leq c$ ($f(x) \geq c$). Je-li funkce f v intervalu I ohraničená shora i zdola, říkáme prostě, že je v intervalu I ohraničená.

Souvislost tohoto pojmu s předchozími nám ukazuje tato jednoduchá věta, jejíž důkaz přenecháváme čtenáři:

Má-li funkce f v intervalu I maximum (minimum), je v tomto intervalu shora (zdola) ohraničená.

Další jednoduchou větu si zde dokážeme:

Je-li f funkce, ohraničená v I , pak existuje číslo d tak, že pro každé x z intervalu I platí $|f(x)| \leq d$.

Důkaz: Je-li f ohraničená v I , pak existují podle definice dvě čísla c_1, c_2 tak, že pro každé x z I je $f(x) \leq c_1, f(x) \geq c_2$. Větší z čísel $|c_1|, |c_2|$ označme d . (Je-li $|c_1| = |c_2|$, je také $d = |c_1|$.)

Je-li $f(x) \geq 0$, platí postupně

$$|f(x)| = f(x) \leq c_1 \leq d;$$

je-li $f(x) < 0$, platí obdobně

$$|f(x)| = -f(x) \leq -c_2 \leq d.$$

Platí tedy v každém případě $|f(x)| \leq d$, čímž je důkaz ukončen.

Příklad 5. V příkladu 4 jsme dokázali, že funkce $h(x) = 2 \sin x - \cos 2x$ je shora ohraničená v $(-\infty, \infty)$, neboť pro libovolné x platí $h(x) \leq 3$. Snadno ukážeme, že funkce h je ohraničená též zdola. Je totiž $\sin x \geq -1$ a tedy $2 \sin x \geq -2$. Dále je $\cos 2x \leq 1$ čili $-\cos 2x \geq -1$. Sečtením obou nerovností $2 \sin x \geq -2, -\cos 2x \geq -1$ dostaneme nerovnost

$$2 \sin x - \cos 2x \geq -3.$$

Dokázali jsme tedy, že funkce h je ohraničená v intervalu $(-\infty, \infty)$, neboť je tam ohraničená shora i zdola. Je dobře

si uvědomit, že číslo -3 nemusí být (a ve skutečnosti také není) minimem funkce h , neboť nevíme, zda existuje číslo x_0 tak, že $h(x_0) = -3$.

Příklad 6. V příkladech 2 a 3 jsme vyšetřovali funkci $g(x) = \frac{1}{2x-1}$. Graf, získaný v příkladu 2 pomocí tabulky funkčních hodnot, nevystihoval skutečný průběh funkce. Nyní ukážeme, že tato funkce není shora ohraničená v intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$. To nám umožní nakreslit správný graf funkce g .

Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme, že je funkce g v intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$ ohraničená shora. Potom podle definice existuje číslo c tak, že pro všechna x z uvedeného intervalu

platí $\frac{1}{2x-1} \leq c$. Můžeme předpokládat, že $c > 1^*$). Pokusme se najít takové x_0 z intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$, pro něž nerovnost $\frac{1}{2x_0-1} \leq c$ neplatí, takže platí

$$\frac{1}{2x_0-1} > c.$$

Z této nerovnosti plyne dále

$$\frac{1}{c} > 2x_0 - 1,$$

$$\frac{1+c}{c} > 2x_0,$$

$$\frac{1+c}{2c} > x_0.$$

*) Je zřejmé, že je-li funkce f ohraničená shora číslem c_1 , je tím spíše ohraničená shora každým číslem $c_2 > c_1$.

Protože $\frac{1+c}{2c} > \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$, můžeme volit x_0 tak, aby platilo

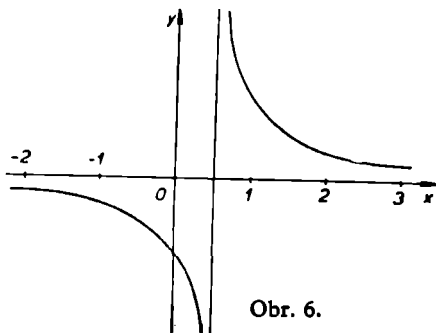
$$\frac{1}{2} < x_0 < \frac{1+c}{2c}.$$

Protože $\frac{1+c}{2c} < 1$, jak se snadno zjistí, leží x_0 v intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$. Pro x_0 však platí

$$\frac{1}{2x_0 - 1} > \frac{1}{2 \frac{1+c}{2c} - 1} = \frac{c}{1+c-c} = c.$$

To je však ve sporu s tvrzením, že daná funkce je shora ohraničená číslem c .

Podobně lze dokázat, že funkce g není zdola ohraničená v intervalu $(0, \frac{1}{2})$.



Obr. 6.

Vezmeme-li v úvahu poznatky z příkladů 2, 3, můžeme již sestavit graf dané funkce. Vidíme jej na obr. 6. Rovnoběžka s osou y , pro niž $x = \frac{1}{2}$, je tzv. asymptota grafu. Graf se k ní „neomezeně“ přibližuje, ale nikdy ji neprotne.

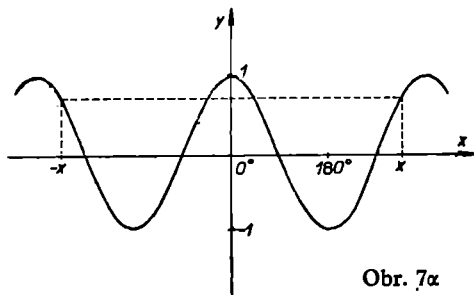
Vedle pojmů „funkce klesající v intervalu“, „maximum funkce v intervalu“, „funkce ohraničená v intervalu“ atd., budeme také často užívat pojmů „funkce klesající“, „maximum funkce“, „funkce ohraničená“ atd. Jejich definice se liší od těch, které jsme vyslovili, jen v jediném: Mluvíme-li v definici o „čísle z intervalu I “, je třeba místo toho říci „číslo z oboru vyšetřované funkce“, tedy např.:

Funkce je shora ohraničená, jestliže existuje číslo c tak, že pro každé x z oboru funkce platí $f(x) \leq c$.

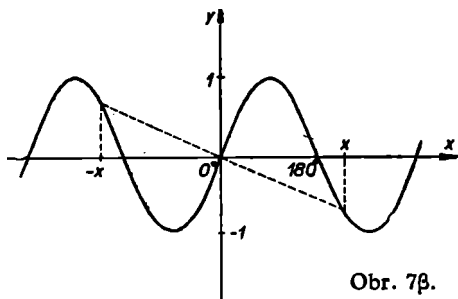
Tato úprava našich definic nám dává možnost zkoumat funkci vcelku, i když jejím oborem není interval (srovnej dále úlohy 4, 5 aj.).

Viděli jsme, že ke zkoumání téměř všech vlastností funkcí, o kterých jsme dosud mluvili, bylo třeba počítat s nerovnostmi. Bez dobré znalosti nerovností a obratnosti při zacházení s nimi se neobejdeme. Na nerovnostech si můžeme také procvičit metodu nepřímého důkazu, která dělává po logické stránce potíže. Jednu ukázkou nepřímého důkazu jsme již viděli v příkladu 6.

Čtenáři jsou dobře známy funkce sinus a kosinus. Na nich si můžeme ukázat dvě vlastnosti, které jsou často užitečné při sestrojování grafu. Platí totiž $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$. Geometricky to znamená, že graf



Obr. 7α



Obr. 7β.

funkce $\cos x$ je souměrný podle osy y (viz obr. 7α), graf funkce $\sin x$ je středově souměrný podle počátku (viz obr. 7β). Zobecněním těchto vlastností je následující definice:

Je-li pro každé x z oboru funkce f platí, že $f(x) = f(-x)$, pak funkci f nazýváme sudou funkcí; je-li $f(x) = -f(-x)$, nazýváme funkci f lichou funkcí.

Příklad 7. Protože $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, $(-x)^{2k} = x^{2k}$ pro libovolné přirozené číslo k , je zřejmá tato věta:

Jsou-li v mnohočlenu

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

rovny nule všechny koeficienty při lichých mocninách proměnné, je funkce f (daná tímto mnohočlenem) sudá. Jsou-li rovny nule všechny koeficienty při sudých mocninách (včetně absolutního členu), je funkce f lichá.

Nakreslete si sami grafy jednoduchých funkcí $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ a také funkce konstantní $f_3(x) = 1$! Které z těchto funkcí jsou sudé a které liché?

3. ŘEŠENÉ ÚLOHY



Úloha 1. Vyšetřte průběh funkce $y = |x + 1| + |x - 1|$ a nakreslete její graf.

Řešení. Funkce je definována pro všechna čísla x . Vidíme, že při jejím studiu jsou zvláště významné body $x = -1$ a $x = 1$. Pro $x = -1$ je totiž $|x + 1| = 0$ a pro $x = 1$ je $|x - 1| = 0$, takže v těchto bodech výrazy v absolutních hodnotách mění znaménko. Rozdělíme osu x na tři části, intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. Funkci budeme zkoumat v každém z těchto intervalů zvlášť, neboť v těchto intervalech lze funkci vyjádřit bez použití absolutních hodnot.

a) Nejprve si všimněme intervalu $(-\infty, -1)$. Zde platí $x + 1 \leq 0$ a $x - 1 < 0$. Je tedy $|x + 1| = -x - 1$, $|x - 1| = -x + 1$. Funkce y má v tomto intervalu tvar

$$y = -x - 1 - x + 1 = -2x.$$

Grafem dané funkce je tedy v intervalu $(-\infty, -1)$ polopřímka (jejíž počáteční bod je $[-1, 2]$ a leží na ní např. bod $[-3, 6]$), neboť jde o lineární funkci (přímá úměrnost).

b) Dále uvažujme interval $(-1, 1)$. Zde platí $x + 1 \geq 0$, $x - 1 \leq 0$, takže je $|x + 1| = x + 1$, $|x - 1| = -x + 1$. Funkce y má tedy v intervalu $(-1, 1)$ tvar

$$y = x + 1 - x + 1 = 2$$

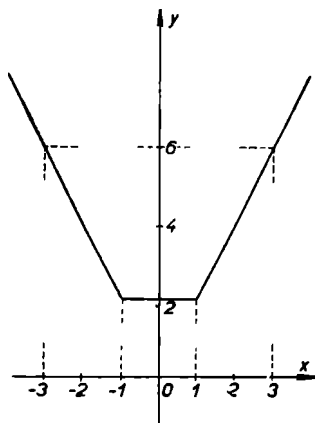
a je tedy v tomto intervalu konstantní. Jejím grafem je úsečka o krajních bodech $[-1, 2]$ a $[1, 2]$.

c) Uvažujme konečně interval $\langle 1, \infty \rangle$. Zde je $x + 1 > 0$, $x - 1 \geq 0$ a tedy $|x + 1| = x + 1$, $|x - 1| = x - 1$. Funkce y nabývá tvaru

$$y = x + 1 + x - 1 = 2x.$$

V intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ je tedy grafem funkce polopřímka o počátečním bodu $[1, 2]$; leží na ní např. bod $[3, 6]$.

Tím je zkoumání průběhu funkce ukončeno. Graf je na obr. 8.



Obr. 8.

Celý vtíp řešení spočíval ve správné volbě intervalů tak, aby se v nich funkce projevila jako lineární. Tohoto postupu užíváme i ve složitějších případech, kdy vyšetřovaná funkce je předepsána nějakým výrazem, obsahujícím absolutní hodnoty. Zde volíme intervaly tak, aby se v nich dala funkce vyjádřit ve tvaru bez absolutních hodnot, tzn., aby v těchto intervalech výrazy v absolutní hodnotě neměnily znaménko. Takovým případem se bude také zabývat úloha 7.

Úloha 2. Vyšetřte průběh funkce $f(x) = 8x^3 - 2x$ a nakreslete její graf.

Řešení. Oborem funkce $y = 8x^3 - 2x$ je zřejmě interval $(-\infty, \infty)$.

Sestavme si nejdříve tabulku některých funkčních hodnot dané funkce. Protože jde o lichou funkci, stačí vzít nezáporné hodnoty proměnné:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	0	6	24	60

Tabulka je nápadná tím, že funkční hodnoty, které jsme vypočetli v intervalu $\langle 1, \infty$, velmi rychle rostou. Je proto přirozené tázat se, zda funkce f je rostoucí v intervalu $\langle 1, \infty$ podle naší definice. Dokažme to!

Použijeme metody nepřímého důkazu. Budeme předpokládat, že funkce f není rostoucí v $\langle 1, \infty$. Existují tedy dvě čísla x_1, x_2 z tohoto intervalu taková, že $x_1 < x_2$ a přitom neplatí $f(x_1) < f(x_2)$. Platí tedy $f(x_1) \geq f(x_2)$ čili

$$8x_1^3 - 2x_1 \geq 8x_2^3 - 2x_2. \quad (1)$$

Podají-li se nám dokázat, že tento předpoklad vede k tvrzení očividně nesprávnému, ke sporu, jak říkáme, bude tím dokázáno, že f je rostoucí v $\langle 1, \infty$.

Z nerovnosti (1) dostáváme postupně ekvivalentní nerovnosti

$$\begin{aligned} 8x_1^3 - 8x_2^3 &\geq 2x_1 - 2x_2, \\ 4(x_1^3 - x_2^3) &\geq x_1 - x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Výraz na levé straně nerovnosti (2) rozložme na součin

podle známého vzorce $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Nerovnost (2) tím přejde v ekvivalentní nerovnost

$$4(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \geq x_1 - x_2. \quad (3)$$

Protože je $x_1 < x_2$, je $x_1 - x_2 < 0$. Z nauky o nerovnostech víme, že dělíme-li platnou nerovnost záporným číslem, přejde znaménko \geq ve znaménko \leq . Z nerovnosti (3) dostáváme tedy nerovnost

$$4(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \leq 1$$

čili

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}. \quad (4)$$

Avšak zřejmě $x_1 x_2 \geq 1$, $x_1^2 + x_2^2 \geq 0$, takže $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \geq 1$, což je spor s nerovností (4). Je tedy funkce f rostoucí v intervalu $\langle 1, \infty \rangle$.

Jak jsme již poznamenali, je f lichá funkce. Proto můžeme snadno dokázat ještě další tvrzení: Funkce f je rostoucí v intervalu $(-\infty, -1 \rangle$. (To je zřejmé z názoru, uvážíme-li, že graf liché funkce je souměrný podle počátku.)

Jsou-li x_1, x_2 dvě čísla z $(-\infty, -1 \rangle$, $x_1 < x_2$, jsou čísla $-x_1, -x_2$ zřejmě z intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ a platí pro ně nerovnost $-x_2 < -x_1$. Protože funkce f je v intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ rostoucí, platí $f(-x_2) < f(-x_1)$. Víme však, že pro lichou funkci je $f(-x) = -f(x)$, takže tuto nerovnost můžeme psát ve tvaru $-f(x_2) < -f(x_1)$. To je nerovnost ekvivalentní s nerovností $f(x_1) < f(x_2)$ a tato nerovnost podle definice znamená, že f roste v $(-\infty, -1 \rangle$, neboť x_1, x_2 byla libovolně zvolená čísla z tohoto intervalu ($x_1 < x_2$).

Pojmy, které jsme zavedli v článku 2, nám tedy umožnily posoudit charakter grafu funkce i tam, kde jej už prakticky nemůžeme nakreslit. Funkce f je asi rostoucí

dokonce ve větších intervalech, než jaké jsme uvažovali (např. v $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \infty)$). Přesné stanovení „největších“ intervalů, v nichž funkce roste či klesá, je zpravidla obtížné a elementárními prostředky často nemožné. V našem případě však můžeme tyto intervaly uhádnout poměrně snadno.

Víme, že funkce f roste v $(1, \infty)$. Předpokládejme, že roste v nějakém intervalu I , který „obsahuje“ interval $(1, \infty)$. (Interval I bude tedy (a, ∞) , kde $a < 1$.) Pak pro každá dvě čísla x_1, x_2 z intervalu I , pro něž je $x_1 < x_2$, musí platit nerovnost

$$8x_1^3 - 2x_1 < 8x_2^3 - 2x_2, \quad (5)$$

z níž odvodíme

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > \frac{1}{4} \quad (6)$$

obdobně jako nerovnost (4) z nerovnosti (1). Protože $x_1 < x_2$, musí platit také nerovnost

$$x_2^2 + x_2^2 + x_2^2 > \frac{1}{4}$$

čili $x_2^2 > \frac{1}{12}$. Z této nerovnosti plyne odmocněním

$|x_2| > \frac{\sqrt{3}}{6}$. Tuto nerovnost splňují čísla x_2 z intervalů

$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{6})$, $(\frac{\sqrt{3}}{6}, \infty)$. Protože rozdíl mezi čísly x_1, x_2

může být libovolně malý, dá se očekávat, že pro x_1 platí nerovnost $|x_1| \geq \frac{\sqrt{3}}{6}$. Pokusme se tedy dokázat, že funkce

f roste v intervalech $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{6})$, $(\frac{\sqrt{3}}{6}, \infty)$.

To znamená, že pro libovolná x_1, x_2 z intervalu např. $\langle \frac{\sqrt{3}}{6}, \infty \rangle$, pro něž $x_1 < x_2$, musí platit nerovnost (6), ekvivalentní s (5). Protože $\frac{\sqrt{3}}{6} \leq x_1 < x_2$, je

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

a platí nerovnost (6). Podobně provedeme důkaz i v intervalu $\langle -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{6} \rangle$. (V tomto intervalu jsou obě čísla x_1, x_2 záporná, takže součin x_1x_2 je opět kladný.)

Vypočteme funkční hodnoty v bodech $-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Dostaneme $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \doteq 0,38$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \doteq -0,38$. Platí tedy

nerovnost $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) > f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, což nás vede k domněnce, že

je klesající funkce v intervalu $\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} \rangle$. Dokažme to!

Máme dokázat, že pro libovolná čísla x_1, x_2 z uvedeného intervalu, pro něž je $x_1 < x_2$, platí nerovnost

$$8x_1^3 - 2x_1 > 8x_2^3 - 2x_2, \quad (7)$$

z níž opět snadno odvodíme ekvivalentní nerovnost

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 < \frac{1}{4}. \quad (8)$$

Protože x_1, x_2 leží v intervalu $\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} \rangle$, platí nerovnosti

$$|x_1| \leq \frac{\sqrt{3}}{6}, |x_2| \leq \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad (9)$$

Jestliže aspoň pro jedno z čísel x_1, x_2 platí tato nerovnost jako ostrá, potom

$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \leq x_1^2 + |x_1x_2| + x_2^2 < 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$, takže platí (8) a tedy i (7). Platí-li v obou nerovnostech (9) znamení rovnosti, musí být $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ a pro tyto hodnoty proměnné jsme již nerovnost (7) dokázali přímým výpočtem.

O funkci f jsme dokázali, že je v intervalu $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{6})$ rostoucí a v intervalu $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ klesající. Podle věty na str. 14 článku 2 dostáváme, že funkce f má v bodě $x = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ maximum v intervalu $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{6})$.

Protože funkce je v intervalu $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ klesající a v intervalu $(\frac{\sqrt{3}}{6}, \infty)$ rostoucí, dostáváme podobně, že v bodě $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ je minimum funkce f v intervalu $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \infty)$.

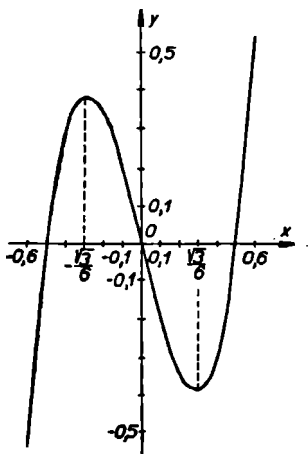
Nyní již můžeme nakreslit graf naší funkce. Protože známe polohu nulových bodů, víme, kde graf protíná osu x . Je to právě v bodech $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$, což jsou všechny kořeny rovnice

$$8x^3 - 2x = 0.$$

Abychom nakreslili graf co nejpřesněji, vypočteme ještě několik dalších hodnot funkce f :

x	0	0,1	0,2	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	0	-0,19	-0,34	-0,38	-0,29	0	0,53

Graf je symetrický podle počátku (viz obr. 9).



Obr. 9.

Úloha 3. Vyšetřte průběh funkce $y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ a nakreslete její graf!

Řešení. Abychom uměli vypočítat funkční hodnotu y , musí být jmenovatel různý od nuly, tj. $x \neq 1$. Dále musí

být $x \geq 0$, aby existovala \sqrt{x} . Jsou tedy oborem funkce intervaly $\langle 0, 1 \rangle, (1, \infty)$.

Je zřejmé, že v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ nabývá daná funkce záporných hodnot, v intervalu $(1, \infty)$ hodnot kladných; nemá tedy žádné nulové body, takže její graf neprotíná osu x .

Dokážeme, že vyšetřovaná funkce není ohraničená shora ani zdola. Důkaz provedeme nepřímou.

Předpokládejme, že $y \leq K$ pro každé x z oboru funkce. Protože naše funkce nabývá také kladných hodnot, je $K > 0$.

Podobně jako v příkladu 6 pokusme se najít x_0 tak, že příslušná funkční hodnota y_0 bude větší než K . Protože

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0} - 1}, \text{ musí být}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0} - 1} > K$$

čili

$$\frac{1}{K} + 1 > \sqrt{x_0}.$$

Zvolme např. $x_0 = \left(1 + \frac{1}{2K}\right)^2$. Potom

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2K}\right)^2} - 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2K} - 1} = 2K > K,$$

což je spor s naším předpokladem, že konstanta K ohraničuje danou funkci shora.

Podobně ukážeme, že funkce není zdola ohraničená. Označíme-li „ohraničující“ konstantu opět K , lze předpo-

kládat, že $K < -\frac{1}{2}$. Zvolíme-li $x = \left(1 + \frac{1}{2K}\right)^2$, je $0 < x < 1$ a

$$y = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2K}\right)^2} - 1} = 2K < K,$$

protože K je záporné. To je opět spor s předpokladem, že K ohraničuje danou funkci zdola.

Nakonec ukážeme, že vyšetřovaná funkce klesá v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ i v intervalu $(1, \infty)$.

Uvažujme nejdříve interval $\langle 0, 1 \rangle$. Je-li $0 \leq x_1 < x_2 < 1$, je $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} < 1$ a tedy $\sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1$. Obě strany nerovnosti jsou záporná čísla. Dělíme-li tedy obě strany nerovnosti kladným číslem $(\sqrt{x_1} - 1)(\sqrt{x_2} - 1)$, dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{x_2} - 1} < \frac{1}{\sqrt{x_1} - 1},$$

což podle definice znamená, že daná funkce je klesající v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Podobně postupujeme v intervalu $(1, \infty)$. Je-li $1 < x_1 < x_2 < \infty$, je $0 < \sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1$; pro převrácené hodnoty obou posledních čísel platí tedy obrácená nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{x_2} - 1} > \frac{1}{\sqrt{x_1} - 1},$$

což opět znamená, že vyšetřovaná funkce je klesající v intervalu $(1, \infty)$.

Funkce je tedy klesající v obou intervalech, z nichž se skládá její obor. V celém svém oboru však klesající není. Stačí vzít např. za x_1, x_2 taková dvě čísla, pro která platí $0 < x_1 < 1, 1 < x_2$. Pak je zřejmé $x_1 < x_2$. Kdyby byla

daná funkce v celém svém oboru klesající, platila by nerovnost

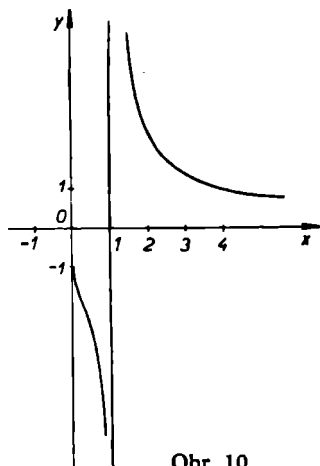
$$\frac{1}{\sqrt{x_1} - 1} > \frac{1}{\sqrt{x_2} - 1}.$$

Tato nerovnost však pro výše zvolená čísla x_1, x_2 neplatí, neboť na levé straně je zřejmě číslo záporné a na pravé straně číslo kladné.

Pro přesnější nakreslení grafu sestavíme ještě tabulku funkčních hodnot:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$	4
$f(x)$	-1	-2	-3	4,6	2,5	2	1

Graf funkce je na obr. 10.



Obr. 10.

Úloha 4. Vyšetřte průběh funkce $f(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x)^2}$ a na-

kreslete její graf!

Řešení. Oborem vyšetřované funkce je množina reálných čísel s výjimkou čísla $x = 1$, pro něž je jmenovatel zlomku roven nule.

Pro každé x z oboru funkce je $1 + x^2 > 0$, $(1 - x)^2 > 0$, a tedy také $f(x) > 0$. Je tedy vyšetřovaná funkce ohraničená zdola (např. číslem nula) v celém svém oboru. Naproti tomu není daná funkce ohraničená shora; dokázali bychom to podobně jako v předešlé úloze.

Nyní nás bude zajímat, v kterých intervalech funkce f roste a v kterých klesá. Na první pohled je těžké tyto intervaly uhádnout; budeme proto postupovat obráceně. Předpokládejme, že v nějakém intervalu I je funkce f rostoucí. Pak pro libovolná dvě čísla x_1, x_2 z tohoto intervalu, pro něž je $x_1 < x_2$, musí platit nerovnost

$$\frac{1 + x_1^2}{(1 - x_1)^2} < \frac{1 + x_2^2}{(1 - x_2)^2}.$$

Protože interval I je částí definičního oboru funkce f , nepatří do něj číslo $x = 1$. Je tedy také $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$ a naše nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$(1 + x_1^2)(1 - x_2)^2 < (1 + x_2^2)(1 - x_1)^2,$$

kterou dále upravíme na ekvivalentní nerovnosti:

$$(1 + x_1^2)(1 - 2x_2 + x_2^2) < (1 + x_2^2)(1 - 2x_1 + x_1^2),$$

$$(1 + x_1^2)(1 + x_2^2) - 2x_2(1 + x_1^2) <$$

$$< (1 + x_1^2)(1 + x_2^2) - 2x_1(1 + x_2^2),$$

$$x_2(1 + x_1^2) > x_1(1 + x_2^2),$$

$$x_2(1 - x_1x_2) > x_1(1 - x_1x_2). \quad (1)$$

Tato nerovnost platí právě tehdy, je-li $1 - x_1x_2 > 0$, neboť pak můžeme obě strany nerovnosti dělit tímto číslem

a dostaneme nerovnost (stále ekvivalentní s původní) $x_2 > x_1$, která platí podle našeho předpokladu. Je-li $1 - x_1x_2 < 0$, dostaneme z nerovnosti (1) nerovnost $x_2 < x_1$, která je ve sporu s naším předpokladem. Je-li $1 - x_1x_2 = 0$, má (1) tvar $0 > 0$, což je opět spor.

Nerovnost $1 - x_1x_2 > 0$ platí pro libovolná dvě čísla x_1, x_2 (pro něž je $x_1 < x_2$) z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, což snadno dokážeme. Je-li buď $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 0$ nebo $0 \leq x_1 < x_2 < 1$, je $0 \leq x_1x_2 < 1$, takže $1 - x_1x_2 > 0$. Je-li $x_1 < 0 < x_2$, je $x_1x_2 < 0$ a platí dokonce $1 - x_1x_2 > 1$. Jiný případ už nastat nemůže.

Pro čísla x_1, x_2 z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ je tedy nerovnost (1) ekvivalentní s původní nerovností. Obrácením našeho postupu plyne tedy z nerovnosti $x_1 < x_2$ nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Dokázali jsme, že vyšetřovaná funkce je rostoucí v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Podobně dokážeme, že funkce f je klesající v intervalech $(-\infty, -1 \rangle$ a $(1, \infty)$. Výchozí nerovnost bude v obou těchto případech obrácená než prve (za předpokladu, že $x_1 < x_2$):

$$\frac{1 + x_1^2}{(1 - x_1)^2} > \frac{1 + x_2^2}{(1 - x_2)^2}.$$

Zcela obdobně jako v prvním případě dostaneme pak ekvivalentní nerovnost

$$x_2(1 - x_1x_2) < x_1(1 - x_1x_2).$$

V obou zkoumaných intervalech je $x_1x_2 > 1$ čili $1 - x_1x_2 < 0$. Dělením obou stran nerovnosti tímto záporným číslem dostaneme tedy správnou nerovnost $x_1 < x_2$. Protože náš postup je možno obrátit, dokázali jsme, že funkce f je klesající v intervalu $(-\infty, -1 \rangle$ i v intervalu $(1, \infty)$.

Tím jsme zároveň našli minimum vyšetřované funkce

v intervalu $(-\infty, 1)$. Je jím (podle věty na str. 14 článku 2) číslo $f(-1) = \frac{1}{2}$. Protože pro $x > 1$ je

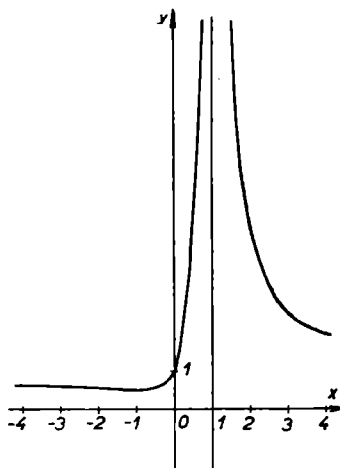
$$f(x) = \frac{1+x^2}{(1-x)^2} > \frac{1-2x+x^2}{(1-x)^2} = 1 > \frac{1}{2},$$

je číslo $\frac{1}{2}$ minimum funkce f v celém jejím oboru.

K nakreslení grafu funkce f vypočteme ještě některé její hodnoty, zejména v blízkosti bodu $x = 1$.

x	-4	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$f(x)$	$\frac{17}{25}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	1	5	25	41	13	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{9}$

Graf funkce je na obr. 11.



Obr. 11.

Úloha 5. Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ a nakreslete její graf!

Řešení. Stanovíme nejprve obor dané funkce. Funkce není definována předně tam, kde není definována funkce $\operatorname{tg} x$, a dále tam, kde jmenovatel je roven nule.

a) Funkce $\operatorname{tg} x$ není definována pro $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, kde k je libovolné celé číslo.

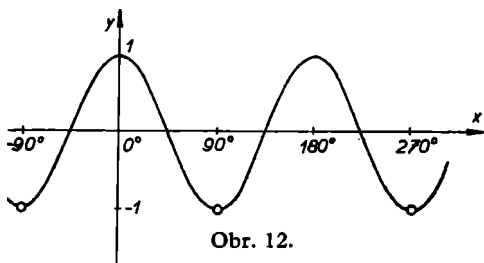
b) Je-li $x \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, platí $\operatorname{tg}^2 x \geq 0$, takže $1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$ a jmenovatel vyšetřované funkce je různý od nuly (kladný).

Funkce $y = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ není tedy definována pouze pro $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, kde k je celé číslo. Je-li $x \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, platí

$$y = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos 2x.$$

Grafem dané funkce je tedy graf funkce $y = \cos 2x$ s výjimkou bodů, jejichž první souřadnice je $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ (k celé číslo). Nulové body funkce jsou body, pro něž $\cos 2x = 0$, tj. $x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$.

Grafem funkce $\cos 2x$ je kosinusoida, jejíž nulové body jsou proti „obyčejné“ kosinusoidě dvojnásobně „zhuštěny“. Graf původně dané funkce je na obr. 12. Body v kroužcích do grafu nepatří.



Při zkoumání funkcí se často setkáváme s případy, kdy se ve vyjádření dané funkce vyskytnou čísla označená písmeny, která mohou nabývat různých hodnot. Volba těchto čísel (tzv. parametrů) má často značný vliv na průběh dané funkce. Vyšetřování tohoto vlivu se říká, jak víte, diskuse.

Úloha 6. Buď dána tzv. kvadratická funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Jaké podmínky musí splňovat čísla a , b , c , aby funkce f nabývala pro všechna x jen kladných (nebo jen záporných) hodnot?

Řešení. Je-li $b = 0$, umíme již něco říci o chování funkce $f_1(x) = ax^2 + c$. Například, je-li $a > 0$, $c > 0$, pak funkce f_1 nabývá jen kladných hodnot. Pokusme se tedy napsat funkci f také ve tvaru součtu konstanty a součinu čísla a s druhou mocninou nějakého výrazu, obsahujícího proměnnou x . Platí:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = ax^2 + \frac{b}{a}x + c = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Zkoumejme nyní, jak závisí znaménko hodnoty $f(x)$ na znaménku čísel a a $c - \frac{b^2}{4a}$. Budou nás přitom zajímat ty případy, kdy znaménko $f(x)$ je pro všechna x stále kladné, nebo stále záporné.

Snadno zjistíme, že je vyloučen případ, kdy $a > 0$ a $c - \frac{b^2}{4a} \leq 0$. To je patrné z následující úvahy: Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má diskriminant rovný číslu

$$D = b^2 - 4ac = -4a \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad (2)$$

a je tedy v našem případě zřejmě $D \geq 0$. Kvadratická rovnice má tedy aspoň jeden reálný kořen x_0 , pro nějž platí $f(x_0) = 0$. Funkce f tedy v tomto případě nenabývá stále kladných nebo stále záporných hodnot.

Stejnou úvahou se čtenář přesvědčí, že je vyloučen i případ, kdy $a < 0$ a $c - \frac{b^2}{4a} \geq 0$. Také v tomto případě existuje bod x_0 , pro který je $f(x_0) = 0$.

Zbývají tedy již jen dva případy:

$$1. \quad a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0, \quad 2. \quad a < 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0.$$

V prvním případě plyne z (1), že funkce f nabývá pro všechna x jen kladných hodnot, neboť $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ a součet nezáporného a kladného čísla je číslo kladné.

Stejně v druhém případě plyne z (1), že funkce f nabývá pro všechna x jen záporných hodnot.

Protože pro diskriminant D kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

platí vztah (2), je v obou těchto případech $D < 0$.

Všechny výsledky můžeme tedy shrnout do závěru:

Kvadratická funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) nabývá pro všechna x hodnot se stejným znaménkem (tj. buď jen kladných nebo jen záporných) právě tehdy, je-li diskriminant kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ záporný. Je-li přitom $a > 0$, jsou také všechny funkční hodnoty kladné. Je-li $a < 0$, jsou také všechny funkční hodnoty záporné.

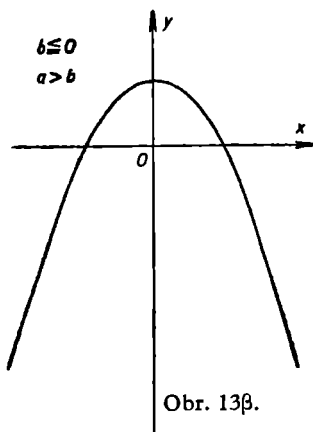
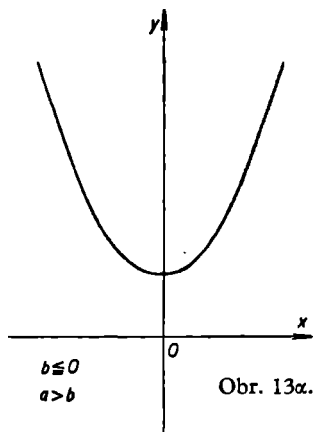
Úloha 7. Vyšetřte průběh funkce $f(x) = ax^2 + |bx^2 - 1|$. Proveďte diskusi vzhledem k různým hodnotám parametrů a, b .

Řešení. Podobně jako v úloze 1 se budeme snažit odstranit absolutní hodnoty ve vyjádření funkce. Body, v nichž dvojiteln v absolutní hodnotě mění znaménko, dostaneme řešením rovnice $bx^2 - 1 = 0$. Odtud plyne, že $x^2 = \frac{1}{b}$. Tato rovnice má reálné kořeny právě tehdy, je-li

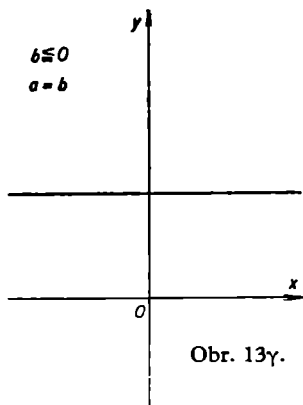
$b > 0$. Budeme proto rozeznávat dva případy: 1. $b \leq 0$, 2. $b > 0$.

1. Je-li $b \leq 0$, je $bx^2 - 1 < 0$ pro každé číslo x . Je tedy $|bx^2 - 1| = 1 - bx^2$, $f(x) = (a - b)x^2 + 1$ pro všechna x .

Nyní musíme vyšetřovat ještě tři různé případy podle hodnoty parametru a . Je-li $a \neq b$, je grafem funkce f parabola, symetrická podle osy y , s vrcholem v bodě $[0, 1]$. Je-li $a > b$, je parabola „otevřena“ směrem kladné poloosy y (obr. 13 α), je-li $a < b$, je parabola „otevřena“ směrem



záporné poloosy y (obr. 13 β). Je-li $a = b$, je $f(x) = 1$ pro všechna x a grafem je rovnoběžka s osou x , procházející např. bodem $[0, 1]$ (obr. 13 γ).



Obr. 13γ.

2. Budiž nyní $b > 0$. Výraz v absolutní hodnotě je nekladný, tj. $bx^2 - 1 \leq 0$, jestliže $x^2 \leq \frac{1}{b}$ čili $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$. Je-li $x^2 \geq \frac{1}{b}$, je $bx^2 - 1 \geq 0$. Z toho plyne závěr:

$$f(x) = (a + b)x^2 - 1 \text{ pro } x \text{ z intervalů}$$

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{b}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{b}}, \infty\right);$$

$$f(x) = (a - b)x^2 + 1 \text{ pro } x \text{ z intervalu}$$

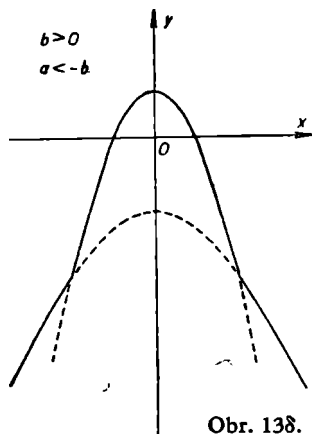
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Je jasné, že graf bude záviset na znaménku výrazů $a + b$, $a - b$. Protože b je kladné, je $a - b < a + b$. Musíme tedy rozeznávat následující případy:

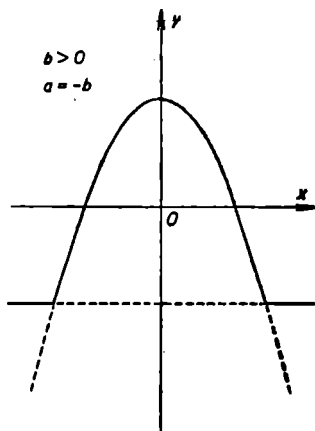
$$\begin{array}{cccccc} a + b < 0 & | & a + b = 0 & | & a + b > 0 & | & a + b > 0 & | & a + b > 0 \\ a - b < 0 & | & a - b < 0 & | & a - b < 0 & | & a - b = 0 & | & a - b > 0 \end{array}$$

Vzhledem k tomu, že platí $-b < b$, můžeme tyto podmínky zapsat jednodušeji:

$a < -b$; $a = -b$; $-b < a < b$; $a = b$; $a > b$
(obr. 13δ–θ).



Obr. 13δ.

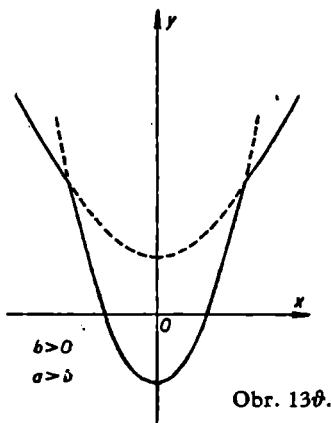
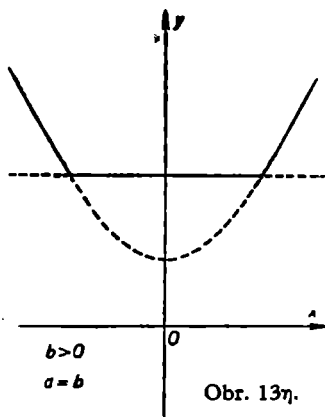
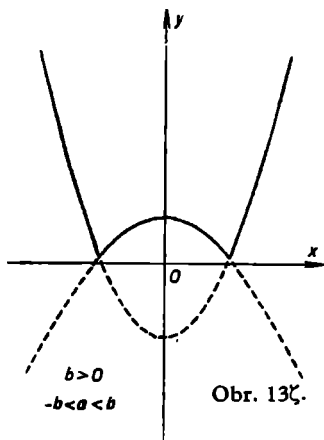


Obr. 13ε.

Podle různých hodnot parametrů a, b máme tedy celkem osm podstatně různých případů.*) Grafy všech těchto funkcí jsou na obr. 13.

Úloha 8. Dokažte, že funkce $y = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$, kde $0 < a < b$, je klesající v intervalech $(-\infty, a)$, (a, b) , (b, ∞) .

*) Mohli bychom ještě rozeznávat jisté podskupiny v případě $b > 0$, $-b < a < b$ podle toho, zda $a > 0$, $a = 0$ nebo $a < 0$. Pak průsečíky parabol leží nad osou x , na ní nebo pod ní.



Řešení. Uvažujme nejprve interval $(-\infty, a)$. Máme dokázat, že pro libovolná x_1, x_2 , pro něž je $x_1 < x_2 < a$, platí

$$\frac{b}{x_1 - a} + \frac{a}{x_1 - b} > \frac{b}{x_2 - a} + \frac{a}{x_2 - b}. \quad (1)$$

Z nerovnosti (1) dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$\begin{aligned} \frac{b}{x_1 - a} - \frac{b}{x_2 - a} &> \frac{a}{x_2 - b} - \frac{a}{x_1 - b}, \\ \frac{b(x_2 - x_1)}{(x_1 - a)(x_2 - a)} &> \frac{-a(x_2 - x_1)}{(x_1 - b)(x_2 - b)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Protože je $x_1 < x_2$, je $x_2 - x_1 > 0$ a nerovnost (2) můžeme dělit číslem $x_2 - x_1$. Dostaneme

$$\frac{b}{(x_1 - a)(x_2 - a)} > \frac{-a}{(x_1 - b)(x_2 - b)}. \quad (3)$$

Protože platí $x_1 < x_2 < a < b$, jsou oba jmenovatele kladná čísla, takže na levé straně nerovnosti (3) je kladné číslo a na pravé straně záporné číslo. Nerovnost (3) tedy platí. Protože nerovnosti (1), (2), (3) jsou ekvivalentní, platí i nerovnost (1), což jsme měli dokázat.

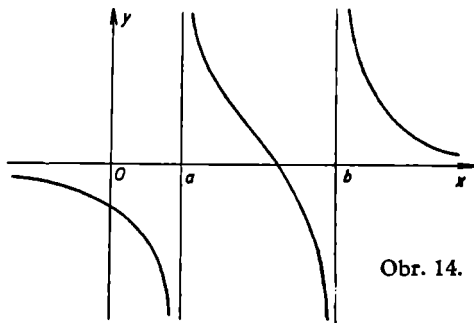
Uvažujme nyní interval (a, b) . Máme dokázat, že pro x_1, x_2 , pro něž $a < x_1 < x_2 < b$, platí nerovnost (1).

Zjistili jsme však, že nerovnost (1) je ekvivalentní s nerovností (3). Protože $x_1 > a$, $x_2 > a$, $x_1 < b$, $x_2 < b$, jsou oba jmenovatele kladná čísla, takže nerovnost (3) a tedy i nerovnost (1) platí stejně jako v prvním případě.

Uvažujme konečně interval (b, ∞) . Máme opět dokázat, že platí (1), tj. že platí (3) pro $b < x_1 < x_2$. Protože je $b < x_1$, $b < x_2$ a tím spíše $a < x_1$, $a < x_2$, jsou opět oba jmenovatele kladná čísla, takže nerovnost (3) a tedy i (1) platí.

Funkce je tedy klesající v každém z intervalů $(-\infty, a)$, (a, b) , (b, ∞) . (Viz obr. 14.)

Úloha 9. Dokažte, že funkce $f(x) = \frac{12(x+2)}{x^2}$ je



Obr. 14.

ohraničená zdola, ale není ohraničená shora. Stanovte její minimum!

Řešení. Daná funkce je definována pro všechna reálná čísla s výjimkou nuly. Jsou tedy jejím oborem intervaly $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Dokážeme, že funkce f je ohraničená zdola. Jmenovatel zlomku $\frac{12(x+2)}{x^2}$ je pro $x \neq 0$ vždy kladný. Je-li $x > -2$, je i čítec kladný, takže $f(x) > 0$. Jestliže platí $x \leq -2$, platí také

$$f(x) = \frac{12(x+2)}{x^2} = \frac{12}{x} + \frac{24}{x^2} > \frac{12}{x} \geq \frac{12}{-2} = -6.$$

Pro $x > -2$ (a ovšem $x \neq 0$) je funkce f ohraničená zdola nulou, pro $x \leq -2$ číslem -6 . Pro každé x z oboru funkce platí tedy $f(x) \geq -6$ (platí dokonce ostrá nerovnost). Podle definice je tedy funkce f ohraničená zdola.

Důkaz tvrzení, že funkce f není ohraničená shora, provedeme nepřímo. Předpokládejme, že pro libovolné číslo x z oboru funkce platí $f(x) \leq K$, kde K je dané číslo. Necht' K je kladné číslo, což můžeme předpokládat, aniž náš důkaz ztratí na obecnosti.

Pro libovolnou hodnotu proměnné x z oboru funkce f platí

$$f(x) = \frac{12}{x} + \frac{24}{x^2} > \frac{12}{x},$$

neboť pro $x \neq 0$ je $x^2 > 0$. Z této nerovnosti však plyne, že $f\left(\frac{1}{K}\right) > 12K$, neboť číslo $\frac{1}{K}$ patří jistě do oboru funkce f . To je však ve sporu s předpokladem, že funkce f je shora ohraničená číslem K .

Nyní zbývá hlavní úkol: Najít minimum funkce f . Předpokládejme, že minimum existuje a označme je m . Protože pro $x < -2$ je $f(x) < 0$, je zřejmě také $m < 0$. Protože m je minimem, platí

$$\frac{12(x+2)}{x^2} \geq m \quad (1)$$

pro všechna čísla $x \neq 0$. Protože $x \neq 0$, můžeme nerovnost (1) zapsat ve tvaru

$$12(x+2) \geq mx^2$$

čili

$$-mx^2 + 12x + 24 \geq 0. \quad (2)$$

Všimněme si kvadratické rovnice

$$-mx^2 + 12x + 24 = 0. \quad (3)$$

Má-li platit nerovnost (2), nesmí mít tato rovnice dva různé reálné kořeny. Kdyby totiž měla reálné kořeny x_1, x_2 a platilo by např. $x_1 < x_2$, platila by v intervalu (x_1, x_2) opačná nerovnost

$$-mx^2 + 12x + 24 < 0. \quad (4)$$

O tom se snadno přesvědčíme, uvážíme-li, že mnohočlen na levé straně rovnice lze psát ve tvaru součinu

$$-m(x-x_1)(x-x_2).$$

Je-li x číslo z intervalu (x_1, x_2) , je $x-x_1 > 0$, $x-x_2 < 0$. Protože $-m > 0$, platí nerovnost (4).

Kdyby rovnice (3) neměla reálné kořeny, pak by platila nerovnost (2) dokonce jako ostrá (srov. úlohu 6). Potom by však číslo m nebylo minimum funkce f , neboť pro žádnou hodnotu proměnné x by nebylo $f(x) = m$. Tato rovnost nastane totiž právě tehdy, platí-li pro x rovnost (3).

Zbývá nám tedy případ, kdy rovnice (3) má jediný reálný kořen x_0 (který bude zřejmě různý od nuly). Pak skutečně bude platit nerovnost (2) pro všechna $x \neq 0$, neboť levou stranu této nerovnosti můžeme napsat ve tvaru $-m(x - x_0)^2$. Pro kořen x_0 (a jen pro něj) bude platit rovnost, a tedy $f(x_0) = m$. Protože nerovnost (1) platí (pro $x \neq 0$) právě tehdy, platí-li nerovnost (2), bude m minimum funkce f .

Diskriminant rovnice (3) je $D = 144 + 96m$. Má-li rovnice (3) jediný kořen, je $D = 0$ a tedy $m = -\frac{3}{2}$. Kořen rovnice (3) je potom $x_0 = -4$. Dokázali jsme tedy, že minimum funkce f je $m = -\frac{3}{2}$. Funkce je nabývá v bodě $x = -4$.

Úloha 10. Stanovte maximum a minimum funkce $f(x) = 1 + 2(\cos 2x + \cos x + 2\cos^2 \frac{x}{2})$ v intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$! Jaké je minimum a maximum této funkce v celém jejím oboru a v kterých bodech jich nabývá?

Řešení. Upravme nejprve funkci f (definovanou zřejmě pro všechna x) podle známých vzorců pro kosinus dvojnásobného a polovičního úhlu. Pro každé x platí

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + 2 \frac{1 + \cos x}{2}) = \\ &= 1 + 2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x + 1 + \cos x) = \\ &= 4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1. \end{aligned}$$

Protože $|\cos x| \leq 1$ pro libovolné x , je $f(x) \leq 9$; přitom je $f(0) = 9$, takže číslo $M = 9$ je maximem funkce f v intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$.

Stanovme nyní minimum funkce f v intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$. Snadno vypočteme, že kvadratická rovnice

$$4y^2 + 4y + 1 = 0$$

má jediný kořen $y_0 = -\frac{1}{2}$. Platí tedy pro každé číslo y

$$4y^2 + 4y + 1 = 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Položíme-li $y = \cos x$, platí tedy také (pro libovolné x)

$$4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 4\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2$$

čili

$$f(x) = 4\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Vyjádříme-li funkci f takto, je jasné, že nenabývá záporných hodnot. Je tedy vždy $f(x) \geq 0$. Rovnost nastane např. pro $x = 120^\circ$ a také pro $x = 240^\circ$. Číslo $m = 0$ je minimem funkce f v intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$.

Víme konečně, že funkce $\cos x$ je periodická s periodou 360° ; to znamená, že $\cos(x + k \cdot 360^\circ) = \cos x$ pro libovolné celé číslo k . Snadno si ověříme, že také funkce f je periodická s periodou 360° . Jinými slovy, funkce f nabývá jen takových hodnot, kterých nabývá v intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$. Platí-li tedy nerovnosti $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 9$ v intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$, platí pro každé x . Minimální hodnoty nabývá f právě pro všechny úhly x tvaru $120^\circ + k \cdot 360^\circ$ nebo $240^\circ + k \cdot 360^\circ$. Maximální hodnoty nabývá pro úhly $k \cdot 360^\circ$; k je zde všude libovolné celé číslo.

Maximem (minimem) funkce f v celém jejím oboru je tedy číslo $M = 9$ ($m = 0$).

Úloha 11. Dokažte, že ze všech pravoúhelníků o stejném obvodu má největší obsah čtverec!

Řešení. Vezměme nějaký pravoúhelník o stranách a, b

a předpokládejme pro určitost, že $0 < a < b$. Jeho obvod je roven číslu $o = 2(a + b)$. Strany libovolného pravoúhelníka se stejným obvodem můžeme vyjádřit ve tvaru $a + x, b - x$, kde $0 < a + x, 0 < b - x$, neboť

$$2(a + x + b - x) = 2(a + b) = o.$$

Abý byly splněny podmínky $0 < a + x, 0 < b - x$, musí platit $-a < x < b$, což znamená, že x leží v intervalu $(-a, b)$.

Veźměme nyní x z intervalu $(-a, b)$ a příslušný pravoúhelník o stranách $a + x, b - x$. Jeho obsah

$$P(x) = (a + x)(b - x) = ab + x(b - a) - x^2$$

je tedy funkcí proměnné x . Máme dokázat, že funkce $P(x)$ nabývá v intervalu $(-a, b)$ maxima tehdy, je-li příslušný pravoúhelník čtverec. Potom je $a + x_0 = b - x_0$ čili

$$x_0 = \frac{b - a}{2}.$$

Protože $P(x_0) = ab + \frac{(b - a)^2}{2} - \frac{(b - a)^2}{4}$, máme dokázat, že pro všechna x z intervalu $(-a, b)$ platí nerovnost $P(x) \leq P(x_0)$ čili nerovnost

$$ab + x(b - a) - x^2 \leq ab + \frac{(b - a)^2}{2} - \frac{(b - a)^2}{4}. \quad (1)$$

Jednoduchými úpravami dostaneme postupně ekvivalentní nerovnosti

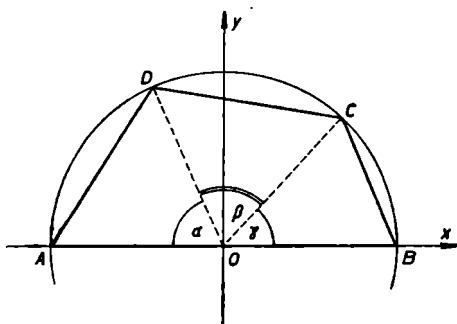
$$\begin{aligned} x(b - a) - x^2 &\leq \left(\frac{b - a}{2}\right)^2, \\ 0 &\leq \left(\frac{b - a}{2}\right)^2 - x(b - a) + x^2, \\ 0 &\leq \left(x - \frac{b - a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Tato nerovnost je správná, neboť druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná. Rovnost zřejmě nastane pouze pro

$$x = \frac{b-a}{2}, \text{ tj. pro } x = x_0.$$

Protože všechny nerovnosti byly ekvivalentní, dokázali jsme, že platí nerovnost (1). Rovnost nastává pro $x = x_0$, tj. pro čtverec.

Úloha 12. Sestrojte jednotkovou kružnici k se středem v počátku. Buď ABCD čtyřúhelník vepsaný kružnici k o vrcholech A, B na ose x a o straně $CD = d < 2$, ležící nad osou x (viz obr. 15). Dokažte, že ze všech takových



Obr. 15.

čtyřúhelníků (při pevně zvoleném d) má největší obsah ten, jenž je symetrický podle osy y .

Řešení. Čtyřúhelník ABCD rozdělíme poloměry OD a OC na tři rovnoramenné trojúhelníky a vypočteme jejich obsah. Nechť β je středový úhel, příslušný k tětivě délky d .

Označme P_1 obsah trojúhelníka OCD. Platí zřejmě $P_1 = \frac{1}{2} \sin \beta$. Podobně obsah trojúhelníka OAD je $P_2 = \frac{1}{2} \sin \alpha$. Obsah trojúhelníka OBC označme P_3 . Platí zřejmě $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $P_3 = \frac{1}{2} \sin \gamma$ čili $P_3 = \frac{1}{2} \sin [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta)$.

Obsah $P(\alpha)$ čtyřúhelníka ABCD je pak funkcí proměnné α a platí

$P(\alpha) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$.
Úhel α splňuje nerovnost $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ - \beta$ pro všechny polohy tětiny CD.

Naším úkolem je dokázat, že funkce $P(\alpha)$ nabývá maxima pro to α , pro které je čtyřúhelník ABCD souměrný podle osy y , tj. pro $\alpha = \gamma$ čili pro $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Platí

$$\begin{aligned} P\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) &= \frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{2} \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \beta + \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \beta + \cos \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Máme dokázat, že platí nerovnost

$$P(\alpha) \leq P\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \quad (1)$$

pro $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ - \beta$, tj. nerovnost

$$\frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \leq \frac{1}{2} \sin \beta + \cos \frac{\beta}{2}. \quad (2)$$

Úpravami dospíváme postupně k těmto ekvivalentním nerovnostem:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) &\leq 2 \cos \frac{\beta}{2}, \\ 2 \sin \frac{\alpha + (\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{\alpha - (\alpha + \beta)}{2} &\leq 2 \cos \frac{\beta}{2}, \\ 2 \sin \frac{2\alpha + \beta}{2} \cos \left(-\frac{\beta}{2}\right) &\leq 2 \cos \frac{\beta}{2}, \\ 2 \sin \frac{2\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} &\leq 2 \cos \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Protože $0^\circ < \beta < 180^\circ$, je $\cos \frac{\beta}{2} > 0$ a dělením obou

stran nerovnosti tímto číslem dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\sin \frac{2\alpha + \beta}{2} \leq 1. \quad (3)$$

To je správná nerovnost. Protože nerovnosti (1) a (3) jsou ekvivalentní, platí nerovnost (1). Protože $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ - \beta$, platí $0^\circ < \frac{2\alpha + \beta}{2} \leq 180^\circ - \frac{\beta}{2} < 180^\circ$. Rovnost tedy nastane jen pro $\frac{2\alpha + \beta}{2} = 90^\circ$ čili pro $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Tvzení úlohy je dokázáno.

Úloha 13. Zvolte parametr k tak, aby funkce $f(x) = -2x^2 + 2kx + 1$ nabývala v bodě $x = 1$ maxima!

Řešení. Ať je k jakékoliv číslo, je funkce f definována pro všechna x . Aby funkce nabývala pro $x = 1$ maxima, musí pro libovolné x platit nerovnost $f(x) \leq f(1)$. Pro $x = 1$ tato nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy v dalším, že $x \neq 1$.

Protože je $f(1) = -2 + 2k + 1 = 2k - 1$, musí platit $-2x^2 + 2kx + 1 \leq 2k - 1$.

Odtud dostáváme postupně další ekvivalentní nerovnosti:

$$\begin{aligned} 2kx - 2k &\leq 2x^2 - 2, \\ k(x - 1) &\leq x^2 - 1, \\ k(x - 1) &\leq (x - 1)(x + 1). \end{aligned} \quad (1)$$

Rozeznávejme nyní dva případy.

a) Je-li $x > 1$, potom $x - 1 > 0$. Dělíme-li nerovnost (1) číslem $x - 1$, dostaneme

$$k \leq x + 1. \quad (2)$$

Protože pro $x > 1$ je stále $x + 1 > 2$, plyne z této nerovnosti a z nerovnosti (2) nerovnost $k \leq 2$. Kdyby bylo totiž $k > 2$, mohli bychom zvolit číslo $x_0 > 1$ tak, že

$$2 < x_0 + 1 < k. \quad (3)$$

Protože však nerovnost (2) má být splněna pro všechna $x > 1$, je

$$k \leq x_0 + 1. \quad (4)$$

Nerovnosti (3) a (4) si však navzájem odporují. Je tedy skutečně $k \leq 2$.

b) Je-li $x < 1$, potom $x - 1 < 0$. Dělíme-li nerovnost (1) číslem $x - 1$, dostaneme

$$k \geq x + 1. \quad (5)$$

Protože pro $x < 1$ je stále $x + 1 < 2$, je $k \geq 2$. Kdyby totiž bylo $k < 2$, mohli bychom zvolit $x_0 < 1$ tak, že

$$k < x_0 + 1 < 2. \quad (6)$$

Protože však nerovnost (5) má platit pro všechna $x < 1$, platí

$$k \geq x_0 + 1. \quad (7)$$

Nerovnosti (6) a (7) si však navzájem odporují. Je tedy skutečně $k \geq 2$.

Shrneme-li případy a), b), má platit současně $k \leq 2$ i $k \geq 2$, takže musí nutně být $k = 2$.

Závěr. Funkce $f(x) = -2x^2 + 2kx + 1$ nabývá maxima v bodě $x = 1$ právě tehdy, je-li $k = 2$. Potom je

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1.$$

Úloha 14. Jaké podmínky pro čísla p a q musí platit, aby funkce

$$f(x) = \frac{2px^2 + 2qx + 3q}{4x^2 + 6x + 5} - p$$

nabývala v celém svém oboru jen kladných hodnot?

Řešení. Nejprve musíme stanovit obor funkce f . Funkce není definována jen pro ta x , pro která je jmenovatel roven nule, tj. pro která platí

$$4x^2 + 6x + 5 = 0. \quad (1)$$

Diskriminant této rovnice je však $D = 36 - 80 = -44$,

tedy $D < 0$ a rovnice (1) nemá reálné kořeny. Funkce f je definována pro všechna x .

Máme určit podmínku pro p a q tak, aby pro všechna x platila nerovnost $f(x) > 0$, tj. nerovnost

$$\frac{2px^2 + 2qx + 3q}{4x^2 + 6x + 5} - p > 0 \quad (2)$$

čili

$$\frac{2px^2 + 2qx + 3q}{4x^2 + 6x + 5} > p. \quad (3)$$

Protože kvadratická rovnice (1) nemá reálný kořen, znamená to podle úlohy 6, že čísla $y = 4x^2 + 6x + 5$ mají pro všechna x kladné znaménko.

Obě strany nerovnosti (3) můžeme tedy násobit výrazem $4x^2 + 6x + 5$ a dostaneme tak nerovnost

$$2px^2 + 2qx + 3q > 4px^2 + 6px + 5p. \quad (4)$$

Ekvivalentními úpravami dostáváme z nerovnosti (4) nerovnost

$$-2px^2 + (2q - 6p)x + 3q - 5p > 0. \quad (5)$$

Je-li $p \neq 0$, je nerovnost (5) kvadratická nerovnost. Podle úlohy 6 k tomu, aby tato nerovnost platila pro všechna čísla x , je nutné a stačí, aby diskriminant rovnice

$$-2px^2 + (2q - 6p)x + 3q - 5p = 0$$

byl záporný, a aby $-2p > 0$. Diskriminant $D =$

$$= (2q - 6p)^2 + 8p(3q - 5p), \text{ takže musí platit}$$

$$(2q - 6p)^2 + 8p(3q - 5p) < 0. \quad (7)$$

Z nerovnosti (7) dostáváme postupně ekvivalentní nerovnosti

$$4q^2 - 24pq + 36p^2 + 24pq - 40p^2 < 0,$$

$$4q^2 - 4p^2 < 0,$$

$$q^2 < p^2.$$

Je-li tedy $|q| < |p|$, platí nerovnost $q^2 < p^2$ a obráceným postupem dospějeme k nerovnosti (7).

Je-li $p = 0$, zjednoduší se nerovnost (5) na tvar

$$q(2x + 3) > 0.$$

Avšak ať je q jakékoliv, neplatí tato nerovnost pro $x = -\frac{3}{2}$, kdy jeden z činitelů na levé straně je roven nule. Při $p = 0$ nelze tedy vyhovět požadavkům úlohy žádnou volbou čísla q .

Závěr. Aby funkce f byla kladná pro všechna x , musí být p záporné a $|q| < |p|$. Tyto dvě podmínky můžeme stručně zapsat jedinou nerovností $|q| < -p$ (přesvědčte se!).

4. NEŘEŠENÉ ÚLOHY



1. Znázorněte graficky průběh funkcí: a) $y = \frac{x-1}{|x-1|}$;

b) $y = x^2 - |x^2 - 1|$.

2. Vyšetřte průběh funkce $f(x) = |x^2 - 25| - |x^2 - 2x|$.

3. Vyšetřte podrobně průběh funkce $y = x^3 - 12x$.
(Návod: postupujte jako v úloze 2.)

4. Dokažte, že funkce z úlohy 5 není shora ohraničená.

5. Dokažte, že funkce z příkladu 4 má minimum $-\frac{3}{2}$.

6. Dokažte, že funkce $y = \cos x + \sin x$ má maximum $M = \sqrt{2}$ a minimum $m = -\sqrt{2}$. (Návod: zkoumejte funkci $(\cos x + \sin x)^2$.)

7. Nakreslete graf funkce $y = \frac{2x-3}{4x+2}$ (tzv. lineární lomené funkce).

8. Dokažte, že funkce $y = \frac{x+1}{-x^2}$ je shora ohraničená, určete její maximum a nakreslete graf. (Návod: postupujte obdobně jako v úloze 9.)

9. Dokažte, že funkce z úlohy 8 je shora ohraničená v intervalu $(-\infty, a)$, zdola ohraničená v intervalu (b, ∞) a není zdola ani shora ohraničená v intervalu (a, b) .

10. Dokažte, že funkce $y = \frac{b}{x-a} - \frac{a}{x-b}$, kde $0 < a < b$, má tyto vlastnosti:

- a) Není definována pro $x = a, x = b$;
- b) je klesající v intervalu $(-\infty, a)$;
- c) je klesající v intervalu $(a, a + b - \sqrt{ab})$;
- d) je rostoucí v intervalu $(a + b - \sqrt{ab}, b)$;
- e) je rostoucí v intervalu $(b, a + b + \sqrt{ab})$;
- f) je klesající v intervalu $(a + b + \sqrt{ab}, \infty)$.

Dále stanovte minimum funkce v intervalu (a, b) a maximum v intervalu (b, ∞) . Zvolte za a, b nějaká kladná čísla a načrtněte graf dané funkce. (Návod: nejprve dokažte, že $a < a + b - \sqrt{ab} < b < a + b + \sqrt{ab}$.)

DOPORUČENÁ LITERATURA



K. Hruša, E. Kraemer, J. Sedláček, J. Vyšín, R. Zelinka: Přehled elementární matematiky. SNTL, Praha 1957.

J. Vyšín: Lineární funkce lomená. Populární přednášky o matematice. SNTL, Praha.

P. P. Korovkin: Nerovnosti. Populární přednášky o matematice, sv. 5, SNTL, Praha.

Brožury 1.—9. ročník matematické olympiády. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.

Čtenář, který se chce hlouběji seznámit i s náročnějšími metodami zkoumání funkcí, poučí se např. v knihách

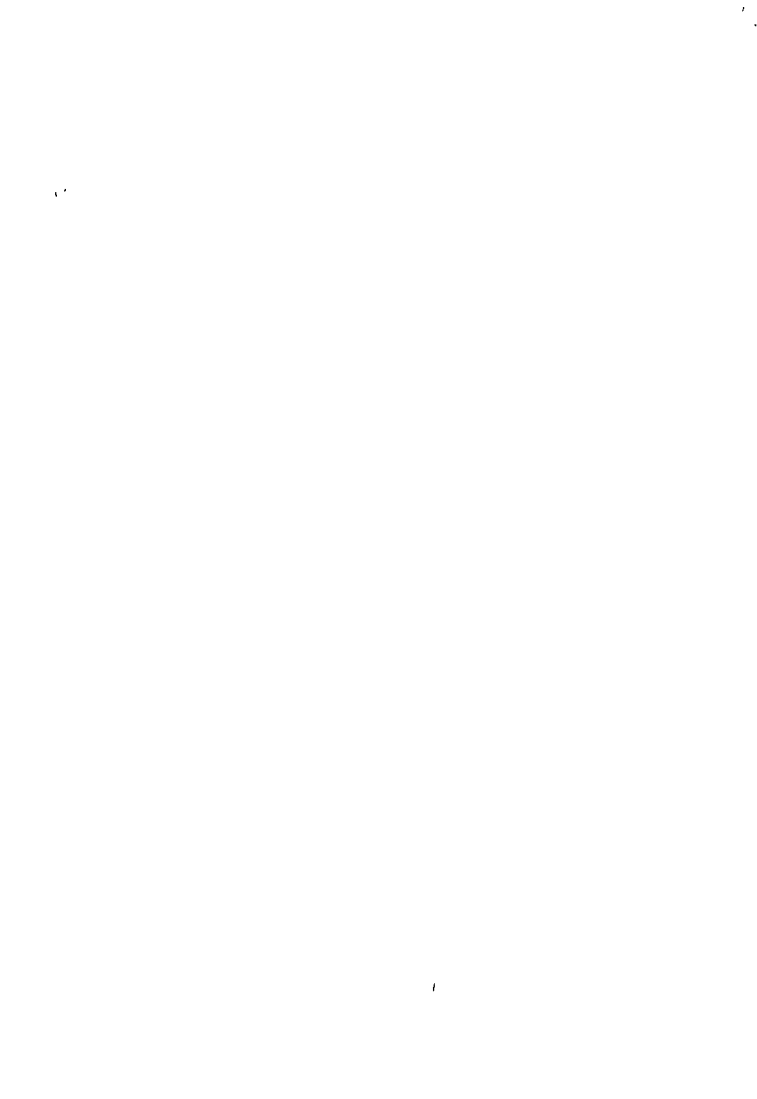
K. Hruša: Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu, NČSAV, Praha 1959.

Vojtěch Jarník: Diferenciální počet I. NČSAV, Praha 1955. (Dřívější vydání vyšla pod názvem Úvod do počtu diferenciálního.)

OBSAH



Předmluva	3
Základní pojmy	5
Další vlastnosti funkcí	10
Řešené úlohy	21
Neřešené úlohy	54
Literatura	56



O funkcích



Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta.

Řídí akademik Josef Novák.

Odpovědný redaktor Milan Daneš.

Obálku navrhl Jaroslav Příbramský.

Publikace číslo 1828.

Edice Škola mladých matematiků, svazek 4.

Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provozovna 22,
Praha 2, Legerova 22.

2,14 AA, 2,20 VA. D-08*20154.

Náklad 5.000 výtisků.

1. vydání, Praha 1962, 60 stran. 63/III-7

23-078-62

03-2 *Cena brož. Kčs 1,80*

23

16

20



9



8

21

27

23-078-62

03-2

Cena broj.