

Kubické a bikvadratické problémy

Ladislav Seifert (author): Kubické a bikvadratické problémy. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1951.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403331>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

CESTA K VĚDĚNÍ

60

L. SEIFERT

Kubické
a bikvadratické
problémy

PŘÍRODOVĚDECKÉ
VYDAVATELSTVÍ

CESTA K VĚDĚNÍ

svazek

60

Dr LADISLAV SEIFERT

Kubické
a bikvadratické
problémy

Přírodovědecké vydavatelství, Praha

1951

**Obálku navrhl
a graficky upravil
Miloš Hrbas**

PŘEDMLUVA

Při studiu matematiky je vždy zajímavé a velmi poučné sledovat vývoj dané otázky od nejstarších dob. Zdvojení krychle (delický problém) a trisekce úhlu jsou vedle rektifikace a kvadratury kruhu problémy, které mají téměř dva tisíce let starou historii. Zde ovšem podáváme jen nejpodstatnější myšlenky tohoto vývoje.

Uvádět historické prameny, které jsou většinou nepřístupné, považuji za zbytečné. Obsáhlý výpočet příslušné literatury najde čtenář v díle

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IIIAB8, IIIAB9 a ve snadno přístupných spisech:

Enriques, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, díl II.,

Enriques-Fleischer, *Fragen der Elementargeometrie*, díl II.,

Vahlen, *Konstruktionen und Approximationen*.

V posledním spise je snad výpočet příslušné literatury nejdůležitější.

Přirozeným doplněním úvah uvedených v tomto spisku by bylo sledování method, jimiž byly postupně řešeny rovnice čtvrtého stupně. Máme na mysli geometrické interpretace Cardanovy, Ferrariho atd. Podobné úvahy postupují od Descartesa až do novější doby k Darbouxovi a Salmonovi. Sledovat užití kuželoseček v těchto úvahách je velmi zajímavé. Ostatně zde je nutno hledat i původ obecné theorie algebraických rovnic. Do tohoto spisku jsem však nechtěl zařadit tyto úvahy proto, že by se tím značně rozšířil. Mám za to, že spisky, které sledují shora vycílený úkol, nemají být příliš obsáhlé.

1. ÚVOD

Řešení úloh bylo hlavním cílem starověké geometrie. Předmětem těchto úvah bylo určit, jak některé části geometrického útvaru závisí na jiných čili do jaké míry jsou jimi určeny. Ze zvolených částí se snažili sestrojiti jiné. Odtud vyplývá klasická metoda řešení geometrických úloh. Nejprve se provádí rozbor či analýsa úlohy, jejímž úkolem je stanovit závislost částí hledaných na částech daných, t. j. převést úlohu na jinou, jednodušší nebo dříve řešenou. Pak následuje skutečná konstrukce, potom důkaz, že sestrojené části vyhovují úloze, a nakonec diskuse, t. j. určení počtu řešení a stanovení podmínek, za kterých lze úlohu provést. Jako nástrojů se používalo pravítka a kružidla, jimiž lze provést dvě nejjednodušší konstrukce (*postuláty*):

1. *Dva body lze spojit přímkou;*

2. *Kolem daného bodu lze opsat kružnici daným poloměrem.*

Při tom však již ve starověku narazili na úlohy, jež se nepodařilo redukovat na tyto základní úlohy, na př. dělení kružnice na 7 nebo 13 dílů, rozdělení úhlu na tři stejné části, rektifikace a kvadratura kruhu atd. Jen úlohy, jež se daly řešit kružidlem a pravítkem, pokládali za dokonale řešitelné. K řešení jiných úloh používali nových prostředků, na př. narýsované kuželosečky, konchoidy nebo jiné křivky, a také různých aparátů. Význam používaných prostředků zhodnotila teprve nejnovější kritická doba a bylo ukázáno, které konstrukce lze provést na př. pouhým kružidlem, které pomocí dané pevné kuželosečky použitím pravítka a kružidla nebo jinými prostředky. K takovým úvahám je vhodným nástrojem především moderní analýsa a theorie funkcí.

Na základě těchto kritických studií je možno *rozdělit konstruktivní úlohy* na takové, které

a) lze provést přesně pravítkem a kružidlem (případně jen pravítkem nebo jen kružidlem),

b) nelze provést těmito prostředky.

Abychom zabránili nedorozumění, je třeba si dobře uvědomit, co nazýváme přesnou konstrukcí. Pravíme, že úloha je danou konstrukcí řešena *přesně*, jsme-li jisti, že bychom dostali výsledek dokonale přesný, kdyby pomůcky, jichž užíváme (pravítko a kružidlo), byly dokonalé a používá-li se jich jen v konečném počtu operací. Tak rozumíme přesnosti v theorii.

V praxi ovšem může t. zv. *přibližná* konstrukce dát přesnější výsledek než konstrukce theoreticky přesná, neboť při theoreticky přesné konstrukci je často mnoho výkonů pomůckami, jež nejsou vždy dokonalé nebo s nimi nezacházíme vždy dosti pozorně. Tím se dostane do konstrukce více chyb než při konstrukci označené za přibližnou, při níž se zpravidla spokojíme jen nejmenším počtem operací.

Je-li předložena nějaká úloha, není často snadné rozhodnout, do které kategorie patří. V mnohých otázkách může dát uspokojivou odpověď zase jen algebra nebo analyza. Určíme-li dané body nebo jiné útvary v rovině a prostoru souřadnicemi, lze vyjádřit vztahy mezi danými a hledanými útvary rovnicemi; souřadnice hledaných bodů nebo útvarů jsou řešením těchto rovnic a dospějeme k nim postupnou eliminací. Je-li výsledná rovnice algebraická irreducibilní stupně n , t. j. taková, že ji nelze řešit postupně užitím rovnic nižších stupňů, říkáme, že úloha je stupně n -tého. Nevede-li řešení k rovnici algebraické, je úloha transcendentní. Podle tohoto principu, který záleží především v užití algebry, rozeznáváme *úlohy stupně prvního* čili *lineární*, *úlohy stupně druhého* čili *kvadratické*, *stupně třetího* čili *kubické*, *stupně čtvrtého* čili *bikvadratické* atd.¹

¹ Obsáhlejší a velmi instruktivní poučení o geometrických úlohách je v článku J. Vojtěcha: Theorie geometrických konstrukcí, Časopis pro pěstování mat. a fys., roč. 31.

V konstruktivní geometrii se jeví nejučelnějším rozdělení na *úlohy projektivní, afinní a metrické*. To je stanovisko souhlasné s tím, že každá geometrie studuje invariantní vlastnosti při transformacích jisté grupy, tedy grupy transformací projektivních, afinních nebo transformací t. zv. hlavní grupy, která zahrnuje pohyby (shodnost) a podobnost.²

Úloha žádá sestrojení útvaru, který má dané vlastnosti. Jsou-li to vlastnosti projektivní, nazývá se úloha projektivní. Takové konstrukce se nemění kolineární transformací čili středovým promítáním. Jde-li na př. o rovinnou konstrukci a promítneme-li ji z jistého středu (v konečnu) na jinou rovinu, je cesta, kterou dojdeme od těchto útvarů k žadáným, právě taková v druhé rovině jako v první. Rozeznáváme pak projektivní úlohy stupně prvního, druhého, třetího atd. Speciálně projektivní úlohy prvního stupně jsou řešitelné pouhým pravítkem.

Afinní vlastnosti rovinných útvarů mají vztah k nevlastní (nekonečně vzdálené) přímce a zůstávají invariantní při afinních transformacích, při nichž nevlastní (nekonečně vzdálená) přímka přechází sama v sebe, tedy při promítání rovnoběžném. K promítání a protínání přistupuje ještě vedení rovnoběžek. Pojem rovnoběžnosti úzce souvisí, jak známo, s pojmem rovnosti úseček.

V metrických úlohách přistupuje k rovnoběžnosti ještě konstrukce pravého úhlu. Metrické transformace lze pojímat jako projektivní transformace, při nichž zůstávají invariantní v rovině t. zv. kruhové body na nevlastní přímce (v prostoru t. zv. absolutní kuželosečka v nevlastní rovině).

Úlohy lze také klasifikovat podle toho, *jakými prostředky je lze provést*; v tomto ohledu přinesla novější doba opravdu zajímavé výsledky. Na př. rovinné afinní úlohy lineární lze

² Důsledné rozdělení úloh na projektivní, afinní a metrické je provedeno ve spise: Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, Lipsko, 1911.

řešit pouhým pravítkem, jsou-li dány dva páry rovnoběžek, metrické lineární úlohy lze řešit jen pravítkem, jsou-li dány v rovině dva pravé úhly, po případě čtverec nebo kružnice s daným středem. Projektivní kvadratické úlohy lze provést pouhým pravítkem, je-li dána v rovině kružnice, po případě jiná kuželosečka. Jsou-li to metrické úlohy kvadratické, musí být dán ještě střed kružnice (Steinerovy konstrukce). Některé kvadratické úlohy lze řešit pravítkem ve spojení s přenášením délek. Kubické konstrukce v rovině lze provést kružidlem a pravítkem, je-li dána na př. pevná elipsa atd.

Pokud se týká metody při řešení geometrických úloh, používají starověké Eukleidovy „Základy“ synthetické metody, která se dlouho udržela na nižším i vyšším stupni našich škol podobně jako v ostatních evropských zemích, ačkoli náběh k jiným metodám je patrný již ve starověku na př. u Archimeda. Značný pokrok v elementární geometrii způsobily analytické metody: užití algebry, theorie čísel a především zavedení souřadnic. První krok zde učinil Vieta (1540—1603), který je vlastně zakladatelem algebraické geometrie, další pokrok přinesl Fermat (1601 až 1665) a pak ovšem Descartes (1596—1650).

Methody, jichž budeme v dalším používat, jsou:

a) *Methoda algebraicko-geometrická* (algebraicko-trigonometrická), kterou rozumíme odvození vztahu mezi geometrickými elementy algebraickou cestou bez výslovného užití souřadnic.

b) *Methoda analytická* v užším smyslu, při níž zavádíme kartézské nebo jiné souřadnice, t. j. určíme body, přímky, roviny atd. souřadnicemi a převedeme geometrický problém na algebraický. Pak ovšem musíme provést rozbor tohoto výsledku a zkoumání jeho geometrického významu.³

³ Z cizojazyčných spisů, které pojednávají o geometrických konstrukcích a zhodnocují různé prostředky, jimiž je lze provádět, lze kromě prvních dvou děl uvedených v předmluvě uvést spis:

Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen, Vídeň (1906).

2. ELEMENTÁRNÍ KONSTRUKCE

Elementárními konstrukcemi budeme rozumět konstrukce lineární a kvadratické, t. j. ty, které lze provést pravítkem, jež slouží k narýsování přímky dané dvěma body, a kružidlem, jehož použijeme k narýsování kružnice určené středem a poloměrem. V algebře odpovídá těmto konstrukcím řešení lineárních a kvadratických rovnic.

Kromě kružidla, jež se vůbec považuje za nejpřesnější matematický nástroj, používáme při praktickém provádění nejraději dvou pravítek s pravými úhly nebo aspoň jednoho, abychom mohli pohodlně vést rovnoběžky a rychle sestřít kolmice. Jsme si ovšem vědomi toho, že tyto konstrukce lze provést pouhým pravítkem s jednou hranou a kružidlem. Použití pravítka s pravým úhlem nepřináší při tomto způsobu použití nic nového, slouží jen k usnadnění konstrukce.

Dvěma pravoúhlými trojúhelníky lze však provést i jiné konstrukce, které přesahují obor úloh, jež jsme nazvali elementárními.

Tyto elementární konstrukce provádíme obvykle pravítkem a kružidlem, ač je známo, že je lze provést jen kružidlem.¹

Přidržíme se tedy zde uvedeného stanoviska a připomeňme si některé nejzákladnější konstrukce.

1. Jsou-li dány úsečky a, b, c, \dots , lze sestřít úsečky $a \pm b, a \pm b \pm c, \dots, \frac{ab}{c}, \frac{abc}{de}, \frac{abcd}{efg}, \dots$, které vzniknou z daných sčítáním, odčítáním, násobením a dělením, zkrátka racionálními výkony.

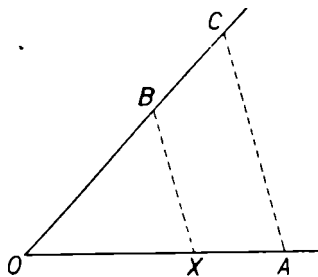
¹ Konstrukcemi pouhým kružidlem se zabývá kromě spisů uvedených v předešlé poznámce zajímavé dílo:

Lanascot, Géométrie du compas, Paříž (1925).

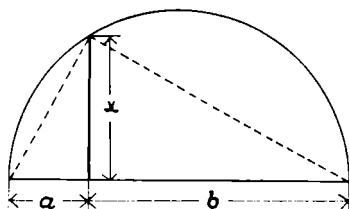
O sčítání a odčítání není třeba se šířit. Chceme-li sestrojít výraz $x = \frac{ab}{c}$, napíšeme jej v podobě úměry

$$x : a = b : c,$$

naneseme na jedno rameno úhlu $\overline{OA} = a$, na druhé $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$ (O je vrchol) a vedeme $BX \parallel CA$. Potom je $\overline{OX} = x$ (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Jde-li o výraz $x = \frac{abc}{de}$, sestrojíme napřed $y = \frac{ab}{d}$, pak

$$x = \frac{yc}{e}.$$

Složitější racionální výrazy lze sestrojít postupným užitím těchto konstrukcí.

2. Nejjednodušší výrazy, které obsahují kvadratickou irracionalitu, jsou tvaru $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, $\sqrt{a \cdot b}$.

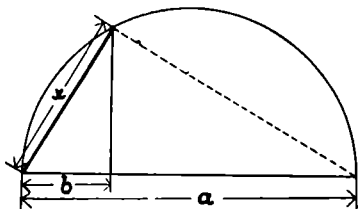
První píšme ve tvaru

$$x^2 = a^2 \pm b^2;$$

x sestrojíme podle Pythagorovy věty jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami a, b nebo jako druhou odvěsnu, je-li a přepona, b odvěsna.

Úsečku $x = \sqrt{ab}$ sestrojíme užitím Eukleidovy věty ($x^2 = ab$). x je výška pravoúhlého trojúhelníka, a, b úseky na přeponě (obr. 2) nebo x je odvěsnou, je-li a přepona, b úsek přilehlý (obr. 3).

Postupným užitím těchto konstrukcí lze sestrojit každý výraz, který dostaneme z daných úseček racionálními operacemi nebo druhými odmocninami.²



Obr. 3

Tímto způsobem lze také provádět grafické výpočty, pokud obsahují racionální výkony a druhé odmocniny. Je ovšem třeba zvolit jistou jednotkovou délku. Jsou-li na př. a, b dvě čísla a zároveň úsečky, které jim v daném měřítku odpovídají, a máme-li sestrojiti $x = ab$, stačí napsat $x = \frac{ab}{1}$ a sestrojiti úměru $x : a = b : 1$. Máme-li sestrojiti

$x = \frac{a}{b}$, napíšeme $x = \frac{a \cdot 1}{b}$. Podobně při $x = \sqrt{a}$ položíme

$x = \sqrt{a \cdot 1}$ a použijeme Eukleidovy věty atd.

Cvičení:

1. Jsou dány úsečky a, b, c ; sestrojte úsečky: a) $\frac{a^4}{b^2c}, \frac{a^2 + b^2}{c}, \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$; b) $\sqrt{\frac{a^2b}{c}}, \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 - b^2}}, \sqrt{\frac{a^5 + a^3b^2}{c^2(b + c)}}$.

2. Sestrojte graficky výrazy: $\sqrt[4]{6}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{1 + \sqrt{2}}, \sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}, \sqrt[4]{\frac{a^6}{b^2 + c^2}}$.

² O rovnicích, jež lze řešit druhými odmocninami, nalezne čtenář poučení ve spisku Š. Schwarz, O rovnicích, Cesta k vědění, sv. 1, 2. vyd., Praha (1950).

3. Sestrojte výraz $x = \frac{a^{m+1}}{b^m}$, kde m je celé číslo. Návod: Na ramena pravého úhlu (osy Ox, Oy) nanese délky $OA = a, OB = b$, vedme $AA_1 \perp AB$, kde A_1 je na Oy , dále $A_1B_1 \perp AA_1$, kde B je na Ox atd.; pak je $OA_1 = a \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{b}$, $OB_1 = OA_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^3}{b^2}$ atd. ($\varphi = \sphericalangle OBA$).

4. Řešte graficky rovnici druhého stupně $x^2 + px + q = 0$ nebo $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$.

3. KUBICKÉ ÚLOHY A KONSTRUKCE

Úlohami třetího stupně či kubickými rozumíme takové, které vyjádřeny algebraicky obsahují mimo racionální výkony a druhé odmocniny ještě odmocniny třetí, tedy irracionality kubické. Na takové výrazy vedou rovnice třetího a čtvrtého stupně.

Nejstarší kubické úlohy, již ve starověku známé, jsou:

1. *Zdvojení krychle (delický problém)*: Je dána krychle o hraně a , jež má tedy objem a^3 . Máme najít hranu krychle, jež má dvojnásobný objem $2a^3$.¹

2. *Trisekce úhlu*: Daný úhel nebo kruhový oblouk rozdělit na tři stejné díly.

První úlohu lze algebraicky vyjádřit rovnicí

$$x^3 = 2a^3$$

čili

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

¹ Název delický souvisí s řeckým ostrovem Delos. Když bylo obyvatelstvo ostrova těžce sužováno morem, jak vypráví legenda, obrátilo se na Delfskou věštírnu s dotazem, co činit, aby byla odvrácena těžká rána. Bylo to asi v době Plutarchově (400 l. př. Kř.). Dostalo se jim odpovědi, že je třeba přeměnit oltář, který měl podobu krychle, tak, aby měl dvojnásobný objem. Tímto problémem se pak zabýval Platon a jeho žáci.

Jde tedy o konstruktivní řešení rovnice třetího stupně
($a = 1$)

$$x^3 - 2 = 0$$

nebo obecněji

$$x^3 - m = 0.$$

Na jakou rovnici vede problém trisekce úhlu, je vidět ze vzorce

$$\operatorname{tg}3\varphi = \frac{3 \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3 \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Položme

$$\operatorname{tg}3\varphi = a, \operatorname{tg}\varphi = x$$

a dostaneme úplnou kubickou rovnici

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0.$$

Substitucí $x = y + a$ ji převedeme na redukováný tvar

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0;$$

tato rovnice má řešení $y = x - a = \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}3\varphi$.

K jinému tvaru dospějeme, použijeme-li Moivreovy poučky

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Pro $n = 3$ dostaneme

$$\begin{aligned} (\cos\varphi + i \sin\varphi)^3 &= \cos^3\varphi - 3 \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi + \\ &+ i(3 \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi) = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Srovnáme-li části reálné, vychází

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3 \cos\varphi \sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3 \cos\varphi + 3 \cos^3\varphi$$

a odtud

$$4 \cos^3\varphi - 3 \cos\varphi - \cos 3\varphi = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{^2 Je totiž } \operatorname{tg}2\varphi &= \frac{2 \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}, \operatorname{tg}3\varphi = \operatorname{tg}(2\varphi + \varphi) = \\ &= \frac{\operatorname{tg}2\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}2\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3 \operatorname{tg}^2\varphi}. \end{aligned}$$

Zavedme

$$2 \cos \varphi = x, \quad \cos 3\varphi = a$$

a máme rovnici

$$x^3 - 3x - 2a = 0;$$

její řešení je

$$x = 2 \cos \varphi.$$

Také lze vyjít z rovnice

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

čili

$$\sin \alpha = 3 \sin \frac{1}{3} \alpha - 4 \sin^3 \frac{1}{3} \alpha.$$

Položme

$$\sin \frac{1}{3} \alpha = x, \quad \sin \alpha = a$$

a máme rovnici tvaru

$$4x^3 - 3x + a = 0,$$

kde ovšem $a < 1$; její kořeny jsou $\sin \frac{1}{3} \alpha$, $\sin \frac{1}{3} (\alpha + 2\pi)$, $\sin \frac{1}{3} (\alpha + 4\pi)$.

To jsou nejstarší kubické problémy. Zajímavé je sledovat, jakými prostředky je hodlali zvládnout matematikové od nejstarších dob až do druhé polovice předešlého století, kdy po obrovském rozmachu, způsobeném rozvojem diferenciálního a integrálního počtu, nastává doba revise starších method. Teprve tato doba postavila uvažované problémy do pravého světla a ukázala, že kubické a bikvadratické problémy nejsou řešitelné kružidlem a pravítkem, a zhodnotila zároveň jiné prostředky, jimiž je lze řešit.

Dříve než přistoupíme k vlastní úloze, uvedeme stručný přehled různých způsobů, kterými byly kubické a bikvadratické úlohy během doby řešeny a které namnoze dávají svědectví o důmyslu starých matematiků.

4. PŘEHLED STARŠÍCH METHOD ŘEŠENÍ PROBLÉMU ZDVOJENÍ KRYCHLE

Konstruktivní řešení rovnice

$$x^3 - 2 = 0$$

nebo obecněji rovnice

$$x^3 - m = 0$$

považovali staří matematikové za zvláštní případ obecnější úlohy, jež lépe vyhovovala prostředkům, jež měli po ruce. S algebraického hlediska můžeme ji vyslovit takto:

Jsou-li dány úsečky a, b , máme nalézt střední úměrné úsečky x, y , t. j. úsečky, které vyhovují rovnicím

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Tyto podmínky lze rozepsat ve vztahy

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx$$

čili

$$x^3 = a^2b, \quad y^3 = ab^2;$$

odtud

$$x = \sqrt[3]{a^2b}, \quad y = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Pro $a = 1, b = 2$ dostaneme $x = \sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{4}$.

Uvedeme charakteristické ukázky starších řešení, ovšem v rouše moderní algebry.

4.1. Všichni historikové matematiky se shodují v tom, že autorem nejstaršího řešení tohoto problému je Archytas z Tarentu (430 l. př. Kr.). Jakkoli toto řešení nemá praktickou cenu, je rozhodně zajímavé tím, že užívá prostorových útvarů k řešení rovinného problému. Tohoto principu se v moderní geometrii mnohokrát použilo. Základní myšlenka uvedeného řešení je tato: Jsou dány úsečky a, b ($a > b$) a hledáme střední úměrné úsečky r, s , které tedy vyhovují

rovnícím $r^2 = as$, $s^2 = br$. Sestrojíme v pravouhlé soustavě (počátek soustavy budiž O) tři plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 = ax,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2.$$

První plocha je anuloid (prsteneček), který vznikne, otáčí-li se kružnice o poloměru $\frac{1}{2}a$ kolem své tečny Oz v bodě O . Druhá plocha je kruhový válec s podstavou v rovině $z = 0$ a poloměrem $\frac{1}{2}a$, třetí plocha je rotační kužel s vrcholem O a osou Ox , který v rovině $x = b$ má kruhovou základnu o poloměru $\sqrt{a^2 - b^2}$. Jeden z průsečíků, který snadno sestojíme methodou deskriptivní geometrie, budiž $P(x, y, z)$, jeho půdorys P_1 . Pak je

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad OP_1 = s = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hořejší rovnice lze skutečně psát

$$r^2 = as, \quad s^2 = ax, \quad r = \frac{s^2}{b},$$

z čehož

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{s} = \frac{s}{b}.$$

4.2. Řecký geometr Menächmus (asi 300 l. př. Kr.) podává řešení, které v principu vypadá asi takto: Parabola $y^2 = ax$ a parabola $x^2 = by$ mají společný bod ($x = \sqrt[3]{ab^2}$, $y = \sqrt[3]{a^2b}$); je tedy

$$\frac{a}{y_0} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{x_0}{b}.$$

Volíme-li $b = 2a$, je $y = a\sqrt[3]{2}$ hrana dvojnásobné krychle.

Jiné řešení téhož autora záleží v hledání průsečíku paraboly $y^2 = ax$ s rovnostrannou hyperbolou $xy = ab$. Pro průsečíky dostaneme $x = \sqrt[3]{ab^2}$, $y = \sqrt[3]{a^2b}$.

4,3. Myšlenka používat kuželoseček, po případě jiných křivek k řešení problémů, jež nelze řešit pravítkem a kružidlem, byla převzata pozdějšími, i moderními autory. První pokrok spočívá v tom, že se místo dvou narýsovaných kuželoseček používá jen jedné. Descartes používá paraboly $x^2 = ay$ a stanoví průsečíky s kružnicí

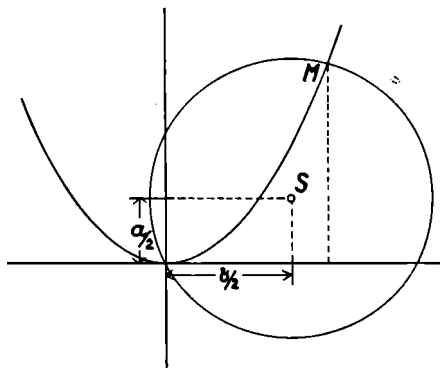
$$(x - \frac{1}{2}b)^2 + (y - \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

kteřá má střed $S(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a)$ a jde vrcholem paraboly (obr. 4). Řešením obou rovnic dostaneme souřadnice společného bodu $(\sqrt[3]{a^2b}, \sqrt[3]{ab^2})$; volíme-li $b = 2a$, je x -ová souřadnice společného bodu $a\sqrt[3]{2}$.

4,4. Grégoire (1668) uvádí toto řešení: Budiž $ABCD$ obdélník o stranách a, b (obr. 5). Opišme mu kružnici; její rovnice je

$$x^2 + y^2 = ax + by.$$

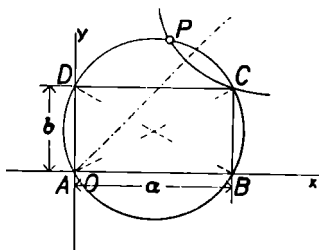
Sestrojme dále hyperbolu $xy = ab$, která má střed v bodě $O \equiv A$ a jde vrcholem $C(a, b)$. Dosadme $x = ab/y$ do první rovnice a dostaneme po odstranění činitele $(y - b)$ rovnici



Obr. 4

$y^3 = a^2b$. Další průsečík P má tedy souřadnice $(\sqrt[3]{ab^2}, \sqrt[3]{a^2b})$.

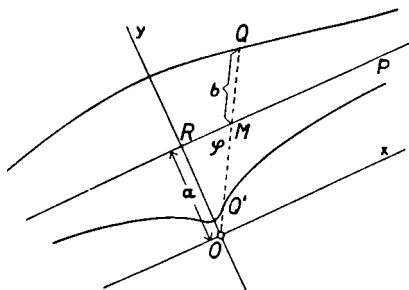
Asi z téže doby pochází řešení, jež podává Slusius a které



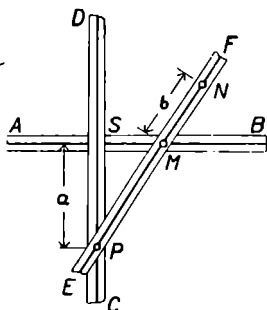
Obr. 5

neuvádíme. Používá také jen jedné kuželosečky (elipsy) a kružnice.¹ Zajímavé je, že používá elipsy, kdežto v jiných řešeních se užívá paraboly nebo hyperboly.

4.5. U řeckých geometrů je oblíben způsob řešení „zasouváním“. Tím se rozumí konstrukce úsečky, jejíž koncové body jsou na dvou daných křivkách a jež sama nebo její prodloužení jde daným bodem. Mechanicky lze to snadno provést proužkem papíru, na kterém jsou vyznačeny oba koncové body úsečky. Pohybujeme proužkem tak, že jde stále daným bodem a jeden koncový bod se pohybuje po jedné křivce tak dlouho, až druhý koncový bod padne na druhou křivku. Tento proužek může někdy nahradit kružidlo a pravítko, ale jde mnohem dále. Jaký je jeho theoretický význam, poznáme zkoumáním křivek, které opisuje druhý koncový bod, pohybuje-li se první po dané křivce



Obr. 6



Obr. 6a

¹ Toto řešení je uvedeno ve spise Enriques-Fleischer II, str. 198.

a prochází-li přitom hrana proužku stále pevným bodem. Takové křivky se nazývají *konchoidy*. Nejjednodušší je případ, kdy je daná křivka přímkou. Druhý bod pak opisuje *konchoidu Nikomedovu*, jež byla dobře známa již v době Archimedově (250—150 l. př. Kr.). Je nutno, abychom se na tomto místě o ní zmínili.

Konstrukce N. konchoidy je patrna z obr. 6. Nechť je dána přímka p a mimo ni bod O ve vzdálenosti $OR = a$. Bodem O vedme přímku a od průsečíku M s přímkou p nanesme na obě strany délku b ($MQ = MQ' = b$). Otáčí-li se tato přímka kolem bodu O , opisují body Q, Q' dvě větve konchoidy. p je *základna* (basis), O *pól*, b *interval* konchoidy. Volíme-li souřadné osy tak, jak je v obrázku označeno, je rovnice konchoidy v polární soustavě

$$\rho = \frac{a}{\sin\varphi} \pm b.$$

Přejdeme-li k pravoúhlým souřadnicím ($x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$), dostaneme rovnici

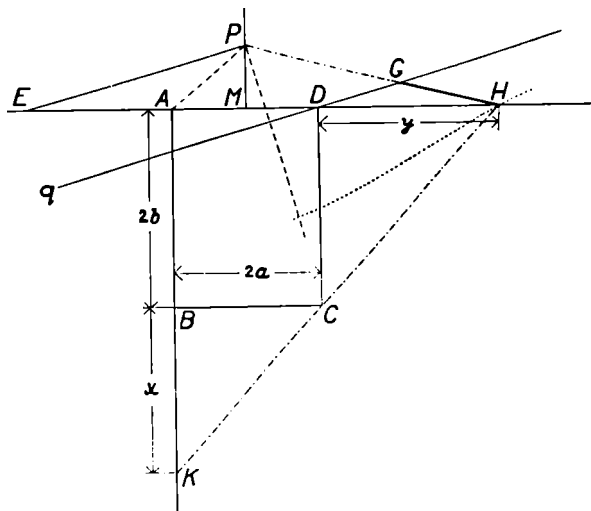
$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = b^2 y^2.$$

N. konchoida je racionální křivka čtvrtého stupně. V pólu O má dvojný bod s tečnami reálnými při $b > a$, bod vratu při $b = a$ a bod izolovaný při $b < a$. Nevlastní bod X^∞ osy Ox je dotkový uzel.

Velmi snadno lze sestrojít přístroj — *konchoidální kružidlo*, kterým lze tuto křivku spojitě opsat, což je velkou předností při konstruktivním řešení úloh. Tento přístroj sestává ze dvou na sebe kolmých pravítek, pevně spojených AB, CD a opatřených drážkami (obr. 6a). Pohyblivé pravítko EF je rovněž opatřeno drážkou, ve které se pohybují dva kolíky M, P . P spojíme pevně s CD ($SP = a$) tak, aby se pravítko EF mohlo jinak volně pohybovat, a M, N (píšící hrot) spojíme pevně s EF ($MN = b$). Při pohybu opiše N jednu větev konchoidy.

Konstrukce středních úměrných zasouváním či užitím

konchoidy je značně složitá a svědčí o nemalém důmyslu starých geometrů.



Obr. 7

Sestrojíme obdélník $ABCD$, kde $AB = 2b$, $AD = 2a$, a předpokládejme $a < b$ (obr. 7). Stanovme bod E tak, aby $AE = 2a$. V půlicím bodě M strany AD sestrojíme kolmici a na ní bod P , při čemž $AP = DP = b$. Bodem D vedme přímku q rovnoběžně s PE . P je pól, q základna konchoidy s intervalem b . Jedna větev protíná AD v bodě H , je tedy $HG = b$; to je zasunutí úsečky b , aby její prodloužení šlo bodem P . Spojme H s C a dostaneme na AB bod K . Hledané úsečky jsou $DH = y$, $BK = x$.

Důkaz: Z konstrukce plyne $PM = \sqrt{b^2 - a^2}$, $HM = a + y$, tedy

$$PH = \sqrt{b^2 - a^2 + (a + y)^2} = \sqrt{y^2 + b^2 + 2ay}.$$

Z obrázku je zřejmé

$$EH : DH = PH : GH$$

čili

$$(4a + y) : y = \sqrt{y^2 + b^2 + 2ay} : b,$$

z čehož po úpravě vychází

$$y^4 + 2ay^3 - 8ab^2y - 16a^2b^2 = 0.$$

Levá strana je dělitelna dvojčlenem $(y + 2a)$, lze tedy poslední rovnici psát

$$(y + 2a)(y^3 - 8ab^2) = 0.$$

Poněvadž $(y + 2a)$ je různé od nuly, je

$$y^3 = 8ab^2.$$

Podobně plyne z obrázku

$$BC : BK = DH : DC$$

neboli

$$2a : x = y : 2b,$$

takže

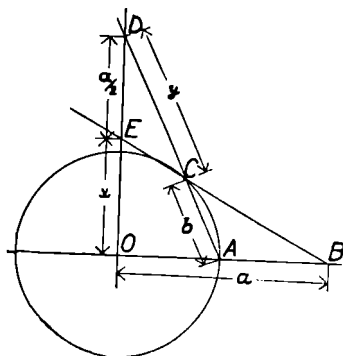
$$xy = 4ab,$$

z čehož

$$x^3 = 8a^2b.$$

Je tedy

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2b}.$$



Obr. 8

Volíme-li $a = \frac{1}{2}l$, $b = l$, je $x^3 = 2l^3$; x je tedy hrana krychle o objemu $2l^3$.

K sestrojení bodu H lze užít zasouvání nebo konchoidálního pravítka.

Podobná konstrukce pochází od Newtona (obr. 8). Opíšme kružnici poloměrem $OA = \frac{1}{2}a$, nanesme $OB = a$,

$AC = b$ a zasuňme délku $\frac{1}{2}a$ tak, že její prodloužení jde středem O kružnice, při čemž body D, E jsou na přímkách AC, BC . Pak je $OE = x, CD = y$. Zde hraje úlohu N. konchoida s pólem O , základnou BC a intervalem $\frac{1}{2}a$.

Důkaz: Užijme na trojúhelník OAD věty Menelaovy. Strany tohoto trojúhelníka jsou prořaty přímkou v bodech B, C, E a součin vzniklých dělicích poměrů je roven jedné, t. j.

$$\frac{OB}{AB} \cdot \frac{AC}{DC} \cdot \frac{DE}{OE} = 1.$$

Dosadíme-li délky, jak jsou vyznačeny na obrázku, je

$$\frac{a}{\frac{1}{2}a} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{\frac{1}{2}a}{x} = 1$$

čili

$$ab = xy. \quad (\text{a})$$

Je však (mocnost bodu D)

$$y(b + y) = (x + \frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2 = (x + a)x$$

čili

$$y^2 - x^2 = ax - by. \quad (\text{b})$$

Z rovnic (a), (b) vychází

$$x = \sqrt[3]{ab^2}, \quad y = \sqrt[3]{a^2b}.$$

V pravouhlé souřadnicové soustavě značí rovnice (a), (b) dvě rovnostranné hyperboly, veličiny x, y se tedy při daných a, b jeví jako souřadnice společného průsečíku dvou kuželoseček.

4,6. Kromě N. konchoidy se užilo i jiných křivek k řešení delického problému a k hledání středních úměrných. Pro jednoduchost je zajímavá Diokletova cissoida. Lze ji sestrojiti takto (obr. 9): Je dána kružnice se středem S a poloměrem r . Průměr OSA volme za osu Ox , tečnu v bodě O za osu Oy . Sestrojme ještě tečnu v bodě A . Libovolná přímka

bodem O dává průsečíky M, N . Nanesme vždy $OP = MN$.
Bod P probíhá cissoidu.

Dle obrázku je

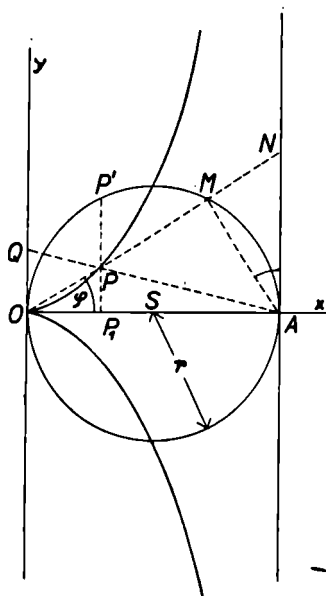
$$NA = 2r \operatorname{tg}\varphi, \quad MN = NA \sin\varphi = 2r \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = OP.$$

Polární rovnice křivky je tedy

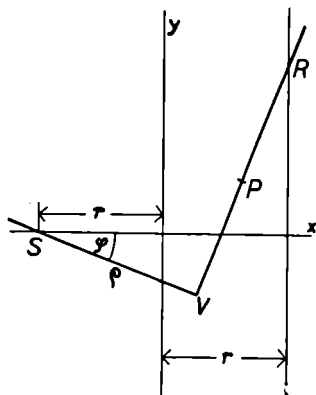
$$\rho = 2r \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi};$$

přejdeme-li k pravoúhlým souřadnicím, dostaneme

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$



Obr. 9



Obr. 9a

Cissoida je tedy křivka třetího stupně s bodem vrátnu O .
Přímka $x = 2r$ je asymptota, její nevlastní bod je bodem
obratu (inflexním).

Cissoidy lze užít ke grafickému umocňování na třetí
a odmocňování. Je-li P bod křivky, je $AN = 2r \operatorname{tg}\varphi$. Spoj-

nice AP dává na Oy bod Q a je $OQ : y_P = 2r : (2r - x_P)$;
 dosadíme-li z rovnice křivky $2r - x_P = \frac{x_P^3}{y_P^2}$, dostaneme

$$OQ = \frac{2ry_P}{2r - x_P} = 2r \left(\frac{y_P}{x_P} \right)^3 = 2r \operatorname{tg}^3 \varphi.$$

Je-li tedy $2r = 1$, je $OQ = AN^3$, $AN = \sqrt[3]{OQ}$.

Z rovnice křivky plyne

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{x(2r-x)}} = \frac{\sqrt{x(2r-x)}}{2r-x};$$

to podle obrázku značí

$$\frac{P_1P}{OP_1} = \frac{OP_1}{P_1P'} = \frac{P_1P'}{AP_1}.$$

Tedy $OP_1 = x_P$, P_1P' jsou střední geometricky úměrné k úsečkám $P_1P = y_P$ a $AP_1 = 2r - x_P$.

Jak lze ke dvěma daným úsečkám a, b sestrojít užitím cissoidy obě střední úměrné? K tomu lze užít jednu pro vždy narysované cissoidy. Sestrojíme bod P tak, aby $P_1P : AP_1 = a : b$ čili $\widehat{\operatorname{tg}P_1P} = a/b$. Označme zatím $P_1P = a'$, $AP_1 = b'$ a pak podle předešlého je

$$\frac{a'}{OP_1} = \frac{OP_1}{P_1P'} = \frac{P_1P'}{b'}.$$

Hledané úsečky p, q sestrojíme pak jako čtvrté úměrné z rovnic

$$\frac{a}{a'} = \frac{p}{OP_1}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{q}{P_1P'}.$$

Oblíbené použití Diokletovy cissoidy spočívá v jejím jednoduchém výtvarném zákonu a také v tom, že ji lze opsat jednoduchým mechanismem podobně jako N. konchoidu. Počínaje Descartesem považujeme obyčejně za jednodušší

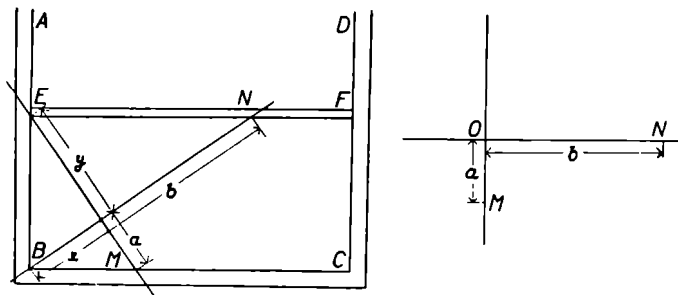
tu křivku, která je nižšího stupně. Na jiném stanovisku stál Newton; u něho rozhoduje jednoduchost mechanismu, kterým lze křivku opsat, a ten je právě u D. cissoidy jednoduchý; pochází od Newtona. Je dán pevný bod S a přímka p (obr. 9a). Pravý úhel s vrcholem V se pohybuje tak, že jedno rameno jde stále bodem S , pevný bod druhého ramene R se stále pohybuje po přímce p . Půlicí bod P ramene VR opisuje cissoidu.

Důkaz: Volme souřadnicové osy jako na obrázku. Pak bod S má souřadnice $(-r, 0)$, přímka p má rovnici $x = r$. Délka $VR = 2r$. Zavedme úhel φ a délku $SV = \varrho$. Bod V má pak souřadnice $(\varrho \cos\varphi - r, -\varrho \sin\varphi)$ a je

$$\varrho \cos\varphi - r + 2r \sin\varphi = r,$$

z čehož

$$\varrho = 2r \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$



Obr. 10

Pro souřadnice bodu P vychází snadno

$$x = \varrho \cos\varphi - r + r \sin\varphi = r(1 - \sin\varphi),$$

$$y = -\varrho \sin\varphi + r \cos\varphi = r \frac{(1 - \sin\varphi)^2}{\cos\varphi}.$$

Po vyloučení φ dostaneme rovnici D. cissoidy

$$y^2 (2r - x) = x^3.$$

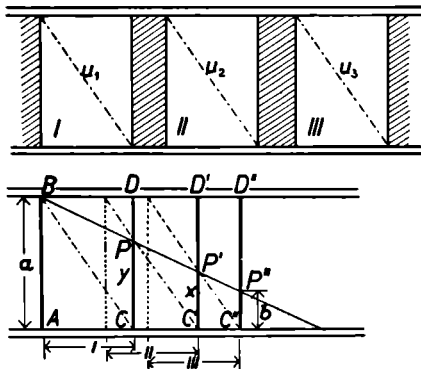
4.7. Vedle různých křivek a zasouvání se již ve starověku vyskytují také různé mechanismy, jimiž lze řešit delický problém. Podle historiků matematiky pochází takový nejstarší aparát od Platóna (429—347 l. př. Kr.); vedle kružidla je považován za nejstarší matematický přístroj vůbec. Sestává z pevného rámu $ABCD$, kde při vrcholech B, C jsou pravé úhly (obr. 10). EF je pohyblivé pravítko, jež zůstává stále rovnoběžné s BC . Na listu papíru je dán pravý úhel s vrcholem O , na jehož ramena nanese se délky $a = OM$, $b = ON$. Zařídíme pak aparát tak, aby M bylo na BC , N na EF a aby prodloužení ramen šlo body E, B . Pak je z obrázku patrné, že

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx,$$

a odtud

$$x = \sqrt[3]{a^2b}, \quad y = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Jiný aparát, zvaný *mesolabium*, pochází od Eratosthena (současník Eukleidův). Sestává ze tří stejně velikých obdel-



Obr. 11

níkových tabulek I, II, III , které se pohybují mezi dvěma rovnoběžnými kolejnicemi tak, že se mohou částečně pokrývat (obr. 11). Jsou na nich vyznačeny úhlopříčky u_1, u_2, u_3 . Vzdálenost kolejnic budiž a ; na krajní stranu tabulky III vyznačme délku $C''P'' = b$. Pak zařídíme aparát

tak, aby tabulka II byla pod tabulkou I , při čemž úhlopříčka u_2 protíná stranu CD v bodě P . Dále ať je tabulka III pod tabulkou II a u_3 ať protíná $C'D'$ v bodě P' . Posunujeme tabulky tak dlouho, až jsou body B, P, P', P'' v jedné přímce. Pak snadno vychází z podobnosti trojúhelníků podle obrázku

$$a : y = BC : PC' = y : x = PC' : P'C'' = x : b$$

čili

$$a : y = y : x = x : b.$$

Také Descartes sestrojil mechanismus, který má podobný účel a jímž lze řešiti úlohy mnohem obecnější.

4,8. Zajímavé jsou přibližné konstrukce. To jsou takové konstrukce, jež lze provést pravítkem a kružidlem a jež nedávají theoreticky přesný výsledek, ale často dají výsledek velmi málo se lišící od přesného. Tu je třeba dát přednost konstrukcím, ve kterých lze opakováním jisté operace dojít k libovolně přesnému výsledku. Velmi obecnou methodou k získání takových výsledků je použití řetězových zlomků.

Na př. $\sqrt[3]{2}$ lze rozvinout v

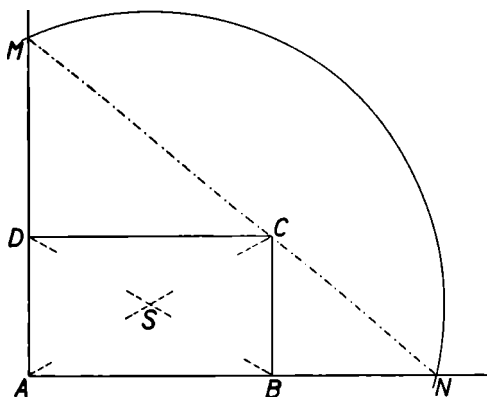
$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \dots}}}}}}}}$$

Bereme-li postupně zkrácené zlomky, docházíme k výsledku, který se stále více blíží přesné hodnotě.

S praktického hlediska ovšem nutno dát přednost konstrukci, kterou lze provést s nejmenším počtem přímek a kružnic a při níž je odchylka od správného výsledku tak

malá, že s ní musíme počítat při práci s našimi pomůckami nebo že ji nelze smysly ani postřehnout.

Jedna taková přibližná konstrukce se připisuje Apoloniovi (270—186 l. př. Kr.). Na ramena pravého úhlu nanesme délky $AB = a$, $AD = b$, doplníme obdélník $ABCD$ a určíme jeho střed S (obr. 12). Pak hledejme zkusmo



Obr. 12

kružnici o středu S , jež protíná strany obdélníka v takových bodech M, N , že body M, C, N jsou v jedné přímce. Pak $x = DM$, $y = BN$ jsou hledané délky. Skutečně je dle obrázku

$$\frac{x + b}{b} = \frac{a + y}{y}$$

čili

$$xy = ab, \tag{a}$$

$MS = NS$ neboli

$$(x + \frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = (y + \frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}b)^2,$$

t. j.

$$x^2 - y^2 = ay - bx. \tag{b}$$

Z rovnic (a), (b) vychází

$$x = \sqrt[5]{a^2b}, \quad y = \sqrt[5]{ab^2}.$$

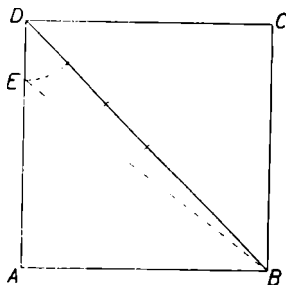
V rovnicích (a), (b) poznáváme opět rovnostranné hyperboly, které se vyskytují také při řešení Newtonově (4,5).

Dobrym příkladem přibližné metody, při níž docházíme postupným prováděním kvadratických konstrukcí k libovolně přesnému výsledku, je konstrukce Vargiova (1877). Budiž $l = 1$ hrana krychle; úhlopříčka čtvercové stěny je $u = l\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

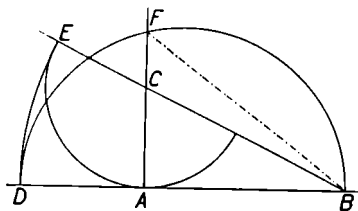
Sestrojme střední měřicky úměrnou obou úseček $m_1 = \sqrt{l \cdot l\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, potom střední měřicky úměrnou úseček u, m_1 , t. j. $m_2 = \sqrt{u \cdot m_1} = 2^{\frac{2}{4}}$, dále $m_3 = \sqrt{m_1 \cdot m_2} = 2^{\frac{3}{8}}$ atd. Tak se postupně přibližujeme přesné hodnotě $\sqrt[5]{2}$. Pro $m_7 = 2^{\frac{7}{8}}$ dostaneme hodnotu 1,25878 ... Srovnáme-li s přesnou hodnotou

$$\sqrt[5]{2} = 1,25992 \dots,$$

vidíme, že první hodnota je asi o jednu tisícinu menší.



Obr. 13



Obr. 14

G. Buonafalce uveřejnil několik přibližných řešení delického problému (1876). Uvádíme jen jedno, pozoruhodné svou jednoduchostí. Sestrojme čtverec $ABCD$, jehož strana $AB = 1$ (obr. 13). Úhlopříčku BD rozdělme na šest stejných

dílů a nanesme $DE = \frac{1}{6}BD$. Délka BE je pak velmi přibližně rovna $\sqrt[3]{2}$. Skutečně je $AE = 1 - \frac{1}{6}\sqrt{2}$, a tedy

$$\overline{BE} = 1 + (1 - \frac{1}{6}\sqrt{2})^2 = \frac{74 - 12\sqrt{2}}{36}.$$

Po propočtení dostaneme

$$BE = 1,25863 \dots,$$

což se od správné hodnoty liší až třetím desetinným místem.

Pro svou přesnost je rovněž pozoruhodná přibližná konstrukce, kterou uveřejnil Boccali (1884). K úsečce $AB = 1$ přičteme její větší díl, je-li rozdělena zlatým řezem, t. j. stranu pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice poloměru jedna (obr. 14). Tu sestrojíme, jak známo, takto: Budiž $AC = \frac{1}{2}AB$, opišme kružnici se středem C a poloměrem CA . Dostaneme na BC bod E , dále přeneseme $BE = BD$. Pak je $BC = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $BE = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ a $AD = BE - 1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = 0,61803398 \dots$ Kružnice nad průměrem BD protíná AC v bodě F a je

$$BF = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} = 1,27201964 \dots$$

Dále je

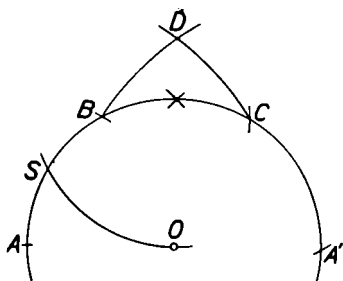
$$\sqrt[3]{2}(AD + BF) = 1,26003575 \dots$$

Porovnáním s přesnou hodnotou $\sqrt[3]{2}$ vidíme, že rozdíl je menší než 0,0001. Hrana dvojnásobné krychle je tedy s velkou přibližností rovna délce $\sqrt[3]{2}(AD + BF)$.

Lanascol ve svém spise „Géométrie du compas“, který je věnován řešení kvadratických a lineárních úloh pouhým kružidlem, uvádí také několik přibližných konstrukcí pro zdvojnásobení krychle, jež lze provést jen kružidlem. Uvádíme pouze jednu z nich.

Středem O opišme kružnici poloměrem rovným jedné a nanesme $AB = BC = CA' =$ poloměru (obr. 15). A, A'

jsou koncové body průměru. Oblouky o středech A, A' , které jdou body C a B , protínají se v bodě D . Sestrojme dále bod X tak, že $AX = A'X = OD$ (X leží na původní kružnici). Ze středu X opišme kružnici poloměrem XO a dostaneme bod S . Pak se DS přibližně rovná



Obr. 15

$\sqrt[3]{2}$. Skutečně podle obrázku

$$\text{je } \overline{AD} = \overline{AC} = \sqrt{3}, \quad \overline{OD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{OA}^2 = (\sqrt{3})^2 - 1 = 2, \\ \overline{OD} = \sqrt{2}. \text{ Pak } \overline{DS}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OS}^2 - 2 \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OS} \cdot \cos 60^\circ = \\ = 2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 3 - \sqrt{2} \text{ a } \overline{DS} = \sqrt{3 - \sqrt{2}} = \\ = 1,259281 \dots$$

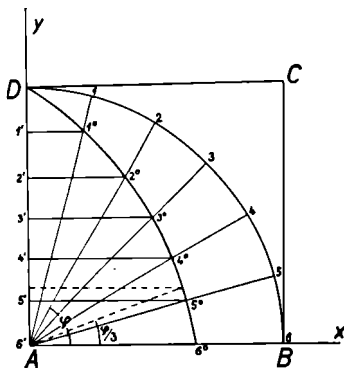
Odchylka od správné hodnoty je až na čtvrtém desetinném místě.

5. STARŠÍ METHODY TRISEKCE

5.1. První úvahy o trisekci úhlu pochází ze IV. století př. Kr. od Hippiaše. Jemu se přičítá použití křivky, která později byla nazvána *kvadratrix*, poněvadž se jí použilo také při kvadratuře kruhu. Je to transcendentní křivka. Její jednu větev, jíž se používá k našemu účelu, lze mechanicky vytvořit takto (obr. 16): Budiž dán čtverec $ABCD$; necht' se jeho strana AD otáčí stejnoměrně kolem A z polohy AD do AB a současně strana DC se stejnoměrně pohybuje, zůstávajíc s původní polohou rovnoběžná, až se obě sejdou v poloze AB . Pohyb je označen na oblouku DB rozdělením na šest stejných dílů a rovněž na straně CB . Poloměr AI se s rovnoběžkou bodem I' protíná v bodě I° křivky, poloměr

$A2$ s rovnoběžkou bodem $2'$ v bodě 2° atd. Všimněme si na př. bodu 2. Pak podle obrázku je poměr $y : b$ ($A2' : AD$) roven poměru $\varphi : \frac{1}{2}\pi$ (oblouk $\widehat{B2} : \widehat{BD}$),

$$\frac{y}{b} = \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi} \text{ čili } y = \frac{2b}{\pi} \varphi.$$



Obr. 16

y -ová souřadnice křivky je tedy úměrná úhlu φ . Je-li dán úhel φ a chceme-li sestrojiti úhel $\frac{1}{3}\varphi$, vezmeme na křivce bod o souřadnici y , která patří úhlu φ . Souřadnici $\frac{1}{3}y$ patří bod, který odpovídá úhlu $\frac{1}{3}\varphi$.

K témuž účelu může sloužit i *Archimedova spirála*, daná v polární souřadnicové soustavě rovnicí

$$\varrho = a\varphi,$$

kde a je konstanta. K úhlu

φ patří průvodič ϱ , k úhlu $\frac{1}{3}\varphi$ průvodič $\frac{1}{3}\varrho$.

Podobně definovaných křivek se často použilo i v pozdější době. Sem patří na př. *trisektrix* Maclaurinova (1749), definovaná v bipolární soustavě rovnicí

$$\psi = 3\varphi;$$

její použití je zřejmé.

Catalanova trisektrix (1885) má v polární soustavě rovnicí

$$\varrho \sin^3 \frac{1}{2}\varphi = k;$$

její tečna v bodě (ϱ, φ) svírá s průvodičem ϱ úhel $\frac{1}{3}(R - \varphi)$.

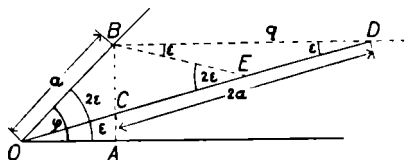
Podobnou vlastnost má Gaussova spirála

$$\varrho = \frac{1}{\cos^3 \frac{1}{3}\varphi};$$

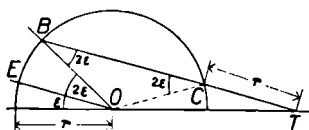
její normála v bodě (ϱ, φ) svírá s průvodičem ϱ úhel $\frac{1}{3}\varphi$.

Konstrukce těchto křivek je ovšem značně složitá.

5.2. Jiné metody trisekce záleží opět v zasouvání úsečky dané délky či v užití Nikomedovy konchoidy. Některé pochází snad již v V. století př. Kr. Vyskytuje se také u Archimeda. Ostatně užití této metody je zřejmé mnohem spíše než při hledání středních úměrných. Uvedme tuto konstrukci:



Obr. 17



Obr. 17a

Budiž dán úhel $AOB = \varphi$ (obr. 17). Z bodu B na jednom rameni spustíme kolmici BA na druhé rameno. Nechť $BO = a$. Bodem B vedme rovnoběžku g s přímkou OA a zasuňme úsečku $CD = 2a$ mezi AB a g tak, aby její prodloužení šlo bodem O . Pak je

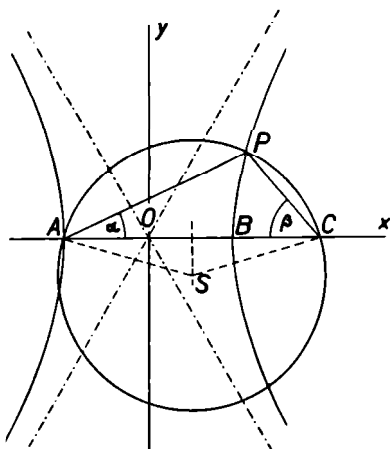
$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle BDC = \varepsilon.$$

Trojúhelník BCD je pravoúhlý, E půlicí bod přepony, tedy trojúhelník BED je rovnoramenný, $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BDE = \varepsilon$; vnější úhel $BEC = 2\varepsilon$. Avšak $BE = CE = a = BO$, trojúhelník OBE je tedy rovnoramenný a $\sphericalangle BOE = \sphericalangle BEO = 2\varepsilon$. Pak $\sphericalangle DOA = \varepsilon = \frac{1}{3}\varphi$.

Jiná podobná konstrukce je na obr. 17a. Daný úhel je $AOB = \varphi$. Kolem vrcholu O jako středu opišme kružnici poloměrem r . Zasuňme úsečku délky r tak, aby jeden koncový bod C byl na kružnici, druhý T na OA a prodloužení procházelo bodem B . $OE \parallel BC$ odděluje úhel $\varepsilon = \frac{1}{3}\varphi$, jak je snadno vidět z obrázku.

5.3. Jako k řešení delického problému používalo se k řešení trisekce ve starověku kuželoseček a tyto konstrukce převzali

v principu i geometrii v době renaissance. Po prvé snad použil kuželoseček k řešení trisekce Pappus. Mezi jeho



Obr. 18

konstrukcemi je jedna, která zaslouží pozornosti. Používá zde hyperboly, jejíž asymptoty svírají úhel 120° a jejíž rovnice je tedy ($b = a = \sqrt{3}$)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1 \text{ čili } y^2 = 3x^2 - 3a^2.$$

Vrcholy reálné osy buďte A, B (obr. 18). Sestrojme na hlavní ose bod C ($OC = 2a$). Libovolný bod P na hyperbole spojme s A a C . Pak je

$$\sphericalangle ACP = 2 \cdot \sphericalangle CAP \quad (\beta = 2\alpha),$$

jak ukazuje jednoduchý výpočet. Skutečně dle obrázku je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a+x}, \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{2a-x}.$$

Snadno vypočteme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2 - y^2} = \\ &= \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2 - 3(x^2 - a^2)} = \frac{y}{2a-x} = \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Sestrojme kružnici body A, P, C . Obvodový úhel patřící oblouku APC je $\alpha + \beta = 3\alpha$. Chceme-li tedy užitím narýsované hyperboly sestavit třetinu úhlu φ , sestrojme kružnici nad tětivou AC tak, aby středový úhel $ASC = 2\varphi$ (obvo-

dový φ). Je-li P příslušný průsečík kružnice s hyperbolou, je $\sphericalangle CAP = \alpha = \frac{1}{3}\varphi$.

Poznámka: Kružnice protíná hyperbolu ještě v dalších dvou bodech, které mají stejný význam pro jeden nebo druhý oblouk AC kružnice, jsou-li ovšem oblouky vzaty s patřičným znaménkem.

Descartes uvažuje takto:

Na kružnici o středu O a poloměru $r = 1$ budiž oblouk AD rozdělen body B, C na tři stejné části (obr. 19). Označme $AD = q$, $AB = BC = CD = z$. Vedme $BF \parallel CO$. Trojúhelníky AOB , BAE jsou podobné (úhly při B jsou stejné, $\sphericalangle BAD = \frac{1}{3}\sphericalangle BOD = \sphericalangle AOB$). Pak

$$AO : AB = AB : BE$$

čili

$$1 : z = z : BE$$

a odtud

$$BE = z^2.$$

Avšak také $\triangle ABE \sim \triangle BEF$, z čehož

$$AB : BE = BE : EF$$

čili

$$z : z^2 = z^2 : FE$$

a odtud

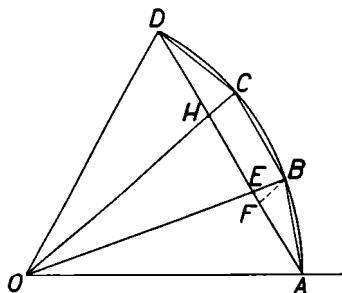
$$FE = z^3.$$

Avšak $AB = AE = HD = z$, $EH = z - z^3$, tedy

$$q = 3z - z^3.$$

Jde tedy o grafické řešení rovnice

$$z^3 - 3z + q = 0$$



Obr. 19

a to lze snadno provést parabolou a kružnicí. Skutečně parabola

$$y^2 = x$$

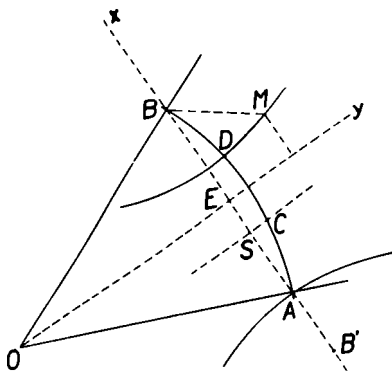
a kružnice

$$(x - 2)^2 + (y + \frac{1}{2}q)^2 = 2^2 + \frac{1}{4}q^2,$$

jež má střed $(2, -\frac{1}{2}q)$ a jde vrcholem paraboly, dávají po vyloučení x a vypuštění faktoru y rovnici

$$y^3 - 3y + q = 0.$$

Nejmenší kořen je tětivou daného ostrého úhlu.



Obr. 20

Clairautova konstrukce. Budiž AOB daný úhel, C, D body, které dělí oblouk AB na tři stejné části (obr. 20). Zvolíme kolmé osy x, y jako na obrázku a vidíme, že bod D je od B dvakrát tak vzdálen jako od osy y . Geometrickým místem takových bodů je hyperbola s ohniskem B a řídící přímkou y . Pro bod M je

$$BM = \sqrt{(u-x)^2 + y^2} = 2x$$

a rovnice křivky je

$$(u-x)^2 + y^2 = 4x^2$$

čili

$$y^2 - 3x^2 - 2ux + u^2 = 0.$$

Tuto rovnici lze napsat ve tvaru

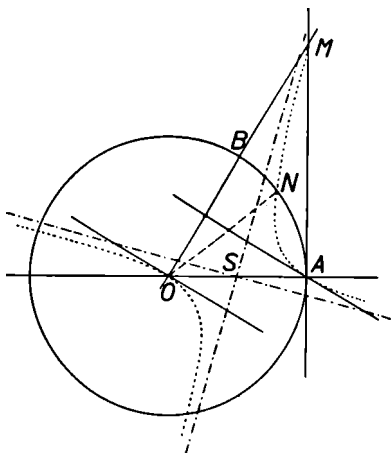
$$3\left(x + \frac{1}{3}u\right)^2 - y^2 = \frac{4}{3}u^2.$$

Uvažovaná hyperbola má tedy střed $S(-\frac{1}{3}u, 0)$, jeden vrchol $A(-u, 0)$ a druhé ohnisko $B'(-\frac{4}{3}u, 0)$. Poloosy jsou

$a = \frac{2}{3}u$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}}u$, úhel asymptot $\varphi = 120^\circ$ ($\operatorname{tg}\varphi = b : a =$

$= \sqrt{3}$). Je to tedy táž hyperbola, se kterou jsme se shledali již při metodě Pappusově.

Zde lze dobře nahradit hyperbolu v okolí vrcholu G oskulační kružnicí.¹



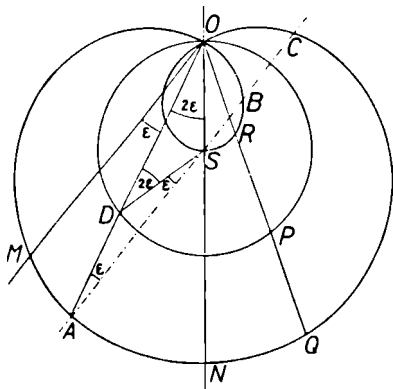
Obr. 21

¹ Velmi málo odlišnou konstrukci užitím hyperboly, jejíž asymptoty svírají úhel 120° , se zabýval Lampe v Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft (1905) a ukázal, že užije-li se oskulační kružnice, činí rozdíl při úhlu $\varphi = 60^\circ$ asi jednu minutu.

Tato úvaha se zajímavou úvahou o přibližných konstrukcích je uveřejněna také v Archiv der Mathematik und Physik (Grunert), řada 3, sv. 10.

Chaslesova metoda. Budiž AOB daný úhel (obr. 21). Opíšeme kružnici c středu O a v bodě A sestrojíme tečnu. Je-li N hledaný bod, je $\sphericalangle BON = \varphi$, $\sphericalangle NOA = 2\varphi$, $\sphericalangle Nat = \varphi$, tedy $\sphericalangle BON = \sphericalangle tAN$. Necháme otáčet paprsek p kolem bodu O , paprsek q kolem bodu A z původních poloh OB , t stejnou rychlostí, takže svazky se středy O , A jsou shodné a opačného smyslu. Průsečík X vytvoří rovnostrannou hyperbolu, která protíná kružnici mimo A ještě ve třech bodech. Jeden N padne do oblouku AB a $\widehat{BN} = \frac{1}{3}\widehat{BA}$.

Tuto hyperbolu lze snadno blíže určit. Tečny v bodech O , A jsou kolmé k OM , střed S tedy pól OA . Asymptoty jsou rovnoběžné s přímkami, které pólí úhel OMA a úhel vedlejší.



Obr. 22

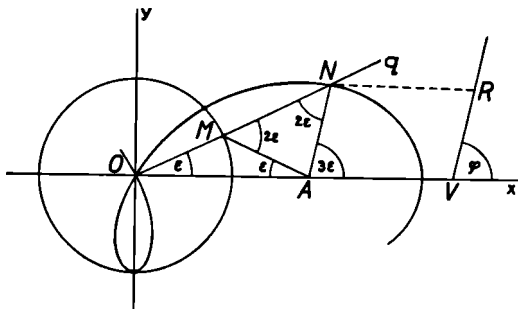
5.4. Kromě toho je mnoho křivek, jichž lze použít nejen k dělení na tři díly, nýbrž na libovolný počet dílů. Jedna z nich je *Pascalova závitnice*. Budiž dán úhel MON (obr. 22). Na rameni ON volme bod S jako střed kružnice, jež jde bodem O . Bodem O vedme přímku a od průsečíku P s kružnicí nanesme na obě strany délku $PQ = PR = OS = r$. Body

Q, R opíše P . závitnici. Je to křivka čtvrtého stupně s dvojným bodem O a dvěma imaginárními body vratu v kruhových bodech v nekonečnu.

Abychom rozdělili úhel MON na tři stejné části, sestrojíme bodem S rovnoběžku s ramenem OM , která protíná závitnici ještě v bodech A, B, C . Spojnice AO protíná kružnici v bodě D a ze vzniklých rovnoramenných trojúhelníků ADS, DSO a rovnosti úhlů při základnách je vidět, že $\sphericalangle MOA = \varepsilon$, $\sphericalangle AON = 2\varepsilon$.

Podobně lze ukázat, jaký význam mají body B, C . Je $\sphericalangle MOB = \frac{1}{3}(\pi + \sphericalangle MON)$, $\sphericalangle MOC = \frac{1}{3}(2\pi + \sphericalangle MON)$.

5,5. Cevova *cykloida*. Sestrojme kružnici se středem O a poloměrem r a osu Ox (obr. 23). Bodem O vedme přímku q ,



Obr. 23

její průsečík s kružnicí budiž M . Nechť $MA = r$ a $AN = r$. Bod N opisuje C . cykloidu. Její rovnici lze snadno nalézt. Dle obrázku je $ON = r + 2r \cos 2\varepsilon$; přejdeme-li k pravoúhlým souřadnicím,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r(1 + 2 \cos 2\varepsilon),$$

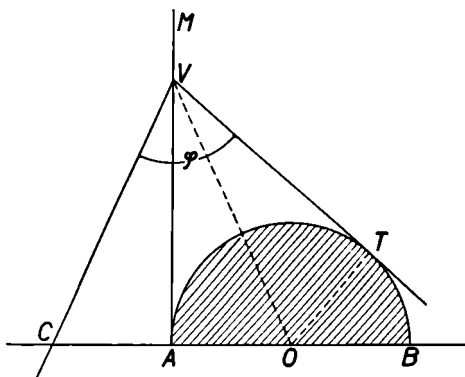
$$\cos 2\varepsilon = \cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

dostaneme rovnici křivky

$$(x^2 + y^2)^3 = r^2(3x^2 - y^2)^2.$$

Počátek O je čtyřnásobný (tečny splývají po dvou), kruhové body v nekonečnu jsou trojnásobné. Obrázek ukazuje, jak lze použít C . cykloidy k trisekci úhlu. Daný úhel φ umístíme tak, aby jedno rameno bylo VX , na druhé nanese $VR = r$ a bodem R vedeme rovnoběžku s OX . Ta protne křivku v bodě N a úhel $NOX = \frac{1}{3}\varphi$.¹

Z četných přístrojů sestrojených k mechanickému provedení trisekce uvedu jen jeden nejjednodušší. Sestává z pravítka CAB , polokruhu se středem O , při němž $OA = OB = AC$, a jiného pravítka AM , které se dotýká kruhu v bodě A (obr. 24). Tyto části jsou spolu pevně spojeny. Chceme-li daný úhel φ rozdělit na tři stejné díly, umístíme aparát tak, aby vrchol V byl na hraně AM a aby jedno rameno šlo bodem C ; posunujeme pak aparát tak, aby se druhé rameno dotklo kružnice. Jak patrně, je $\sphericalangle CVA = \sphericalangle AVO = \sphericalangle OVT = \frac{1}{3}\varphi$.²



Obr. 24

¹ O těchto a jiných křivkách a jejich použití viz citovaná díla Enriques a Enriques-Fleischer.

² Jiné aparáty jsou popsány ve výše uvedených spisech.

5,6. Přibližné konstrukce jsou konstrukce prováděné pravítkem a kružidlem, které se co nejvíce přibližují přesnému výsledku.

Jedna z nejstarších konstrukcí rozdělení kruhového oblouku na tři stejné díly, jež byla vědomě prohlášena za přibližnou, pochází od A. Dürera a záleží v tomto: Tětivu AB rozdělme na tři stejné části body C, D , sestrojme kolmice CE, CF k AB (obr. 25). Aritmetický střed tětiv AE, EF, FB je tětiva příslušející třetině oblouku AB . Konstrukcí i výpočtem se snadno přesvědčíme, že přiblížení je dosti značné.

Jiná metoda záleží v tom, že najdeme kvadratickou konstrukci, jejíž opakování vede k libovolně přesnému výsledku. Na příklad geometrická řada

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

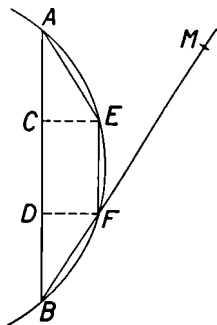
má součet $\frac{1}{3}$. Pišme tedy

$$\frac{1}{3}\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{8}\varphi - \frac{1}{16}\varphi + \dots$$

Daný úhel φ rozdělme tedy na 2, 4, 8, ... dílů, což znamená jen postupné půlení, a po dostatečném počtu operací přijdeme k výsledku libovolně přesnému.

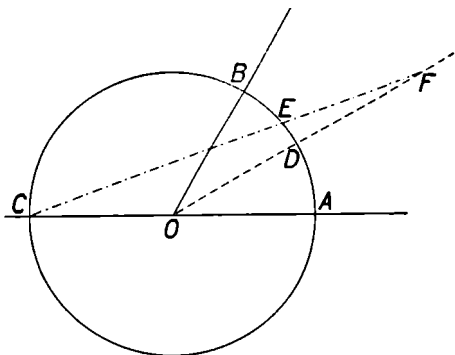
Cominotto a Monti (1895) uvádějí několik přibližných konstrukcí, které jsou snad již staršího původu, a zkoumají jejich přesnost. Přesnost je sice značná, ale konstrukce jsou příliš složité. Poměrně nejjednodušší je tato: Kolem vrcholu O úhlu opišeme kružnici, která protíná ramena v bodech A, B , prodloužení prvního ramene v bodě C (obr. 26). Budiž D půlicí bod oblouku AB ; naneseme $DF = OD$ a spojíme F s bodem C ; přímka CF protíná kružnici v bodě E . Oblouk BE je přibližně třetina oblouku AB . Konstrukcí i výpočtem se přesvědčíme, že pro ostré úhly je chyba malá.

K poměrně dobrému výsledku vede použití t. zv. přibliž-



Obr. 52

ného *trisekčního bodu*. Všimněme si obrázku 17a, kde jsme provedli trisekci zasunutím úsečky $CT = OA = 1$. T se na-



Obr. 26

zývá trisekční bod. Zřejmě je $OT = 2 \cos \frac{1}{3}\varphi$. Je-li φ dosti malý úhel, lze vzít $OT = 2$; T se nazývá přibližný trisekční bod a může sloužit k přibližné konstrukci. Je-li dán úhel $COB = \varphi$, stačí jen spojit B s T a $\sphericalangle BTC \doteq \frac{1}{3}\varphi$.

6. OBECNÁ KUBICKÁ ROVNICE

Nejprve uvažme, že speciální kubická rovnice, t. zv. binomická,

$$x^3 - 1 = 0$$

má tři kořeny

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2.$$

Čísla $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ jsou tedy třetí odmocniny z jedné, $\varepsilon^3 = 1$. Z toho plyne, že rovnice

$$x^3 - a = 0$$

má kořeny $\sqrt[3]{a}$, $\varepsilon\sqrt[3]{a}$, $\varepsilon^2\sqrt[3]{a}$, při čemž první hodnota znamená jednu, nejlépe reálnou, třetí odmocninu čísla a .

Obecnou rovnici

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (1)$$

převědeme substitucí $x = y - \frac{1}{3}a_1$ na redukovaný tvar

$$y^3 + py + q = 0, \quad (2)$$

v němž

$$p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2, \quad q = a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{1}{27}a_1^3. \quad (3)$$

Jedna metoda řešení rovnice (2) závisí v tom, že místo jedné neznámé zavedeme dvě neznámé u, v vázané vztahem

$$y = u + v; \quad (4)$$

tedy

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

čili

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \quad (5)$$

Volme mezi u, v mimo (4) ještě další vztah, totiž

$$3uv = -p. \quad (6)$$

Z rovnice (5) vychází

$$u^3 + v^3 = -q \quad (7)$$

a rovnice (6) a (7) dávají

$$\begin{aligned} v^3 &= -\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}, \\ u^3 &= -\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}; \end{aligned}$$

z toho

$$\begin{aligned} v &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}, \\ u &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Každý z těchto výrazů má tři hodnoty, musí však být splněna podmínka (6), a proto pro y dostáváme jen tři různé hodnoty

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v. \quad (9)$$

Vzorce (9) se shrnují pod názvem Cardanův vzorec.

Pokud jsou kořeny od sebe různé, má kubická rovnice tři kořeny reálné nebo jeden reálný a dva komplexní sdružené. Při tom předpokládáme, že koeficienty rovnice jsou reálné. Chceme-li provést diskusi, musíme si povšimnout výrazu pod druhou odmocninou ve vzorcích (8). Tento výraz je

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{108}.$$

Výraz v čitateli s opačným znaménkem nazýváme diskriminantem rovnice (2) a značíme jej D ; je tedy

$$D = -(27q^2 + 4p^3).$$

Jak známo, je

$$D = [(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^2,$$

o čemž se můžeme přesvědčit přímým dosazením hodnot (9).

Výrazy (8) lze pak napsat

$$v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{-\frac{1}{108}D}},$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{-\frac{1}{108}D}}.$$

(10)

Jsou-li y_1, y_2, y_3 reálné a různé, je D číslo kladné. Jsou-li y_1 reálné, y_2, y_3 komplexní sdružené, je výraz $(y_2 - y_3)^2$ záporný, $[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)]^2$ kladný a D je tedy záporné. Při $D = 0$ jsou dva kořeny stejné. Tedy:

Jestliže diskriminant rovnice (2) je kladný ($D > 0$), má rovnice tři reálné kořeny, je-li záporný ($D < 0$), je jeden kořen reálný, dva komplexní sdružené. Při $D = 0$ má rovnice jeden dvojnásobný kořen.

V případě $D < 0$ podávají vzorce (10) a (9) řešení v pohodlném tvaru, v případě $D > 0$ podávají tyto vzorce řešení ve tvaru komplexním, ač jsou reálné. Tento případ — „casus irreducibilis“ — se obchází tak, že si pomáháme řešením goniometrickým.*

* Ohledně dalšího poučení o rovnicích 3. a 4. stupně poukazuje na spisek Š. Schwarz, O rovnicích, Cesta k věděni sv. I., JČMF, 2. vyd., 1949.

7. BIKVADRATICKÉ ROVNICE

Rovnici čtvrtého stupně lze řešit podobně jako rovnici kubickou.

Obecnou rovnici

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

lze substitucí $x = y - \frac{1}{4}a_1$ opět převést na tvar

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \quad (1)$$

Místo neznámé y zavedme tři nové neznámé u, v, w , vázané vztahem

$$2y = u + v + w, \quad (2)$$

a volme opět dva nové vztahy. Násobme rovnici (1) číslem 16 a dosadme z rovnice (2). Dostaneme po krátké úpravě

$$\begin{aligned} (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(uv + vw + wu)(u^2 + v^2 + w^2 + 2p) + \\ + 4p(u^2 + v^2 + w^2) + 8(uvw + q)(u + v + w) + \\ + 4(u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2) + 16r = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Volme dva nové vztahy

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2p, \quad (4)$$

$$uvw = -q. \quad (5)$$

Z rovnice (3) zůstává jen

$$u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2 = p^2 - 4r. \quad (6)$$

Podle rovnic (4), (5), (6) jsou u^2, v^2, w^2 kořeny rovnice třetího stupně

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0, \quad (7)$$

kterou nazýváme *resolventou* rovnice (1).

Nechť její kořeny jsou t_1, t_2, t_3 ; pak je

$$u = \sqrt[3]{t_1}, \quad v = \sqrt[3]{t_2}, \quad w = \sqrt[3]{t_3}.$$

Znaménka volíme tak, aby byla splněna rovnice (5); dostáváme čtyři kořeny, jež lze napsat

$$\begin{aligned}
2y_1 &= \sqrt[3]{t_1^-} + \sqrt[3]{t_2^-} + \sqrt[3]{t_3^-}, \\
2y_2 &= \sqrt[3]{t_1^-} - \sqrt[3]{t_2^-} - \sqrt[3]{t_3^-}, \\
2y_3 &= -\sqrt[3]{t_1^-} + \sqrt[3]{t_2^-} - \sqrt[3]{t_3^-}, \\
2y_4 &= -\sqrt[3]{t_1^-} - \sqrt[3]{t_2^-} + \sqrt[3]{t_3^-}.
\end{aligned}$$

Z toho je patrné, že řešení rovnice čtvrtého stupně vede na řešení rovnice třetího stupně — resolventy první rovnice; řešící problémy kubické, řešíme zároveň i problémy bikvadratické. Ostatně čistě geometrické úvahy vedou k témuž výsledku. Za nejobecnější projektivní bikvadratický problém lze považovat sestavení společných bodů dvou kuželoseček, je-li každá z nich dána na př. pěti body. Tento problém vede k sestavení společného polárního trojúhelníka, což je kubický problém, při kterém jde o tři průsečíky dvou kuželoseček; jejich jeden společný bod je znám, což bude v dalším ukázáno.

8. PŘEVEDENÍ KUBICKÉ ROVNICE NA TRISEKCI NEBO DELICKÝ PROBLÉM

Lze ukázat, že obecnou rovnici třetího stupně lze převést racionálními operacemi a druhými odmocninami na rovnici, na niž vede buď trisekce nebo delický problém.

Stačí uvažovat redukovaný tvar

$$z^3 + pz + q = 0. \quad (1)$$

Trisekce úhlu vedla na rovnici (odst. 3)

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0. \quad (2)$$

Substitucí $z = \lambda y$ lze převést první rovnici na druhou. Dosazením do (1) vychází

$$\lambda^3 y^3 + p\lambda y + q = 0$$

čili

$$y^3 + \frac{p}{\lambda^2}y + \frac{q}{\lambda^3} = 0. \quad (3)$$

Srovnáním rovnice (2) s (3) dostaneme

$$\frac{p}{\lambda^2} = -3(1 + a^2), \quad \frac{q}{\lambda^3} = -2a(1 + a^2). \quad (4)$$

Dělením obou rovnic

$$a = \frac{3q}{2p\lambda}. \quad (5)$$

Dosazením do (4)

$$12p^2\lambda^2 = -4p^3 - 27q^2,$$

z čehož

$$\lambda = \frac{1}{2p} \sqrt[3]{-\frac{4p^3 + 27q^2}{3}} = \frac{1}{2p} \sqrt[3]{\bar{D}},$$

a podle (5)

$$a = \frac{3q}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}D}}.$$

Tato transformace má geometrický význam jen pokud jsou výrazy pro λ a a reálné, t. j. $D > 0$. Pak lze uvedené výrazy sestrojít kružidlem a pravítkem.

Konstrukci kořenů kubické rovnice lze převést na trisekci tehdy, když je diskriminant rovnice (1) kladný.

V případě záporného diskriminantu ($D < 0$) má rovnice, jak známo, jeden reálný kořen a ten je dán t. zv. Cardanovým vzorcem (odst. 6)

$$z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{-\frac{1}{108}D}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{-\frac{1}{108}D}}$$

a zbývá jen sestrojít výrazy

$$m = -\frac{1}{2}q + \frac{\sqrt{-D}}{6\sqrt[3]{3}}, \quad n = -\frac{1}{2}q - \frac{\sqrt{-D}}{6\sqrt[3]{3}},$$

jež obsahují pouze druhé odmocniny, a pak výrazy

$$\sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{n},$$

což je úloha delická.

Konstrukce třetího stupně lze tedy převést pravítkem a kružidlem na trisekci úhlu nebo delický problém.

Proveďte podobnou úvahu pro rovnici

$$4x^3 - 3x + a = 0 \quad (|a| < 1),$$

na kterou vede také trisekce (odst. 3).

9. DŮKAZ, ŽE NENÍ MOŽNO DRUHÝMI ODMOCNINAMI ŘEŠIT ÚLOHU, KTERÁ VEDE NA IRREDUCIBILNÍ ROVNICI TŘETÍHO STUPNĚ

Teprve moderní algebra našla prostředky, jimiž lze stanovit, lze-li danou úlohu provést jistými nástroji či není-li to vůbec možné. Tak je tomu i v uvažovaném případě, kdy jde o problémy kubické a bikvadratické. Předěšleme krátkou úvahu z theorie algebraických rovnic.

Tělesem se nazývá množina čísel, která má tu vlastnost, že provedeme-li základní početní úkony — sčítání, odčítání, násobení, dělení (vyjma dělení nulou) — s kterýmikoli jejími čísly, dostaneme vždy číslo, jež do této množiny patří.* Budiž R takové těleso. Pak je zřejmá věta:

Jsou-li všechny prvky tělesa R obsaženy v jiném tělese R_1 , je R dělitelem tělesa R_1 a R_1 nazýváme *nadtělesem* tělesa R .

Nejznámější těleso je těleso čísel racionálních, které budeme nadále označovat R . Toto je dělitelem každého jiného tělesa, neboť každé těleso obsahuje aspoň jednu veličinu $\omega \neq 0$, a tedy i $\omega : \omega = 1$ a z jedničky lze konečným

* Tento pojem zavedl Dedekind. Viz Dirichlet-Dedekind. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1871.

počtem základních početních výkonů přijít ke každému racionálnímu číslu.

Připojíme-li k tělesu R veličinu α a zároveň všechna čísla, která vzniknou základními početními výkony z čísla α a čísel tělesa R , dostaneme nové, obsáhlejší těleso R_1 čili nadtěleso, které obsahuje R i α . Takové připojení se nazývá *adjunkce*. R_1 vzniklo z R adjunkcí veličiny α .

Budiž

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m$$

celá funkce, jejíž koeficienty patří tělesu R .

Jsou možné dva případy: $f(x)$ lze rozložit ve dva mnohočleny nižšího stupně, jejichž koeficienty patří tělesu R , nebo to není možné. V prvním případě nazýváme $f(x)$ *reducibilní*, v druhém *irreducibilní*. Lineární funkce je samozřejmě irreducibilní. Funkce $f(x)$, jejíž koeficienty patří tělesu R a která je irreducibilní, může být reducibilní v jiném tělese R_1 (na př. v nadtělese, které vznikne z R adjunkcí některého kořene rovnice $f(x) = 0$).

Ihned je zřejmá věta:

Irreducibilní funkce $f(x)$ nemůže mít s jinou funkcí $F(x)$, jež patří témuž tělesu, žádný společný dělitel, není-li $F(x)$ dělitelna mnohočlenem $f(x)$. Neboť největší společný dělitel lze nalézt postupným dělením a je tedy v R obsažen.

Irreducibilní funkce $f(x)$ nemá dělitele obsaženého v R , jen sebe a konstantu.

Nyní můžeme přistoupit k rovnici kubické. Budiž R stále těleso racionálních čísel, a určité racionální číslo, které není druhou mocninou jiného čísla. Adjungováním čísla \sqrt{a} dostaneme nadtěleso R_1 . Všechna čísla tohoto tělesa mají tvar $M + N\sqrt{a}$, kde M, N jsou čísla tělesa R . Jsou-li na př. $x_1 = m_1 + n_1\sqrt{a}$, $x_2 = m_2 + n_2\sqrt{a}$, je

$$x_1 \cdot x_2 = m_1m_2 + an_1n_2 + \sqrt{a}(m_1n_2 + m_2n_1)$$

a podobně

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(m_1 + n_1\sqrt{a})(m_2 - n_2\sqrt{a})}{m_2^2 - an_2^2}$$

téhož tvaru.

Budiž a_1 číslo tělesa R_1 , avšak $\sqrt{a_1}$ nikoli. Adjunkcí čísla $\sqrt{a_1}$ k tělesu R_1 dostaneme nadtěleso R_2 , jež zahrnuje čísla tvaru $p + q\sqrt{a_1}$, při čemž p, q patří tělesu R_1 . K tělesu R_2 připojme opět $\sqrt{a_2}$, kde a_2 patří tělesu R_2 , nikoli však $\sqrt{a_2}$. Dostáváme nové nadtěleso R_3 . Takto pokračující dostaneme těleso R_n adjunkcí čísla $\sqrt{a_{n-1}}$ k předešlému tělesu. Čísla posledního tělesa mají tvar $r + s\sqrt{a_{n-1}}$, kde r, s patří předchozímu tělesu R_{n-1} .

Na př. číslo

$$x = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{3}}}{\sqrt{11}}$$

se dostane z tělesa racionálních čísel R postupným připojením druhých odmocnin. Adjunkcí čísla $\sqrt{3}$ dostaneme z R těleso R_1 , ve kterém je $5 + \sqrt{3}$. Adjunkcí čísla $\sqrt{5 + \sqrt{3}}$ dostaneme těleso R_2 . Další adjunkcí čísla $\sqrt{11}$ dostaneme těleso R_3 , ve kterém je obsaženo číslo x .

Nyní můžeme ukázat, že rovnice třetího stupně, která nemá racionální kořen a je tedy irreducibilní, není řešitelná druhými odmocninami. Rovnici můžeme předpokládat ve tvaru redukovaném, neboť kdyby měla úplná rovnice racionální kořen, měla by jej i rovnice redukovaná.

Mějme tedy rovnici

$$x^3 + ax + b = 0, \quad (1)$$

kde a, b jsou racionální čísla. Ta má tři kořeny, pro které platí (koeficient při x^2 roven nule)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (2)$$

Předpokládejme, že žádný z těchto kořenů není racionální, že však je možno na př. x_1 vyjádřit řadou druhých odmocnin. Pak lze dle předešlé úvahy získat z tělesa R připojováním druhých odmocnin těleso, ve kterém je x_1 obsaženo. Budiž $\sqrt[p]{p}$ poslední z připojených druhých odmocnin. Pak x_1 je tvaru

$$x_1 = m + n\sqrt[p]{p}, \quad (3)$$

kde m, n, p patří předposlednímu tělesu. Dosadíme-li do rovnice (1), dostaneme výraz tvaru

$$P + Q\sqrt[p]{p} = 0, \quad (4)$$

kde

$$P = m^3 + 3mn^2p + am + b, \quad Q = 3m^2n + n^3p + an.$$

P, Q, p patří předposlednímu tělesu, $\sqrt[p]{p}$ však nikoliv. Nemůže tedy být

$$\sqrt[p]{p} = -\frac{P}{Q},$$

leďaže by bylo současně $P = Q = 0$. Potom by však rovnice (1) měla také kořen

$$x_2 = m - n\sqrt[p]{p}$$

a bylo by rovněž

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2m.$$

Kořen x_3 by patřil předposlednímu tělesu.

Máme tedy výsledek: Lze-li jeden kořen x_1 rovnice vyjádřit řadou druhých odmocnin, lze postupným připojením druhých odmocnin utvořit těleso, jemuž náleží x_1 a mimo to ještě druhý kořen x_2 . Třetí kořen náleží pak tělesu předcházejícímu. Poněvadž x_3 patří předposlednímu tělesu, lze toutéž úvahou dokázat, že jeden z kořenů x_1, x_2 mu také patří, tedy zbývající kořen patří tělesu předcházejícímu atd. Konečně bychom dospěli k tělesu čísel racionálních. Není tedy přípustný předpoklad, že jeden kořen lze vyjádřit

druhými odmocninami. *Rovnice třetího stupně není řešitelná druhými odmocninami, nemá-li jeden kořen racionální.*

Avšak úloha, již nelze řešit druhými odmocninami, nedá se konstruktivně provést pravítkem a kružidlem. Taková konstrukce se skládá z přímek a kružnic. Vyjádříme-li tyto útvary analyticky za předpokladu, že jsme zvolili souřadnicovou soustavu, dostaneme jen rovnice prvního a druhého stupně; průsečíky přímků s kružnicí a průsečíky dvou kružnic vedou k rovnicím kvadratickým. Obráceně výraz, který obsahuje jen výkony racionální a druhé odmocniny, lze sestavit opakováním konstrukcí uvedených v odst. 2, které lze provést pravítkem a kružidlem. Podle toho tedy, *vede-li úloha na irreducibilní rovnici třetího stupně, není řešitelná kružidlem a pravítkem.*

10. JAK POZNÁME, ZDA MÁ ROVNICE S RACIONÁLNÍMI KOEFICIENTY RACIONÁLNÍ KOŘEN

Především platí věta: Má-li rovnice celistvé koeficienty a je-li koeficient nejvyšší mocniny roven jedné, je racionální kořen číslo celé, které je dělitelem absolutního členu.

Budiž dána rovnice

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (1)$$

v níž a_1, a_2, \dots, a_n jsou celá čísla; předpokládejme, že má kořen $x = p : q$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla kladná nebo záporná. Dosazením vychází

$$p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \dots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

Dělme číslem q a dostaneme

$$\frac{p^n}{q} + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \dots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = 0.$$

Na levé straně jsou vesměs celá čísla mimo první člen. Ten

musí tedy být také celé číslo, t. j. $q = 1$. Racionální kořen rovnice (1) je tedy číslo celé a zřejmě musí být dělitelem čísla a_n . V daném případě rozložíme tedy a_n v činitele a dosazením do rovnice (1) zjistíme zkusmo, zda některý vyhovuje této rovnici.

Má-li nejvyšší mocnina celistvý koeficient různý od jedné, jako na př. rovnice

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad a_0 \neq 1, \quad (2)$$

položíme

$$x = \frac{y}{k}$$

a dostaneme

$$y^3 + \frac{a_1}{a_0}ky^2 + \frac{a_2}{a_0}k^2y + \frac{a_3}{a_0}k^3 = 0. \quad (3)$$

Volme za k takové nejmenší číslo, aby koeficienty $\frac{a_1}{a_0}k$, $\frac{a_2}{a_0}k^2$,

$\frac{a_3}{a_0}k^3$ byly celými čísly. Má-li rovnice (2) racionální kořen,

musí mít i rovnice (3) kořen racionální, a tedy celistvý kořen, který lze nalézt podle předešlého.

Podle těchto vět je tedy rovnice

$$x^3 - 2 = 0,$$

na níž závisí delický problém, a obecněji i rovnice

$$x^3 - a = 0,$$

pokud a není trojmoc racionálního čísla, irreducibilní. Podobně jsou irreducibilní na př. rovnice

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Také rovnice

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0,$$

na které závisí problém trisekce úhlu, je obecně irreducibilní. Kdyby byla reducibilní pro libovolné a , byla by reducibilní i pro každé a celistvé. Avšak tomu tak není, neboť na př. $a = 2$ vede k rovnici

$$y^3 - 15y - 20 = 0,$$

kteřá je podle hořejších pravidel irreducibilní.

Pro některé zvláštní hodnoty a je ovšem tato rovnice reducibilní; na př. pro $a = 1 = \operatorname{tg}45^\circ$ dostaneme rovnici

$$y^3 - 6y - 4 = 0,$$

kteřá má kořeny $-2, 1 \pm \sqrt{3}$; jim odpovídají hodnoty $x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$, což jsou tangenty úhlů $\varphi = 135^\circ, 75^\circ, 15^\circ$.

Kružidlem a pravítkem lze provést také trisekci úhlu $\varphi = 2\pi : n$, kde n je celé číslo, jež není dělitelno třemi. Neboť pak lze vždy nalézt taková celá čísla x, y , že je splněna neurčitá rovnice

$$nx - 3y = 1.$$

Potom je

$$\frac{2}{3}\pi nx - \frac{2}{3}\pi \cdot 3y = \frac{2}{3}\pi$$

čili

$$\frac{2\pi x}{3} - \frac{2\pi y}{n} = \frac{2\pi}{3n} = \frac{1}{3}\varphi.$$

$\frac{1}{3}\varphi$ se tedy jeví jako rozdíl úhlů $60^\circ x$ a $y\varphi$. Lze tedy provést trisekci každého úhlu $\varphi = 2\pi : n$, kde n není dělitelno třemi, a tedy i trisekci úhlu $m\varphi$, kde m je číslo celé.

11. ŘEŠENÍ ÚLOH TŘETÍHO A ČTVRTÉHO STUPNĚ UŽITÍM PEVNÉ KUŽELOSEČKY

Kubické a bikvadratické úlohy vedou na rovnice třetího a čtvrtého stupně; jde tedy o grafické řešení těchto rovnic.

11.1. Nejprůrozanější je řešení užitím dvou kuželoseček.

Můžeme volit dvojí cestu. Buď k dané rovnici hledat vhodné kuželosečky nebo volit dvě kuželosečky a hledat rovnice, jež lze jejich užitím řešit.

Na př. máme-li rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

můžeme ji považovat za výsledek eliminace proměnné y z rovnic

$$x^2 = y, \quad xy + ay + bx + c = 0.$$

První je rovnice paraboly, druhá rovnice rovnosé hyperboly o středu $(-a, -b)$. Narýsujme tedy na milimetrovém papíře pevnou parabolu a pak hyperbolu. Stačí narýsovat jen části hyperboly v okolí hledaných průsečíků, k určení hyperboly stačí asymptoty a jeden bod.

Vyjděme obráceně od dvou kuželoseček; v takovém případě je nejlépe zvolit za jednu kružnici, abychom skutečně rýsovali jen jednu kuželosečku různou od kružnice. Volme opět parabolu

$$y = x^2$$

a kružnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Eliminujeme y a dostaneme rovnici

$$x^4 + (1 - 2n)x^2 - 2mx + m^2 + n^2 - r^2 = 0.$$

V této rovnici schází člen s x^3 , ale protože lze každou rovnici čtvrtého stupně převést racionální operací na tento tvar, vidíme snadno, že každou takovou rovnici lze graficky řešit danou pevnou narýsovanou parabolou a kružnicí. Neboť je-li taková rovnice

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

dostaneme srovnáním

$$1 - 2n = a, \quad -2m = b, \quad m^2 + n^2 - r^2 = c;$$

střed kružnice má tedy souřadnice

$$m = -\frac{1}{2}b, \quad n = \frac{1}{2}(1 - a);$$

poloměr dostaneme pak z poslední rovnice.

... V tomto je zahrnuto i řešení kubické rovnice ($c = 0$)

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Odpadá hledání poloměru r , neboť $r = \sqrt{m^2 + n^2}$; kružnice jde tedy vrcholem paraboly.

Vidíme tedy, že kubické a bikvadratické problémy lze řešit kružidlem, je-li dána pevná parabola. Ukážeme dále, že to obecně platí o každé kuželosečce, ovšem různé od kružnice. To je rozšíření Steinerových úvah pro kvadratické problémy. Kvadratické úlohy v rovině lze řešit pouhým pravítkem, je-li dána pevná kružnice; zde máme pevnou kuželosečku a používáme kružidla a pravítka.¹

11.2. Budiž dána elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (1)$$

vyjádříme ji parametricky

$$x = a \cos\varphi, \quad y = b \sin\varphi, \quad (1a)$$

kde φ je t zv. excentrická anomalie. Vyjádříme-li $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ tangentou polovičního úhlu, $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, dostaneme racionální vyjádření

$$x = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (1b)$$

Pro parametry průsečíků kružnice

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0 \quad (2)$$

¹ Po prvé byla tato myšlenka a její užití na některé problémy zpracována v dílech:

Kortum, Über geom. Aufgaben dritten u. vierten Grades, Bohn (1869),

Smith, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, Annali di matematica, ř. 2., sv. 3.

s elipsou vychází rovnice

$$(a^2 + 2am + p)t^4 - 4bnt^3 + (-2a^2 + 4b^2 + 2p)t^2 - 4bnt + (a^2 - 2am + p) = 0. \quad (3)$$

Tato rovnice nemá ovšem tvar obecné bikvadratické rovnice, neboť koeficienty při t^3 a t jsou stejné. Je tedy otázka, zda lze obecnou bikvadratickou rovnici

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$$

uvést na takový tvar transformacemi, jež obsahují jen výkony racionální a druhé odmocniny. Především můžeme lineární substitucí $x = x' + \alpha$ dosáhnout toho, že koeficienty a', c' budou mít v transformované rovnici stejné znaménko ($a'c' > 0$), neboť je

$$4a' = 4\alpha + 4a, \quad 4c' = 4\alpha^3 + 4 \cdot 3a\alpha^2 + 6 \cdot 2b\alpha + 4c.$$

Zřejmě je možno α volit tak, aby a', c' měly stejná znaménka v nové rovnici

$$x^4 + 4a'x^3 + 6b'x^2 + 4c'x + d' = 0.$$

Provedme pak substituci $x = \sqrt{\frac{c'}{a'}} \cdot t$ a dostaneme rovnici tvaru

$$t^4 + At^3 + Bt^2 + At + C = 0, \quad (4)$$

kde koeficienty při t^3 a t jsou stejné. Taková redukce je tedy vždy možná užitím jen druhých odmocnin.

Srovnáním rovnic (3) a (4) vychází

$$A = -\frac{4bn}{a^2 + 2am + p}, \quad B = \frac{-2a^2 + 4b^2 + 2p}{a^2 + 2am + p}, \quad (5)$$

$$C = \frac{a^2 - 2am + p}{a^2 + 2am + p}.$$

Obráceně dostaneme při daných A, B, C veličiny m, n, p z lineárních rovnic

$$\begin{array}{l}
m \cdot 2aA \quad + n \cdot 4b + p \cdot A = -Aa^2, \\
m \cdot 2aB \quad + p \cdot (B-2) = -2a^2 - Ba^2 + 4b^2, \\
m \cdot 2a(C+1) \quad + p \cdot (C-1) = a^2(1-C)
\end{array} \quad (6)$$

ve tvaru

$$m = -\frac{e^2(C-1)}{a(1+C-B)}, \quad n = -\frac{Ae^2}{b(1+C-B)}, \quad (7)$$

$$p = -a^2 + \frac{2e^2(C+1)}{1+C-B},$$

kde $e^2 = a^2 - b^2$. Příslušná kružnice má tedy rovnici

$$x^2 + y^2 + 2e^2 \frac{b(C-1)x + aAy + (C+1)ab}{ab(1-B+C)} = a^2. \quad (8)$$

Případ $1 - B + C = 0$ není třeba brát v úvahu, neboť pak lze rovnici (4) psát ve tvaru

$$t^4 + At^3 + (C+1)t^2 + At + C = 0$$

a levou stranu lze rozložit na

$$(t^2 + 1)(t^2 + At + C) = 0.$$

Výrazy pro m, n, p (tedy i r) lze snadno sestrojít, a tedy i příslušnou kružnici. Průsečíkům odpovídají hledané hodnoty t ($= \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$). Užitím pevné elipsy lze tedy řešit bikvadratickou i kubickou rovnici.²

Z předchozí úvahy plynou některé zajímavé vztahy. Všimněme si ještě jednu rovnici (3) pro parametry t_1, t_2, t_3, t_4 průsečíků kružnice s elipsou. Koeficienty při t^3 a t jsou stejné, tedy

$$\Sigma t_1 = \Sigma t_1 t_2 t_3 = t_1 t_2 t_3 t_4 \Sigma \frac{1}{t_1}; \quad (9)$$

tato rovnice vyjadřuje nutnou a postačující podmínku, aby čtyři body elipsy byly na kružnici. Její geometrický význam

² Toto řešení uveřejnil Vahlen, Archiv der Mathematik, ř. 3., sv. 3.

vysvitne ještě lépe, vrátíme-li se opět k excentrické anomálii. Neboť podle vzorce

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \\ & = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta - (\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \dots)}{1 - (\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma + \dots) + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta} \end{aligned}$$

dosadíme-li $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 = t_1$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 = t_2$..., je podle (9) čitatel roven nule, a tedy

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = 0$$

čili

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0 \pmod{2\pi}. \quad (10)$$

Čtyři body elipsy jsou na kružnici, je-li součet excentrických anomálií roven nule $\pmod{2\pi}$.

Necháme-li tři body elipsy splynout s bodem o parametru $t(\varphi)$, protíná jimi určená kružnice, oskulační kružnice bodu $t(\varphi)$, elipsu ještě v dalším bodě o parametru $t_4(\psi)$. Z podmínky (9), do níž dosadíme $t_1 = t_2 = t_3 = t$ (neboli $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$), dostaneme

$$3t + t_4 = t^3 + 3t^2 \cdot t_4,$$

z čehož

$$t_4 = \frac{t^3 - 3t}{1 - 3t^2}, \quad (11)$$

neboli podle (10)

$$3\varphi + \psi = 0, \quad 4R, 8R, \dots \quad (11a)$$

Bodu t patří jediný bod t_4 , obráceně však bodu t_4 patří tři hodnoty t dané rovnicí

$$t^3 + 3t^2 \cdot t_4 - 3t - t_4 = 0; \quad (12)$$

bodem elipsy jdou tedy oskulační kružnice tří bodů elipsy o parametrech τ_1, τ_2, τ_3 . Pro tyto tři hodnoty dostáváme z poslední rovnice

$$\Sigma\tau_1 = -3t_4, \quad \Sigma\tau_1\tau_2 = -3, \quad \tau_1\tau_2\tau_3 = t_4. \quad (12a)$$

Připojíme-li k hodnotám τ_1, τ_2, τ_3 ještě t_4 , dostaneme čtyři body elipsy, které jsou opět na kružnici, neboť

$$\Sigma\tau_1 + t_4 = -2t_4, \quad (\Sigma\tau_1\tau_2)t_4 + \tau_1\tau_2\tau_3 = -3t_4 + t_4 = -2t_4,$$

a podmínka (9) je tedy splněna.

Je-li ψ anomalie bodu t_4 , jsou anomalie příslušných tří bodů dle (11a)

$$\varphi_1 = \frac{1}{3}(4R - \psi), \quad \varphi_2 = \frac{1}{3}(8R - \psi), \quad \varphi_3 = \frac{1}{3}(12R - \psi) = 4R - \frac{1}{3}\psi. \quad (13)$$

Sestrojíme-li tedy kružnici, jež jde body $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, rozřešili jsme problém trisekce. Pohodlnou a zajímavou konstrukci získáme touto úvahou.

Píšeme-li opět t_1, t_2, t_3, t_4 místo dosavadního $\tau_1, \tau_2, \tau_3, t_4$, dostaneme pro symetrické funkce těchto čtyř hodnot podle (12a)

$$\Sigma t_1 = -2t_4, \quad \Sigma t_1 t_2 = -3(1 + t_4^2), \\ \Sigma(t_1 t_2 t_3) = -2t_4, \quad t_1 t_2 t_3 t_4 = t_4^2,$$

a tedy v rovnici (4) je

$$A = 2t_4, \quad B = -3(1 + t_4^2), \quad C = t_4^2.$$

Dosadíme do rovnic (7) a dostaneme

$$m = -\frac{e^2(t_4^2 - 1)}{4a(1 + t_4^2)} = \frac{e^2}{4a^2} x_P, \quad n = -\frac{e^2}{4b^2} y_P, \quad (14)$$

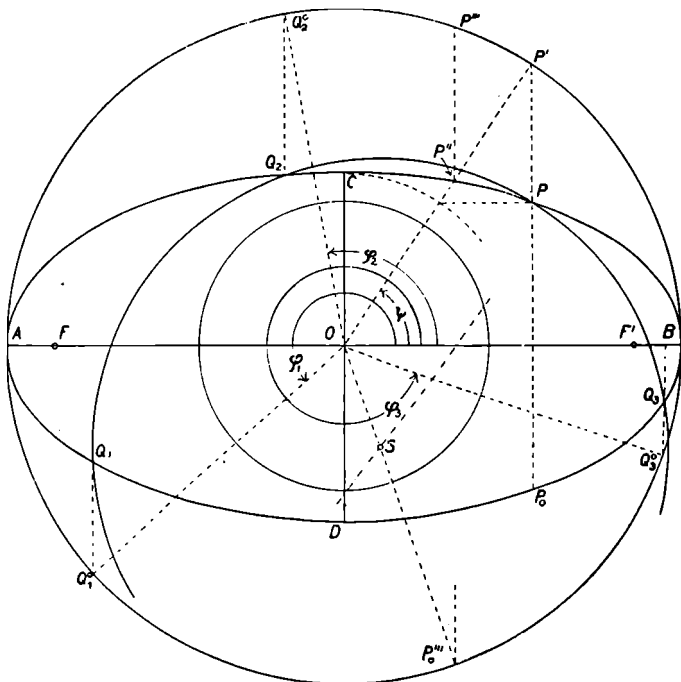
$$p = -\frac{a^2 + b^2}{2};$$

x_P, y_P jsou souřadnice bodu P na elipse, jemuž patří parametr t_4 s anomálií ψ . Rovnice hledané kružnice je pak

³ Tyto bodové trojice, zvané oskulační čili Steinerovy trojice, jsou předmětem obsáhlé studie M. Lercha v článku: Drobnosti z geometrie, Časopis pro pěstování mat. a fys., r. 45, str. 176.

$$x^2 + y^2 - \frac{2e^2}{4a^2} x_P \cdot x + \frac{2e^2}{4b^2} y_P \cdot y - \frac{a^2 + b^2}{2} = 0.$$

Tato kružnice jde bodem $P(x_P, y_P)$. Její střed $S(m, n)$ lze snadno sestrojít z výrazů (14) tímto obratem (obr. 27):



Obr. 27

Je

$$mx_P - ny_P = \frac{e^2}{4} \left(\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} \right) = \frac{e^2}{4}.$$

Bod $S(m, n)$ leží tedy na poláře bodu $P_0(x_P, -y_P)$ ke kružnici o středu O a poloměru $\frac{1}{2}e$,

neboť rovnice této poláry je

$$xx_p - yy_p = \frac{e^2}{4}.$$

Dále je

$$\frac{n}{m} = -\frac{y_p}{x_p} \cdot \frac{a^2}{b^2} = -\frac{y_{p'}}{x_{p'}} \cdot \frac{a}{b} = -\frac{y_{p''}}{x_{p''}} \cdot \frac{a}{b} = -\frac{y_{p'''}}{x_{p'''}};$$

při tom, jak je patrné z obrázku, je bod P' na kružnici (O, a) , bod P'' na elipse a na spojnici OP' , P''' opět na kružnici (O, a) , neboť $y_p \cdot a/b = y_{p'}$, $y_{p''} \cdot a/b = y_{p'''}$. Dále necht' je P_0''' bod symetricky položený s P''' podle hlavní osy elipsy. Bod S je pak na OP_0''' a na dříve nalezené poláře bodu P_0 . Kružnice o středu S jdoucí bodem P dává s elipsou tři průsečíky Q_1, Q_2, Q_3 . Jim patří na kružnici body Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0 a jejich anomalie jsou postupně $\frac{1}{3}(8R - \psi)$, $\frac{1}{3}(4R - \psi)$, $\frac{1}{3}(12R - \psi)$. Je tedy absolutní hodnota úhlu $BOQ_3^0 = \frac{1}{3}\psi$.

11,3. Podobnou úvahu lze provést, je-li dána hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Parametrické vyjádření je

$$x = a \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, y = b \frac{2t}{1 - t^2}; \quad (1a)$$

význam parametru t je patrný, píšeme-li rovnici přímky jdoucí vrcholem hyperboly $(-a, 0)$ ve tvaru

$$\frac{y}{b} = t \left(\frac{x}{a} + 1 \right)$$

Další průsečík s hyperbolou má pak souřadnice (1a). Pro průsečíky kružnice

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$$

s hyperbolou dostaneme rovnici

$$(a^2 + 2am + p)t^4 + 4bnt^3 + (2a^2 + 4b^2 - 2p)t^2 - 4bnt + a^2 - 2am + p = 0,$$

ve které se koeficienty při t a t^3 liší jen znaménkem. Chceme-li s touto rovnicí srovnat obecnou rovnici

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0,$$

musíme ji napřed převést substitucí $x = x' + \alpha$ na tvar, v němž a' , c' mají různá znaménka, což jako v předešlém odstavci je vždy možné, a pak užít substituce $x = \sqrt{-\frac{c'}{a'}} \cdot t$.

Tím přijdeme k rovnici tvaru

$$t^4 + At^3 + Bt^2 - At + C = 0.$$

Srovnáním rovnic dostaneme po jednoduchém výpočtu

$$m = -\frac{e^2(C-1)}{a(1+B+C)}, \quad n = \frac{Ae^2}{b(1+B+C)},$$

$$p = -a^2 + \frac{2e^2(C+1)}{1+B+C}.$$

Rovnice příslušné kružnice je tedy

$$x^2 + y^2 - 2e^2 \frac{b(C-1)x - Aay - ab(C+1)}{ab(1+B+C)} = a^2.$$

Případ elipsy se převede na případ hyperboly, zaměníme-li t za ti , b za $-bi$ a A za Ai .

11,4. Descartes, který po prvé jasně vyslovil, že k řešení kubických a bikvadratických úloh stačí jedna narýsovaná kuželosečka, vyslovil i poznatek, že není třeba celé kuželosečky, nýbrž že stačí sebe menší oblouk, ovšem konečné délky. Geometricky to plyne z toho, že lze vždy nalézt kolineaci, jež kuželosečku převádí v sebe a bod mimo daný oblouk do bodu na tomto oblouku.

Také analyticky to snadno vychází. Budiž dána na př. elipsa parametrickými rovnicemi

$$x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1+t^2}$$

a na ní oblouk, jehož body odpovídají hodnotám t v intervalu $t' < t''$. Danou rovnicí

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$$

lze vždy převést transformací $x = \alpha + \beta t$ (11,2) na takový tvar, že je řešitelná užitím dané elipsy a kružidla. Dosazením a porovnáním koeficientů při t^3 a t , jež mají být stejné, dostáváme

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c}{a + \alpha}}.$$

Záleží tedy na tom, jak zvolíme α , aby příslušné t bylo v intervalu $t' < t''$.

Budiž x_1 reálný kořen dané rovnice a t_1 příslušná hodnota parametru t . Pak je

$$x_1 = \alpha + \beta t_1$$

čili, dosadíme-li za β hořejší hodnotu,

$$(a + \alpha)(x_1 - \alpha)^2 = t_1^2(\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c).$$

To je vztah mezi α , t_1 . Vezmeme-li za t_1 hodnotu τ z intervalu $t' < t''$, máme pro α rovnici třetího stupně. Budiž α_1 přibližná racionální hodnota reálného kořene této rovnice a t_1' příslušná hodnota t_1 , která se málo liší od zvolené hodnoty τ . Ke zvolenému α_1 dostaneme β_1 a v transformované rovnici odpovídá kořenu x_1 kořen t_1 v daném intervalu.

12. PROJEKTIVNÍ ÚLOHY TŘETÍHO A ČTVRTÉHO STUPNĚ

Základní projektivní úlohou čtvrtého stupně je nalézt společné body dvou dostatečně určených kuželoseček (na př. pěti body) nebo sestavit jejich společný polární trojúhelník. Jedna úloha souvisí s druhou. Konstrukce společného po-

lárního trojúhelníka záleží v sestrojení tří společných bodů dvou kuželoseček, jejichž jeden společný bod je dán. Tato poslední úloha bývá často označována za základní kubickou projektivní úlohu.

V této úvaze musíme předpokládat znalost základních konstrukcí projektivní geometrie, zejména:

1. Jak se ke třem bodům na přímce sestrojí čtvrtý harmonický.
2. Jak se sestrojí další body kuželosečky dané pěti body nebo pěti tečnami (věta Pascalova a Brianchonova).
3. Jak se sestrojí polára bodu ke kuželosečce dané pěti body nebo pól dané přímkou.
4. Jak se sestrojí průsečíky přímkou s kuželosečkou nebo dvojně body involuce.

Poslední úloha je kvadratická, ostatní jsou lineární.

Při těchto projektivních konstrukcích hraje důležitou úlohu *kvadratická transformace*, kterou zavedli Poncelet, Chasles a Steiner a jež se obyčejně nazývá Steinerovou transformací.*

Dvě kuželosečky K_1, K_2 v rovině určují svazek kuželoseček. Předpokládejme, že čtyři společné body jsou od sebe různé. Pak jsou ve svazku tři kuželosečky degenerované v dvojici přímek. Dvojně body X, Y, Z těchto degenerovaných kuželoseček tvoří společný polární trojúhelník všech kuželoseček svazku. Obecně bodu P v rovině patří ke K_1, K_2 poláry p_1, p_2 a jejich průsečík P' je s P sdružen podle všech kuželoseček svazku. Takové body nazýváme prostě sdružené.

* Tato transformace je nejjednodušším případem t. zv. biracionální involutorní transformace dvou rovin. Tyto transformace jsou jednoznačné, bodu obecně odpovídá bod. Výjimku činí základní elementy. Přímce jedné roviny odpovídá v druhé rovině racionální křivka. Řadě bodové na přímce odpovídá projektivní řada bodová na příslušné křivce, involuci involuce atp. Pro další studium těchto transformací viz Bydžovský, Úvod do algebraické geometrie, str. 620.

Pohybuje-li se P po přímce a , opisují poláry p_1, p_2 ke kuželosečkám K_1, K_2 projektivní svazky. P' tedy opisuje kuželosečku, která jde vrcholy X, Y, Z společného polárního trojúhelníka [na př. bodu p . (YZ) je sdružen vrchol X]. Tak je každé přímce a přiřazena kuželosečka K_a opsaná trojúhelníku XYZ . Tato kuželosečka je současně geometrickým místem pólů přímky a ke kuželosečkám svazku. Nevlastní přímce je přiřazena kuželosečka K_∞ , která obsahuje středy všech kuželoseček svazku.

Vrcholy a strany trojúhelníka XYZ jsou singulární elementy uvažované kvadratické korespondence. Jde-li přímka a jedním vrcholem, na př. X , rozpadne se odpovídající kuželosečka v přímku YZ a přímku a' , která jde také vrcholem X a odděluje s a harmonicky dvojici stran XY, XZ (a' považujeme za poláru libovolného bodu na a vzhledem k degenerované kuželosečce XY, XZ).

Z toho je patrné, že známe-li jeden vrchol X společného polárního trojúhelníka dvou kuželoseček, lze ihned sestrojiti společné sečny x_1, x_2 obou kuželoseček, které jím procházejí. Stačí jen vzít dva páry bodů sdružených ke kuželosečkám svazku, na př. M, M' a N, N' . Sečny x_1, x_2 jsou dvojné elementy involuce určené dvojicemi XM, XM' ; XN, XN' . Společné body kuželoseček se pak sestrojí jako průsečíky těchto sečen s jednou kuželosečkou. *Úloha sestrojiti společné body dvou kuželoseček je tak převedena na sestrojení společného polárního trojúhelníka.*

Volíme tedy dvě přímky m, n , které mají společný bod S ; v uvedené kvadratické transformaci jim odpovídají kuželosečky K_m, K_n , které jdou bodem S' sdruženým s S . Zbývající tři společné body jsou hledané vrcholy X, Y, Z . Vhodnou volbou přímek m, n lze dosáhnout toho, že jedna z kuželoseček bude kružnicí; za druhou volíme nejraději rovnostrannou hyperbolu nebo parabolu.

Nechť jsou dány dvě kuželosečky K_1, K_2 , každá na př. pěti body. Určíme kuželosečku K_∞ , jejíž body jsou bod

za bodem přiřazeny bodům nevlastní přímky. Označíme A^∞, A_1^∞ dva body v nekonečnu ve směrech kolmých, A', A_1' body s nimi sdružené a ležící na K_∞ . Přímce $A'A_1'$ je v kvadratické transformaci naopak přiřazena rovnoosá hyperbola jdoucí body A^∞, A_1^∞ .

Přímce t , která se dotýká kuželosečky K_∞ v bodě T , je přiřazena parabola, která se dotýká nevlastní přímky v bodě T'^∞ .

Přímku, které odpovídá kružnice, lze sestavit takto: Nechť jsou A^∞, A_1^∞ dva body ve směrech kolmých, B^∞, B_1^∞ jiné dva body ve směrech kolmých. Těmito dvěma dvojicemi je na nevlastní přímce určena involuce a její dvojně elementy jsou kruhové body I^∞, I_1^∞ . Přidružené dvojice $A'A_1', B'B_1'$ na K^∞ určují involuci na K^∞ a její dvojně elementy I', I_1' (imaginární) odpovídají kruhovým bodům. Jejich spojnice $m \equiv I'I_1'$ je osa involuce určené páry $A'A_1', B'B_1'$ a snadno se sestojí; přímce m je přiřazena kružnice K_m . Na přímce m je involuce indukovaná kuželosečkou K_∞ s dvojnými body I', I_1' a této opět odpovídá na kružnici K_m involuce s dvojnými body I^∞, I_1^∞ , a tudíž se středem ve středu kružnice K_m . Je-li tedy na př. Q, R jeden pár involuce na m , jsou Q', R' koncové body průměru kružnice K_m . Takový pár na m tvoří body $Q \equiv (A'B' \cdot A_1'B_1')$, $R \equiv (A'B_1' \cdot A_1'B')$.

Nyní jde o to, provést konstrukci bodů X, Y, Z s danou narýsovanou kuželosečkou K . Mimo kružnici určíme ještě kuželosečku L , která jde body X, Y, Z a je podobná kuželosečce K , t. j. má tytéž body v nekonečnu. Křivkami K, L je dána podobnost, která kružnici převede v kružnici, jež s L dává body X', Y', Z' , a těm naopak odpovídají hledané body X, Y, Z .

Nejsnáze se tyto konstrukce provedou, je-li daná kuželosečka parabolou. Popíšeme zde postup konstrukce.

V rovině budiž dána parabola P , jejíž pomocí provádíme konstrukci, a dvě kuželosečky K_1, K_2 , každá dostatečným počtem bodů. Hledaný společný polární trojúhelník budiž

XYZ . Najdeme nejprve přímku m , se kterou je sdružena kružnice K_m opsaná polárním trojúhelníku. Budtež A^∞, A_1^∞ dva body v nekonečnu ve směrech kolmých, A', A_1' body sdružené, a přímka jimi určená. Podobně budtež B^∞, B_1^∞ dva body ve směrech kolmých, B', B_1' body sdružené a b jimi určená přímka. Průsečík obou je $M \equiv (a, b)$. Jeho polára ke kuželosečce K_∞ , jež odpovídá nevlastní přímce a jde body A', A_1', B', B_1' , je určena body $Q \equiv (A'B', A_1'B_1')$ a $R \equiv (A'B_1', A_1'B')$. To je hledaná přímka m , již odpovídá kružnice K_m . Poznamenejme mimochodem: Přímce a je přidružena rovnosá hyperbola, která jde body A^∞, A_1^∞ , podobně přímce b , bodu M je přiřazen bod M' , kterým jdou obě a tedy všechny rovnosé hyperboly opsané trojúhelníku XYZ .

Budiž nyní U^∞ nekonečně vzdálený bod pevné paraboly P , U' bod sdružený, který s A', A_1', B', B_1' leží na křivce K_∞ . Tečna této křivky v bodě U' budiž u . Přímce u odpovídá parabola K_u s nevlastním bodem U^∞ .

Paraboly P a K_u mají rovnoběžné osy (společný bod U^∞), jsou tedy podobně položené podle jistého středu O . Použijme této podobnosti a sestrojme podobnou a podobně položenou kružnici s K_m . Označme ji K_m' . Přímky u, m se protínaly v bodě S , jemu v kvadratické transformaci patřil S' , společný bod kuželoseček K_m, K_u . V podobnosti mu náleží bod S_0 na P , kterým prochází i K_m' . Ostatní tři průsečíky P s K_m' označme X_0, Y_0, Z_0 . Obráceně jim jsou zase v podobnosti přiřazeny hledané body X, Y, Z .

Vidíme, že všechny užité konstrukce jsou lineární až na poslední, kde jde o průsečíky kružnice s kuželosečkou P .

13. ŘEŠENÍ KUBICKÝCH ÚLOH UŽITÍM KŘIVKY TŘETÍHO STUPNĚ NEBO JINÝMI PROSTŘEDKY

Úloha, která má n řešení a není transcendentní, dá se převést na sestrojení průsečíků křivky stupně n s přímkou, na př. paraboly n -tého stupně

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + mx^n$$

s přímkou $y = 0$. Podle toho se dá řešení úlohy třetího nebo čtvrtého stupně převést na sestrojení průsečíků přímky s křivkou třetího nebo čtvrtého stupně. Také konstrukce společných bodů dvou kuželoseček nebo společného polárního trojúhelníka vede na rovnici třetího nebo čtvrtého stupně a lze ji řešit užitím kubické křivky. Vždy však byla dávána přednost řešení užitím pevné kuželosečky, neboť se zdá jednodušší a přirozenější. Starší geometři považovali dokonce užití vyšších křivek v tomto případě za methodicky vadné (Chasles). Skutečně užitím kuželosečky ve spojení s pravítkem a kružidlem lze řešit jen úlohy třetího a čtvrtého stupně a nikoli úlohy stupně vyššího. Užitím křivky třetího stupně ve spojení s kružidlem lze však řešit i některé úlohy až šestého stupně. Máme-li přístroj k mechanickému rýsování křivky třetího stupně, lze řešit i některé úlohy devátého stupně, kdežto přístroji k rýsování kuželoseček lze řešit jen kubické a bikvadratické úlohy. Proto se zdá tato metoda nejprirozenější.

Užitím křivek vyšších stupňů použitím pravítka a kružidla řešil kubické a bikvadratické úlohy již Newton a Maclaurin. V novější době pojednal o tomto předmětu London.¹ Podobně jako o kvadratických konstrukcích platí, že je lze provést pouhým pravítkem, je-li dána v rovině pevná kružnice a po případě i její střed, jde-li o úlohu metrickou, platí i o úlohách kubických, že je lze provést pravítkem, je-li

¹ London, Die geom. Konstruktionen 3. u. 4. Gr. etc., Zeitschrift f. Math. u. Phys. (Schlömilch), r. 41, str. 129.

dána racionální křivka třetího stupně. Jde-li o úlohu metrickou, musí být ještě dán čtverec nebo kružnice se středem; nejlépe je volit Diokletovu cissoidu a připojit k ní vytvořující kružnici.

Volme napřed kubickou parabolou

$$y = x^3.$$

Máme-li řešit rovnici

$$x^3 - px - q = 0,$$

sestrojíme průsečíky přímky

$$y = px + q$$

s parabolou. Souřadnice x dají hledané řešení.

Nejvhodnější se zdá použití cissoidy

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}; \quad (1)$$

parametrické vyjádření zní

$$x = \frac{2rt^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2rt^3}{1 + t^2}. \quad (1a)$$

Dosazením do rovnice přímky

$$y = ax + b \quad (2)$$

dostaneme pro parametry průsečíků rovnici

$$2rt^3 - (2ar + b)t^2 - b = 0. \quad (3)$$

Nyní je nutno ukázat, že rovnici

$$\alpha t^3 + \beta t + \gamma = 0$$

lze uvést racionální substitucí na tvar, kde je člen s t^2 a nikoli člen s t . To se stane jednoduše substitucí $t = 1/t'$ a vychází

$$\gamma t'^3 + \beta t'^2 + \alpha = 0.$$

Jak lze provést zdvojení krychle danou D. cissoidou, bylo ukázáno již v odst. 4,6.

Chceme-li provést trisekci úhlu φ , vyjdeme z rovnice

$$4t^3 - 3t + \lambda = 0,$$

v níž $\lambda = \sin\varphi$ a jež má kořeny $t_1 = \sin\frac{1}{3}\varphi$, $t_2 = \sin\frac{1}{3}(\varphi + 2\pi)$, $t_3 = \sin\frac{1}{3}(\varphi + 4\pi)$ (odst. 3).

Substitucí $t = 1 : t'$ přejde uvažovaná rovnice v rovnici

$$\lambda t'^3 - 3t'^2 + 4 = 0$$

a srovnáním s (3) vychází

$$a = \frac{7}{\lambda}, \quad b = -\frac{8r}{\lambda}.$$

Přímka

$$\lambda y - 7x + 8r = 0$$

protíná tedy cissoidu v bodech, kterým patří parametry t_1, t_2, t_3 . Podle geometrického významu je $t = \frac{y}{x}$, tedy

$\frac{y}{x} = t_1$ je rovnice přímky, která spojuje počátek O s prvním průsečíkem. Volme $x = 1$; pak je $y = t_1 = \sin\frac{1}{3}\varphi$. Sestrojme pravouhlý trojúhelník s přeponou $= 1$, odvěsnou $= t_1$ a úhel proti ní je $\frac{1}{3}\varphi$.

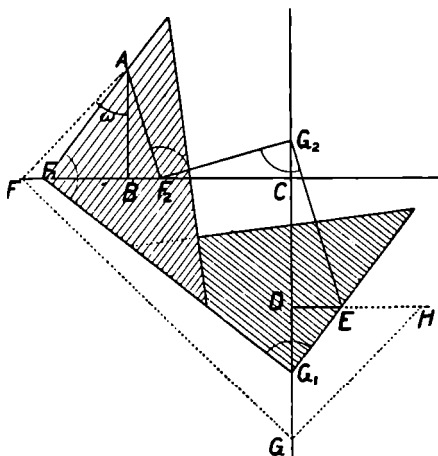
14. ŘEŠENÍ KUBICKÉ ROVNICE DVĚMA PRAVÝMI ÚHLY

Toto je jen zvláštní případ grafického řešení algebraické rovnice užitím pravouhlého polygonu. Budiž dána rovnice

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Sestrojme lomenou čáru $ABCDE$ o stranách a_0, a_1, a_2, a_3 , jejíž sousední strany jsou k sobě kolmé (obr. 28). $AB = a_0$, $BC = a_1$ lze volit libovolně, $CD = a_2$ je rovnoběžno s AB

a téhož směru, mají-li a_2, a_0 různá znaménka; mají-li a_2, a_0 znaménko souhlasné, učiníme $CD \parallel AB$, avšak opačného směru. Totéž učiníme s veličinou $a_3 = DE$. Volme nyní



Obr. 28

libovolně úhel ω a narýsujeme lomenou čáru $AFGH$; potom platí, píšeme-li $\operatorname{tg} \omega = x$:

$$FB = a_0 \operatorname{tg} \omega = a_0 x,$$

$$FC = a_0 x + a_1,$$

$$CG = (a_0 x + a_1)x,$$

$$DG = CG + a_2 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

(a_2 je v obraze záporné),

$$EH = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

Padne-li H do E , je $EH = 0$ a $x = \operatorname{tg} \omega$ je řešení dané rovnice.

Lomenou čáru AF_1Q_1E , která podává řešení, lze snadno sestavit užitím dvou pravoúhlých trojúhelníků, nejlépe průhledných (celuloidových nebo skleněných), nebo jednoho

plného, druhého s výřezem. Podle obrázku je $x_1 = \frac{BF_1}{AB}$.

Podobně druhá lomená čára AF_2G_2E dává druhé řešení $x_2 = \frac{BF_2}{AB}$.

Z toho je zřejmé, že dva pravoúhlé trojúhelníky jsou nástroji většího rozsahu než kružidlo. Ani několika kružidly nelze řešit kubické úlohy. Užitím dvou pravých úhlů lze však řešit kubické problémy i bez pevné kuželosečky.

Cvičení: Řešte tímto způsobem rovnice:

a) $\lambda x^3 - 3x^2 + 4 = 0$, která dává trisekci (viz předešlý odstavec);

b) $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$, na niž vede konstrukce pravidelného sedmiúhelníka (viz další odstavec);

c) $y^3 - 3y + 1 = 0$ (pravidelný devítiúhelník).

15. PRAVIDELNÝ SEDMIÚHELNÍK A DEVÍTIÚHELNÍK

Konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků vede na rovnici třetího stupně. Všimněme si znovu obrázku, který se vyskytl při trisekci (obr. 29). Předpokládejme poloměr kružnice rovný jedné a také $PA = 1$. Napišme rovnici pro délku $OP = x$. Z obrázku velmi snadno vychází

$$\frac{\frac{1}{2}x}{1} = \frac{x + a}{1 + 2y} = \frac{1 + y}{x},$$

z čehož

$$2 + 2y = x^2, \quad 1 + 2y = \frac{2(x + a)}{x} \quad (1)$$

a vyloučením y

$$x^3 - 3x - 2a = 0. \quad (2)$$

Značně složitější jsou úvahy, které vedou k řešení dalších pravidelných mnohoúhelníků, jež lze převést na trisekci (13, 19, 37 úhelník) a jež proto neuvádíme.

Zajímavá je konstrukce pravidelného sedmiúhelníka vepsaného do kružnice

$$x^2 + y^2 = a^2$$

užitím elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b < a).$$

Vrcholy sedmiúhelníka zvolíme po řadě $A(a, 0), A_1, A_2, \dots, A_6$. Promítneme je na elipsu kolmo k její hlavní ose. Dostaneme tak na elipse body

$A(a, 0), B_1(a \cos \frac{2}{7}\pi, b \sin \frac{2}{7}\pi), B_2(a \cos 2 \cdot \frac{2}{7}\pi, b \sin 2 \cdot \frac{2}{7}\pi), \dots$
 Body A, B_1, B_2, B_4 jsou pak na kružnici (součet anomalí je 2π), právě tak body A, B_3, B_5, B_6 . Rovnice těchto kružnic se snadno najdou ve tvaru¹

$$(x - a)^2 + y^2 + \left(2a - \frac{e^2}{4a}\right)(x - a) \pm \frac{e^2\sqrt{7}}{4b}y = 0.$$

Podobně pro pravidelný třináctiúhelník do téže kružnice vepsaný. Vrcholy jeho budtež $A, A_1, A_2, \dots, A_{12}$; příslušné body elipsy $A, B_1, B_2, \dots, B_{12}$ mají souřadnice

$$x_k = a \cos \frac{2k\pi}{13}, y_k = b \sin \frac{2k\pi}{13} \quad (k = 0, 1, \dots, 12).$$

Na kružnici jsou body $AB_1B_3B_9, AB_2B_5B_6, AB_4B_{10}B_{12}, AB_7B_8B_{11}$ a rovnice těchto kružnic jsou

$$x^2 + y^2 - \frac{e^2}{4a} \cdot \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} x \pm \frac{e^2}{4b} \sqrt{\frac{13 \mp 3\sqrt{13}}{2}} y - \frac{a^2 + b^2}{2} = 0.$$

¹ Vahlen, Archiv der Mathematik, ř. 3., sv. 3.

16. PROBLÉM NORMÁL. KUŽELOSEČKY

16,1. Sestrojení normál bodem ke kuželosečce je problém, kterým se zabýval již starověký Apollonius a od té doby mnoho jiných. Dnes má tento problém vlastní rozsáhlou literaturu. Paty normál vedených bodem ke kuželosečce leží na hyperbole, jež se nazývá Apolloniiovou. Lze k ní dospět takto: Budiž dána elipsa

$$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

její normála v bodě $M(x_1, y_1)$ má rovnici*

$$a^2y_1x - b^2x_1y - c^2x_1y_1 = 0 \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Považujme v této rovnici x, y za pevné a označme je x_0, y_0 ; x_1, y_1 považujme za běžné (vypustíme index) a dostaneme rovnici A. hyperboly patřící bodu $P(x_0, y_0)$

$$A \equiv a^2x_0y - b^2y_0x - c^2xy = 0.$$

Její průsečíky s elipsou jsou paty hledaných normál. Geometrickou úvahou lze k A. hyperbole dojít takto: Budiž p libovolný průměr elipsy, p' průměr sdružený a q kolmice spuštěná z P na p . Otáčí-li se p kolem O , vytvářejí p' a q dva projektivní svazky a průsečík (p', q) opisuje A. hyperbolu. Je to rovnoosá hyperbola a je určena středem elipsy O , bodem P a tečnou v tomto bodě, která je kolmá k průměru sdruženému se směrem OP .

Jde tedy o průsečíky dvou kuželoseček. Ve spojení s řešením rovnice čtvrtého stupně se tímto problémem zabývali de la Hire a Legendre, kteří vesměs používají kromě dané kuželosečky ještě A. hyperboly, tedy dvou kuželoseček. Klasické jsou úvahy Joachimsthalovy. Geometrickým způsobem řeší nejprve úlohu: Jsou-li dány dva body A, B kuželosečky a jejich normály, mají se sestrojiti body C, D ,

* V této kapitole budeme označovat excentricitu písmenem c místo obvyklého e .

jejichž normály jdou průsečíkem prvních dvou normál. Dále řeší úlohu kubickou: Na normále bodu A je dán bod M . Mají se z něho vést další tři normály. Konečně přistupuje k obecnému případu — vést normály daným bodem. Úvahy Joachimsthalovy daly popud k četným dalším pracím geometrického i analytického rázu. Z českých autorů uvedme zejména Pelze, Weyra, Sobotku, Šolína, Junga a Klíma. Poslední používá metody deskriptivní geometrie. Elegantní analytickou metodou odvozuje věty Joachimsthalovy a četné jiné M. Lerch.²

16,2. Řešme nejprve problém normál u paraboly. Budiž dána parabola

$$y^2 = 2px. \quad (1)$$

Normála bodu (x_1, y_1) je

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1). \quad (2)$$

Považujeme-li x, y za pevný bod a označíme-li jeho souřadnice x_0, y_0, x_1, y_1 za běžné souřadnice, je (2) rovnicí A. hyperboly

$$xy + y(p - x_0) - py_0 = 0.$$

Její střed je $S(x_0 - p, 0)$, jedna asymptota $y = 0$ a hyperbola jde bodem (x_0, y_0) , čímž je určena. Mimo bod v nekonečnu mají obě křivky společné tři body, což jsou paty normál jdoucích bodem P . Jimi prochází kružnice, ke které lze dospět takto: Podle rovnice (1) je

² Pelz, Zum Normalenproblem der Kegelschnitte, Sitzungsberichte der Akad. in Wien (1882, 1887).

Šolín, Kterak sestrojiti normály elipsy bodem mimo křivku, Časopis, r. 15 (1885).

Weyr, Věstník Král. č. společnosti nauk, 1902.

Sobotka, Zprávy Král. č. společnosti nauk, 1903.

Jung, Časopis, r. 34.

Klíma, Časopis, r. 42.

Lerch, Časopis, r. 45.

$$\frac{y_1}{2p} = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_1 y_1}{p} = \frac{2x_1^2}{y_1}.$$

Rovnici (2) lze tedy psát

$$y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{2x_1^2}{y_1} + y_1.$$

Píšeme-li opět x_0, y_0 místo x, y a vypustíme index, přejde tato rovnice v

$$2x^2 + y^2 - y^2 \frac{x_0}{p} - yy_0 = 0. \quad (3)$$

Hledané paty jsou průsečíky křivek (1) a (3) a jimi jde celý svazek křivek

$$y^2 - 2px + \lambda \left[2x^2 + y^2 - y^2 \frac{x_0}{p} - yy_0 \right] = 0.$$

Ve svazku je kružnice při

$$2\lambda = 1 + \lambda - \lambda \frac{x_0}{p},$$

z čehož

$$\lambda = -\frac{p}{p + x_0};$$

rovnice této kružnice je

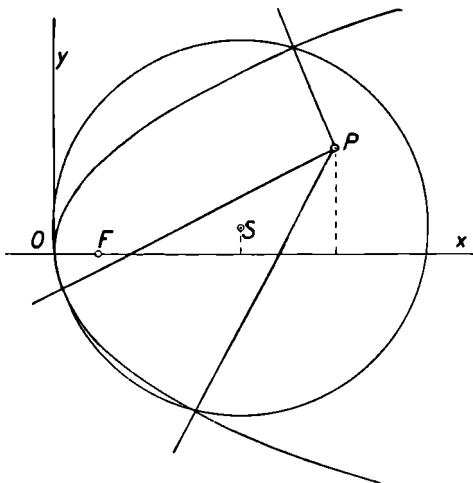
$$x^2 + y^2 - x(p + x_0) - \frac{1}{2}yy_0 = 0;$$

protíná parabolu (1) ve vrcholu a ve třech bodech, jež jsou patami hledaných normál. Konstrukce kružnice je snadná; její střed je $S[\frac{1}{2}(p + x_0), \frac{1}{4}y_0]$ a prochází vrcholem paraboly (obr. 30). Při této konstrukci se používá jen jedné narýsované kuželosečky, totiž dané paraboly.

16,3. U středových kuželoseček jsou konstrukce složitější. Šolín a Jung transformují centrální afinitou svazek kuželoseček, určený elipsou E a A . hyperbolou A , ve svazek, který obsahuje kružnici, při čemž elipsa E přejde sama v sebe.

Šolínova úvaha je synthetická, Jungova analytická. Budeme sledovat úvahu Jungovu.

Uvedenou afinitu určíme takto: Zvolíme x, y za souřadnice



Obr. 30

původního bodu, ξ, η za souřadnice bodu odpovídajícího, směr afinity je ν ; pak je

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \nu. \quad (1)$$

Poněvadž elipsa E má odpovídat sama sobě, musí být

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2 = k(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2); \quad (2)$$

k je konstanta, kterou můžeme položit rovnou jedné, a pak je

$$b^2(x^2 - \xi^2) + a^2(y^2 - \eta^2) = 0$$

čili dle (1)

$$b^2x + \nu a^2y = -b^2\xi - \nu a^2\eta. \quad (3)$$

Z rovnic (1) a (3) vychází transformační vzorec

$$x = \frac{(\nu^2 a^2 - b^2)\xi - 2\nu a^2 \eta}{\nu^2 a^2 + b^2}, y = \frac{-2\nu b^2 \xi - (\nu^2 a^2 - b^2)\eta}{\nu^2 a^2 + b^2}. \quad (4)$$

Nyní zvolíme konstantu ν tak, aby nový svazek obsahoval kružnici. Elipsa E přechází sama v sebe, hyperbola A musí tedy přejít v jinou hyperbolu A' , jež není rovnoosá; musíme však dosáhnout toho, aby nový svazek $\mu E + A' = 0$ vytínal na nevlastní přímce involuci, jež obsahuje dvojici kruhových bodů ($y = \pm ix, t = 0$) a má tedy dvojné elementy k sobě kolmé. To se stane, budou-li osy hyperboly A' rovnoběžné s osami elipsy E . Dosadíme z rovnic (4) za x, y do rovnice A hyperboly

$$A \equiv a^2 x_0 y - b^2 y_0 x - c_2 xy = 0$$

a dostaneme rovnici hyperboly A' ; v této však musí vymizet koeficient při $\xi\eta$, mají-li být osy rovnoběžné s osami elipsy, t. j.

$$(\nu^2 a^2 - b^2)^2 - 4\nu^2 a^2 b^2 = 0$$

čili

$$a^4 \nu^4 - 6a^2 b^2 \nu^2 + b^4 = 0.$$

Odtud

$$\nu^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 (3 \pm 2\sqrt{2}) = \left[\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2})\right]^2$$

a tedy

$$\nu_{1,2} = +\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2}), \nu_{3,4} = -\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2}).$$

Každý z těchto směrů dostaneme, spojíme-li některý z bodů $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, t. j. koncový bod jednoho z obou sdružených průměrů, které jsou stejně dlouhé a stejně nakloněné k osám, s některým vrcholem hlavní nebo vedlejší osy. Volme směr DR (obr. 31), t. j.

$$\nu = \frac{b}{a}(1 + \sqrt{2}),$$

a máme afinní transformaci

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(-\xi + \frac{a}{b}\eta\right), y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{b}{a}\xi + \eta\right).$$

Touto afinní transformací přejde E samo v sebe a hyperbola A v hyperbolu

$$A' \equiv -\frac{bc^2}{a}\xi^2 + \frac{ac^2}{b}\eta^2 + \sqrt{2}(abx_0 + b^2y_0)\xi + \\ + \sqrt{2}(a^2x_0 - aby_0)\eta = 0.$$

Ve svazku $\mu E + A' = 0$ je kružnice; je třeba jen napsat podmínku, aby koeficienty při ξ^2 a η^2 byly stejné, t. j.

$$\mu b^2 - \frac{bc^2}{a} = \mu a^2 + \frac{ac^2}{b},$$

z čehož

$$\mu = -\frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Dosadíme-li za μ , dostaneme rovnici kružnice

$$K \equiv \xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x_0 + \frac{b}{a}y_0\right)\xi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{a}{b}x_0 - y_0\right)\eta - \\ - \frac{a^2 + b^2}{2} = 0.$$

Jsou tedy souřadnice středu a poloměr

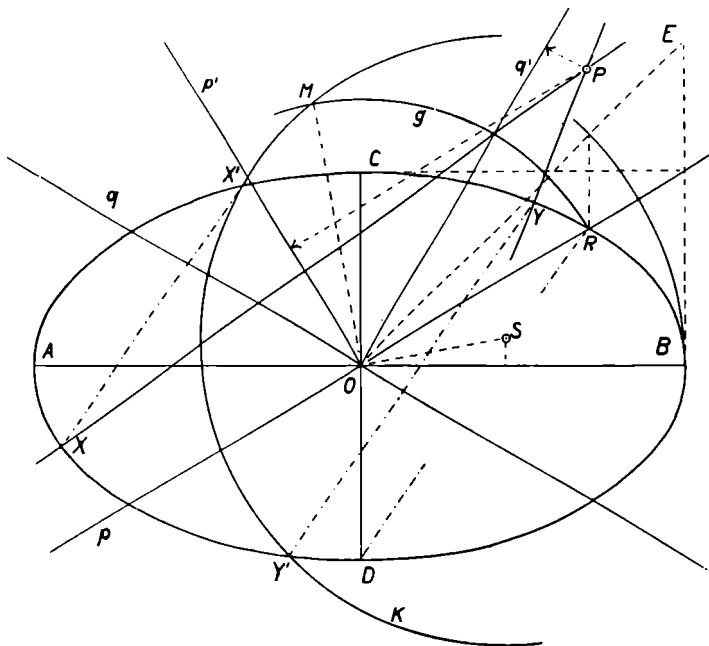
$$x_k = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(x_0 + \frac{b}{a}y_0\right), y_k = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\frac{a}{b}x_0 - y_0\right), \\ r^2 = x_k^2 + y_k^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

což jsou výrazy, které lze velmi snadno sestrojiti.

Kružnice K protíná elipsu E v bodech X', Y', Z', U' ; vedeme-li jimi rovnoběžky se směrem afinity, dostaneme body X, Y, Z, U .

Při tomto postupu se opět použilo jen jedné kuželosečky, a to dané elipsy.

V obr. 31 je konstrukce provedena pro bod P a upravena takto: p, q jsou průměry elipsy, sdružené a stejně dlouhé



Obr. 31

o rovnicích $y/x = \pm b/a$, OE pólí úhel os. Budiž dále p' přímkou bodem O kolmá k p , jejíž rovnice je $ax + by = 0$, d_1 vzdálenost bodu P od ní, tedy $d_1\sqrt{a^2 + b^2} = ax_0 + by_0$. Pak je

$$x_k = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{d_1\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{d_1\varrho}{2a}, \text{ kde } \varrho = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}},$$

a podobně

$$y_k = \frac{d_2 \rho}{2b},$$

kde d_2 je vzdálenost bodu P od přímky $q' \perp q$.

Nejprve sestrojíme délku $\rho = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}} = \overline{OR}$. Poloměrem

ρ opišeme kružnici g . Nato sestrojíme x_k z úměry $x_k : \rho = d_1 : 2a$ a podobně y_k z úměry $y_k : \rho = d_2 : 2b$. Tím dostáváme souřadnice středu S . Dále je $OM \perp OS$ a bodem M na kružnici g jde kružnice K . Ta protíná v našem případě elipsu v bodech X', Y' , kterým v uvažované afinitě patří hledané body X, Y ($X'X \parallel Y'Y \parallel DR$).

16,4. Odvození vět, jež jsou spojeny s jménem Joachimsthalovým, podáváme analytickou cestou, jak je uvádí M. Lerch.

Nechť je elipsa dána parametrickými rovnicemi

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi. \quad (1)$$

Normála bodu φ má rovnici

$$ax \sin \varphi - by \cos \varphi = c^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad (2)$$

kde $c^2 = a^2 - b^2$. Srovnáme s obecnou rovnicí přímky

$$ux + vy + 1 = 0$$

a vidíme, že Plückerovy souřadnice normály jsou

$$u = -\frac{a}{c^2 \cos \varphi}, \quad v = \frac{b}{c^2 \sin \varphi}.$$

Vyloučením φ dostaneme rovnici

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = c^4, \quad (3)$$

což je v přímkových souřadnicích rovnice evoluty obalené

normálami. Je to křivka čtvrté třídy, bodem jdou čtyři normály.

Místo parametru φ zavádí Lerch imaginární parametr

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi;$$

pak je

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a \frac{z^2 + 1}{2z}, y = b \frac{z^2 - 1}{2iz}, \\ u &= -\frac{2az}{c^2(z^2 + 1)}, v = \frac{2ibz}{c^2(z^2 - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Považujme $ux + vy + 1 = 0$ za rovnici bodu $P(x, y)$ (x, y jsou stálé, u, v běžné souřadnice), dosadíme za u, v hodnoty (4) a dostaneme pro parametry pat normál z bodu P rovnici

$$c^2 z^4 - (2ax - 2biy)z^3 + (2ax + 2biy)z - c^2 = 0. \quad (5)$$

Kořeny této rovnice označíme z_1, z_2, z_3, z_4 ; pro jejich symetrické funkce platí

$$\begin{aligned} s_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 = 0, \\ s_4 &= z_1 z_2 z_3 z_4 = -1. \end{aligned} \quad (6)$$

Tyto dvě rovnice vyjadřují nutnou a postačující podmínku, aby normály čtyř bodů šly jedním bodem. Dále je

$$s_1 = \frac{2ax - 2biy}{c^2}, s_3 = -\frac{2ax + 2biy}{c^2}. \quad (7)$$

Máme-li čtyři body elipsy, jejichž parametry z_i vyhovují rovnicím (6), vypočteme $s_1 = \sum z_i, s_3 = \sum z_1 z_2 z_3$ a dostaneme pak z rovnic (7) souřadnice průsečíku normál

$$x_0 = \frac{c^2}{4a}(s_1 - s_3), y_0 = \frac{c^2 i}{4b}(s_1 + s_3). \quad (8)$$

Pro směrnici tětivy, která spojuje body parametrů z, z_1 , vychází

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{b}{ai} \cdot \frac{zz_1 - 1}{zz_1 + 1}.$$

Tětivy $zz_1, z'z_1'$ jsou tedy rovnoběžné, vyhovují-li parametry podmínce $zz_1 = z'z_1'$.

Nechť tětiva zz_1 přejde v tečnu bodu z ($z_1 = z$), rovnoběžná sečna ať jde vrcholem $A(a, 0)$; pro tento vrchol je $\varphi = 0$, tedy $z_1' = 1$. Máme pak $z^2 = z'$.

Přímka vedená vrcholem A elipsy rovnoběžně s tečnou bodu z čili kolmá na jeho normálu protíná elipsu v bodě o parametru z^2 .

Hledejme podmínku, aby čtyři body elipsy o parametrech z_i byly na kružnici

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + n = 0 \quad (n = p^2 + q^2 - r^2). \quad (9)$$

Po dosazení hodnot (4) vychází rovnice

$$(a^2 - b^2)z^4 - 4(ap + bqi)z^3 + 2(a^2 + b^2 + 2n)z^2 - 4(ap - bqi)z + a^2 - b^2 = 0.$$

Pro symetrické funkce kořenů dostáváme

$$s_1 = \frac{4(ap + bqi)}{c^2}, \quad s_2 = \frac{2(a^2 + b^2 + 2n)}{c^2}, \quad s_3 = \frac{4(ap - bqi)}{c^2}, \\ s_4 = 1. \quad (10)$$

Nutná a postačující podmínka, aby čtyři body elipsy o parametrech z_1, z_2, z_3, z_4 byly na kružnici, je tedy

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = 1. \quad (11)$$

Jsou-li dány čtyři body, které této podmínce vyhovují, vypočteme s_1, s_2, s_3 , a pak dostaneme z rovnic (10)

$$p = \frac{c^2}{8a} (s_1 + s_3), \quad q = \frac{c^2 i}{8b} (s_1 - s_3), \quad n = \frac{c^2}{4} s_2 - \frac{a^2 + b^2}{2}. \quad (12)$$

Tím je určena kružnice, která jimi prochází.

Jedna z podmínek, aby normály bodů z_i šly jedním bodem, byla $z_1 z_2 z_3 z_4 = -1$. Podle toho leží body $z_i' = z_i^2$ na kružnici, neboť $z_1' z_2' z_3' z_4' = 1$. Odtud plyne věta *Joachimsthalova*:

Spustíme-li z vrcholu A hlavní osy elipsy kolmice na normály vycházející z bodu P, leží další čtyři průsečíky těchto kolmic s elipsou na kružnici. (Platí také o vrcholu malé osy.)

Symetrické funkce veličin z_i' jsou

$$\begin{aligned} s_1' &= \sum z_i' = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = s_1^2 - 2s_2 = s_1^2, \\ s_2' &= \sum z_1' z_2' = \sum z_1^2 z_2^2 = s_2^2 + 2s_4 - 2s_1 s_3 = -2 - 2s_1 s_3, \\ s_3' &= \sum z_1' z_2' z_3' = s_3^2 - 2s_2 s_4 = s_3^2, \\ s_4' &= s_4^2 = 1; \end{aligned}$$

s_i jsou při tom symetrické funkce původních veličin z_i .

Střed kružnice (C) určené čtveřicí z_i' má souřadnice (dle rovnic (12))

$$p = \frac{c^2}{8a} (s_1^2 + s_3^2), \quad q = \frac{c^2 i}{8b} (s_1^2 - s_3^2).$$

Je-li bod $P(x_0, y_0)$ průsečíkem normál, je (dle (8))

$$s_1 + s_3 = -\frac{4bi}{c^2} y_0, \quad s_1 - s_3 = \frac{4ax_0}{c^2},$$

z čehož

$$s_1 = \frac{2(ax_0 - iby_0)}{c^2}, \quad s_3 = -\frac{2}{c^2} (ax_0 + iby_0). \quad (8a)$$

Střed kružnice (C) má tedy souřadnice

$$p = \frac{a^2 x_0^2 - b^2 y_0^2}{ac^2}, \quad q = \frac{2ax_0 y_0}{c^2}, \quad (13)$$

absolutní člen je

$$n = \frac{c^2}{4} s_2' - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{2}{c^2} (a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2) - a^2. \quad (14)$$

Tím je kružnice (C) určena. Abychom dospěli k pohodl-

nější konstrukci, uvažujme dále: Necht průsečík normál $P(x_0, y_0)$ opisuje průměr elipsy g (obr. 32); pišme jeho rovnici ve tvaru

$$y = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \Theta \cdot x. \quad (15)$$

Bodu tohoto průměru

$$x_0 = \lambda b \cos \Theta, \quad y_0 = \lambda a \sin \Theta$$

náleží kružnice (C) jdoucí čtveřicí z_i^2 a její rovnice je podle (13) a (14)

$$x^2 + y^2 - a^2 - \frac{2ab\lambda^2}{c^2} (bx \cos 2\Theta + ay \sin 2\Theta - ab) = 0. \quad (16)$$

Tyto kružnice tvoří svazek s chordálou

$$bx \cos 2\Theta + ay \sin 2\Theta - ab = 0,$$

což je tečna t v bodě $T(a \cos 2\Theta, b \sin 2\Theta)$. Průměrem jedné kružnice svazku ($\lambda = 0$) je velká osa elipsy. Bod T dostaneme, vedeme-li vrcholem A kolmici na průměr g . Spojnice AT má skutečně směrnici

$$\frac{b \sin 2\Theta}{a \cos 2\Theta - a} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} \Theta.$$

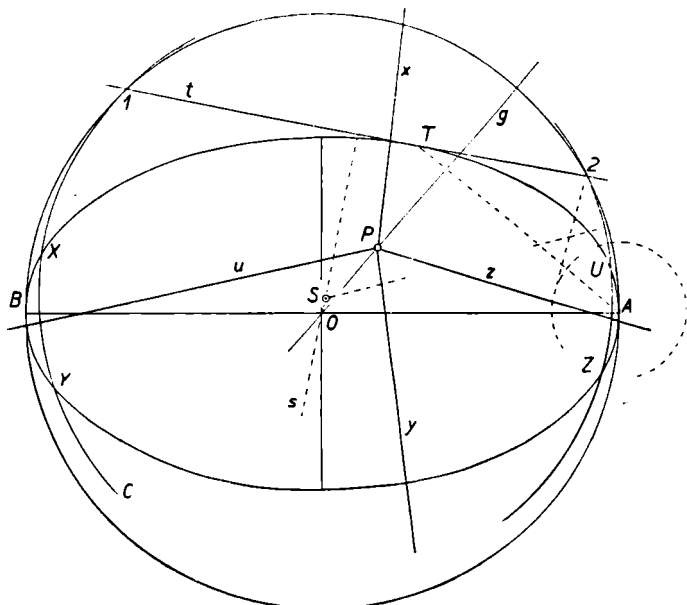
Pro kružnici (C) máme tedy dva body 1, 2, střed je na přímce s jdoucí středem O kolmo k t . Střed S této kružnice můžeme sestrojiti užitím pořadnice

$$q = \frac{2ax_0y_0}{c^2}$$

nebo z okolnosti, že na př. vrchol $A(a, 0)$ má ke kružnici (C) mocnost $2b^2y_0^2 : c^2$. Snadno se také vyjádří mocnost bodu O . Z toho vyplývá Joachimsthalova konstrukce normál vedených bodem P k elipse (obr. 32):

Spojíme P s O , vrcholem A vedeme kolmici k OP a najdeme její průsečík T s elipsou. Tečna t v T protíná kružnici

sestrojenou nad hlavní osou AB ve dvou bodech 1, 2. Sestrojíme dále kružnici (C) , která jde body 1, 2 a protíná kolmo kružnici se středem A a poloměrem $\frac{by_0}{c} \sqrt{2}$. Kružnice (C) protíná elipsu v bodech X, Y, Z, U a hledané normály jdou bodem P kolmo k přímkám AX, AY, AZ, AU . Pata normály je vždy bod, v němž je tečna rovnoběžná s AX, AY, AZ, AU .



Obr. 32

16,5. Podmínka, aby body z_1, z_2, z_3, z_4 byly patami normál nějakého bodu, je $z_1 z_2 z_3 z_4 = -1$. Nahradíme-li z_1 bodem diametrálně protilehlým $z' = -z_4$, je $z_1 z_2 z_3 z' = 1$ a máme čtyři body na kružnici (soukružné). Paty tří normál vedených

bodem P a bod diametrálně protilehlý s patou čtvrtou jsou na kružnici (*Joachimsthalova kružnice*).

Můžeme tedy snadno řešit kubickou úlohu: *Z bodu na normále bodu M ($z_4 = e^{i\theta}$) sestrojít další tři normály*. Je třeba jen určit kružnici body z_1, z_2, z_3, z' . Abychom ji určili, označme h_i symetrické funkce veličin z_1, z_2, z_3, z' a zavedme prozatím označení

$$g_1 = z_1 + z_2 + z_3, \quad g_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3, \quad g_3 = z_1z_2z_3.$$

Z podmínek pro paty normál, $s_4 = -1, s_2 = 0$, vychází

$$g_3 = -\frac{1}{z_4}, \quad g_2 = -g_1z_4;$$

veličina g_1 se určí z rovnice (8a) odst. 16,4

$$s_1 = g_1 + z_4 = \frac{2ax_0 - 2by_0}{c^2}$$

ve tvaru

$$g_1 = \frac{2ax_0 - 2by_0 - c^2z_4}{c^2}.$$

Pro J kružnici máme ze vzorců (12) odst. 16,4

$$p = \frac{c^2}{8a}(h_1 + h_3), \quad q = \frac{c^2i}{8b}(h_1 - h_3), \quad n = \frac{c^2}{4}h_2 - \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Snadno nalezneme

$$h_1 = g_1 - z_4,$$

$$h_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 - z_4(z_1 + z_2 + z_3) = g_2 - g_1z_4 = \\ = -2g_1z_4,$$

$$h_3 = z_1z_2z_3 - z_4(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = g_3 - g_2z_4 = \\ = -1/z_4 + g_1z_4^2$$

a odtud

$$h_1 + h_3 = (1 + z_4^2) \left(g_1 - \frac{1}{z_4} \right), \quad h_1 - h_3 = (1 - z_4^2) \left(g_1 - \frac{1}{z_4} \right).$$

Podobně najdeme

$$s_1 = g_1 + z_4, \quad s_3 = g_3 + g_2 z_4 = -\frac{1}{z_4} - g_1 z_4^2$$

a

$$s_1 + s_3 = (1 - z_4^2) \left(g_1 - \frac{1}{z_4} \right), \quad s_1 - s_3 = (1 + z_4^2) \left(g_1 + \frac{1}{z_4} \right).$$

Odtud vychází podle rovnic (8a) odst. 16,4

$$\frac{h_1 + h_3}{s_1 + s_3} = \frac{1 + z_4^2}{1 - z_4^2} = i \cotg \Theta, \quad \frac{h_1 - h_3}{s_1 - s_3} = -i \tg \Theta,$$

$$h_1 + h_3 = i \cotg \Theta (s_1 + s_3) = \frac{4y_0 b}{c^2} \cotg \Theta,$$

$$h_1 - h_3 = -\frac{4x_0 a}{c^2} i \tg \Theta,$$

dále

$$p = \frac{by_0}{2a} \cotg \Theta, \quad q = \frac{ax_0}{2b} \tg \Theta.$$

Pro stanovení n potřebujeme

$$h_2 = -2g_1 z_4,$$

je však

$$-\frac{1}{2} h_2 = g_1 z_4 = \frac{2ax_0 z_4 - 2by_0 z_4 - c^2 z_4^2}{c^2}.$$

Po dosazení $z_4 = e^{i\Theta} = \cos \Theta + i \sin \Theta$ vidíme snadno, že imaginární část tohoto výrazu

$$2ax_0 \sin \Theta - 2by_0 \cos \Theta - c^2 \sin 2\Theta$$

vymizí, poněvadž (x_0, y_0) je na normále bodu M , a dostaneme

$$-n = ax_0 \cos \Theta + by_0 \sin \Theta + a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta.$$

Veličiny p, q, n určují J . kružnici.

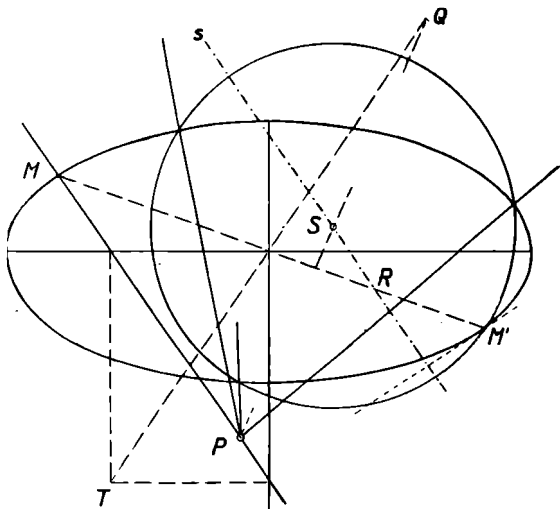
Nechť bod (x_0, y_0) probíhá normálu bodu $M(z_4 = e^{i\Theta})$. Na této normále je

$$\frac{x_0 - a \cos \Theta}{b \cos \Theta} = \frac{y_0 - b \sin \Theta}{a \sin \Theta} = \lambda,$$

tedy

$$x_0 = a \cos \Theta + \lambda b \cos \Theta, \quad y_0 = b \sin \Theta + \lambda a \sin \Theta \quad (1)$$

a po dosazení



Obr. 33

$$2p = \frac{b^2}{a} \cos \Theta + \lambda b \cos \Theta, \quad 2q = \frac{a^2}{b} \sin \Theta + \lambda a \sin \Theta, \quad (2)$$

$$-n = a^2 + b^2 + \lambda ab.$$

Probíhá-li bod $P(x_0, y_0)$ normálu bodu M na elipse, probíhá příslušná J . kružnice svazek

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2 x}{a} \cos \Theta - \frac{a^2 y}{b} \sin \Theta - (a^2 + b^2) +$$

$$+ \lambda (bx \cos \Theta + ay \sin \Theta + ab) = 0.$$

Chordála

$$bx \cos\Theta + ay \sin\Theta + ab = 0$$

je tečnou v bodě $\Theta + \pi$ ($x = -a \cos\Theta$, $y = -b \sin\Theta$), t. j. v bodě M' diametrálně protilehlém s bodem M . Tento bod je i jedním vrcholem svazku. Středná s , kterou probíhá bod (p, q) , má rovnici

$$\frac{2a}{\cos\Theta} x - \frac{2b}{\sin\Theta} y + c^2 = 0,$$

je tedy rovnoběžná s normálou bodu M a jde bodem R ,

$$x_R = \frac{1}{2}a \cos\Theta, \quad y_R = -\frac{1}{2}b \sin\Theta,$$

který pŕlí poloměr bodu $M'(\Theta + \pi)$.

Pohybuje-li se bod $P(x_0, y_0)$ po normále bodu M , pohybuje se střed $S(p, q)$ $J.$ kružnice po centrále poloviční rychlostí. Řady (P) , (S) jsou podobné a spojnice PS jde pevným bodem Q . Podle rov. (1) a (2) je

$$\begin{aligned} x_Q &= \frac{x_0 - 2p}{1 - 2} = -\frac{c^2 \cos\Theta}{a}, & y_Q &= \frac{y_0 - 2p}{1 - 2} = \\ & & &= -\frac{c^2 \sin\Theta}{b}. \end{aligned}$$

Tento bod je diametrálně protilehlý s bodem T (obr. 33).

Chceme-li tedy sestrojít normály z bodu P ležícího na normále bodu M , spojíme P s Q , dostaneme střed S kružnice, jež jde bodem M' a protíná elipsu v patách hledaných normál.

17. SESTROJENÍ OS KUŽELOVÉ PLOCHY

Budiž dán kvadratický kužel; jeho základnou ať je kuželosečka k v rovině $z = 0$, vrchol $V(m, n, v)$. Osy kužele nechť

mají na základně stopníky X, Y, Z . Přímky VX, VY, VZ tvoří pravouhlý polární trojhran daného kužele a stopy X, Y, Z tvoří polární trojúhelník kuželosečky k . Avšak pravouhlý trojhran je zároveň polární trojhran isotropického kužele

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - v)^2 = 0.$$

Stopa tohoto kužele na $z = 0$ je imaginární kružnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + v^2 = 0$$

a trojúhelník XYZ je také polárním trojúhelníkem této kružnice o středu $V_1(m, n)$ a poloměru vi ($i = \sqrt{-1}$). Jde tedy o sestrojení společného polárního trojúhelníka dvou kuželoseček.

Tato úloha, která zároveň podává konstrukci os plochy druhého stupně a konstrukci kruhových průseků, byla často řešena, nejprve použitím dvou kuželoseček, později jen jedné. Mezi nejstarší řešení nutno počítat řešení Chaslesovo a Fiedlerovo. Z řešení, v nichž se používá jen jedné kuželosečky, je pozoruhodné řešení Pelzovo, ve kterém je použito vlastností paraboly, kterou podle Sobotky nazýváme Steiner-Pelzovou parabolou.

Podáváme zde řešení, při němž je dána základna kužele, již však netřeba rýsovat, a při němž se používá narýsované rovnoosé hyperboly. Toto řešení bývá uvedeno v učebnicích deskriptivní geometrie a je skutečně konstruktivně nejvýhodnější.

Volme za základnu kužele elipsu

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{1}$$

v rovině $z = 0$, vrchol $V(m, n, v)$. Jde pak o společný polární trojúhelník elipsy (1) a kružnice (imaginární)

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + v^2 = 0. \tag{2}$$

Bodu $P(\xi, \eta)$ v rovině $z = 0$ patří k těmto kuželosečkám bod sdružený, který dostaneme jako průsečík polár

$$b^2\xi x + a^2\eta y - a^2b^2 = 0, \\ x\xi + y\eta - m(\xi + x) - n(\eta + y) + v^2 = 0. \quad (3)$$

Rovnice (3) jsou symetrické podle dvojic (ξ, η) , (x, y) , mezi body P, P' je tedy Steinerova příbuznost (odst. 12). Opíše-li jeden přímku, opisuje druhý kuželosečku. Všechny tyto kuželosečky jdou společným polárním trojúhelníkem kuželoseček (1) a (2). Zvolíme tedy takové dvě přímky, aby přidružené kuželosečky byly rovnoosá hyperbola a kružnice.

Řešením rovnic (3) vychází

$$\xi = \frac{a^2b^2(y - n) - a^2y(mx + ny - v^2)}{b^2x(y - n) - a^2y(x - m)}, \\ \eta = \frac{b^2x(mx + ny - v^2) - a^2b^2(x - m)}{b^2x(y - n) - a^2y(x - m)}. \quad (4)$$

V těchto výsledcích lze zaměnit (ξ, η) za (x, y) . Je okamžitě vidět, že nevlastní přímce (ξ, η) roste do nekonečna) odpovídá rovnoosá hyperbola

$$K^\infty \equiv (a^2 - b^2)xy + b^2nx - a^2my = 0, \quad (5)$$

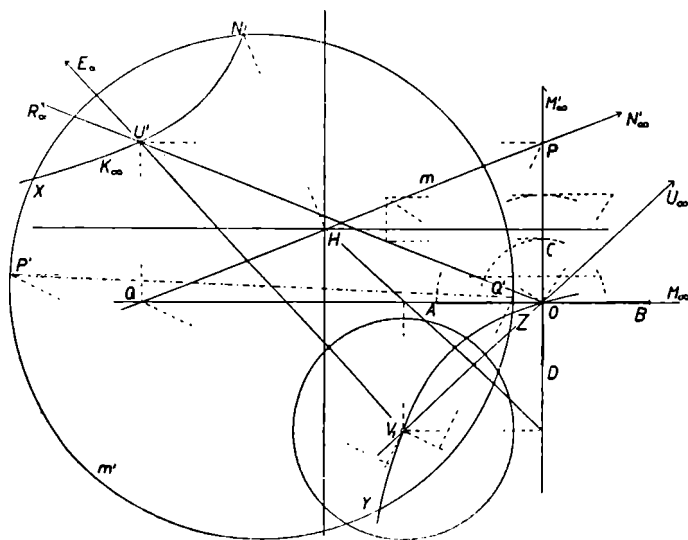
která jde středem O eliptické základny, bodem $V_1(m, n)$ a jejíž střed lze snadno sestrojít. Chceme-li sestrojít přímku, již odpovídá kružnice, dosadíme z rovnic (4) do

$$u\xi + v\eta + 1 = 0$$

a dostaneme pro u, v dvě rovnice, napíšeme-li, že se koeficient při xy rovná nule, koeficienty při x^2, y^2 jsou stejné. Pro střed a poloměr dostaneme výrazy racionální a druhé odmocniny.

Skoro rychleji však vede k cíli geometrická úvaha. Pohybuje-li se bod P po nevlastní přímce, otáčí se jeho polára k elipse (1) kolem středu O , polára ke kružnici (2) kolem středu V_1 (obr. 34). Tyto dva projektivní svazky průměrů vytvářejí rovnoosou hyperbolu K^∞ (5). Neboť nevlastnímu bodu M^∞ osy AB patří osa CD v elipse a v kružnici průměr kolmý k AB ; průsečík je tedy nevlastní bod M'_∞ osy CD . Obdobně patří tomuto nevlastnímu bodu osy CD nevlastní

bod osy AB . Tím je dán směr asymptot. V konečnu jsou středy obou svazků O, V_1 a snadno lze sestrojiti další bod, který odpovídá nevlastnímu bodu U^∞ přímky OV_1 . U' dostaneme jako průsečík přidružených průměrů. OU' je sestrojena afinní kružnicí nad průměrem AB , V_1U' je kolmý k OV_1 . Tím je hyperbola K^∞ dána směrem asymptot a body O, V_1, U' . Střed H dostaneme snadno z vlastnosti, že úhel sdružených průměrů rovnosé hyperboly je půlen asymptotami. Sestrojíme tedy obdélník o úhlopříčce OU' a stranách v osách elipsy. Jeho druhá úhlopříčka PQ je průměr sdružený s OU' . Podobně obdélník s úhlopříčkou OV_1 dává průměr sdružený, který se s prvním protíná v hledaném středu hyperboly H .



Obr. 34

Abychom dostali přímku m , které odpovídá kružnici m' , uvažme, že kružnice jde absolutními kruhovými body roviny I_1^∞, I_2^∞ , které jsou dvojnými body involuce na nevlastní

přímce roviny, jež se promítá z libovolného bodu roviny pravoúhlou involucí. Této involuci odpovídá na rovnose hyperbole K^∞ involuce a její dvojně body I_1', I_2' odpovídají absolutním bodům roviny I_1^∞, I_2^∞ . Přímce $m \equiv I_1'I_2'$, ose této involuce na hyperbole, odpovídá kuželosečka body I_1^∞, I_2^∞ , t. j. kružnice. Involuci na přímce m , která má dvojně body I_1', I_2' , odpovídá involuce na kružnici s dvojnými body I_1^∞, I_2^∞ , t. j. se středem ve středu kružnice m' .

Podle toho je provedena konstrukce v obr. 34. Involuce na u^∞ je dána bodovými páry M_∞, M'_∞ a U^∞, E^∞ , kde U^∞ je nevlastní bod na OV_1 , E^∞ na V_1U' . Těmto dvojicím odpovídají na hyperbole K^∞ dvojice M_∞, M'_∞ a U', O . Střed involuce je tedy $R^\infty = (M_\infty M'_\infty, U'O)$, t. j. nevlastní bod přímky OU' . Osa involuce je polára bodu R^∞ , t. j. průměr hyperboly PQ . PQ je tedy hledaná přímka m , již odpovídá kružnice. Na ní jsou imaginární body I_1', I_2' a take body P, Q , jež je oddělují harmonicky (čtyřroh $M_\infty M'_\infty OU'$ je do hyperboly vepsán, jeho diagonální trojúhelník je PQR^∞). Přidružené body P', Q' jsou koncové body průměru kružnice m' . Křivky K^∞, m' mají společný bod N a kromě toho hledané body X, Y, Z . Průsečík výšek trojúhelníka XYZ je V_1 . K sestrojení polár bodů P, Q k imaginární kružnici se použilo reálné kružnice o středu V_1 a poloměru v .

O této úloze a různých způsobech řešení nalezne čtenář obsáhlou stať v díle B. Procházky, Vybrané statě z deskriptivní geometrie, str. 51. Upozorňuji zejména na Šolínovo řešení, které je též uveřejněno v Časopise, r. 16.

18. NĚKTERÉ DALŠÍ KUBICKÉ A BIKVADRATICKÉ ÚLOHY

1. Na průměru koule určete bod tak, aby rovina kolmá v tomto bodě rozdělovala kouli v daném poměru (tuto úlohu řešil již Archimedes).

2. Je dán ostrý úhel. Mezi jeho ramena zasuňte úsečku dané délky d tak, aby její osa symetrie procházela daným bodem.

3. Dána je kolíneace dvou soumísných rovinných polí tak, že bodům A, B, C, D jsou přiřazeny body A', B', C', D' (žádné tři nejsou na jedné přímce). Sestrojte samodružné body. Viz Kadeřávek-Klíma-Kounovský, Deskriptivní geometrie, díl I.

4. Sestrojte průsečíky přímky s křivkou třetího stupně danou devíti nebo s křivkou čtvrtého stupně danou čtrnácti body.

5. Dvě křivky třetího stupně v rovině nechť mají šest společných bodů; mimo to je každá dána dalšími třemi body. Sestrojte zbývající tři společné body obou křivek. Viz Smith, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, *Annali di matematica*, ř. 2., r. 3 (1870).

6. Je-li dáno 13 bodů společných dvěma křivkám čtvrtého stupně, jež jsou dostatečně určeny, sestrojte zbývající tři společné body. Viz rovněž Smith, Mémoire atd.

OBSAH

Předmluva	5
1. Úvod	7
2. Elementární konstrukce	11
3. Kubické úlohy a konstrukce	14
4. Přehled starších method řešení problému zdvojení krychle	17
4,1. Archytas z Tarentu	17
4,2. Menächmus	18
4,3. Descartes	19
4,4. Grégoire	19
4,5. Methoda zasouvání, Nikomedova konchoida, Newtonova konstrukce	20
4,6. Diokletova cissoida	24
4,7. Platonův aparát, Eratosthenovo mesolabium	28
4,8. Přibližné konstrukce	29
5. Starší metody trisekce	33
5,1. Kvadratrix a jiné křivky	33
5,2. Zasouvání	35
5,3. Užití kuželoseček, Pappus, Descartes, Clairaut, Chasles	35
5,4. Pascalova závitnice	40
5,5. Cevova cykloida	41
5,6. Přibližné konstrukce, Dürer, Cominotto-Monti	43
6. Obecná kubická rovnice	44
7. Bikvadratické rovnice	47
8. Převod kubické rovnice na trisekci nebo delický problém	48
9. Důkaz, že není možno druhými odmocninami řešit úlohu, která vede na irreducibilní rovnici třetího stupně	50
10. Jak poznáme, zda má rovnice s racionálními koeficienty racionální kořen	54
11. Řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně užitím pevné kuželosečky	56
11,1. Je dána pevná parabola	56
11,2. Je dána pevná elipsa	58
11,3. Je dána pevná hyperbola	64
11,4. Stačí oblouk kuželosečky	65
12. Projektivní úlohy třetího a čtvrtého stupně	66

13. Řešení kubických úloh užitím křivky třetího stupně nebo jinými prostředky	71
14. Řešení kubické úlohy dvěma pravými úhly	73
15. Pravidelný sedmiúhelník a devítiúhelník	75
16. Problém normál kuželosečky	78
17. Sestrojení os kuželové plochy	94
18. Jiné kubické problémy	98

CESTA K VĚDĚNÍ

svazek

60

DR LADISLAV SEIFERT

KUBICKÉ A BIKVADRATICKÉ
PROBLÉMY

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství,
Praha 1951. Šéfredaktor Miroslav Střída,
odborný redaktor Miroslav Fuka, výtvar-
ný redaktor Miloš Hrbas. Jazykově upra-
vila Jarmila Coufalová. Z nové sazby
písmem Extended vytiskla Státní tiskár-
na ěn. p., závod 05 (Prometheus), Praha
VIII. — 1. vydání, náklad 3300 výtisků
— 30103/130 — 45971-51-12-III-1 — 82—
Sazba 20. IV. 51 — Tisk 29. VI. 51 — 3,25
plánovacích archů, 5,16 autorských archů,
5,27 vydavatelských archů — 104 stran,
34 obr. Papír 221-07, 70×100 cm, 80g.

Cena brož. 37 Kčs.

Brož. 37 Kčs
30103-130