Několik úloh z geometrie jednoduchých těles

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

NĚKOLIK ÚLOH Z GEOMETRIE JEDNODUCHÝCH TĚLES

Vydal matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

několik úloh Z GEOMETRIE JEDNODUCHÝCH TĚLES

●

PRAHA 1961

VYDAL MATEMATICKÝ ÚSTAV ČSAV A ÚV ČSM

V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

Milí mladí přátelé, dříve než začnete číst první sešit nové sbírky (studijní text matematické olympiády), chtěli bychom vám říci několik slov o jeho obsahu a o tom, jak jej máte studovat.

Tento text má rozšířit vaše znalosti ze stereometrie. Text však není učebnice: neobsahuje obšírné teoretické výklady, ale ukazuje, *jak řešit* jednoduché stereometrické úlohy; jsou uvedeny jen nejnutnější pojmy a věty *bez důkazu*. Uvědomte si, že matematické věty můžete užívat, rozumíte-li dobře jejímu obsahu; důkazy vět studujeme hlavně proto, abychom poznali různé způsoby odůvodňování, potřebné při řešení úloh. Při žádné práci v matematice se však neobejdeme bez přesně vymezených pojmů. Proto si musíte zvykat *promýšlet definice* a správně je vyslovovat, třebas vlastními slovy.

Úlohy našeho textu navazují na to, co ze stereometrie nejlépe znáte: jsou to jednoduchá tělesa. Mimo znalost základních těles budete potřebovat i některé poznatky z planimetrie. Naše úlohy se většinou nebudou týkat výpočtů objemů a povrchů těles, ale budou se zabývat tím, čemu obvykle říkáme „prostorové vztahy"; až příručku přečtete, poznáte sami, oč jde.

Mnozí z vás asi ještě nestudovali žádnou matematickou knížku mimo školské učebnice; zvláště těmto čtenářům, ale i všem ostatním bychom chtěli dát několik dobrých rad. Nepodceňujte text proto, že obsahuje *jen* příklady.

Jedním z cílů studia matematiky je *naučit se řešit matematické problémy;* teorie je k tomu pomůckou. Dříve než začnete řešit jakoukoli matematickou úlohu, musíte dobře pochopit, oč vlastně jde, tj. musíte si přesně uvědomit danou situaci i to, co se má zjistit. Při každé úloze ze stereometrie se doporučuje *vymodelovat si situaci;* k tomu užijeme buď modelu tělesa zhotoveného třeba z papíru či lepenky nebo *improvizovaného* modelu sestaveného z destiček, tyčinek apod. Při úlohách o kvádru bývá vhodné představit si situaci na velkém modelu, který nás obklopuje — na místnosti, v níž se zdržujeme. Zvykejte si také načrtnout obraz tělesa (zvláště hranolu nebo jehlanu) ve volné projekci a na tomto náčrtku vyznačit danou situaci; k tomu vás ostatně vedou i obrázky v našem studijním textu.

Vzorové příklady, které tvoří největší jeho část, vám ukazují způsoby řešení různých úloh. Proto se nesmíte spokojit jen s tím, že *porozumíte* vyloženému postupu řešení; musíte si *uvědomovat*, *proč ten který krok děláme*, jak vás k tomu text nabádá. To ovšem znamená, že nesmíte text *jen číst*, nýbrž opravdu *studovat*, tj. promýšlet. Nejlépe je, máte-li po ruce sešit, v kterém si provádíte podrobné výpočty, načrtáváte obrázky a konstrukce. Doporučujeme vám, abyste si nakonec narýsovali výsledný obrazec pravítkem a kružítkem.

Abyste si ověřili, čemu jste se ve vzorových příkladech naučili, jsou na konci studijního textu připojeny neřešené úlohy. Jsou dvojího druhu: jednak jednodušší úlohy ke cvičení, jednak složitější stereometrické „problémy“, které jsou asi téhož druhu jako soutěžní úlohy matematické olympiády — někdy možná i obtížnější. Mimo to jsou u jednotlivých vzorových příkladů „nadhozeny“ různé doplňkové úlohy a drobné problémy, které nejsou ani podrobně vysloveny. Pokuste se je *vyslovit* a rozřešit. Úkolem matematika je totiž nejen úlohy řešit, ale i vyhledávat je kolem sebe a *matematicky přesně je formulovat;* správná formulace je první podmínkou úspěšného řešení.

Nakonec ještě jednu poznámku k použití názorných pomůcek a názoru vůbec. Není nic nedovoleného, „uhodnete-li“ z názoru nějaký prostorový vztah, např. kolmost určité přímky a roviny nebo shodnost dvou úseček apod. Musíte si však být vědomi toho, že jste tím získali jen *dohad — hypotézu čili domněnku* a že je třeba *rozhodnout úsudkem*, je-li pravdivá.

Závěrem vám přejeme hodně zdaru při studiu všech sešitů nové sbírky. Účastníkům Matematické olympiády, jimž jsou především tyto texty určeny, přejeme, aby jim pomohly při řešení soutěžních úloh; všem čtenářům pak přejeme, aby studiem textů získali co nejvíce pro své matematické vzdělání a tím i pro svou budoucí práci k prospěchu naší socialistické společnosti.

V Praze v červenci 1961 AUTOŘI

Část I

GEOMETRIE NA POVRCHU TĚLESA

•

Když začneme vyšetřovat geometrické vlastnosti některého tělesa, seznamujeme se nejprve s jeho povrchem. Povrch se skládá buď z obrazců, které už známe z planimetrie, jako je tomu např. u hranolu a jehlanu, nebo obsahuje některé zakřivené plochy, neznámé z planimetrie; takové plochy najdeme např. u válce, kužele a koule.

Povrch tělesa z první skupiny dovedeme zobrazit velmi jednoduše v rovině: narýsujeme v nákresně ve vhodné vzájemné poloze obrazce, z kterých se skládá povrch tělesa, a výsledný obrazec je tzv. *síť tělesa*. Jistě si vzpomínáte, jak jste sestrojovali např. síť krychle, když jste chtěli vyrobit model krychle z lepenky nebo plechu.

Sítě však slouží v geometrii i k jiným účelům než k sestrojování modelu tělesa. Proto jim budeme věnovat trochu pozornosti. Začneme se sítí nejjednoduššího tělesa — čtyřstěnu. Název čtyřstěn snad znáte: jinak lze říci, že je to trojboký jehlan. Proč jsme jej nazvali nejjednodušším tělesem? Čtyřstěn má nejmenší možný počet stěn — čtyři — a jeho stěny jsou nejjednodušší mnohoúhelníky — trojúhelníky. Stěny čtyřstěnu mohou být ovšem trojúhelníky různostranné a navzájem nikoli shodné; ve zvláštním případě jsou stěny čtyřstěnu čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky; takový čtyřstěn nazýváme *pravidelný*. První úloha, kterou rozřešíme, se bude týkat sítí pravidelného čtyřstěnu.

Úloha 1. *Kolik různých sítí má daný pravidelný čtyřstěn?*

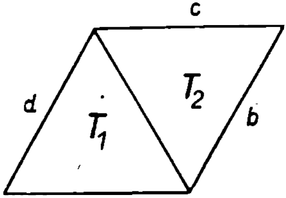
Řešení. Dříve než začneme řešit jakoukoli matematickou úlohu, musíme se přesvědčit, zda jsme dobře porozuměli jejímu textu. Text naší úlohy je velmi jednoduchý; domníváme se, že rozumíme názvu „síť"; ale při jeho vysvětlení jsme použili před chvílí mlhavých slov „obrazce ve vhodné vzájemné poloze". Co z toho vyplývá? Pro řešení úlohy musíme *zpřesnit*, co rozumíme slovem „síť". Mluvme přímo o síti pravidelného čtyřstěnu; tato síť se bude skládat ze čtyř shodných rovnostranných trojúhelníků, které budou vyhovovat těmto podmínkám:

a) Žádné dva z trojúhelníků se nepřekrývají.

b) Každý z trojúhelníků sítě má společnou stranu aspoň s jedním dalším trojúhelníkem sítě (není „izolovaný").

c) Dva trojúhelníky sítě mohou (ale nemusí) mít společnou jen takovou stranu, kterou mají společnou jako stěny tělesa.

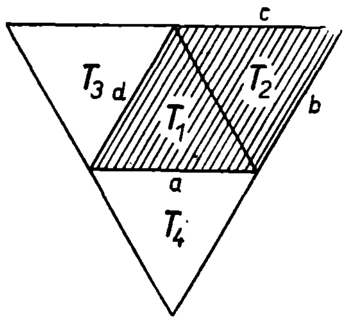
Nyní ještě musíme vysvětlit význam slova „různý". „Různými sítěmi" budeme rozumět něco obdobného jako „různými řešeními" při sestrojování trojúhelníků: dvě sítě budeme pokládat za různé, jestliže příslušné rovinné obrazce *nejsou* shodné, tj. nelze-li je na sebe položit tak, aby se kryly. Tato úmluva je zcela přirozená, neboť stěny pravidelného čtyřstěnu se nijak navzájem nerozlišují.



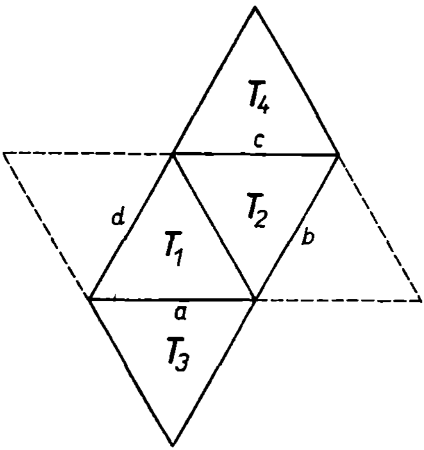
Obr. 1

Všimněte si, kolik práce nám dalo vysvětlení textu úlohy; zato však nyní pracujeme s jasnými pojmy a řešení úlohy bude snadné.

V jakékoli síti daného čtyřstěnu se vyskytuje zcela jistě obrazec narýsovaný v obr. 1; je to



Obr. 2a



Obr. 2b

kosočtverec složený ze dvou rovnostranných trojúhelníků T_1, T_2, které zobrazují dvě stěny čtyřstěnu. K nim je třeba připojit další dva trojúhelníky sítě.

Považujeme-li např. trojúhelník T_1 za podstavu čtyřstěnu, je T_2 jedna stěna pláště; pak zbývající dvě stěny pláště — trojúhelníky T_3, T_4 — mohou být připojeny jedním z těchto tří způsobů:

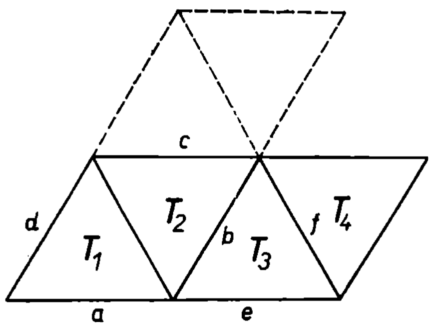
a) T_3 i T_4 jsou připojeny k T_1;

b) T_3 je připojen k T_1, T_4 k T_2;

c) T_3 je připojen k T_2, T_4 k T_3.

První způsob dá síť zobrazenou na obr. 2a. Druhý způsob: připojíme-li trojúhelník T_3 ke straně označené na obr. 1 písmenem a, nelze připojit trojúhelník T_4 k straně b, neboť strana b je na tělese společná trojúhelníkům T_2, T_3 a nikoli trojúhelníkům T_2, T_4. Připojíme tedy T_4 ke straně c a vznikne síť z obr. 2b. Připojíme-li T_3 ke straně d, je třeba připojit T_4 ke straně b a dostaaneme síť shodnou se sítí z obr. 2b.

V posledním případě připojíme trojúhelník T_3 např. ke straně b (obr. 3). Trojúhelník T_4 pak nelze připojit ke straně, která je na obr. 3 označena e, neboť na tělese náleží tato strana stěnám T_1, T_3 a nikoli T_3, T_4; proto je třeba připojit trojúhelník T_4 ke straně f, jak naznačuje obr. 3. Síť z obr. 3 je shodná se sítí z obr. 2b; také síť, kterou bychom dostali připojením T_3 ke straně c (na obr. 3 vyčárkovaná), je shodná se sítí z obr. 2b.



Obr. 3

Pravidelný čtyřstěn může mít tedy jen dvě různé sítě, narýsované na obr. 2a, 2b. Snadno se přesvědčíme, že oba tyto obrazce jsou skutečně sítě pravidelného čtyřstěnu; z každé z nich složíme model tělesa.

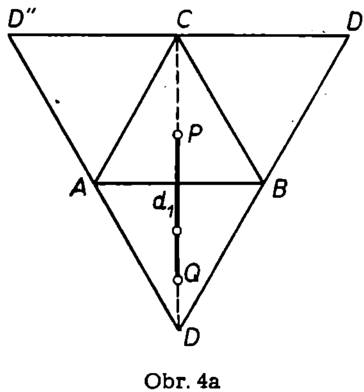
Kdyby daný čtyřstěn nebyl pravidelný, bylo by řešení úlohy složitější a čtyřstěn by měl více různých sítí než dvě. Větší počet sítí dostaneme také u tělesa o větším počtu stěn. Tak např. krychle — pravidelný šestistěn — má 11 různých sítí. Pokuste se o řešení některé z uvedených úloh (počet sítí livobolného čtyřstěnu, počet sítí krychle); úloha 1 vám aspoň částečně ukázala cestu, kterou můžete postupovat.

Také druhá úloha se týká sítě pravidelného čtyřstěnu.

Úloha 2. *Je dán pravidelný čtyřstěn ABCD; označme P těžiště trojúhelníka ABC, Q střed úsečky omezené vrcholem D a těžištěm trojúhelníka ABD. Máme určit nejkratší lomenou čáru spojující po povrchu čtyřstěnu body P, Q, a to tak, aby procházela a) přes stěny ABC, ABD; b) přes stěny ABC, BCD, ABD; c) přes stěny ABC, BCD, ACD, ABD. Máme porovnat délky všech tří lomených čar.*

Řešení. Při řešení každé z úloh a), b), c) musíme sestrojit takovou síť, aby každé dva za sebou následující trojúhelníky, přes něž spojnice postupně prochází, měly společnou stranu. Tyto sítě jsou nakresleny na obr. 4abc.

Význam označení vrcholů je z obrázků zřejmý. Složíme-li např. síť z obr. 4a v model tělesa, splynou body D, D', D'' v jediný vrchol; obdobně tomu je u ostatních dvou sítí. Na všech obrazech jsou vyznačeny body P, Q; úsečka, která je spojuje, leží v síti, neboť síť je buď trojúhelník (obr. 4a), nebo rovnoběžník (obr. 4b, c). Proto je každá z těchto úseček obrazem nejkratší spojnice bodů P,



Obr. 4a

Q, která vede po povrchu čtyřstěnu přes předepsané stěny.

Vypočteme délky těchto tří úseček; označíme je d_1, d_2, d_3; dále označíme a délku hrany čtyřstěnu. Pak na obr. 4a leží body C, D, P, Q v přímce a platí $CD = a\sqrt{3}$, $CP = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $DQ = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, a tedy

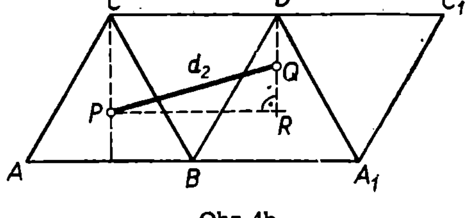
$$d_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} \doteq 0{,}866\, a. \tag{1}$$

Pro výpočet d_2 (obr. 4b) použijeme pravoúhlého trojúhelníka PQR. Platí $PR = a$, $QR = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, a tedy podle Pythagorovy věty

$$d_2 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = a\sqrt{\frac{13}{12}} \doteq 1{,}04\, \text{a}. \tag{2}$$

Délku d_3 vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka PQT (obr. 4c). Zde je $QT = a + \frac{a}{4} = \frac{5}{4}a$, $BT = \frac{a}{12}\cdot\sqrt{3}$, $PB = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, a tedy $PT = \frac{a}{3}\sqrt{3} - \frac{a}{12}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$. Podle Pythagorovy věty pak dostaneme

$$d_3 = \sqrt{\left(\frac{5a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{7} \doteq 1{,}32\, a. \tag{3}$$

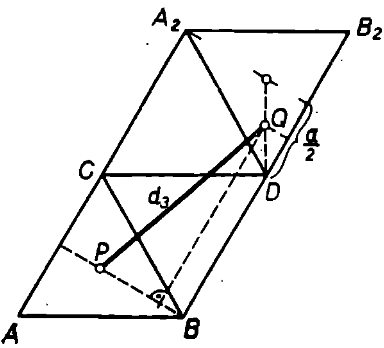


Obr. 4b

Z (1), (2), (3) vyplývá porovnání

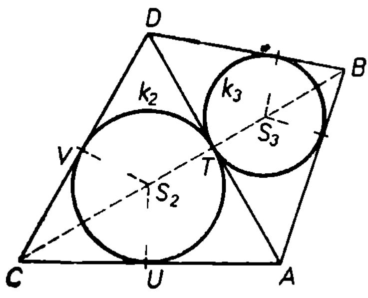
$$d_1 < d_2 < d_3.$$

Tím ovšem není nijak dokázáno, že nejkratší spojnice dvou bodů na povrchu čtyřstěnu jde vždy jen přes dvě stěny a že délka spojnice se zvětšuje, prochází-li tato spojnice přes více stěn. Zkuste např. nahradit v předcházející úloze bod P středem M úsečky CP; pak bude výsledek jiný; nejkratší bude spojnice d_2.



Obr. 4c

Úloha 3. *Je dán (libovolný) čtyřstěn ABCD. Máme stanovit podmínku pro to, aby se kružnice vepsané stěnám (trojúhelníkům) ABD, ACD dotýkaly. Jak zní obdobná podmínka pro zbývající dvě stěny čtyřstěnu?*



Obr. 5

Řešení. Promýšlíte-li si text úlohy, zjistíte, že nám není znám pojem dotyku dvou kružnic, které neleží v rovině. Stěny ACD, ABD daného čtyřstěnu leží ve dvou rovinách, které mají společnou jen přímku AD a nazývají se *různoběžné*; společná přímka AD je jejich *průsečnice*. Definici dotyku kružnic ležících v různoběžných rovinách snadno uhodneme: dvě kružnice ležící v různoběžných rovinách se dotýkají, dotýká-li se každá z nich průsečnice obou rovin, a to v témž bodě.

Ještě je třeba vysvětlit význam slov „stanovit podmínku", která se vyskytují v textu úlohy. Čtyřstěn, který má žádanou vlastnost, tj. že kružnice vepsané trojúhelníkům ABD, ACD se dotýkají, není asi zcela libovolný; mezi délkami jeho hran je asi nějaký vztah. Při odvozování tohoto vztahu budeme tedy vycházet z předpokladu, že se kružnice k_2, k_3 dotýkají v bodě T ležícím na hraně AD. Na obr. 5 je zakreslena část sítě čtyřstěnu $ABCD$, skládající se z trojúhelníků ACD, ABD i s vepsanými kružnicemi k_2, k_3 a s jejich bodem dotyku T. Označíme-li U, V body dotyku kružnice k_2 se stranami AC, CD, platí $AT = AU$, $CU = CV$, $DV = DT$. Je tedy $CU = AC - AT$, $DV = CD - AC + AT$, $AT = AD - CD + AC - AT$; odtud

$$2\,AT = AC + AD - CD. \tag{4}$$

Obdobně vyjde z trojúhelníka ABD

$$2\,AT = AB + AD - BD. \tag{5}$$

Spojením vztahů (4), (5) dostaneme

$$AC + BD = AB + CD \tag{6}$$

Z dotyku kružnic k_2, k_3 tedy *nutně* vyplývá rovnost (6); proto říkáme, že rovnost (6) je *nutná podmínka pro dotyk kružnic* k_2, k_3.

Přirozeně se nabízí otázka, zda také obráceně ze vztahu (6) plyne dotyk kružnic k_2, k_3, tj. zda vztah (6) *stačí* k tomu, aby se kružnice k_2, k_3 dotýkaly. Bude-li tomu tak, bude *rovnost* (6) *také postačující podmínkou pro dotyk kružnic* k_2, k_3.

Při zkoumání této otázky budeme předpokládat, že se kružnice k_2, k_3 dotýkají přímky AD v bodech T_2, T_3, které mohou být různé nebo splynout (o tom zatím nic nevíme). Podle planimetrické věty, kterou jsme odvodili, platí pak

$$\begin{aligned} 2\,AT_2 &= AC + AD - CD, \\ 2\,AT_3 &= AB + AD - BD. \end{aligned} \tag{7}$$

Ze vztahu (6), jehož platnost nyní přepokládáme, plyne

$$AC - CD = AB - BD. \tag{8}$$

Dosadíme-li z (8) do (7), zjistíme, že je $AT_2 = AT_3$, tj. $T_2 \equiv T_3$ (body T_2, T_3 leží totiž na téže polopřímce AD). Tím je dokázáno, že rovnost (6) je nutnou i postačující podmínkou pro to, aby se kružnice k_2, k_3 dotýkaly. Stručně říkáme, že kružnice k_2, k_3 se dotýkají *právě tehdy*, když platí rovnost (6).

Obdobnou podmínku pro obě zbývající stěny čtyřstěnu dostaneme, vyměníme-li mezi sebou dvojice vrcholů B, C a A, D; vyjde

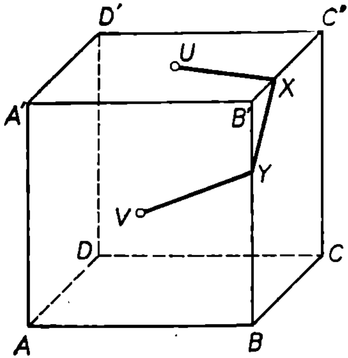
$$BA + DC = BD + AC,$$

což je rovnost (6).

Z výsledku úlohy 3 lze odvodit další závěry: dotýkají-li se kružnice vepsané stěnám ABD, ACD, platí rovnost (6); platí-li však rovnost (6), dotýkají se i kružnice vepsané stěnám BCA, BCD. Z toho vyplývá, že pokud jde o dotyk kružnic vepsaných stěnám, je možno čtyřstěny roztřídit do tří skupin. Pokuste se najít tyto skupiny a charakterizujte každou z nich vztahy mezi délkami hran čtyřstěnu.

Další úlohy se týkají povrchu krychle a kvádru.

Úloha 4. *Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; U je střed její horní stěny $A'B'C'D'$, V je střed její přední stěny $ABB'A'$. Máme spojit body U, V lomenou čarou vedenou po povrchu krychle složenou ze tří shodných úseček a procházející přes pravou stěnu $BCC'B'$.*



Obr. 6

Řešení. Situaci si zobrazíme na názorném obrazu krychle (obr. 6). Hledaná lomená čára se skládá ze tří shodných úseček UX, XY, YV, které leží pořadě ve stěnách $A'B'C'D'$, $BCC'B'$, $ABB'A'$. Je ovšem třeba si uvědomit, že rčení „určete lomenou čáru jistých vlastností" znamená nalézt *všechny* lomené čáry žádaných vlastností, právě tak jako úloha „sestrojte kružnici vyhovující daným podmínkám" znamená sestrojit všechny kružnice vyhovující těmto podmínkám.

Úlohu 4 rozřešíme nejprve pomocí výpočtu. Označíme a délku hrany dané krychle, x, y délky úseček $B'X$, $B'Y$. Snadno odvodíme podle Pythagorovy věty tyto vztahy:

$$\begin{aligned} UX^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left|\frac{a}{2} - x\right|^2, \\ XY^2 &= x^2 + y^2, \\ VY^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left|\frac{a}{2} - y\right|^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Protože je podle předpokladu $UX = VY$, dostaneme z 1. a 3. rovnice (9) po úpravě

$$(x - y)(x + y - a) = 0. \tag{10}$$

Z rovnice (10) plyne buď $x - y = 0$, nebo $x + y - a = 0$.

Je-li $x - y = 0$, dosadíme do 2. rovnice (9) $y = x$ a použijeme vztahu $UX = XY$. Z 1. a 2. rovnice (9) dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$x^2 + ax - \frac{a^2}{2} = 0,$$

která má jediný kladný kořen

$$x = a\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \doteq 0{,}366\,a.*) \tag{11}$$

Pro tento kořen platí nerovnosti $0 < x < a$; dosadíme-li do (9) $y = x = \frac{1}{2}\,a\,(\sqrt{3} - 1)$, dostaneme $UX = XY = VY$; proto vztah (11) dává jedno řešení úlohy.

Je-li $x + y - a = 0$ (druhá možnost, která vyplývá z rovnice (10), dosadíme do 2. rovnice (9) $y = a - x$ a použijeme opět vztahu $UX = XY$. Dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{2} = 0;$$

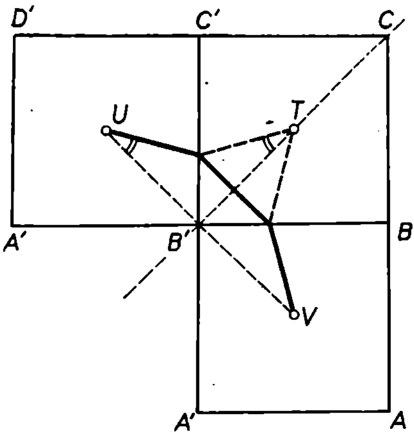
ta však nemá žádný reálný kořen, proto v tomto případě nedostaneme žádné další řešení úlohy.**)

Rozřešíme úlohu 4 ještě jednou pomocí sítě. Na obr. 7 je část sítě, která obsahuje ty tři stěny, přes něž hledaná lomená čára prochází, a je tu zakreslen i obraz l lomené čáry $AXYV$. Budeme nejprve zkoumat, zda čára l je souměrná podle přímky $B'C$, jak se tomu zdá nasvědčovat názor. K tomu účelu označíme T střed stěny $BCC'B'$;

---

*) Rovnici můžeme upravit na tvar $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$, z něhož plyne přímo vztah (11).

**) Rovnici můžeme upravit na tvar $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}$, z něhož plyne vyslovené tvrzení.



Obr. 7

protože body U, T jsou souměrně sdruženy podle přímky $B'C'$, je

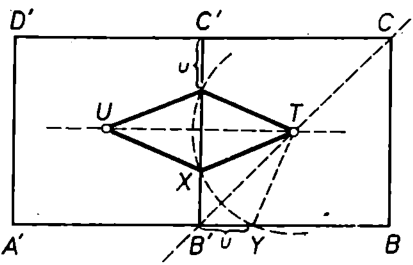
$$UX = TX; \qquad (12a)$$

z obdobného důvodu je

$$VY = TY. \qquad (12b)$$

Spojením vztahů (12a) (12b) s podmínkou $UX = XY = VY$ vyplývá, že trojúhelník XYT je rovnostranný.

K danému bodu Y úsečky BB' mohou příslušet jen dva body X_1, X_2 strany $B'C'$, pro něž platí $TY = TX_1 = TX_2$ (obr. 8); jeden z těchto bodů — bod X_1 — je souměrně sdružen s bodem Y podle přímky $B'C$, druhý — bod X_2 — je souměrně sdružen s bodem X_1 podle přímky UT. Snadno dokážeme, že platí

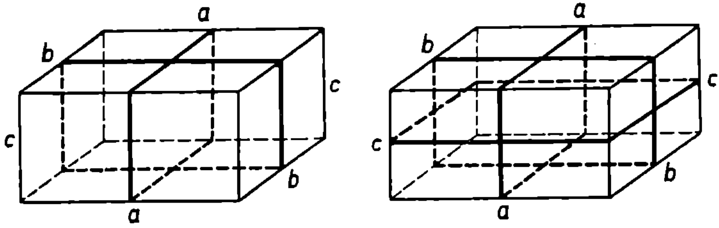


Obr. 8

$\sphericalangle X_2TY = 2\sphericalangle X_1TU + 2\sphericalangle X_1TB' = 2\sphericalangle UTB' = 90^0$; proto trojúhelník X_2YT není rovnostranný. Bod X hledané lomené čáry l je tedy souměrně sdružen s bodem Y podle přímky $B'C$. Odtud vyplývá

$$\sphericalangle XTB' = \sphericalangle YTB' = \sphericalangle XUB' = \sphericalangle YVB' = 30^0;$$

tím je lomená čára nalezena. Zkouškou si ověříme, že tato



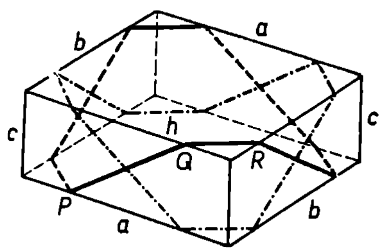
Obr. 9ab

čára má skutečně požadovanou vlastnost $UX = XY = YV$.

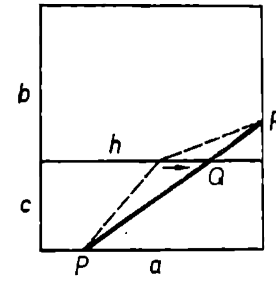
★

Další úloha se týká povrchu kvádru, a to zcela praktického problému — převazování krabice motouzem. Nejprve uvedeme několik vysvětlivek. Na obr. 9a, b, c je zobrazena krabice ve tvaru kvádru o rozměrech a, b, c převázána trojím způsobem a) jednoduše křížem, b) dvojitě křížem, c) „přes rohy“.

Oboje vázání křížem je jednoduché a jasné. Vázání „přes rohy“ je však třeba vysvětlit. Vázání se skládá ze dvou lomených čar (jedna z nich je na obr. 9c vyznačena tlustě, druhá čerchovaně); v praxi jsou ovšem obě lomené čáry vytvořeny z jednoho kusu provázku. Má-li být toto vázání pevné, nesmí se motouz posouvat po hranách krabice; to znamená, že např. spojnice bodů P, R překračující hranu h v bodě Q musí být co nejkratší (obr. 9c). Sestrojíme-li část



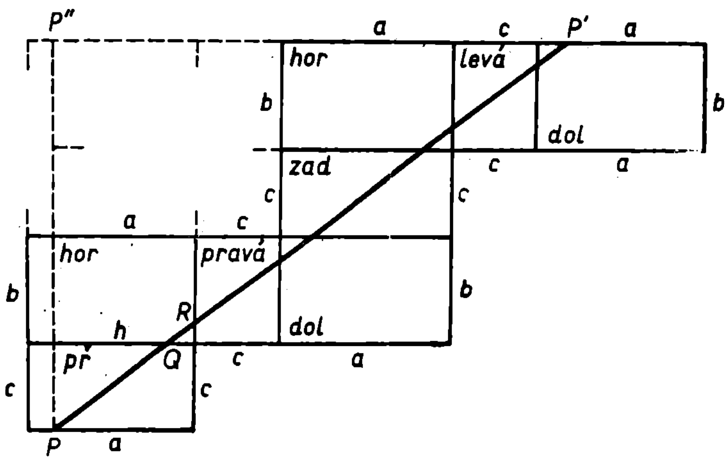
Obr. 9c



Obr. 10

sítě složenou z přední a horní stěny kvádru, zobrazí se v ní lomená čára *PQR* jako úsečka (obr. 10). Sestrojíme nyní síť kvádru, v níž se budou některé stěny opakovat tak, aby se v ní zobrazila celá tlustě vyznačená čára; z předcházejícího je zřejmé, že se tato lomená čára zobrazí jako úsečka. Konstrukce je provedena na obr. 11, stěny, přes něž lomená čára postupně přechází, jsou označeny zkratkami; při složení modelu tělesa splynou body *P*, *P'*. Sestrojte si takovou síť a složte z ní model kvádru.

Všechno, co předcházelo, bylo objasnění pojmu „vázání přes rohy"; nyní už můžeme vyslovit úlohu.



Obr. 11

Úloha 5. *Krabice tvaru kvádru má dané rozměry a, b, c. Máme rozhodnout, který druh vázání spotřebuje nejméně motouzu: zda jednoduché vázání křížem, či dvojité vázání křížem nebo vázání „přes rohy".**)

Řešení. Označíme d_1, d_2, d_3 potřebné délky motouzu. Zřejmě je

$$\begin{aligned} d_1 &= 2a + 2b + 4c, \\ d_2 &= 4a + 4b + 4c. \end{aligned} \tag{13}$$

Vázání „přes rohy" se skládá ze dvou lomených čar téže délky (viz obr. 9c, 11); podle obr. 11 je $\frac{1}{2} d_3 = PP'$. Úsečka PP' je přepona pravoúhlého trojúhelníka $PP'P''$, jehož odvěsny mají velikosti $PP'' = 2(b + c)$, $P'P'' = 2(a + c)$; je tedy podle Pythagorovy věty

$$d_3 = 2PP' = 4\sqrt{(a + c)^2 + (b + c)^2}. \tag{14}$$

Vypočteme $\frac{1}{4}\left(d_3^2 - d_1^2\right)$**); po úpravě vyjde

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(d_3^2 - d_1^2\right) &= 3a^2 + 3b^2 - 2ab + 4c^2 + 4ac + 4bc = \\ &= 2a^2 + 2b^2 + (a - b)^2 + 4c(a + b + c) > 0, \end{aligned}$$

tj.

$$d_3 > d_1. \tag{15}$$

Dále vypočteme $\frac{1}{16}\left(d_3^2 - d_2^2\right)$; vyjde po úpravě

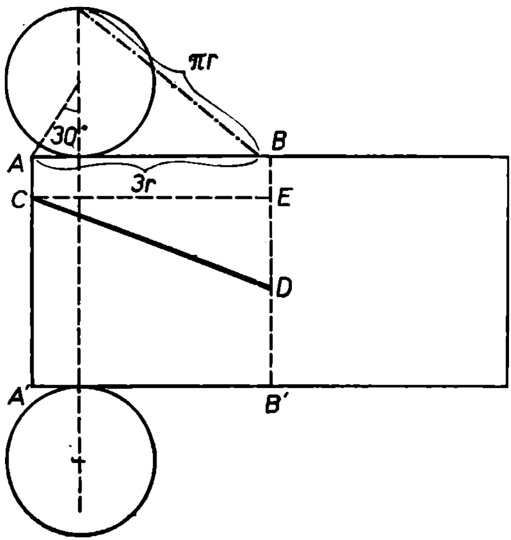
---

*) Přitom ovšem nepřihlížíme k motouzu spotřebovanému na vytvoření uzlů.

**) Porovnáme druhé mocniny kladných čísel d_1, d_3, abychom se vyhnuli počítání s odmocninami.

$$\frac{1}{16}\left(d_3^2 - d_2^2\right) = c^2 - 2ab, \tag{16}$$

tj. $d_3 < d_2$ právě tehdy, je-li $c < \sqrt{2ab}$.



Obr. 12

Odpověď na otázku úlohy tedy zní: Jednoduché vázání křížem je vždy kratší než vázání přes rohy. Vázání přes rohy je kratší než dvojité vázání křížem jen v případě, že platí pro rozměry krabice vztah $c < \sqrt{2ab}$. Tak např. má-li krabice čtvercové dno ($a = b$), je vázání přes rohy výhodnější než dvojité vázání křížem, je-li výška krabice (c) menší než úhlopříčka dna ($a\sqrt{2}$).

Na obr. 12 je zakreslena síť rotačního válce, kterou jistě všichni dobře znáte. Tato síť se skládá ze dvou shodných kruhů (podstav) a z obdélníka **O**, který vznikl rozvinutím pláště válce do roviny. Rozměry tohoto obdélníka jsou výška válce a délka obvodu podstavy, tj. délka kružnice. Je-li dán poloměr r podstavy a výška, nedovedeme sestrojit obdélník **O** eukleidovskými konstrukcemi *přesně*, ale známe *přibližné* konstrukce; jednou z nich je tzv. *Kochańského* konstrukce, která je provedena na obr. 13a. Úsečka KL je průměrem kružnice $k \equiv (S; r)$, přímka KM je její tečnou; dále platí $\sphericalangle KSM = 30°$, $MN = 3r$. Délka úsečky LN je přibližně délka polokružnice k.

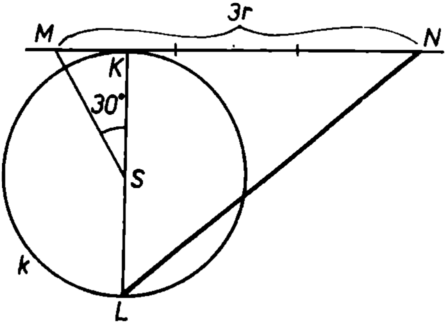
Jako při každé přibližné konstrukci musíme i při Kochańského konstrukci zjistit chybu, které se dopouštíme. Zásada pro použití přibližné konstrukce je totiž tato: konečná chyba nesmí překročit tzv. *grafickou chybu*, tj. 0,2 mm; s takovouto přesností dovedeme totiž pracovat v sešitě běžnými rýsovacími prostředky.

V našem případě určíme délky úseček: $KM = \frac{r}{\sqrt{3}}$, $KN = r\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, podle Pythagorovy věty $LN^2 = 4r^2 + r^2\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}\right)r^2 \doteq 9{,}869232r^2$, a tedy $LN \doteq 3{,}141r$. Rozdíl správné délky πr polokružnice a přibližné délky LN je kladný a platí

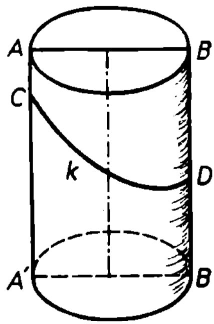
$$0 < \pi r - LN < 0{,}001r\,.$$

Má-li být $0{,}001r \leqq 0{,}2$ mm, musí být $r \leqq 0{,}2 \,.\, 10^3$ mm $= 200$ mm $= 2$ dm. Pro všechny konstrukce na listu papíru, kde poloměry kružnic nepřesahují zpravidla 1 dm, lze tedy použít Kochańského konstrukce.

Vrátíme se znovu k obr. 12. Je na něm zakreslena ještě úsečka CD, která není rovnoběžná s žádnou stranou obdélníka **O**. Svineme-li obdélník **O** v plášť válce, přejde úsečka CD v oblouk k křivky zvané *šroubovice*. Tato křivka má totiž tvar šroubového závitu. Na obr. 13b je zakreslen oblouk k na válci.



Obr. 13a



Obr. 13b

Úloha 6. *Podstava rotačního válce má průměr* $AB = 2r$. *Na stranách* AA', BB' *tohoto válce leží body* C, D; *jejich vzdálenosti od bodů* A, B *jsou* $AC = a$, $BD = b$ $(a < b)$. *Máme porovnat délky dvou spojnic bodů* C, D *vedoucích po povrchu válce:* a) *oblouku šroubovice,* b) *lomené čáry* $CABD$.

Řešení. Délku d oblouku šroubovice vypočteme jako délku úsečky CD v síti válce, a to z pravoúhlého trojúhelníka CDE. Platí $DE = b - a$, $CD = \pi r$; je tedy

$$d^2 = (b - a)^2 + \pi^2 r^2. \tag{17}$$

Pro délku d' lomené čáry $CABD$ platí

$$d' = a + b + 2r. \tag{18}$$

Ze vztahů (17), (18) dostaneme

$$d'^2 - d^2 = 4ab + 4r(a + b) + 4r^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right). \quad (19)$$

Délka lomené čáry je tedy menší než délka oblouku šroubovice právě tehdy, platí-li podle (19)

$$ab + r(a + b) < \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) r^2;$$

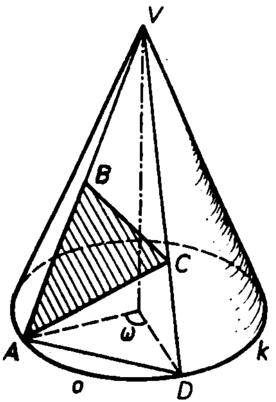
dělíme-li tuto nerovnost kladným číslem r^2, dostaneme

$$\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} + \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}\right) < \frac{\pi^2}{4} - 1 \doteq 1{,}47. \quad (20)$$

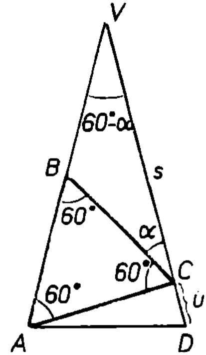
Z nerovnosti (20) je vidět, že výsledek závisí jen na podílech $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, nikoliv na číslech a, b, r samých. Zvolíme-li např. $a = \frac{1}{3}r$, $b = \frac{2}{3}r$, je $\frac{a}{r} = \frac{1}{3}$, $\frac{b}{r} = \frac{2}{3}$, $\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r} = \frac{11}{9} \doteq 1{,}22 < 1{,}47$; proto je kratší lomená čára. Zvolíme-li $a = \frac{r}{2}$, $b = \frac{2r}{3}$, je $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$; $\frac{b}{r} = \frac{2}{3}$, $\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r} = \frac{9}{6} = 1{,}5 > 1{,}47$, proto je kratší oblouk šroubovice.

Úloha 7. *Je dán rotační kužel s vrcholem V a bod A obvodu jeho podstavy; B je střed strany AV. Máme zjistit, zda lze sestrojit rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol C ležel na plášti kužele a máme sestrojit obraz bodu C v síti kužele.*

Řešení. Vrchol C rovnostranného trojúhelníka ABC leží na jisté straně VD daného kužele (obr. 14); je třeba zjistit délku tětivy AD. Úsečka AD je základna rovnoramenného trojúhelníka VAD, jehož ramena VA, VD jsou strany daného kužele a jemuž je „vepsán" rovnostranný trojúhelník ABC. Sestrojíme tedy úsečku AV, na ní bod B; nad úsečkou AB sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC, na



Obr. 14



Obr. 15a

polopřímce VC určíme bod D tak, aby platilo $VD = VA$ (obr. 15a). Bod C padne vždy mezi body V, D, neboť trojúhelník AVC má vnitřní úhly $\sphericalangle A = 60^0$, $\sphericalangle C = 60^0 + \alpha > \sphericalangle A$, proto je $VA > VC$. Tím je určena délka úsečky AD.

Nyní se zamyslete nad tím, proč naše úloha není ještě řešena, ač jsme určili tětivu AD i obraz bodu C. Na obr. 15a je úsečka AD tětivou kružnice k', jejíž poloměr je $s > r$. Na kuželi bude táž úsečka AD tětivou kružnice k o poloměru $r < s$. Musí tedy platit $AD \leqq 2r$; to je hledaná podmínka řešitelnosti, neboť tato nerovnost zaručuje možnost sestrojit na tělese stranu VD.

Rotační kužel je zpravidla dán poloměrem r podstavy a výškou v. Kteroukoli jeho stranu určíme pak jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky r, v.

Vyjádříme podmínku řešitelnosti úlohy 7 (tj. nutnou a postačující podmínku) jako vztah mezi čísly r, v. Protože je $AB = BV = BC$, je trojúhelník BVC rovnoramenný a pro jeho úhly platí $\alpha = 60^0 - \alpha$, tj. $\alpha = 30^0$. Úsečka AC je tedy výškou rovnoramenného trojúhelníka VAD a platí

$$AD^2 = \frac{s^2}{4} + CD^2, \qquad CD^2 = (s - VC)^2. \tag{21}$$

Trojúhelník VAC je pravoúhlý a při vrcholu V má úhel velikosti 30^0; proto je

$$VC = \frac{s}{2}\sqrt{3}. \tag{22}$$

Spojíme-li vztahy (21), (22), dostaneme

$$AD^2 = \frac{s^2}{4}(8 - 4\sqrt{3}) = s^2(2 - \sqrt{3}). \tag{23}$$

Protože je $s^2 = v^2 + r^2$, vyjde podmínka řešitelnosti ve tvaru

$$(v^2 + r^2)(2 - \sqrt{3}) \leqq 4r^2,$$

neboli po úpravě

$$v^2(2 - \sqrt{3}) \leqq r^2(2 + \sqrt{3})$$

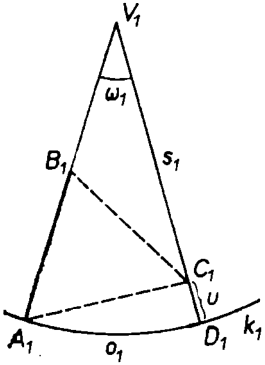
a dále

$$\frac{v^2}{r^2} \leqq \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^2,$$

odtud

$$v \leqq (2 + \sqrt{3})r \doteq 3{,}732\, r. \tag{24}$$

Nerovnost (24) vyšla tedy jako *nutná* podmínka řešitelnosti úlohy. Obrácením předchozího postupu se přesvědčíme, že ze vztahu (24) plyne nerovnost $AD \leqq 2r$; tím je dokázáno, že nerovnost (24) je také *postačující* podmínkou pro řešitelnost úlohy — stručně řečeno, je *podmínkou řešitelnosti* naší úlohy.



Obr. 15b

Zbývá sestrojit obraz C_1 bodu C v síti kužele (v síti jeho pláště;) je to provedeno na obr. 15 b. Obr. 15b se liší velmi málo od obr. 15a; obr. 15a znázorňuje situaci *v řezu*, kdežto obr. 15b situaci *v síti*. Platí $V_1A_1 = VA$, $V_1B_1 = VB$, $V_1C_1 = VC$, $V_1D_1 = VD$, ale $A_1D_1 \neq AD, A_1C_1 \neq AC, B_1C_1 \neq$ $\neq BC$; pro úhel $\omega_1 = \sphericalangle A_1V_1D_1$ platí nerovnost $\omega_1 \neq 30^0$.

Při určení velikosti ω_1 si pomůžeme výpočtem. Protože na obr. 15b je znázorněna *síť* kužele, je délka oblouku A_1D_1 kružnice k_1 rovna délce oblouku AD kružnice k (obr. 14).

Označíme-li ω velikost středového úhlu $\sphericalangle\ ASD$ (S je střed kružnice k), platí

$$\frac{\pi r \omega}{180} = \frac{\pi s \omega_1}{180}\,.$$

a odtud

$$\omega_1 = \frac{r}{s} \cdot \omega. \tag{25}$$

Velikost úhlu ω určíme z trojúhelníka ADS podle vztahu

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{AD}{2r}\,; \tag{26}$$

přitom délka AD je dána vzorcem (23). Zvolíme-li např. $v = \frac{12}{5} r = 2{,}4r$ — což je možné vzhledem k podmínce (24) — dostaneme $s = \frac{13}{5} r$, a dále podle (23), (26)

$$AD = \frac{13}{5} r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = 1{,}3 \cdot \sqrt{0{,}2679}.$$

Odtud plyne

$$\omega \doteq 84^0 35', \ \omega_1 = \frac{5}{13} \omega \doteq 32^0 32'.$$

Úhel velikosti ω_1 narýsujeme např. užitím tangenty: z tabulek zjistíme tg $\omega_1 \doteq 0{,}638$.

★

Dosud jsme se zabývali takovými tělesy, jejichž povrch bylo možno bez deformací rozvinout do roviny. Rozvinutí bez deformací znamená — názorně řečeno — toto: Je-li povrch tělesa zhotoven z nepružného materiálu, např. z plechu, nevyskytnou se při jeho rozvinutí do roviny a při vytvoření sítě ani zborceniny, ani trhliny.

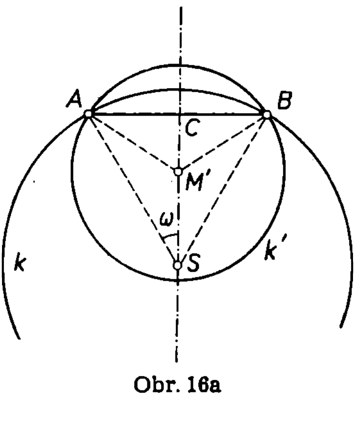
Tuto vlastnost však nemají všechna tělesa. Tak např. *povrch koule* čili plochu kulovou nelze rozvinout do roviny bez deformací. Proto jste se nikdy nesetkali se sítí koule a úlohy týkající se povrchu koule musíme řešit jinak.

Mohlo by se vám však zdát, že není pravda to, co jsme právě řekli, vzpomenete-li si, jak se sešívá plášť míče z několika třeba různobarevných pruhů. Tyto pruhy jsou rovinné obrazce, omezené oblouky kružnic. Zdá se, že při sešívání se vůbec nedeformují; ale není tomu tak. Deformace nastává vždycky, jenom že je tím menší, čím „užší" jsou pruhy, tj. čím je jejich počet větší.

Pravděpodobně víte, že každá rovinná křivka, která leží na kulové ploše, je kružnice. Poloměr ϱ takové kružnice je buď menší než poloměr r dané koule, nebo je $\varrho = r$. V prvním případě se nazývá kružnice *vedlejší*, v druhém *hlavní*. Dvěma různými body A, B kulové plochy, které neomezují její průměr, lze vést jedinou *hlavní kružnici;* dostaneme ji jako průsek kulové plochy s rovinou, která prochází body A, B a středem plochy.

Dá se dokázat, že *nejkratší spojnice dvou různých bodů A, B kulové plochy po této ploše je jeden z oblouků hlavní kružnice, která body A, B prochází.* Vyslovená věta platí i v případě, že body A, B omezují průměr kulové plochy. Experimentálně si můžete ověřit tuto větu tak, že na modelu koule (třeba na globu) upevníte gumičku ve dvou pevných bodech. Gumička zaujme tvar oblouku hlavní kružnice.

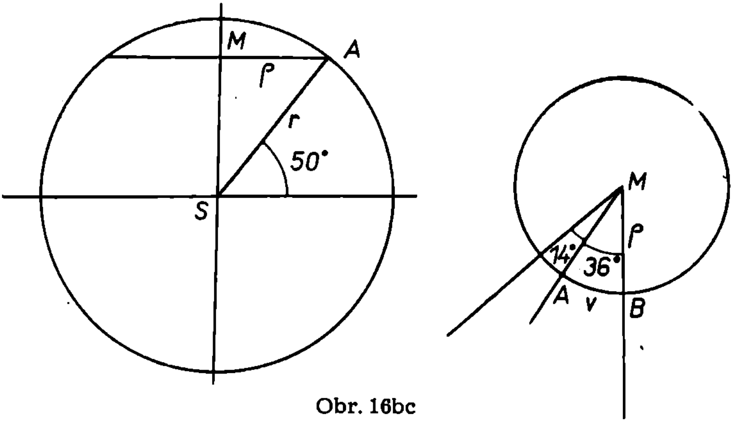
Ověříme si naši vyslovenou větu výpočtem, a to tak, že porovnáme délky oblouků hlavní a vedlejší kružnice, které dané dva body A, B spojují.



Obr. 16a

Úloha 8. *Města Praha a Kujbyšev leží přibližně na téže rovnoběžce 50° s. š.; jejich zeměpisné délky jsou přibližně 14° a 50° v. d. Máme zjistit, jaký je rozdíl jejich vzdáleností měřených jednak po rovnoběžce, jednak po hlavní kružnici.*

Řešení. Praha a Kujbyšev představují dva různé body A, B na povrchu Země; povrch Země pokládáme



Obr. 16bc

za plochu kulovou o poloměru 6370 km, tj. zanedbáváme zploštění Země. Pro větší názornost si znázorníme obě kružnice spojující body A, B — rovnoběžku i hlavní kružnici — v téže rovině. Na obr. 16a značí S střed Země, k hlavní kružnici procházející body A, B. V rovině ABS je sestrojena ještě kružnice k' se středem M', shodná se zeměpisnou rovnoběžkou procházející body A, B. Poloměr ϱ této rovnoběžky určíme pomocí obr. 16b, na kterém je zakreslena situace v rovině pražského poledníku. Z pravoúhlého trojúhelníka AMS plyne

$$\varrho = r \,.\, \cos 50^0 \,. \tag{27}$$

Vzdálenost bodů A, B po rovnoběžce, kterou označíme v_1, určíme pomocí obr. 16c, který představuje situaci v rovině pražské rovnoběžky. Zřejmě je

$$\sphericalangle AMB = 50^0 - 14^0 = 36^0 \tag{28}$$

a tedy podle (27), (28)

$$v_1 = \frac{36\pi\varrho}{180} = \frac{1}{5}\,\pi r \cos 50^0 .$$

Numerický výpočet dá

$$v_1 \doteq 0{,}2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 6370 \,.\, 0{,}643 \doteq 2570 \text{ (km)} \qquad (29)$$

Vzdálenost v_2 bodů A, B měřenou po hlavní kružnici vypočteme pomocí obr. 16a. Označíme-li C střed úsečky AB, pak je $AC = AM' \,.\, \sin \sphericalangle AM'C = \varrho \,.\, \sin \frac{1}{2} \sphericalangle AM'B =$ $= \varrho \sin 18^0$, a dále podle (27):

$$\sin \omega = \frac{AC}{r} = \frac{\varrho \cdot \sin 18^0}{r} = \sin 18^0 \cdot \cos 50^0; \qquad (30)$$

přitom je $\omega = \sphericalangle ASC$. Pro vzdálenost v_2 tedy dostaneme

$$v_2 = \frac{2\omega \cdot \pi r}{180} = \frac{\omega}{90} \pi r. \qquad (31)$$

Numerický výpočet: Z (30) dostaneme $\sin\omega \doteq 0{,}199$, $\omega \doteq 11{,}5^0$; z (31) dostaneme

$$v_2 = 0{,}128 \,.\, 3{,}14 \,.\, 6370 \doteq 2550 \text{ (km)}. \qquad (32)$$

Srovnání výsledků (29), (32) ukazuje, že vzdálenost Prahy a Kujbyševa měřená po hlavní kružnici je skutečně menší než jejich vzdálenost měřená po zeměpisné rovnoběžce. Rozdíl je však celkem nepatrný (asi 20 km), neboť obě místa jsou poměrně blízká. Kdybychom zvolili dvě vzdálenější místa, např. Tokio a San Francisco, byl by rozdíl obou vzdáleností značný. V takovém případě je rozdíl rozhodující ve vzduchoplavbě: letadlo nepoletí z Tokia do San Francisca přímo na východ, třebaže obě místa leží přibližně na téže rovnoběžce. Zkrátí si cestu tím, že poletí po oblouku hlavní kružnice, která se odchyluje od rovnoběžky k severu.

Znázorněte si spojnici Tokia a San Francisca na globu gumičkou a vypočtěte rozdíl obou vzdáleností jako v úloze 8.

Část II

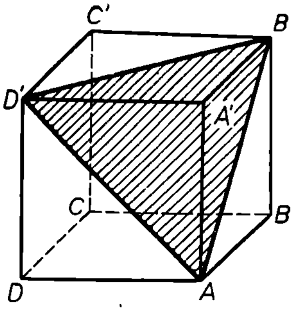
PRŮSEK TĚLESA S ROVINOU

●

V první části tohoto textu jsme se setkali s čarami (např. s lomenými čarami ležícími na povrchu tělesa), ale nezajímali jsme se přitom, zda taková čára leží v rovině či nikoli. Zvláště důležité jsou takové čáry na povrchu tělesa, které jsou rovinné. Jsou důležité nejen pro geometrii na povrchu tělesa, ale můžeme pomocí nich odvodit vlastnosti, které se týkají vnitřku tělesa.

Čáry, které máme na mysli, jsou vlastně průnikem nějaké roviny s povrchem tělesa. Slovo „průnik" vám snad není zcela neznámé; *průnikem dvou geometrických útvarů* rozumíme množinu všech bodů společných těmto geometrickým útvarům. Slovo „průnik", které pochází z teorie množin, nahrazujeme v geometrii různými jinými názvy. Tak užíváme např. slov „průsečík", „průsek" nebo „řez", říkáme průsečík přímky s rovinou, rovinný průsek nebo řez s tělesem nebo plochou apod.

Průnik roviny s tělesem může být třeba jen bod nebo úsečka. Jistě si dovedete představit rovinu, která má s krychlí společný jen jediný vrchol nebo jedinou hranu. Máte-li k dispozici model krychle, můžete si přiložením rovné desky k vrcholu nebo hraně polohu takové roviny snadno vymodelovat. Nás však budou zajímat hlavně takové případy, kdy průnikem bude rovinný obrazec, např. trojúhelník, čtverec apod. Tento obrazec budeme nazývat *průsekem či řezem roviny* s tělesem; průsekem roviny *s povrchem* tělesa je pak obvod příslušného obrazce. Na obr. 17 je vy-



Obr. 17

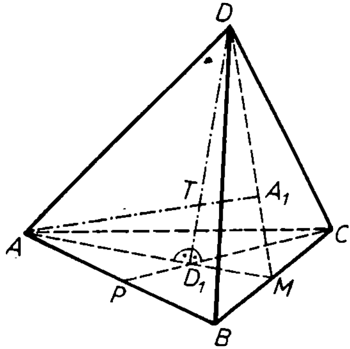
značen šrafami průsek roviny s krychlí; je to trojúhelník $AB'D'$. Průsekem s povrchem krychle jsou úsečky AB', $B'D'$, $D'A$, které tvoří obvod řezu. Všechny tyto úsečky jsou shodné, neboť jsou stěnovými úhlopříčkami krychle; proto je řezem rovnostranný trojúhelník.

Jak jsme už naznačili, můžeme pomocí průseku roviny s tělesem odvodit jisté vlastnosti týkající se vnitřku tělesa. To si ukážeme v následující úloze, v níž půjde o odvození vlastnosti těžnic a těžiště čtyřstěnu.

Pojmy těžnice a těžiště trojúhelníka jsou vám jistě známy. U čtyřstěnu půjde o jistou analogii. Jestliže zavěsíte ve vrcholu na nit trojúhelník, který je zhotoven ze stejnorodého materiálu (např. tvrdého papíru — lepenky), ustálí se nit v takové poloze, že v prodloužení prochází těžištěm trojúhelníka. Zavěsíte-li čtyřstěn, který je zhotoven ze stejnorodého materiálu, ve vrcholu, ustálí se nit v takové poloze, že její prodloužení prochází těžištěm protější stěny. Proto definujeme *těžnici čtyřstěnu* takto: *Těžnice čtyřstěnu je úsečka, která spojuje těžiště stěny s protějším vrcholem.*

Úloha 9. *Máme dokázat, že těžnice čtyřstěnu procházejí jedním bodem a že každá z nich je tímto bodem rozdělena v poměru* 3 : 1.

Řešení. Myšlenkový postup důkazu je následující (obr. 18). Nejprve budeme uvažovat o vzájemné poloze těžnic $t_D \equiv DD_1$, $t_A \equiv AA_1$, kde D_1 a A_1 jsou těžnice stěn ABC a BCD. Dokážeme, že se protínají v bodě T, který dělí obě těžnice v poměru 3 : 1. Pak vrchol A nahradíme postupně vrcholy B a C, tj. těžnici t_A nahradíme postupně těžnicemi $t_B \equiv BB_1$, $t_C \equiv CC_1$, kde B_1 a C_1 jsou těžiště stěn ACD a ABD. Zjistíme, že všechny těžnice procházejí bodem T, pro který platí $DT = 3.D_1T$. Odtud pak plyne tvrzení věty.



Obr. 18

Bod D_1 je průsečíkem těžnic AM a CP trojúhelníka ABC; body M a P jsou po řadě středy hran BC a AB. Těžiště A_1 leží na těžnici DM trojúhelníka BCD. Obě těžnice AA_1 a DD_1 daného čtyřstěnu *leží tedy v rovině* AMD. Protože body A_1, D_1 leží uvnitř stran DM a AM trojúhelníka AMD, protínají se úsečky AA_1 a DD_1 ve vnitřním bodě T.

Podle známé vlastnosti těžiště trojúhelníka platí

$$DA_1 = 2.MA_1, \quad AD_1 = 2.MD_1 \quad . \tag{1}$$

Stejnolehlost v rovině ADM se středem v bodě M a koeficientem $\frac{1}{3}$ převádí podle (1) body A, D po řadě v body D_1 a A_1. Je tedy

$$A_1D_1 \parallel AD, \quad A_1D_1 = \frac{1}{3} AD \, . \tag{2}$$

Stejnolehlost v téže rovině, která má střed v bodě T a převádí A v A_1, převádí podle (2) také D v D_1, a tudíž úsečku AD v úsečku A_1D_1. Má tedy podle (2) koeficient

$-\frac{1}{3}$. Odtud vyplývá, že platí

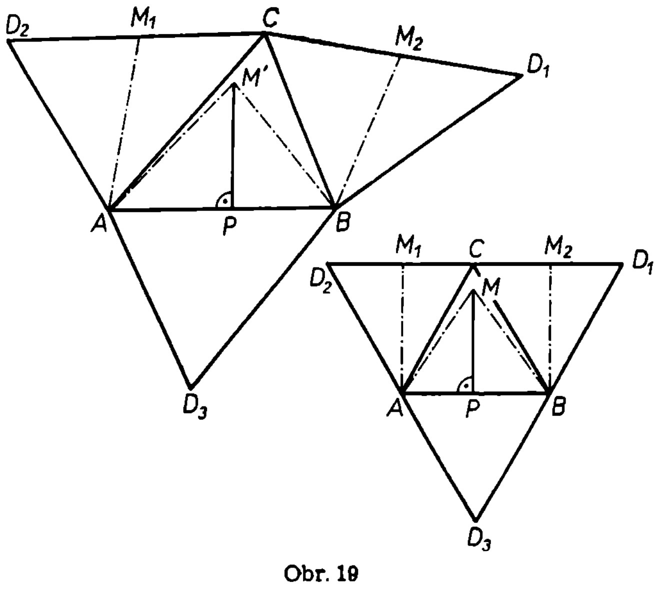
$$AT = 3 . A_1T, \quad DT = 3 . D_1T. \tag{3}$$

Nahradíme-li vrchol A postupně vrcholy B a C, shledáme, že podobným působem každá z těžnic t_B a t_C protíná těžnici t_D v bodě T, pro který podle (3) platí $DT = 3 . D_1T$; je to v obou případech týž bod. Pro tento bod T platí mimo (3) ještě vztahy

$$BT = 3 . B_1T, \quad CT = 3 . C_1T.$$

Tím je daná úloha řešena.

Užitím rovinných průseků můžeme řešit planimetricky



Obr. 19

i úlohy, které by jinak vyžadovaly znalostí zvláštních stereometrických vět. V následující úloze určíme tímto způsobem vzdálenost bodu od přímky.

Úloha 10. *Je dán čtyřstěn $ABCD$ svou sítí; M je střed jeho hrany CD. Máme určit konstruktivně vzdálenost bodu M od přímky AB (v prostoru). Pro pravidelný čtyřstěn máme vyjádřit tuto vzdálenost jako funkci délky hrany čtyřstěnu.*

Řešení. Síť daného čtyřstěnu je dána obrazcem složeným ze čtyř trojúhelníků (obr. 19a). Vzdálenost MP zjistíme jako výšku trojúhelníka ABM, který sestrojíme ve skutečné velikosti ABM'. K tomu potřebujeme určit pomocí sítě skutečné délky úseček AM a BM. Bod M má v síti obrazy M_1, M_2; délky úseček AM_2, BM_1 jsou skutečné velikosti úseček AM, BM, takže z nich můžeme sestrojit trojúhelník ABM' a v něm hledanou úsečku $M'P = MP$.

Pro pravidelný čtyřstěn je úloha řešena v obr. 19b. Je-li a délka hrany tohoto čtyřstěnu, je $AM_2 = BM_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Trojúhelník ABM' je rovnoramenný se základnou $AB = a$. Je tedy $AP = \frac{a}{2}$, $AM' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ a podle Pythagorovy věty je

$$PM^2 = AM^2 - AP^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2};$$

tedy

$$PM = PM' = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Následující úlohy se opírají o pojem kolmosti přímky a roviny; proto si napřed připomeneme jeho definici a na příkladech si ukážeme některé vlastnosti týkající se tohoto vztahu.*)

Definice: Přímka p je kolmá k rovině ϱ, je-li kolmá ke všem přímkám roviny ϱ, které procházejí průsečíkem $p . \varrho$.

Z vět týkajících se vztahu kolmosti uvedeme jen ty, které budeme dále potřebovat:

1. *Je-li přímka p kolmá ke dvěma různoběžkám roviny ϱ, které procházejí průsečíkem $p . \varrho$, je přímka p kolmá k rovině ϱ* (kriterium kolmosti přímky p a roviny ϱ).

Důsledek: Každá hrana kvádru je kolmá ke dvěma hranám, které mají s ní společný vrchol kvádru. Proto jsou hrany kvádru kolmé ke stěnám, které jsou s těmito hranami různoběžné.

2. *Přímky kolmé k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné.*

Důsledek: Poněvadž pobočné hrany kolmého hranolu jsou kolmé na rovinu jeho podstavy, jsou navzájem rovnoběžné.

Z předcházejících vět je zřejmé, že průsek roviny určené stěnovou úhlopříčkou a hranou kvádru, která je s ní různoběžná, je obdélník; nazýváme jej *úhlopříčný řez kvádru.* Každý úhlopříčný řez kvádru je obdélník, jehož úhlopříčkami jsou tělesové úhlopříčky kvádru.

Užitím úhlopříčného řezu lze řešit celou řadu úloh o kvádru.

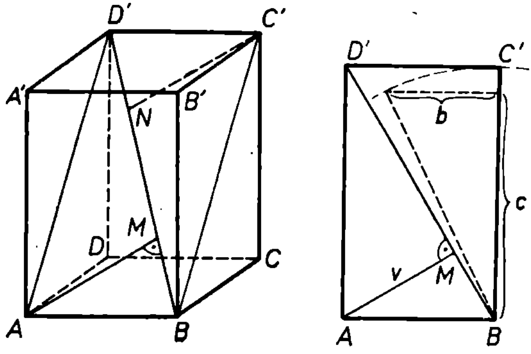
Úloha 11. *Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Máme určit a) konstruktivně b) výpočtem vzdálenost vrcholu A od tělesové úhlopříčky BD'; je dáno např. $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$.*

Řešení. a) Abychom sestrojili úsečku, jejíž velikost udává

---

*) Důkazy zde uvedených stereometrických vět najde čtenář v učebnici deskr. geometrie pro 10. tř., str. 35 a další.

vzdálenost bodu A od úhlopříčky BD', zobrazíme úhlopříčný řez $ABC'D'$ ve skutečné velikosti; je to obdélník, jehož strany mají velikosti a, $\sqrt{b^2 + c^2}$ (obr. 20a, b). Sestrojíme-li v něm $AM \perp BD'$, je velikost úsečky AM hledanou vzdáleností.



Obr. 20ab

b) Úhlopříčka BD' má velikost $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; vzdálenost vrcholu A od přímky BD' je výškou $AM = v$ v pravoúhlém trojúhelníku ABD'. Pro obsah trojúhelníka ABD' platí

$$\frac{1}{2} a \cdot \sqrt{b^2 + c^2} = \frac{1}{2} u \cdot v$$

a odtud

$$v = \frac{a \sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \,;$$

pro daná čísla dostaneme $v \doteq 3{,}5$.

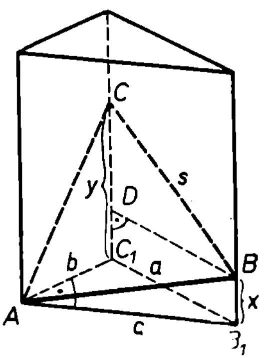
Poznámka. Vzdálenost BM paty M kolmice sestrojené z bodu A na přímku BD' od bodu B podle Eukleidovy věty pro odvěsnu je

$$BM = \frac{a^2}{u} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Určete sami podobným způsobem vzdálenosti vrcholů C a B' od úhlopříčky BD'. Uvažujte pak o případu, když $a = b$. Co plyne odtud pro paty kolmic sestrojených z vrcholů A a C na přímku BD'? Co plyne z nalezených výsledků pro případ, že kvádr je krychlí? Jakou vzájemnou polohu mají paty kolmic spuštěných z vrcholů A, C, B' a přímka BD'?

Úloha 12. *Podstavou kolmého trojbokého hranolu (o dostatečně velké výšce) je pravoúhlý trojúhelník AB_1C_1 s přeponou B_1C_1. Máme protnout hranol rovinou procházející vrcholem A v rovnostranném trojúhelníku ABC.*

Řešení. Nejprve se musíme zamyslet nad tím, co je třeba určit, abychom na modelu hranolu mohli nakreslit řez žádaných vlastností. Nejvýhodnější bude, budeme-li znát délky úseček BB_1 a CC_1. Proto se pokusíme určit tyto délky, a to nejprve výpočtem a pak konstruktivně.



Obr. 21

Označme velikosti úseček (obr. 21): $B_1B = x$, $C_1C = y$, $AB_1 = c$, $AC_1 = b$, $B_1C_1 = a$, $AB = BC = AC = s$; pak je $DC = y - x$, přitom D je pata kolmice sestrojené z bodu B na CC_1.

Trojúhelníky AB_1B, AC_1C, BDC a AB_1C_1 jsou pravoúhlé; to snadno odůvodníte. Z nich plyne podle věty Pythagorovy

$$c^2 + x^2 = s^2,\ b^2 + y^2 = s^2\,, \tag{4}$$
$$a^2 + (y - x)^2 = s^2, \tag{5}$$
$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{6}$$

Dosazením (6) do (5) a užitím (4) vypočteme

$$2xy = s^2\,. \tag{5'}$$

Soustava rovnic (4), (5) je ekvivalentní se soustavou (4), (5'). Z (5') dostaneme po umocnění dvěma

$$4x^2y^2 = s^4, \tag{5''}$$

která za předpokladu, že $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, má totéž řešení jako (5'). Dosadíme-li do (5'') za x^2 a y^2 z (4), dostaneme po jednoduché úpravě

$$3s^4 - 4s^2(b^2 + c^2) + 4b^2c^2 = 0\,.$$

Řešíme-li tuto rovnici podle s^2, dostaneme

$$s^2 = \frac{2}{3}(b^2 + c^2 \pm \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 3b^2c^2}).$$

Vzhledem k tomu, že musí být $s^2 > 0$, vyhovuje jedině kořen

$$s^2 = \frac{2}{3}(b^2 + c^2) + \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 3b^2c^2}\,. \tag{7}$$

Výraz pod odmocnítkem je vždy kladný vzhledem k tomu, že je $b > 0$, $c > 0$, neboť $b^4 - b^2c^2 + c^4 = \left(b^2 - \frac{c^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 > 0$.

Poněvadž v pravoúhlém trojúhelníku AB_1C_1 platí vztah (6) i vztah

$$bc = av, \tag{8}$$

kde v je velikost výšky sestrojené z vrcholu A na přeponu B_1C_1, dostaneme ze (7)

$$s^2 = \frac{2}{3}(a^2 + \sqrt{a^4 - 3a^2v^2}) = \frac{2}{3}a(a + \sqrt{a^2 - 3v^2}). \quad (7')$$

Jestliže známe s^2, určíme velikosti x, y hledaných úseček BB_1, CC_1 ze vztahů (4)

$$x = \sqrt{s^2 - c^2}\,, \ y = \sqrt{s^2 - b^2}\ . \quad (9)$$

Přesvědčte se sami, že vypočtená čísla vyhovují podmínkám (4), (5′), resp. (4), (5″).

Máme-li určit graficky velikosti úseček BB_1, CC_1, sestrojíme nejprve stranu s na základě vztahu (7′) a pak na základě vztahu (9) hledané úsečky.

Konstrukci strany rovnostranného trojúhelníka nebudeme zde provádět, předpokládáme však, že si ji provedete sami. Naznačíme jen postup konstrukce:

a) Sestrojíme úsečku délky $v\sqrt{3}$ (jako výšku rovnostranného trojúhelníku o straně délky $2v$)

b) Podle obrácení Pythagorovy věty sestrojíme úsečku délky $\sqrt{a^2 - 3v^2}$.

c) Sestrojíme úsečku délky $a + \sqrt{a^2 - 3v^2}$.

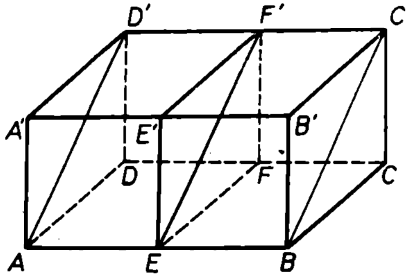
d) Sestrojíme obdélník o stranách $\frac{2}{3}a$, $a + \sqrt{a^2 - 3v^2}$.

e) Sestrojený obdélník „proměníme" na čtverec o straně délky s.

Známe-li velikosti úseček BB_1, CC_1, je tím poloha hledané roviny určena.

Je-li $b = c$, je celá konstrukce podstatně jednodušší; proveďte toto řešení sami.

Poznámka. Předcházející úlohu je možno řešit přímo bez výpočtu. Řešení však vyžaduje hlubší znalosti týkající se pravoúhlého promítání, což je mimo rámec této publikace.



Obr. 22

Než přistoupíme k řešení dalších úloh, připomeňme si větu: *Tři různé roviny mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*

1. Každé dvě z těchto rovin jsou navzájem rovnoběžné.

2. Dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je s každou z nich různoběžná. Roviny rovnoběžné protínají rovinu, která je s nimi různoběžná, v přímkách rovnoběžných.

3. Tři roviny nemají žádný společný bod a protínají se po dvou ve třech přímkách, které jsou navzájem rovnoběžné.

4. Tři roviny procházejí touž přímkou.

5. Tři roviny mají společný jediný bod, kterým prochází průsečnice každých dvou z nich.

V případech 1, 2, 3 nemají tři roviny žádný společný bod, v případě 5 mají společný jediný bod a v případě 4 mají společnou přímku.

Na obr. 22 je zobrazen kvádr $ABCDA'B'C'D'$ s úhlopříčným řezem $ABC'D'$ a s řezem $EFF'E'$, jehož vrcholy jsou středy čtyř rovnoběžných hran kvádru. Na obraze můžeme vyhledat příklady všech pěti možných vzájemných poloh tří rovin; proveďte to. Najděte dále sami ve svém okolí modely na vzájemnou polohu tří rovin, o níž jedná uvedená věta (příklady: přihrádky ve skříni, stěny v místnosti, střechy domů atd.). Vymodelujte vzájemné polohy rovin užitím papírových desek.

Jestliže rovina protíná jen čtyři pobočné stěny kvádru, vznikne čtyřúhelník, jehož dvě a dvě protější strany jsou rovnoběžné, tj. rovnoběžník; to vyplývá z případu 2 z předchozí věty.

★

Snad jste někdy pozorovali vodní hladinu v kádince, která měla tvar kvádru. Pozorovali jste, jak se tvar hladiny měnil, když jste ji nakláněli. Zasahuje-li hladina jen tři stěny, má tvar trojúhelníku, jestliže obsahuje celou hranu kádinky, má tvar obdélníka; zasahuje-li hladina všechny pobočné hrany kádinky, má tvar rovnoběžníku atd. Máte-li k dispozici kádinku tvaru kvádru, např. akvárium, naplňte ji do poloviny vodou, odhadněte na základě pokusu, pro kterou polohu se objeví některý vrchol podstavy (nebo podstavná hrana) právě na hladině, pro kterou polohu bude mít asi hladina největší a nejmenší velikost a pak se pokuste svou domněnku zdůvodnit matematicky. Příkladem vám může být následující úloha:

Úloha 13. *Akvárium má tvar krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky* 1 *se dnem $ABCD$ a do poloviny naplněné vodou. Je nakloněno tak, že vodní hladina sahá až k bodu B' a hrana AA' je pod hladinou až do vzdálenosti $AX = x$.*

a) *Máme načrtnout v obrázku obvod vodní hladiny a sestrojit její skutečnou velikost.*

b) *Máme vyjádřit velikost hladiny jako funkci proměnné x.*

Řešení. Provedete-li si sami pokus, zjistíte, že celé dno zůstane pod hladinou a že hladina prochází bodem D. To vás vede k domněnce, že hladina je rovnoběžník $B'XDZ$, který má jednu svou úhlopříčku v tělesové úhlopříčce krychle DB' (obr. 23a).

Střed S rovnoběžníka $B'XDZ$ je středem úsečky DB'

a zároveň úsečky XZ. Označme S_1 střed čtverce $ABCD$; v rovině BDB' vymezuje rovina $\varrho \equiv B'DX$ trojúhelník DBB' a podle věty o střední příčce je

$$SS_1 = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2} \quad . \tag{10}$$

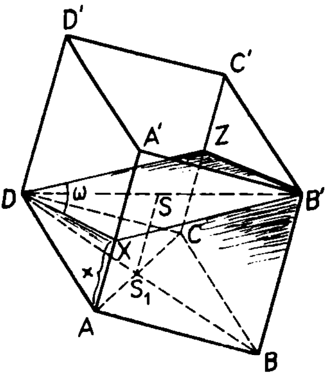
V rovině ACC' vymezuje rovina ϱ lichoběžník $AXZC$ a podle věty o střední příčce je

$$SS_1 = \frac{1}{2}(AX + CZ) = \frac{1}{2}(x + CZ)\,. \tag{11}$$

Spojením vztahů (10), (11) dostaneme

$$CZ = 1 - x\,. \tag{12}$$

Je tedy $A'X = CZ = 1 - x$, $AX = C'Z = x$. Rovina ϱ hladiny vodní rozdělí krychli ve dvě shodné části: část spodní splyne s částí horní, splynou-li dvojice bodů $A, C' - B, D' - C, A' - D, B' - X, Z$.

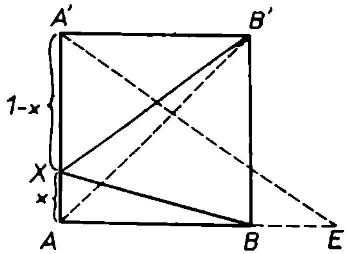


Obr. 23a

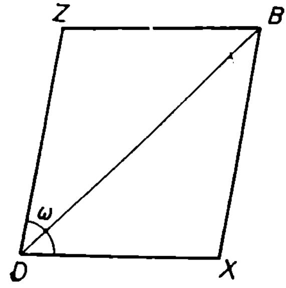
Je-li tedy akvárium naplněno do poloviny vodou, zaplní voda při naklonění akvária skutečně spodní část omezenou rovinou ϱ.

Nyní rozřešíme obě úlohy a) a b).

Abychom mohli sestrojit skutečnou velikost rovnoběžníka $B'XDZ$, musíme znát tři jeho určovací prvky. V daném případě můžeme snadno určit skutečné velikosti jeho stran DX, $B'X$ a skutečnou



Obr. 23b



Obr. 23c

velikost jeho úhlopříčky DB', která je tělesovou úhlopříčkou krychle.

Nejprve sestrojíme úsečky DX a $B'X$ jako přepony pravoúhlých trojúhelníků ADX a $A'B'X$ o odvěsnách 1, x, resp. 1, $1 - x$. Pak sestrojíme skutečnou velikost úhlopříčky $B'D = A'E = \sqrt{3}$ (obr. 23a). Z těchto prvků pak sestrojíme rovnoběžník $DXB'Z$ (obr. 23 bc).

b) Abychom určili funkční závislost velikosti P hladiny na velikosti x ponoru hrany AA', vyjádříme velikost hladiny pomocí stran rovnoběžníku DX, DZ a jimi sevřeného úhlu ω; $\omega = \sphericalangle XDZ$. Platí

$$P = DX . DZ . \sin \omega,$$

tj.

$$P^2 = DX^2 . DZ^2 . \sin^2\omega \,. \tag{13}$$

Pro velikosti stran DX, DZ dostaneme podle věty Pythagorovy vztahy

$$\begin{aligned} DX^2 &= 1 + x^2\,, \\ DZ^2 &= 1 + (1 - x)^2 = x^2 - 2x + 2. \end{aligned} \tag{14}$$

Abychom v (13) vyjádřili také $\sin^2\omega$ pomocí x, použijeme pro trojúhelník DXZ kosinové věty

$$XZ^2 = DX^2 + DZ^2 - 2DX.DZ.\cos\omega ,$$

z níž pak vypočteme $\cos\omega$ a dosadíme do (13). Za tím účelem vypočteme napřed ještě z lichoběžníku $ACZX$ délku jeho ramene jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách $\sqrt{2}$, $(1 - x) - x = 1 - 2x$.

$$XZ^2 = (1 - 2x)^2 + (\sqrt{2})^2 = 4x^2 - 4x + 3 . \qquad (15)$$

Z kosinové věty plyne

$$2.DX.DZ.\cos\omega = DX^2 + DZ^2 - XZ^2.$$

Dosadíme-li sem z (14) a (15), máme

$$2.DX.DZ.\cos\omega = 2x(1 - x) . \qquad (16)$$

Rovnost (16) umocníme dvěma a dosadíme do (13); vyjde $P^2 = DX^2.DZ^2 - DX^2.DZ^2.\cos^2\omega = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) - x^2(1 - x)^2 = 2(x^2 - x + 1)$, takže

$$P = \sqrt{2(x^2 - x + 1)} . \qquad (17)$$

Tím je daná úloha rozřešena.

Rozborem vztahu (17), který lze psát ve tvaru $P = \sqrt{2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}$, rozhodněte, pro která x nabývá funkce P své nejmenší a největší hodnoty, když je $0 \leqq x \leqq 1$.

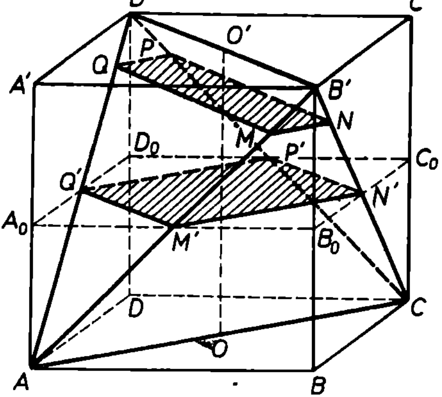
Uvažujte sami o součtech obsahů ponořených částí stěn, když se bude akvárium otáčet kolem osy DB'.

*

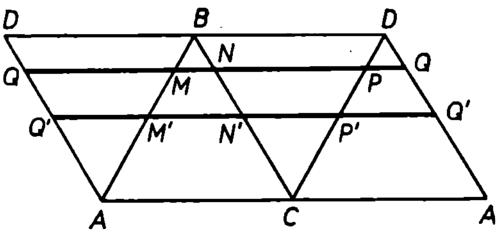
Než přistoupíme k další úloze, uveďme napřed pomocné věty, jichž v úloze užijeme:

1. Platí-li pro tři přímky v prostoru $a \parallel b$, $b \parallel c$, je $a \parallel c$.

2. Jsou-li a, b kolmé různoběžky a vedeme-li bodem P přímky $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, jsou také a', b' kolmé různoběžky.



Obr. 24a



Obr. 24b

Úloha 14. *Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Máme dokázat tato tvrzení: a) Vrcholy A, C, B', D' jsou vrcholy pravidelného čtyřstěnu* **T**. *b) Roviny rovnoběžné se stěnami $ABCD$, $A'B'C'D'$ a protínající krychli, protínají čtyřstěn* **T** *v obdélnících. Máme vyjádřit jeden rozměr průsečného obdél-*

níka jako funkci druhého rozměru a stanovit obvod a obsah těchto obdélníků.

Řešení. a) Obrazce ACB', $CB'D'$, ACD', $AB'D'$ (obr. 24 a) jsou rovnostranné trojúhelníky; jejich strany jsou stěnovými úhlopříčkami krychle. Těleso jimi omezené je proto pravidelný čtyřstěn.

b) Rovina procházející středem krychle a rovnoběžná s rovinou $ABCD$ protíná krychli ve čtverci $A_0B_0C_0D_0$ a pravidelný čtyřstěn **T** ve čtverci $M'N'P'Q'$, jehož vrcholy jsou středy stran čtverce $A_0B_0C_0D_0$, což dovedete sami odůvodnit.

Uvažujme nyní o čtyřúhelníku $MNPQ$, v němž protíná čtyřstěn **T** jiná rovina rovnoběžná s rovinou $ABCD$. Podle věty 2 na str. 43 platí $MN \parallel M'N'$, $NP \parallel N'P'$, atd. Podle věty 1 na str. 47 je $MN \parallel M'N' \parallel P'Q' \parallel PQ$ a $NP \parallel \parallel N'P' \parallel Q'M' \parallel QM$. Je tedy řezem rovnoběžník. Poněvadž však $M'N' \perp M'Q'$ a $MN \parallel M'N'$ a $MQ \parallel M'Q'$, je podle věty 2 str. 47 $MN \perp MQ$; je tudíž řezem *obdélník.*

Poněvadž úsečka $M'N'$ je střední příčkou v trojúhelníku ACB', je $M'N' \parallel AC$ a proto je také $MN \parallel AC$; obdobně je $Q'M' \parallel B'D'$ a také $QM \parallel B'D'$. Toho užijeme při zobrazení obvodů řezů v síti (obr. 24b). Poněvadž je $MN \parallel AC$, $B'D' \parallel AC$ a $QM \parallel B'D'$, leží body Q, M, N, P, Q_1 v přímce. Zobrazí se tudíž obvod řezu $MNPQ$ jako úsečka $QQ_1 \parallel AA_1$.

Výpočet: Označíme-li délku úsečky $MN = PQ = x$, délku úsečky $NP = QM = y$, a délku hrany čtyřstěnu a, dostaneme z rovnosti $MN + NP = AC = a$ vztah

$$x + y = a,$$

tj.

$$y = a - x.$$

Rozměr y je *lineární funkcí* rozměru x. Obvod obdélníku $MNPQ$ je tedy

$$o = 2(x + y) = 2a\,.$$

Všechny uvažované řezy pravidelného čtyřstěnu mají *konstantní obvod.*

Obsah obdélníku $MNPQ$ je

$$P = x(a - x)\,,$$

čili

$$P = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Proveďte sami rozbor tohoto výsledku a zjistěte, který z obdélníků má největší obsah.

Poznámka. Je otázka, zdali lze každý pravidelný čtyřstěn vytvořit uvedeným způsobem z krychle. Na tuto otázku můžeme odpovědět kladně. Odůvodnění proveďte sami.

Z uvedeného „vytvoření" pravidelného čtyřstěnu plynou pro tento čtyřstěn některé vlastnosti, které si můžete sami snadno dokázat:

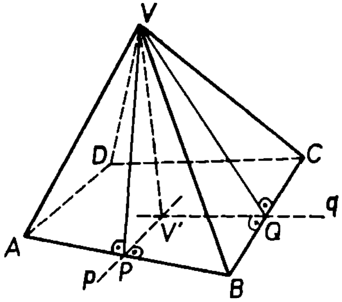
1. Přímky spojující středy protějších hran pravidelného čtyřstěnu se protínají v jednom bodě.

2. Je-li a délka hrany pravidelného čtyřstěnu, je vzdálenost středů protějších hran $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

3. Každá hrana pravidelného čtyřstěnu je kolmá na rovinu určenou středem této hrany a přímkou, na níž leží protější hrana.

*

Jistě je vám známo, že daným bodem lze vést k dané rovině jedinou kolmici.

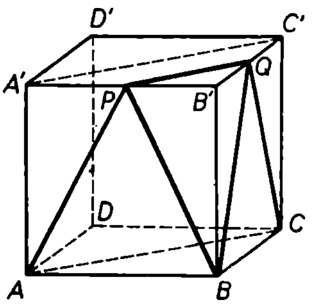


Obr. 25

Představme si, že je dán jehlan o podstavě $ABCD$ a vrcholu V a že tento jehlan je plný (např. dřevěný model), takže příslušné konstrukce můžeme provádět jen na jeho povrchu. Konstrukci paty kolmice sestrojené z vrcholu na rovinu podstavy provedeme takto (obr. 25):

Nejprve sestrojíme pobočné výšky VP, VQ ve stěnách ABV a BCV. Paty těchto výšek jsou P, Q. Pak narýsujeme na podstavě jehlanu kolmici p v bodě P ke hraně AB a kolmici q v bodě Q ke hraně BC. Průsečík V'_1 těchto kolmic je pata kolmice spuštěné z bodu V na rovinu $ABCD$. Uvedeného postupu užijeme v úloze 15.

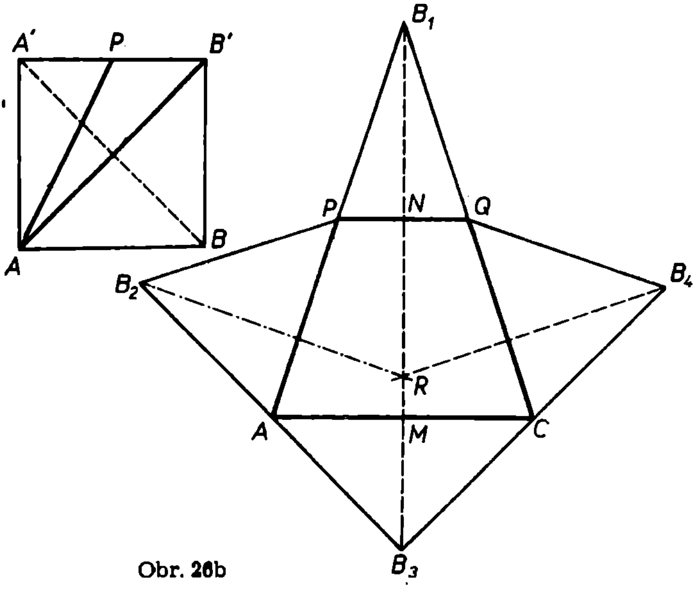
Úloha 15. *Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; střed hrany $A'B'$ je bod P. Máme určit konstruktivně vzdálenost bodu B od roviny ACP* (obr. 26a).



Obr. 26a

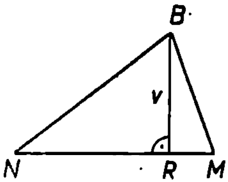
Řešení. Všechny konstrukce budeme provádět jen na povrchu krychle. Abychom mohli užít předcházejícího postupu k určení vzdálenosti bodu B od roviny ACP, sestrojíme pomocný jehlan, jehož podstava leží v rovině ACP a jehož vrchol je B. Proto sestrojíme nejprve průsek roviny ACP s krychlí. Tímto průsekem je rovnoramenný lichoběžník $ACQP$, kde Q je střed hrany $B'C'$ a PQ střední příčka trojúhelníka $A'B'C'$ (odůvodněte sami!). Za podstavu pomocného jehlanu zvolíme lichoběžník $ACQP$. Velikost výšky BR jehlanu udává hledanou vzdálenost. Určíme tedy patu R kolmice vedené z bodu B na rovinu ACP.

Sestrojíme rovnoramenný lichoběžník $ACQP$ z jeho známých stran (obr. 26b). K němu připojíme trojúhelníky PQB_1, PAB_2, ACB_3, CQB_4 tak, abychom dostali síť jehlanu $BACQP$; přitom užijeme vztahů $PQ = QB = AP = CQ$; $AB = BC$. Podle známé věty o patě kolmice spuštěné z bodu na rovinu leží bod R jednak na přímce B_1B_3, jednak na kolmicích spuštěných po řadě z bodů B_2, B_4



Obr. 26b

na přímky AP, CQ. Úsečka $BR = v$ se jeví jako výška v trojúhelníku MNB, spuštěná z bodu B na stranu MN; přitom M, N značí středy základen AC, PQ lichoběžníka $ACQP$. Sestrojíme tedy trojúhelník MNB, v němž platí $MB = MB_3$, $NB = NB_1$ a jehož třetí strana je MN, a určíme jeho výšku BR (obr. 26c).



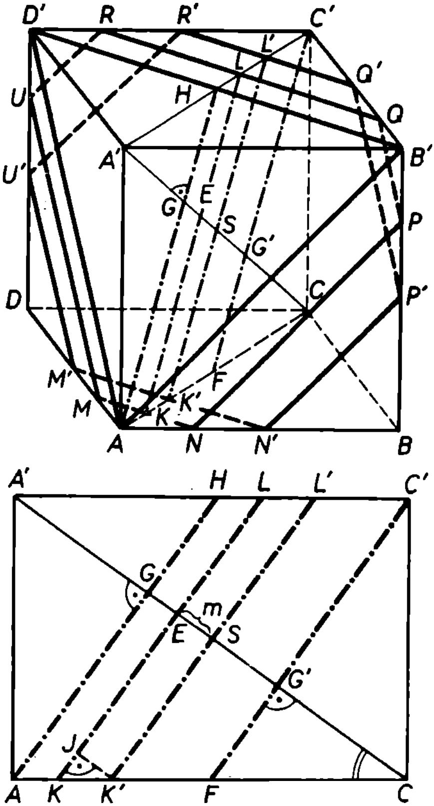
Obr. 26c

Početní řešení zde nebudeme provádět. Doporučujeme vám, abyste si je provedli sami. Sledujte provedené konstruktivní řešení a jednotlivé kroky postupu nahraďte odpovídajícími výpočty. Pro kontrolu uvádíme výsledek: $v = \frac{2}{3}a$, kde a je velikost hrany krychle.

Úloha 16. *Krychli $ABCDA'B'C'D'$ máme protnout rovinou rovnoběžnou s rovinou $AB'D'$, aby měla od středu krychle vzdálenost m. Máme zvolit vzdálenost m tak, aby průsekem byl šestiúhelník a máme určit závislost obvodu průseku na proměnné m.*

Řešení. Rovina $AB'D'$ protíná rovinu úhlopříčného řezu ACC' v přímce AH, která spojuje vrchol A se středem H stěnové úhlopříčky $A'C'$ (obr. 27a, b). Označme $AA' = a$, pak je $A'C' = a\sqrt{2}$, $A'H = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; proto platí $\Delta\, AA'H \sim \Delta\, CAA'$. Odtud plyne, že $\sphericalangle A'AH = \sphericalangle ACA'$; proto je $AH \perp CA'$. Poněvadž je přímka HB' kolmá k rovině ACC', je rovina $AB'D'$ kolmá k tělesové úhlopříčce CA'. Přímka AH protíná tuto úhlopříčku v bodě G, pro který platí $A'G = \frac{1}{3}A'C$, což snadno sami dokážete. Je-li přímka CA' kolmá k rovině $AB'D'$, je kolmá i ke všem rovinám, které jsou s touto rovinou rovnoběžné.

Každá rovina procházející bodem M, který leží uvnitř hrany AD a která je rovnoběžná s rovinou $AB'D'$ (je proto



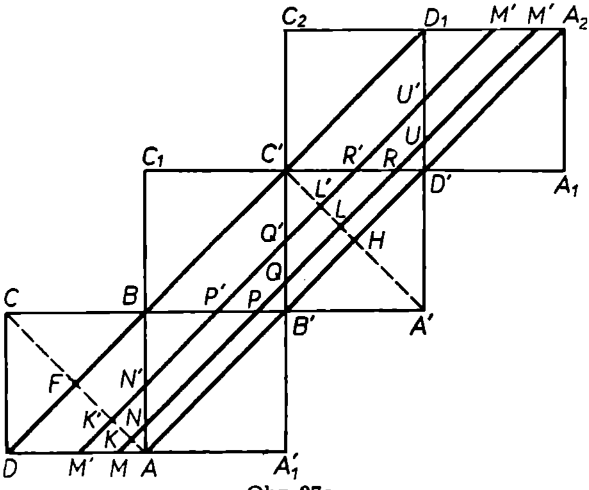
Obr. 27ab

rovnoběžná s úsečkou BD), protíná krychli v šestiúhelníku $MNPQRU$. Rovinu ACC' protíná v přímce $KL \parallel AH$ a vzdálenost středu S krychle od přímky KL je rovna m. Tyto roviny šestiúhelníkových řezů mohou protínat úsečku AC' jedině ve vnitřních bodech úsečky GG', kde bod G' je souměrně sdružený s bodem G podle středu S.

Poněvadž je $A'G = \frac{u}{3}$, kde u značí délku úhlopříčky AC', je $SG = \frac{1}{2} GG' = \frac{1}{2} GA' = \frac{u}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Je tedy číslo m udávající vzdálenost roviny řezu vázáno vztahem

$$0 \leqq m < \frac{a\sqrt{3}}{6}. \tag{18}$$

Ve zvláštním případě rovina procházející středem krychle



Obr. 27c

S a kolmá na tělesovou úhlopříčku $A'C$ prochází středy těch šesti hran krychle, které neprocházejí vrcholy A' a C. Všechny strany tohoto šestiúhelníku mají délku $\frac{a}{\sqrt{2}}$, což je také vzdálenost jeho vrcholů od středu S. Je tudíž průsekem této roviny s krychlí *pravidelný šestiúhelník*, a to $M'N'P'Q'R'U'$.

Vyjádříme velikost obvodu šestiúhelníku $MNPQRU$. K určení této velikosti můžeme výhodně užít sítě krychle sestrojené na obr. 27c. Obvod trojúhelníka $AB'D'$ se v této síti zobrazí jako úsečka $AB'D'A_2$. Poněvadž strany šestiúhelníka $MNPQRU$ jsou se stranami trojúhelníka $AB'D'$ rovnoběžné, bude obrazem tohoto šestiúhelníku úsečka $MNPQRUM'$ sítě, rovnoběžná a shodná s úsečkou $AB'D'A_2$ Z toho plyne: *Všechny řezy, v nichž protínají krychli roviny rovnoběžné s rovinou $AB'D'$ a splňující podmínku (18), mají konstantní obvod*

$$o = 3a\sqrt{2}\,.$$

Je tedy velikost obvodu řezu na čísle m nezávislá.

Vypočtěte sami obsah šestiúhelníku $MNPQRU$. Nejprve určete (obr. 27a) užitím podobných trojúhelníků ACA', $KK'J$ ($KJ \perp KL$) velikost úsečky KK' a užitím stejnolehlých trojúhelníků AMN, $AM'N'$ velikost úsečky MN. Poněvadž platí $MN + NP = a \cdot \sqrt{2}$ (viz obr. 27c), snadno se určí i velikost úsečky NP. Pak obsah P šestiúhelníku $MNPQRU$ můžete určit tak, že napřed vypočtete obsah rovnostranného trojúhelníku o straně $PN + 2\,MN$.

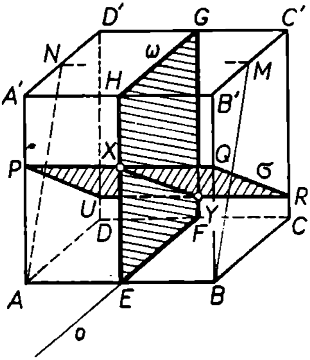
Výsledek: $P = \frac{3\sqrt{3}}{4}(a^2 - 4m^2)$. Který z těchto šestiúhelníků je největší?

★

Jako v rovině můžeme i v prostoru vyšetřovat množiny všech bodů dané vlastnosti (geometrická místa bodů). Některé množiny bodů dostaneme jistým rozšířením z útvarů planimetrických; např.: množinou všech bodů v rovině π, které mají od bodů A, B stejnou vzdálenost, je osa o úsečky A, B. Jestliže se osa o otáčí kolem přímky AB, vytvoří rovinu ω, jejíž každý bod má od bodů A, B touž vzdálenost. Rovina ω prochází středem O úsečky AB a je na ni kolmá. Nazývá se *rovinou souměrnosti úsečky* AB.

Při konstruktivních úlohách jde zpravidla o průniky množin bodů dané vlastnosti (hledáme-li body, které mají mít dvě nebo více vlastností). Jednoduchý příklad uvádíme v následující úloze:

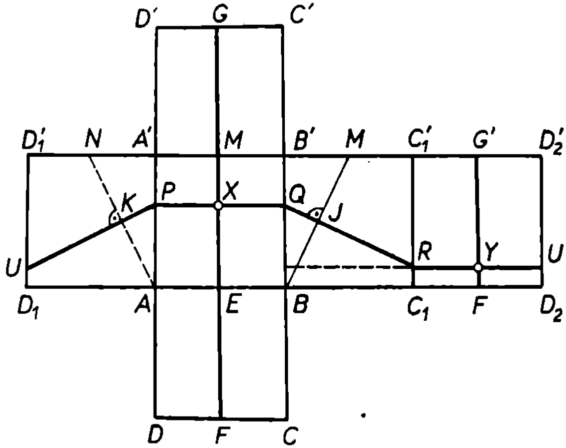
Úloha 17. *Na povrchu krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky a určete všechny body, které mají stejné vzdálenosti od vrcholů A, B a od bodu M, který je středem hrany $B'C'$.*



Obr. 28a

Řešení. Množinou všech bodů majících stejnou vzdálenost od bodů A, B je rovina souměrnosti úsečky AB. Tato rovina ω protíná povrch krychle v obvodu čtverce $EFGH$ který je množinou všech bodů na povrchu krychle, které mají od bodů A, B stejnou vzdálenost. Množinou všech bodů, které mají od bodů B, M stejnou vzdálenost, je rovina souměrnosti úsečky BM. Tato rovina ϱ protíná povrch krychle v obdélníku $PQRU$. Snadno se dokáže, že body Q, R, resp. P, U jsou vnitřními body hran BB', CC', resp. AA', DD'.

Společné body obou nalezených množin jsou hledané body. Poněvadž platí $\varrho \perp BM$ a $BM \parallel \omega$, jsou roviny ϱ a ω různoběžné. Jejich průsečnice protíná povrch krychle v bodech X, Y.



Obr. 28b

Obě množiny můžeme výhodně zobrazit v síti, což umožní určit konstruktivně i početně polohu bodů X, Y. Obvod obdélníku $EFGH$ se zobrazí v síti do úseček $FEHG$ a FG obvod obdélníku $PQRU$ v lomenou čáru $UPQRU$. Společné body obou těchto čar jsou body X, Y (obr. 28a).

Určíme ještě početně vzdálenost bodu X od hrany AB a vzdálenost bodu Y od hrany CD. Z podobnosti trojúhelníků $\Delta\, BB'M \sim \Delta\, BJQ$ (obr. 28b) plyne

$$BQ = \frac{BM}{BB'} \cdot BJ\,.$$

Poněvadž je $BM = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, $BJ = \frac{a}{4}\sqrt{5}$, $BB' = a$, je

$$BQ = \frac{5a}{8}\,.$$

Je tedy $XE = \frac{5a}{8}$. Poněvadž $\Delta\, BB'M \cong \Delta\, RLQ$ (s u s), je $LQ = B'M = \frac{a}{2}$; proto je

$$CR = BQ - LQ = \frac{5a}{8} - \frac{a}{2} = \frac{a}{8}\,.$$

Bod X leží na střední příčce EH stěny $ABB'B$ ve vzdálenosti $\frac{5}{8}a$ od hrany AB a bod Y na střední příčce FG čtverce $CDD'C'$ ve vzdálenosti $\frac{a}{8}$ od hrany CD.

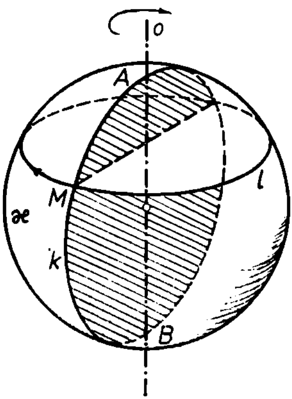
Část III

KOULE A PLOCHA KULOVÁ

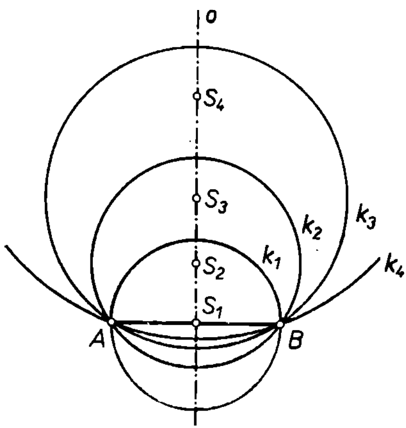
•

Školská planimetrie věnuje zvláštní pozornost dvěma obrazcům: trojúhelníku a kruhu. Obdobou těchto útvarů v prostoru jsou čtyřstěn a koule. V prvních dvou částech našeho textu jsme rozřešili několik úloh o čtyřstěnu, v této části se budeme zabývat některými úlohami o kouli a o kulové ploše.

Koule je těleso, které vznikne rotací kruhu kolem jeho libovolného průměru AB (obr. 29). Kulová plocha vznikne otáčením kružnice kolem jejího průměru AB. Přitom



Obr. 29



Obr. 30

každý bod M kružnice k s výjimkou bodů A, B se pohybuje po vedlejší nebo po hlavní kružnici kulové plochy (viz str. 30). Tak např. povrch Země můžeme pokládat přibližně za plochu, která vznikla rotací některé poledníkové kružnice kolem zemské osy. Jednotlivé body poledníkové kružnice s výjimkou pólů se pohybují po zeměpisných rovnoběžkách.

Má-li rovina s kulovou plochou společné aspoň dva body, protne ji v kružnici hlavní nebo vedlejší; hlavní kružnice vznikne tehdy, prochází-li rovina řezu středem kulové plochy.

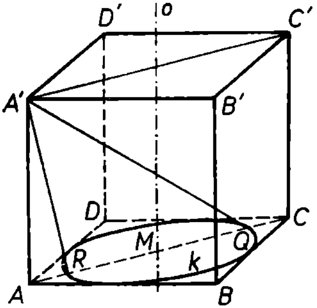
Uvedených vlastností koule a kulové plochy často využíváme, chceme-li přenést některé věty o kruhu a kružnici do prostoru. Stačí nechat příslušný útvar otáčet kolem vhodné osy a odtud vyvodit příslušné závěry pro prostorový útvar. Tak např. v planimetrii platí věta: Geometrické místo středů kružnic, které procházejí danými dvěma body A, B, je osa o úsečky AB (obr. 30). Necháme-li celý útvar otáčet kolem přímky o, dospějeme k větě: Geometrické místo středů kulových ploch, které protínají rovinu ϱ v dané kružnici $k \equiv (O; r)$, je kolmice o v bodě O k rovině ϱ.

Jiný příklad: Obdobou planimetrické věty o sečně kružnice je ve stereometrii věta o *sečné rovině* kulové plochy.

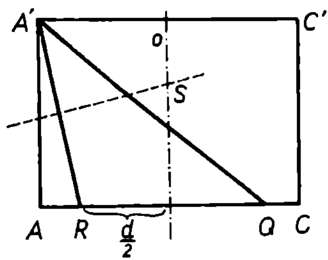
Každá rovina ϱ, která má od středu S kulové plochy o poloměru r vzdálenost $v < r$, protne tuto kulovou plochu v kružnici l (obr. 29). Středem kružnice l je pata O kolmice vedené bodem S k rovině ϱ.

Úloha 18. *Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně d. Označíme k kružnici vepsanou čtverci $ABCD$. Máme určit konstruktivně i početně poloměr r kulové plochy, která obsahuje kružnici k a bod A'.*

Řešení. Abychom mohli určit poloměr r, musíme znát střed S hledané kulové plochy. Tato kulová plocha $\varkappa$ má obsahovat kružnici k; její střed S leží proto na kolmici o vztyčené ve středu M čtverce $ABCD$ k rovině tohoto čtverce. (obr. 31a). Proto rovina ϱ určená přímkou o a bodem A', procházející středem S plochy $\varkappa$, protne tuto plochu v jisté kružnici h.



Obr. 31a



Obr. 31b

Dále budeme provádět všechny konstrukce v rovině ϱ, která obsahuje úhlopříčný řez $ACC'A'$ dané krychle.

Přímka AC roviny ϱ protne kružnici k, tedy i kulovou plochu $\varkappa$ ve dvou bodech R, Q souměrně sdružených podle bodu M. Kružnice h tedy prochází body R, Q, A', tj. je opsána trojúhelníku RQA'. Střed S kružnice h je pak středem jediné kulové plochy, která je řešením úlohy (obr. 31b).

Jako v planimetrii se při řešení konstruktivní úlohy vždy dokazuje, že sestrojený útvar skutečně splňuje všechny podmínky úlohy, tak i v naší úloze musíme dokázat, že kulová plocha se středem S a procházející bodem A' splňuje podmínky úlohy 18; pokuste se o to sami tím, že obrátíte postup předchozího rozboru.

Nyní určíme konstruktivně a početně poloměr r kulové plochy $\varkappa$. Sestrojíme trojúhelník RQA' ve skutečné velikosti (obr. 31b) a určíme střed S kružnice h opsané tomuto trojúhelníku; její poloměr r je hledaný poloměr kulové plochy $\varkappa$.

Z planimetrie víme, že poloměr r kružnice opsané libovolnému trojúhelníku ABC lze vypočítat podle vzorce

$$r = \frac{abc}{4P}, \tag{1}$$

kde a, b, c jsou velikosti stran a P obsah trojúhelníku.

Vypočteme nejprve délky všech stran trojúhelníku RQA'. Víme, že $RQ = d$. Zbývající dvě strany jsou přepony pravoúhlých trojúhelníků ARA', AQA'. Protože je $AR = \frac{1}{2}d(\sqrt{2} - 1)$, $AQ = \frac{1}{2}d(\sqrt{2} + 1)$, platí podle Pythagorovy věty

$$A'R = \frac{1}{2}d\sqrt{7 - 2\sqrt{2}}, \quad A'Q = \frac{1}{2}d\sqrt{7 + 2\sqrt{2}}.$$

Dále vypočteme obsah P trojúhelníka RQA'

$$P = \frac{1}{2}RQ \cdot AA' = \frac{1}{2}d^2.$$

Ze vzorce (1) dostaneme po úpravě

$$r = \frac{1}{8}d\sqrt{(7 - 2\sqrt{2})(7 + 2\sqrt{2})} = \frac{1}{8}d\sqrt{41} \doteq 0{,}8\,d\,.$$

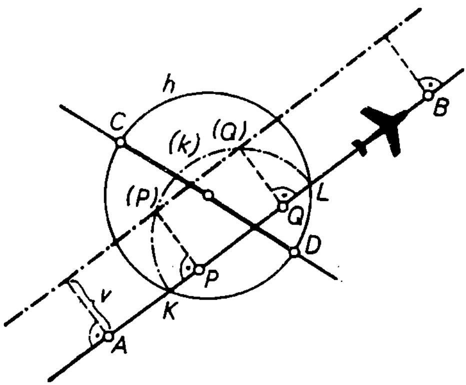
Obdobným způsobem jako úloha 18 se dají řešit také úlohy na vyhledávání středu kulové plochy procházející čtyřmi danými body nebo obsahující jisté dvě kružnice apod.

*

Než začneme řešit následující úlohu, ukážeme si další zajímavou vlastnost kulové plochy. Přitom opět užijeme znalostí z planimetrie. Tam jste poznali větu: Geometrické místo vrcholů *V* pravých úhlů, jejichž ramena procházejí danými body *A*, *B*, je kružnice opsaná nad průměrem *AB*, zvaná *Thaletova*.

Ve stereometrii platí obdobná věta o kulové ploše: Geometrickým místem vrcholů *V* pravých úhlů, jejichž ramena procházejí body *A*, *B*, je kulová plocha sestrojená nad průměrem *AB*.

Úloha 19. *Letadlo přelétá ve výšce v krajinu po přímé trati nad místy A, B. Za letu se má vyfotografovat úsek silnice označený na mapě (obr. 32) úsečkou CD. K dispozici je foto-*



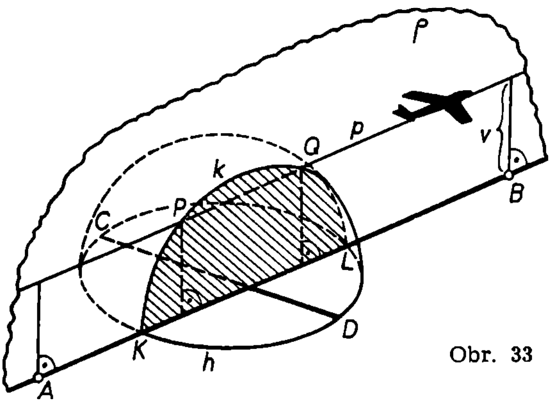
Obr. 32

aparát s objektivem typu Dagor, kterým můžeme fotografovat maximálně pod zorným úhlem 90^0 *(běžné aparáty mají zorný úhel menší). Máme určit, z kterých míst lze pořídit snímek celého objektu CD.* (Krajinu považujeme za část roviny).

Řešení. Potřebujeme zjistit množinu bodů, z nichž je vidět úsečku CD v ostrém nebo pravém zorném úhlu. Všimněme si nejdříve pravých zorných úhlů. Podle Thaletovy věty o kulové ploše je geometrickým místem vrcholů pravých zorných úhlů pro úsečku CD kulová plocha $\varkappa$ o průměru CD, a to pouze její část nad povrchem Země. Z názoru se zdá, že z vnějších bodů této kulové plochy bude vidět body C, D pod ostrým zorným úhlem. Tak tomu také je. To snadno sami odůvodníte užitím planimetrických vztahů.

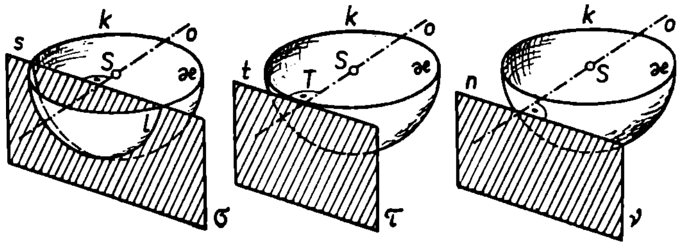
Pokud bude letadlo vně kulové plochy $\varkappa$, bude možno bezpečně vyfotografovat celý objekt CD. Vzhledem k tomu jde v dané úloze o určení průsečíků P, Q dráhy letadla s kulovou plochou $\varkappa$.

Letadlo letí po přímce p vedené ve výšce v nad terénem (obr. 33). Přímkou p proložíme svislou rovinu ϱ, sestrojíme její řez s kulovou plochou $\varkappa$; společné body přímky p s obvodem tohoto řezu jsou hledané body P, Q. Hlavní kružnici kulové plochy $\varkappa$ ve vodorovné rovině terénu označíme h. Její průsečíky s přímkou AB nechť jsou K, L. Rovina ϱ protíná kulovou plochu $\varkappa$ v kružnici k, která má



Obr. 33

úsečku KL za svůj průměr (proč?). Průsečíky P, Q přímky k jsou společné body kružnice k a kulové plochy $\varkappa$. Konstrukce je na obr. 32 zakreslena v příslušném zmenšení přímo do plánu.



Obr. 34abc

Snadno již sami usoudíte, jak řešení závisí na výšce v letadla. Dále si dobře promyslete způsob, kterým jsme určili průsečíky přímky s kulovou plochou a pokuste se ho použít na libovolnou plochu nebo těleso. Můžete se také pokusit rozřešit obdobnou úlohu o vyfotografování mostu z paluby parníku plujícího kolmo na osu mostu i v případě, že se nejedná o zorný úhel velikosti 90^0. Úlohu Thaletovy kulové plochy nahradí ovšem jiná plocha.

*

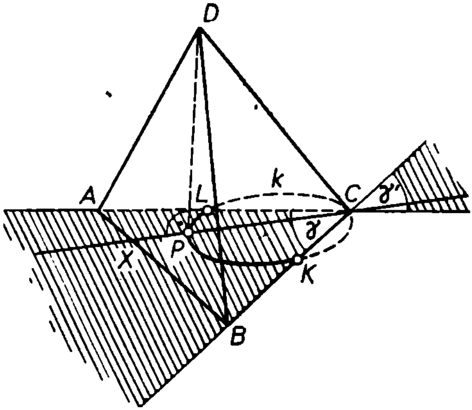
Víme, že rovina, která má od středu kulové plochy vzdálenost menší než poloměr, má s ní společnou kružnici (obr. 34a). Všimněme si tedy zbývajících případů. Rotací kružnice k a její tečny t kolem společné osy o dospějeme k větě:

Rovina, která má od středu S kulové plochy $\varkappa$ vzdálenost rovnou jejímu poloměru, má s ní společný jediný bod T. Takovou rovinu nazýváme *tečnou rovinou* plochy $\varkappa$ a bod T je *bodem dotyku* (obr. 34b). Je zřejmé, že tečná rovina τ

s bodem dotyku T je kolmá k poloměru ST kulové plochy.

Obdobně usoudíte ze vzájemné polohy kružnice a její nesečny: rovina, která má od středu kulové plochy vzdálenost větší než poloměr, nemá s ní žádný společný bod, je to tzv. *nesečná rovina* (obr. 34c).

Úloha 20. *Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod X probíhá hranu AB. Máme vyšetřit geometrické místo pat P kolmic vedených z vrcholu D na přímky CX.*



Obr. 35

Řešení. První, čeho si všimneme, je, že úhel $\sphericalangle CPD$ má být pravý. Body C, D jsou přitom pevné. Hledané body P leží na Thaletově kulové ploše $\varkappa$ sestrojené nad průměrem CD. Body P musí ležet také na přímkách CX. Tyto přímky vyplní dvojici vrcholových úhlů $\gamma \equiv \sphericalangle ACD$, γ'. Všechny body P musíme hledat tudíž v průniku kulové plochy $\varkappa$ s dvojicí úhlů γ, γ' (obr. 35).

Nyní musíme zjistit, zda také naopak každý bod tohoto průniku má požadovanou vlastnost. Zvolme proto libovolný bod P společný kulové ploše $\varkappa$ a úhlům γ, γ'. Je-li $P \not\equiv C$, potom náleží hledanému geometrickému místu $\mathbf{M}$, neboť rovina CDP protne rovinu ABC v přímce, která prochází dutým úhlem ACB a protíná úsečku AB v bodě X. Bod P je pak zřejmě pata kolmice spuštěné z bodu D na přímku CX. Nechť je $P \equiv C$; bod C pak náleží hledanému geometrickému místu $\mathbf{M}$ jen v tom případě, když tímto bodem prochází aspoň jedna přímka patřící dvojici vrcholových úhlů γ, γ' a kolmá k CD. Tento případ nastane např. vždy, je-li hrana CD kolmá k rovině ABC. Tak dostaneme výsledek:

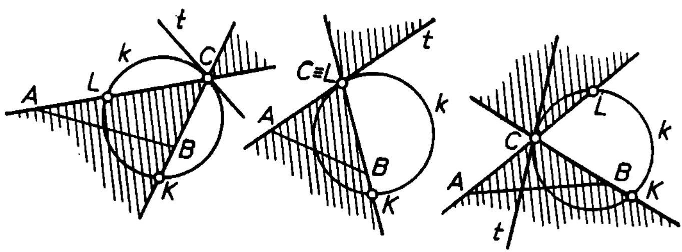
Množina $\mathbf{M}$ *je průnik dvojice vrcholových úhlů* γ, γ' *s kulovou plochou* $\varkappa$, *někdy bez bodu* C, *jindy s bodem* C.

Všimněme si ještě podrobněji průniku plochy $\varkappa$ a dvojice úhlů γ, γ'. Máme tedy vyšetřovat společné body dvou prostorových útvarů. Ale i tento problém můžeme převést v podstatě na planimetrickou úlohu. Zjistíme nejdříve, jaký útvar je společný rovině ABC a kulové ploše $\varkappa$ a pak můžeme již zkoumat jenom průnik tohoto útvaru s dvojicí úhlů γ, γ'.

Rovina ABC má s kulovou plochou $\varkappa$ společný v každém případě bod C (proč?), mohou tedy nastat pouze dvě možnosti: Rovina ABC je buď tečnou rovinou plochy $\varkappa$ a nemá tedy s $\varkappa$ kromě bodu C žádný další společný bod, anebo je sečnou rovinou a má s $\varkappa$ společnou kružnici k.

a) Je-li rovina ABC tečná, potom je $CD \perp ABC$. Bod C pak patří hledané množině $\mathbf{M}$ a je to současně její jediný bod.

b) Nechť rovina ABC má s kulovou plochou $\varkappa$ společnou kružnici k. Průnik této kružnice s dvojicí úhlů γ, γ' může být rozmanitý (viz obr. 36abc). Protože kružnice k prochází vždy bodem C, skládá se tento průnik vždy z jistého



Obr. 36 abc

oblouku KL kružnice k a z bodu C, který buď zmíněnému oblouku patří (obr. 36bc) nebo nepatří (obr. 36a). Víme, že tento oblouk až snad na bod C hledané množině $\mathbf{M}$ patří; zbývá tudíž prozkoumat bod C.

Aby bod C patřil množině $\mathbf{M}$, musí jím procházet přímka t kolmá k CD a patřící dvojici úhlů γ, γ'. Protože má být $t \perp CD$, musí přímka t ležet v tečné rovině kulové plochy $\varkappa$ vedené bodem C. Pak však kromě bodu C nesmí mít s plochou $\varkappa$ žádný společný bod a tedy také nesmí mít společný bod s kružnicí k, která na $\varkappa$ leží. Této podmínce vyhovuje v rovině ABC jedině tečna t kružnice k v bodě C. Jestliže tedy tečna t kružnice k v bodě C náleží dvojici vrcholových úhlů γ, γ', pak bod C patří množině $\mathbf{M}$ (obr. 36bc), v opačném případě bod C množině $\mathbf{M}$ nepatří (obr. 36a).

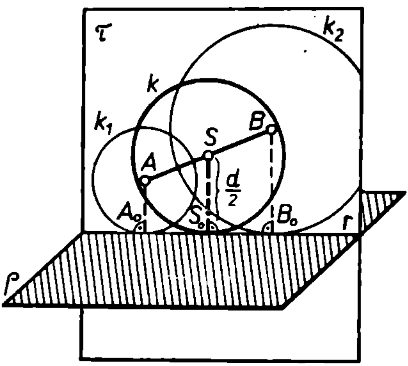
Při řešení úlohy 20 jsme se nezmínili o tom, jak lze sestrojit střed S kružnice k. Pokuste se o to sami. Podaří-li se vám to, pokuste se určit střed S v síti daného čtyřstěnu.

Jistě jste si všimli výhodného postupu při vyšetřování průniku dvou geometrických útvarů, z nichž jeden je částí roviny. Zjistěte podobně, co může být např. průnikem čtyřstěnu nebo krychle s danou kružnicí.

Úloha 20 patřila do skupiny příkladů na vyšetřování geometrických míst bodů. Pravděpodobně jste vyřešili už celou řadu takových úloh. Zamysleli jste se však někdy nad tím, že vedle geometrických míst bodů neboli množin *všech bodů dané vlastnosti* mohou existovat i *množiny jiných geometrických útvarů?* Na ukázku uvedeme jeden příklad.

Úloha 21. *Je dána úsečka AB velikosti a a číslo d > a. Máme vyšetřit množinu všech rovin, které mají od krajních bodů úsečky AB stálý součet vzdáleností, rovný d.*

Řešení. Nejdříve si musíme uvědomit, jaký můžeme očekávat asi výsledek našeho vyšetřování. Naše znalosti různých množin rovin jsou velmi skrovné (znáte jistě množinu rovin svazku apod.); zaměříme proto své snažení k tomu, abychom našli nějakou jednoduchou konstrukci umožňující sestrojit snadno libovolnou rovinu hledané množiny. Budeme — podobně jako u konstruktivních úloh — předpokládat, že známe libovolnou rovinu hledané množiny **M**, a budeme hledat nutné podmínky pro její sestrojení.



Obr. 37

Nechť tedy má rovina ϱ (obr. 37) od krajních bodů úsečky AB součet vzdálenosti d. Označme A_0, B_0 paty kolmic spuštěných z bodů A, B na rovinu ϱ. Dokážeme, že $AA_0 + BB_0 = d$.

Protože kolmice k téže rovině jsou rovnoběžné, leží body A, A_0, B, B_0 v jedné rovině $\tau \perp \varrho$ procházející přímkou AB. Roviny τ a ϱ mají společnou průsečnici r, která má od bodů A, B stejný součet vzdáleností jako rovina ϱ. Známe-li však v rovině τ přímku r, dovedeme už příslušnou rovinu ϱ sestrojit. Stačí proto zkoumat v libovolné rovině τ procházející přímkou AB množinu přímek r, které mají od bodů A, B součet vzdáleností d.

Přímka r je zřejmě společnou tečnou kružnic $k_1 \equiv \equiv (A, AA_0)$, $k_2 \equiv (B, BB_0)$, kde $AA_0 + BB_0 = d$. Protože středná $AB = a$ kružnic k_1, k_2 je kratší než součet poloměrů ($a < d$), nemohou tyto kružnice mít společnou vnitřní tečnu. Žádná přímka r neprotíná tedy úsečku AB. Pokud rovnoběžné přímky AA_0, BB_0 nesplývají, jsou body A, A_0, B_0, B (v tomto pořadí) vrcholy lichoběžníku AA_0B_0B se základnami AA_0, BB_0. Pro jeho střední příčku SS_0 platí

$$SS_0 = \frac{1}{2}(AA_0 + BB_0) = \frac{1}{2}d\,.$$

Protože jsou základny AA_0, BB_0 lichoběžníka AA_0B_0B kolmé k přímce r, je i jeho střední příčka SS_0 kolmá k přímce r. Má tedy přímka r od středu S úsečky AB vzdálenost $\frac{1}{2}d$.

K stejnému výsledku dojdeme i v případě, že přímky AA_0, BB_0 splývají. Zřejmě platí o každé přímce vzdálené od bodu S o délku $\frac{1}{2}d$, že součet jejích vzdáleností od bodu A, B je roven d.

Množinu přímek r roviny τ tvoří všechny tečny kružnice $k \equiv (S; \frac{1}{2}d)$. Odtud již snadno odvodíte tvrzení: *Každá rovina ϱ z hledané množiny* **M** *náleží mezi tečné roviny kulové plochy se středem v bodě S a s poloměrem rovným $\frac{1}{2}d$.*

Obráceně platí, že každá tečná rovina kulové plochy $\varkappa$ patří hledané množině $\mathbf{M}$; to si můžete ověřit sami.

Jistě byla tato úloha pro vás nová. Doporučujeme vám proto, abyste se pokusili rozřešit obdobnou úlohu pro tři různé body ležící v přímce.

Můžeme vyšetřovat i různé množiny přímek daných vlastností. Pokuste se vyšetřit např. množinu přímek nebo rovin, které mají v prostoru od dvou různých bodů A, B daný poměr vzdáleností.

*

Uvedeme ještě jednu úlohu o geometrických místech bodů, a to příklad jiného typu, než byly dřívější. Představte si nějaké těleso, které se může libovolně pohybovat uvnitř druhého tělesa. Může nás např. zajímat, jakou množinu vyplní při těchto pohybech určitý pevně zvolený bod onoho volně se pohybujícího tělesa. Nebo můžeme studovat množinu bodů, kterou vyplní všechny body pohybujícího se tělesa.

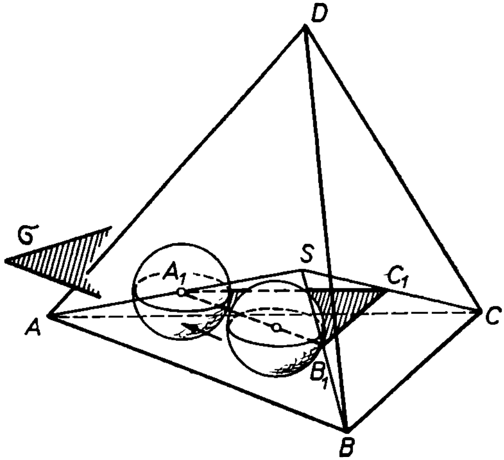
Úloha 22. *Je dán pravidelný dutý čtyřstěn $ABCD$, jehož hrana má délku a. Uvnitř čtyřstěnu po jeho dně (podstavě ABC) se volně pohybuje kulový míč. Jeho poloměr je menší než poloměr r koule vepsané do daného čtyřstěnu. Máme vyšetřit množinu všech bodů, které může zaujmout střed míče.*

Řešení. Předně si musíme vysvětlit, co bude cílem našeho vyšetřování. Jednak chceme vědět, jaký útvar vyplní střed pohybující se koule, jednak chceme zjistit, jak se dá tento útvar narýsovat, resp. jak se dají vypočítat jeho určující prvky z dané délky a a z poloměru ϱ.

Není těžké uhodnout, že středy míčů, tj. koulí $\varkappa$ o poloměru ϱ se pohybují v rovině σ, která má od roviny ABC

vzdálenost ϱ, a že středy koulí vyplní jistý trojúhelník (obr. 38) ležící v rovině ϱ a uvnitř čtyřstěnu $ABCD$.

Narazí-li míč např. na stěnu ABD, může se podle ní pohybovat stále se jí dotýkaje po jisté úsečce A_1B_1 rov-



Obr. 38

noběžné s hranou AB. Tato názorná představa se zcela zpřesní, užijeme-li místo popisu názorného valení míče matematicky přesného pojmu posunutí koule $\varkappa$ v prostoru ve směru přímky AB. Body dotyku koule $\varkappa$ se stěnami ABC, ABD se potom opravdu posunují v těchto rovinách, neboť se jedná o posunutí ve směru jejich průsečnice. Podobné úvahy platí pro ostatní pobočné stěny čtyřstěnu $ABCD$. Vyplní tedy středy koulí $\varkappa$ jistý trojúhelník $A_1B_1C_1$, jehož strany jsou rovnoběžné s příslušnými stranami trojúhelníka ABC. Proto je trojúhelník $A_1B_1C_1$ rovnostranný.

Představme si nyní míč, který má střed v bodě A_1, potom se kromě podstavy dotýká stěn ABD a ACD. Mysleme si, že míč více nafukujeme (nebo naopak vypouštíme vzduch), přičemž požadujeme, aby se neustále dotýkal uvedených tří stěn. Při nafukování splyne nakonec střed nafouklého míče se středem S koule vepsané čtyřstěnu $ABCD$. Dále jej nelze zvětšovat, protože by se bez deformace do čtyřstěnu nevešel. Při vypuštění veškerého vzduchu změnil by se míč v bod splývající s bodem A. Při těchto změnách se střed proměnlivého míče pohybuje po úsečce AS. Tuto představu můžeme opět zpřesnit, použijeme-li místo ní pojmu prostorové stejnolehlosti o středu A.Obdobnou úvahu lze provést pro ostatní vrcholy B_1, C_1 trojúhelníka $A_1B_1C_1$.

Z toho vyplývá: Body A_1, B_1, C_1 leží na příslušných pobočných hranách AS, BS, CS čtyřstěnu $ABCS$. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ je pak řezem tohoto čtyřstěnu s rovinou σ.

Připomeňme ještě jednou: Body A_1, B_1, C_1 leží na polopřímkách SA, SB, SC a přitom je $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$. Z toho podobně jako v planimetrii odvodíme, že trojúhelníky ABC, $A_1B_1C_1$ jsou stejnolehlé (prostorově) se středem stejnolehlosti S. Protože roviny $A_1B_1C_1$, ABC mají od bodu S po řadě vzdálenosti $r - \varrho$, r, je poměr této stejnolehlosti $k = \dfrac{r - \varrho}{r}$. Proto, je-li a_1 délka strany trojúhelníku $A_1B_1C_1$, potom je $a_1 = ka = \dfrac{r - \varrho}{r} a$. Pokuste se vyslovit definici stejnolehlosti v prostoru a odůvodnit nalezený výsledek.

Hledaná množina **M** *středů koulí je tedy rovnostranný trojúhelník, který má stranu* $a_1 = \dfrac{r - \varrho}{r} a$.

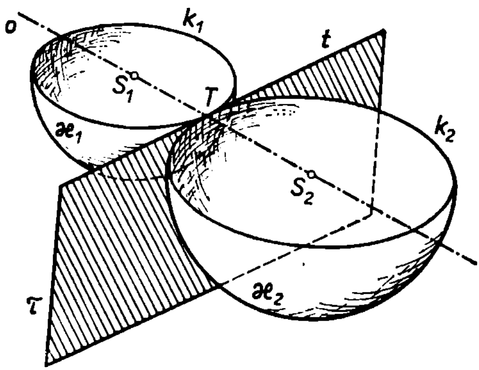
Tím je úloha v podstatě rozřešena. Ale zajímavé je jít ve vyšetřování ještě dále: určit podmínky řešitelnosti a vyjádřit velikost a_1 pouze pomocí poloměru ϱ a velikosti a. Můžete se přesvědčit, že pro ϱ platí podmínka

$$0 < \varrho < \frac{a}{12}\sqrt{6} = r\,.$$

Pro velikost a_1 pak vyjde

$$a_1 = a - 2\varrho\sqrt{6}\,.$$

Řešení uvedeného příkladu bylo do jisté míry jen náznakové. Ukazuje však důležitou věc. Když pátráme po řešení úlohy, nemůžeme se vyhýbat pokusům, dohadům



Obr. 39

a v geometrii ani názoru a měření. Ovšem výsledek, který takto získáme, musíme vždy dokázat.

*

Prozatím jsme v našich úlohách studovali jedinou kouli nebo kulovou plochu. Všimněme si na ukázku alespoň jednoho příkladu, kde půjde o vzájemnou polohu dvou kulových ploch. Představme si v libovolné rovině ϱ dvě kružnice k_1, k_2 dotýkající se vně v bodě T. Budou-li se tyto kružnice otáčet kolem své osy o, vzniknou dvě kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ (obr. 39), které mají jediný společný bod T; říkáme, že *se dotýkají v bodě* T. Jejich společná tečna rovina τ vznikne rotací společné tečny t kružnic k_1, k_2. Máme-li naopak dvě kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ dotýkající se vně v bodě T a protneme je rovinou procházející jejich osou, dostaneme dvě kružnice k_1, k_2 dotýkající se také vně v bodě T.

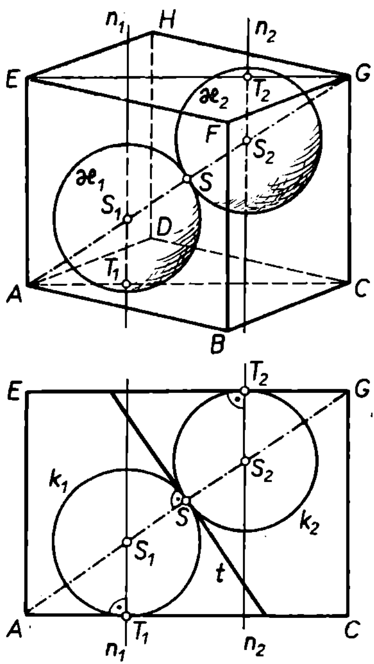
Podle toho na základě vzájemné polohy dvou kružnic v rovině můžete sami provést úplnou klasifikaci vzájemné polohy dvou kulových ploch.

Úloha 23. *V krabici tvaru krychle mají být umístěny dva dotýkající se stejně velké míče o průměru d. Jeden z nich se má dotýkat dna a dvou sousedních pobočných stěn, druhý víka krabice a zbývajících pobočných stěn. Máme určit početně i konstruktivně rozměr krabice.*

Řešení. Krabice nechť je krychle $ABCDEFGH$. Snadno uhodneme, že středy S_1, S_2 uvažovaných kulových ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ (míčů) budou ležet na některé tělesové úhlopříčce krychle $ABCDEFGH$, např. na úhlopříčce AG (obr. 40a).*) To plyne z toho, že kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ se dotýkají po řadě každá tří stěn o společném vrcholu A, resp. G, které jsou souměrně sdružené podle středu S krychle. Odtud také vyplývá, že plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ se v bodě S dotýkají.

Bod dotyku T_1 kulové plochy $\varkappa_1$ s podstavou $ABCD$ krychle leží na kolmici n_1 vedené středem S_1 k rovině $ABCD$. Podobně bod dotyku T_2 kulové plochy $\varkappa_2$ s pod-

*) Pokuste se tento fakt dokázat.



Obr. 40ab

stavou $EFGH$ leží na kolmici n_2 vedené z bodu S_2 k rovině $EFGH$. Přímky n_1, n_2 leží v rovině $\varrho \equiv ACGE$ úhlopříčného řezu krychle. Protneme-li nyní naši skupinu těles rovinou ϱ, převedeme úlohu 23 na úlohu planimetrickou v rovině ϱ. Rovina ϱ protne krychli v obdélníku $ACGE$ se středem S a kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ve shodných hlavních kružnicích k_1, k_2, které se v bodě S vně dotýkají (obr. 40b). Kružnice k_1 se dále dotýká přímky AC v bodě T_1 a kružnice k_2 přímky EG v bodě T_2. Naše úloha se tak převádí na určení velikosti a kratší strany obdélníka $ACGE$ ze vztahů patrných z obr. 40b. Protože je trojúhelník AT_1S_1 podobný trojúhelníku ACG (podle věty u u), platí

$$AS_1 = S_1T_1 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} d \cdot \sqrt{3}.$$

Jsou-li tedy dány kružnice k_1, k_2, dovedeme sestrojit úhlopříčku AG obdélníka $ACGE$ a tím i tento obdélník.

Zbývá vypočíst délku strany $AE = a$. Velikost úhlopříčky AG můžeme vyjádřit dvojím způsobem, pomocí průměru d a pomocí a takto:

$$AG = 2(AS_1 + S_1S) = 2\left(\frac{1}{2}d\sqrt{3} + \frac{1}{2}d\right) = d(\sqrt{3} + 1),$$

$$AG = a \cdot \sqrt{3}\,. \tag{2}$$

Odtud již snadno vypočteme

$$a = \frac{1}{3}d(3 + \sqrt{3})\,. \tag{3}$$

Nyní je třeba ještě ukázat, že lze do krychle o hraně $a = \frac{1}{2}d(3 + \sqrt{3})$ umístit výše uvedeným způsobem dvě kulové plochy o průměru d, tj. provést zkoušku správnosti našeho řešení. Postupem, jehož jsme výše použili, zjistíme: Jestliže jsou v krychli o hraně a uloženy požadovaným způsobem dvě shodné koule, pak lze určit jejich poloměr d' ze vztahů obdobných vztahům (2). Snadno pak vypočteme, že

$$d' = \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{3})\,.$$

Dosadíme-li za a ze vzorce (3), vyjde opravdu $d' = d$.

Úlohu 23 můžeme různě obměňovat. Můžeme měnit tvar krabice, počet míčů i jejich poloměry apod. Učiníme-li předem úmluvu, jak mají být koule rozmístěny, nečiní obyčejně řešení příslušné úlohy velkých potíží. Často také uhodneme i nejvýhodnější způsob uložení koulí, při kterém má krabice daného tvaru nejmenší rozměry. Důkazy však bývají mnohem obtížnější.

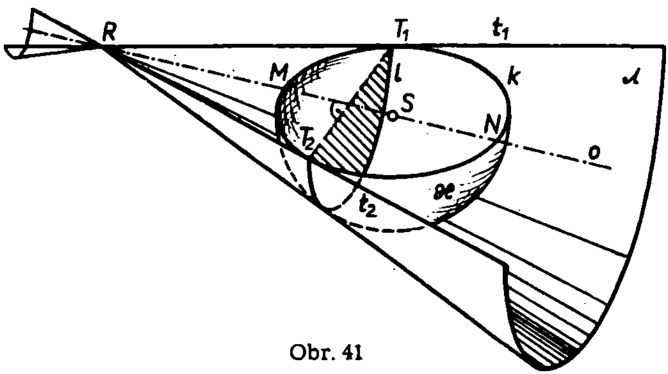
*

V předcházejících úlohách jsme dosud nevěnovali pozornost vzájemné poloze *přímky* a kulové plochy. Povšimneme si jednoho případu — kulové plochy a její tečny.

Tečna kulové plochy je přímka, která má s kulovou plochou jediný společný bod (bod dotyku).

Představte si dále kružnici k a její tečny t_1, t_2. s body dotyku T_1, T_2, vedené libovolným bodem R, který leží v rovině kružnice k. Víme, že délky tečen t_1, t_2, tj. velikosti úseček RT_1, RT_2 jsou si rovny. Přímka $o \equiv RS$ je osou úhlu $\sphericalangle T_1RT_2$. Necháme-li tento útvar otáčet kolem přímky o, vznikne otáčením kružnice k kulová plocha $\varkappa$. Přímky t_1, t_2 vyplní při tomto pohybu rotační kuželovou plochu λ, plochu tečen kulové plochy $\varkappa$, které jsou k ní vedeny z bodu R (obr. 41). Kuželová plocha λ se dotýká kulové plochy $\varkappa$ podél kružnice l, která vznikne otáčením bodů T_1, T_2 kolem osy o. Délky všech tečen z bodu R ke kulové ploše $\varkappa$ jsou si zřejmě rovny.

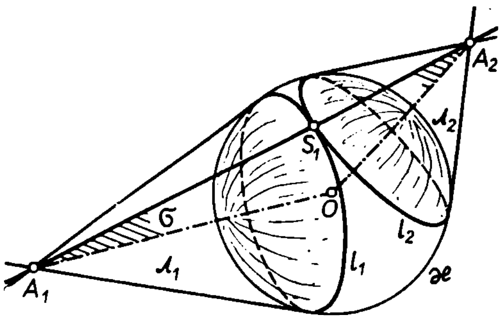
Úloha 24. *Na Zemi jsou čtyři pozorovací stanice S_1, S_2, S_3, S_4. Bod S_1 je v daném okamžiku jediné místo na Zemi, z kterého můžeme (teoreticky) pozorovat současně družice A_1, A_2. Tutéž vlastnost má v témže okamžiku bod S_2 a družice A_2, A_3, dále bod S_3 a družice A_3, A_4 a konečně bod S_4*



Obr. 41

a družice A_4, A_1. Máme dokázat, že body S_1, S_2, S_3, S_4 leží na kružnici. (Zemi pokládáme za kouli.)

Řešení. Předně si musíme uvědomit vzájemné polohy jednotlivých stanic a příslušných dvojic družic. Např. družici A_1 je vidět ze všech míst přivrácené části povrchu

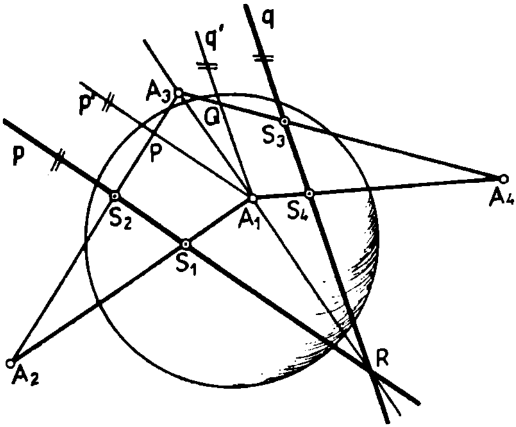


Obr. 42

Země, která je omezena dotykovou kružnicí l_1 kuželové plochy λ_1 tečen vedených z bodu A_1 k povrchu Země (obr. 42). Tato část kulové plochy je určitý *kulový vrchlík*. V případě, který je nakreslen v obr. 41, mohou např. vzniknout dva vrchlíky otáčením oblouků T_1MT_2 a T_1NT_2 kolem přímky o.

Podobně družice A_2 je viditelná z vrchlíku, který je omezen dotykovou kružnicí l_2 kuželové plochy λ_2 tečen vedených z bodu A_2 k povrchu Země (obr. 42). Oba zmíněné vrchlíky musí mít podle podmínky úlohy jediný společný bod S_1. To může nastat pouze v případě, že kružnice l_1, l_2 mají jediný společný bod — totiž bod S_1. Rovina $\sigma \equiv$ $\equiv A_1A_2O$, kde O je střed kulové plochy $\varkappa$, je společnou rovinou souměrnosti kuželových ploch λ_1, λ_2 i kulové plochy $\varkappa$. Kdyby bod S_1 ležel mimo rovinu σ, ležel by bod S_1' souměrně sdružený s S_1 podle σ jak na kulové ploše $\varkappa$, tak na kuželových plochách λ_1, λ_2, a tedy i na kružnicích l_1, l_2. Tyto kružnice by pak měly společné *dva* body S_1, S_1'. Dokázali jsme tedy, že bod S_1 leží v rovině σ.

Přímky A_1S_1, A_2S_1 jsou tečny kulové plochy v bodě S_1 a přitom leží v téže rovině σ; proto splynou, tj. body A_1, A_2, S_1 leží v přímce.



Obr. 43

Vzhledem k tomu můžeme formulovat úlohu 24 geometricky takto (obr. 43): *Je dána kulová plocha $\varkappa$, které se dotýkají úsečky A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 pořadě v bodech S_1, S_2, S_3, S_4. Máme dokázat, že tyto body leží na kružnici.*

Protože body S_1, S_2, S_3, S_4 leží na kulové ploše, stačí o nich dokázat, že leží v jedné rovině. K tomu opět stačí dokázat, že přímky $p \equiv S_1S_2$, $q \equiv S_3S_4$ jsou buď rovnoběžné nebo různoběžné. To dokážeme takto:

Protože jsou si rovny délky všech tečen vedených z bodu A_1 ke kulové ploše, můžeme zavést označení: $A_1S_1 = A_1S_4 = u$; a obdobně $A_2S_1 = A_2S_2 = v$; $A_3S_2 = A_3S_3 = x$; $A_4S_3 = A_4S_4 = y$. Veďme bodem A_1 rovnoběžky p', q' s přímkami $p \equiv S_1S_2$, $q \equiv S_3S_4$ (obr. 43). Označme $P \equiv p'.A_2A_3$, $Q \equiv q'.A_3A_4$. Z podobných trojúhelníků $A_2S_1S_2$, A_2A_1P plyne $PS_2 = A_1S_1 = u$. Obdobně odvodíme $QS_3 = A_1S_4 = u$. Je-li $u = x$, splynou P, Q s bodem A_3. Potom však snadno zjistíme, že $q \parallel p$.

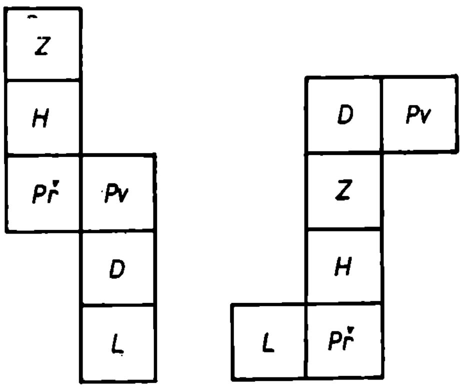
Je-li $u \neq x$, jsou body P, Q, A_3 navzájem různé. Pak stejnolehlost se středem A_3 převádějící přímku q' v přímku q má týž koeficient k jako stejnolehlost se středem A_3 převádějící přímku p' v přímku p. (Jak pro $x > u$, tak pro $x < u$, je $k = \frac{x - u}{x}$. Přesvědčte se!). Je tedy obrazem bodu A_1 v obou stejnolehlostech týž bod R, kterým procházejí i přímky p, q. Tím je náš úkol vyřešen.

ÚLOHY KE CVIČENÍ

●

(K části I)

1. Na obr. 44 jsou nakresleny dvě sítě krychle. (Stěny jsou označeny takto: Př - přední, Z - zadní, H - horní, D - dolní, Pv - pravá, L - levá). Určete nejdelší úsečku, která se dá umístit do každé z obou sítí a vypočtete její délku. Načrtněte lomenou čáru, v kterou přejde tato úsečka při



Obr. 44

složení krychle. Zjistěte, zda lze spojit koncové body této lomené čáry jinou kratší lomenou čarou vedenou po povrchu krychle.

2. Je dán rotační kužel s vrcholem V, úsečka $AB = 2r$ je průměr jeho podstavy. Na stranách AV, BV kužele jsou zvoleny body C, D tak, že platí $AC = BD$. Zjistěte, která spojnice bodů C, D po povrchu kužele je kratší: zda lomená čára $CABD$ nebo polokružnice ležící v rovině rovnoběžné s podstavou.

3. Dvě místa A, B na severní polokouli mají zeměpisné šířky φ_1, φ_2, jejich zeměpisné délky se liší o 90^0. Vyjádřete, jak závisí nejkratší vzdálenost míst A, B vedená po povrchu Země na číslech φ_1, φ_2. (Povrch Země pokládáme za kulovou plochu.)

4. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Oddělte od ní rovinným řezem čtyřstěn $B'XYZ$ tak, aby kružnice vepsané trojúhelníkům $B'XZ$, XYZ se navzájem dotýkaly.

5. Rotační válec s výškou v má za podstavu kruh o poloměru r. Obdélník $ABCD$, jehož rovina prochází středem osy válce, má vrcholy A, B na obvodu dolní podstavy, vrcholy C, D na obvodu horní podstavy. Vyjádřete obsah y obdélníka $ABCD$ jako funkci délky $AB = x$. Zjistěte, který z obdélníků $ABCD$ má největší obsah, a sestrojte ho.

6. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$, pro něž platí $a < b < c$. Do kvádru je umístěna krychle $KLMNK'L'M'N'$, jejíž hrany $K'L'$, MN jsou rovnoběžné s hranou AB a vrcholy K', L', M, N leží po řadě na hranách AA', BB', CC', DD' daného kvádru. Vyšetřete geometrické místo a) vrcholů K', b) středů všech těchto krychlí.

7. Rovinnými řezy byly odděleny rohy dané krychle tak, že ve stěnách krychle vznikly pravidelné osmiúhelníky. Sestrojte jeden z těchto osmiúhelníků a vyjádřete délku jeho strany pomocí délky hrany dané krychle. Vypočtěte objem vzniklého tělesa.

8. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, M je střed hrany BC. Určete všechny body povrchu krychle, které mají stejné vzdálenosti od bodů B, D', M.

9. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; střed hrany $A'B'$ je označen P. Určete vzdálenost bodu B od roviny ACP, a to konstruktivně i početně.

10. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$. Sestrojte stranu kosočtverce $AXC'Y$, jehož vrcholy X, Y leží po řadě na hranách BB', DD'. Vypočtěte délky úseček BX, DY. Zjistěte, zda kosočtverec $AXC'Y$ může být čtvercem.

11. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$, jehož stěna $ABCD$ je čtverec; E je pata kolmice spuštěné z bodu B na přímku AC'. Sestrojte skutečnou velikost obrazce, který je průsekem kvádru s rovinou BDE. Vyjádřete obsah tohoto obrazce pomocí rozměrů daného kvádru.

12. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$. Zjistěte, jaký útvar vyplní střední příčky všech lichoběžníků, v nichž protínají kvádr roviny procházející přímkou BD.

13. Je dána krychle a ostroúhlý trojúhelník **T**. Urče-

te rovinu, která protne danou krychli v trojúhelníku shodném s trojúhelníkem **T**.

14. Podstava kolmého hranolu je rovnoběžník $ABCD$, jehož vnitřní úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost 135^0. Zjistěte výpočtem, zda je možné vést vrcholem A rovinu, která protne daný hranol ve čtverci.

(K části III)

15. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ a kulová plocha, která prochází a) všemi vrcholy dané krychle; b) středy všech hran dané krychle; c) středy všech stěn dané krychle. Určete konstruktivně a početně poloměr kružnice, v níž protíná každou z těchto kulových ploch rovina $A'BC'$.

16. Je dána krychle a kulová plocha, která prochází středy všech jejích stěn. V průsečíku tělesové úhlopříčky krychle s danou kulovou plochou vedeme k této ploše tečnou rovinu τ. Sestrojte skutečnou velikost průseku roviny τ s krychlí a vyjádřete jeho obsah pomocí délky hrany dané krychle.

17. Poklop má tvar hlavního vrchlíku kulové plochy o poloměru r.*) Tímto poklopem je přikryta a) co největší krychle, b) co největší čtyřstěn, c) co největší koule spočívající na vodorovné rovině. Které z přikrytých těles má největší objem a které má největší povrch?

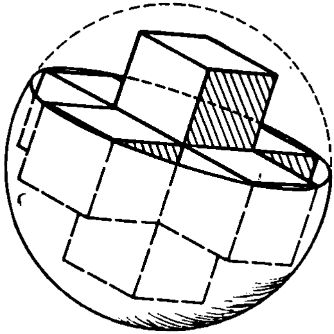
---

*) Hlavní vrchlík je vrchlík, jehož výška je rovna poloměru kulové plochy.

18. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; trojúhelníku ABD je vepsána kružnice k. Určete početně a konstruktivně poloměr kulové plochy, která obsahuje kružnici k a dotýká se roviny BCB'.

19. Na kulové ploše o poloměru r leží šest shodných kružnic, z nichž každá se dotýká čtyř sousedních. Určete konstruktivně i početně poloměr těchto kružnic.

20. Na hlavním vrchlíku kulové plochy leží tři shodné kružnice, z nichž každé dvě se dotýkají navzájem a z nichž každá se dotýká hlavní kružnice omezující vrchlík. Určete početně i konstruktivně poloměr těchto tří kružnic.



Obr. 45

21. Do koule daného poloměru r má být vepsán (podle obr. 45) „prostorový kříž“ složený ze sedmi shodných krychlí. Vyjádřete délku hrany krychle jako funkci poloměru r.

PROBLÉMY

•

1. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$. Přímkou AC jsou vedeny všechny roviny, které protnou kvádr v lichoběžnících. Určete geometrické místo průsečíků úhlopříček všech těchto lichoběžníků. Zjistěte, zda je mezi nimi lichoběžník, který má při vrcholu A úhel velikosti 60^0. Určete strany tohoto lichoběžníka v případě, že je $a = b$.

[Pokuste se nalézt dvě roviny, v nichž leží proměnný průsečík úhlopříček. Druhou část úlohy řešte výpočtem.]

2. Do krychle $ABCDA'B'C'D'$ je vepsán rovnostranný trojúhelník $D'XY$, jehož vrcholy X, Y leží po řadě ve stěnách $ABB'A'$ a $BCC'B'$ a jehož strana XY je rovnoběžná s rovinou ABC. a) Vyšetřete množinu vrcholů X všech takových trojúhelníků. b) Mezi rovnostrannými trojúhelníky $D'XY$ určete ten, jehož strana má předepsanou délku; sestrojte jeho vrchol X a stanovte podmínku řešitelnosti.

[Dokažte, že strana XY je rovnoběžná s úhlopříčkou AC. Geometrické místo bodů hledejte metodou souřadnic: za osu x zvolte přímku $A'B'$ a za počátek bod P tak, aby bod B' byl středem úsečky $A'P$. Podmínka řešitelnosti je $s \geq (\sqrt{6} - \sqrt{2})a$, kde a je délka hrany krychle, s délka strany trojúhelníka.]

3. Je dán pravidelný jehlan čtyřboký. Jemu má být vepsána krychle, jejíž jedna stěna leží v podstavě jehlanu

a další čtyři vrcholy leží po jednom v pobočných stěnách jehlanu. Dokažte, že lze danému jehlanu vepsat nekonečně mnoho takových krychlí a vyšetřete geometrické místo jejich a) vrcholů v rovině podstavy jehlanu, b) středů.

[Dokažte, že střed krychle leží na výšce jehlanu. Za proměnnou zvolte odchylku úhlopříček podstavy jehlanu a krychle; vyjádřete délku hrany vepsané krychle jako funkci této proměnné.]

4. Je dán pravidelný jehlan čtyřboký. Určete rovinu, která jej protíná v pravidelném pětiúhelníku. Stanovte podmínku řešitelnosti úlohy.

[Užijte poměru úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku, který je $(1 + \sqrt{5}) : 2$. Vypočtěte vzdálenost x středu podstavy jehlanu od té strany průsečného pětiúhelníka, která leží v podstavě a která je rovnoběžná s jednou úhlopříčkou podstavy. Podmínka řešitelnosti je, že odchylka pobočné hrany jehlanu od podstavy je 45^0.]

5. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Všemi body lomené čáry $AA'B'C'CDA$ vedeme rovnoběžky s přímkou BD'. Dokažte, že lze vzniklou plochou „provléknout" krychli shodnou s danou krychlí, po případě krychli ještě o něco větší.

[Hranolová plocha je proťata rovinou kolmou k přímce BD' v pravidelném šestiúhelníku. Největší čtverec, který lze tomuto šestiúhelníku vepsat, má délku strany $\dfrac{4a}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}$, kde a je rozměr krychle.]

6. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Zjistěte, zda lze sestrojit pravidelný čtyřstěn $PQRS$ tak, aby jeho vrcholy

P, Q, R ležely ve čtverci $ABCD$ a vrchol S ve čtverci $A'B'C'D'$ (čtyřstěn vepsaný krychli).

[Určete nejprve výpočtem největší rovnostranný trojúhelník, který lze vepsat do daného čtverce.]

7. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1 a číslo d, pro něž platí $\sqrt{2} < d < \sqrt{3}$. Vyšetřete množinu bodů vyplněnou krajními body úseček délky d umístěných v krychli.

[Množinu bodů odhadněte z názoru a domněnku dokažte tak, že vždy jeden z krajních bodů úsečky zvolíte pevně.]

8. Rozměry kvádru jsou celá čísla a, b, c. Kvádr je rozdělen na abc jednotkových krychlí. Určete počet těch krychlí, jejichž vnitřkem prochází tělesová úhlopříčka kvádru.

[Řešení je dáno vzorcem $N = a + b + c - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma$, kde σ_1, σ_2, σ_3 značí největší společné dělitele dvojic (b, c), (c, a), (a, b) a σ největšího společného dělitele čísel a, b, c. Při řešení zkoumejte, kolik vrcholů krychlí obsahuje tělesová úhlopříčka kvádru, kolik hran krychlí protíná mimo vrcholy a kolik stěn mimo hrany.]

OPRAVY

V obr. 4 c doplň písmeno T

v obr. 7 doplň písmeno X, Y

v obr. 8 doplň X_1, X_2

v obr. 16c má být v_1 místo v

v obr. 23c má být B' místo B

v obr. 28d má být H místo M a F' místo F

OBSAH

●

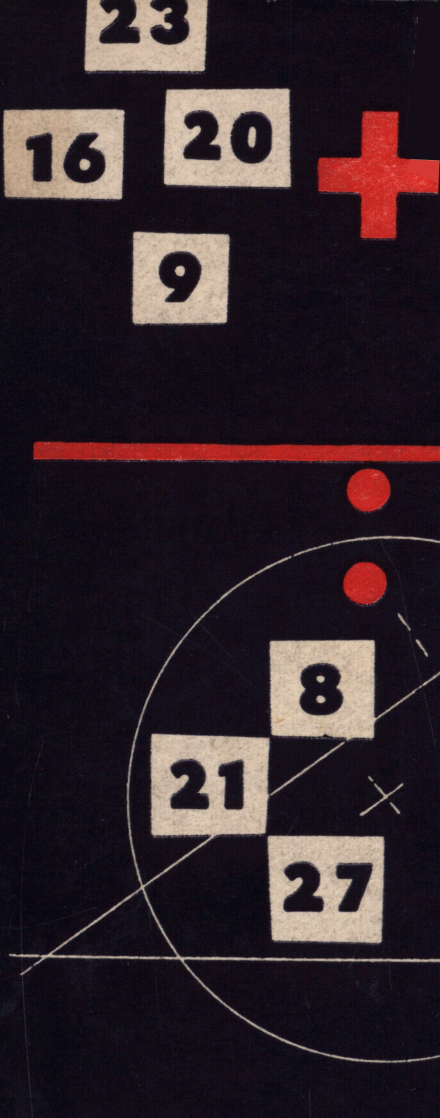
František Hradecký, Milan Koman, Jan Vyšín

několik úloh Z GEOMETRIE JEDNODUCHÝCH TĚLES

●

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Recenzi provedl doc. Josef Holubář
Odpovědný redaktor Václav Kocourek
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Publikace číslo 1757
Edice Škola mladých matematiků, svazek 1
Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provozovna 22,
Praha 2, Legerova 22
3,86 AA, 3,91 VA. D-14*10350. Náklad 5.000 výt.
Tem. skup. 03-2. 1. vydání, Praha 1961

Cena brož. výtisku Kčs 3,–
63/III-7



Cena brož.
Kčs 3,-
03-2