PROF. DR BOHUSLAV HOSTINSKÝ

POČET
pravděpodobnosti

Druhá část

CESTA K VĚDĚNÍ SVAZEK 57

Jč
m+f

CESTA K VĚDĚNÍ

Dr Boh. Hostinský:

POČET PRAVDĚPODOBNOSTI

Druhá část.

Druhá část autorovy práce je věnována aplikacím základních pojmů počtu pravděpodobnosti, které vyložil v první knížce.

Nejprve se zabývá podmíněnými (závislými) pravděpodobnostmi a s nimi souvisícími tabulkami úmrtnosti, potom se zmiňuje o korelaci, jejím koeficientu a o jeho stanovení.

Těžiště druhé části je ve výkladu o Markovových řetězech. Autor vykládá theorii jednoduchých řetězů o dvou eventualitách i jednoduchých řetězů s libovolným počtem eventualit a ukazuje jejich užití na řešení různých úloh a problémů jak theoretických, tak praktických.

Čtenáře jistě zaujmou klasické úlohy o míchání karet, výklady o významném ergodickém principu a o řetězech s nekonečně velkým počtem eventualit. V nich se dotýká autor hlubokých aplikací počtu pravděpodobnosti a ukazuje, jak jednoduché principy stačí k řešení složitých otázek praxe.

JČMF Brož. Kčs 37,—

Prof. Dr BOHUSLAV HOSTINSKÝ

POČET PRAVDĚPODOBNOSTI

DRUHÁ ČÁST

PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

KAPITOLA PÁTÁ*)

ZÁVISLÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

48. Podmíněné pravděpodobnosti. Zjev A může se objeviti jakožto výsledek nějakého pokusu, který se koná za daných podmínek; vzhledem k nim má zjev A určitou *prostou pravděpodobnost* $P(A)$. *Podmíněná pravděpodobnost* zjevu A za předpokladu, že nastal jiný zjev B, značí se $P_B(A)$ a liší se obecně od $P(A)$. Obdobně zavádíme prostou pravděpodobnost $P(B)$ zjevu B a jeho podmíněnou pravděpodobnost $P_A(B)$ za předpokladu, že nastal A.

Nastane-li zjev A, nemá to vlivu na hodnotu pravděpodobnosti $P_A(B)$; nastane-li B za předpokladu, že nastal**) A, nemá to vlivu na hodnotu pravděpodobnosti $P(A)$. Proto prostá pravděpodobnost $P(A, B)$, že nastanou oba zjevy A a B, rovná se podle pravidla o násobení pravděpodobností součinu $P(A)\,P_A(B)$. V tomto součinu lze zaměniti A s B, takže

$$P(A, B) = P(A)\,P_A(B) = P(B)\,P_B(A). \qquad (1)$$

Rovnice (1) udává souvislost mezi prostou pravděpodobností $P(A, B)$, že nastanou zjevy A a B, prostými pravděpodobnostmi $P(A)$, $P(B)$ obou zjevů a podmíněnými pravděpodobnostmi $P_A(B)$ a $P_B(A)$.

Obecně je

$$P(A, B) \neq P(A)\,P(B).$$

Ve zvláštním případě, že A a B jsou zjevy vzájemně nezávislé, je

$$P_B(A) = P(A), \quad P_A(B) = P(B);$$

rovnice (1) se pak redukují na jedinou:

*) Číslování kapitol a odstavců navazuje na první část, která vyšla v Cestě k vědění, sv. 53.

**) Není nutno, aby zjev B časově následoval po zjevu A; B může býti současný s A nebo může nastati i před zjevem A.

$$P(A, B) = P(A)\,P(B),$$

která vyjadřuje pravidlo o složené pravděpodobnosti (odst. 5).

49. Příklady podmíněných pravděpodobností. a) Jsou dána dvě osudí, jedno bílé, které obsahuje dvě bílé koule a jednu černou, druhé pak černé, které obsahuje dvě černé koule a jednu bílou. Volíme jedno osudí (pravděpodobnost voliti bílé je $\frac{1}{2}$, pro černé též $\frac{1}{2}$) a vytáhneme kouli, kterou vložíme zpět; byla-li to bílá, konáme druhý tah z bílého osudí, byla-li to černá, konáme jej z černého. Zjev A nechť je vytažení bílé koule při prvním tahu, zjev B vytažení bílé koule při druhém tahu. Jak veliké jsou prosté pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a jak veliká je pravděpodobnost $P(A, B)$, že při prvním i při druhém tahu vyjde bílá?

$P(A)$ se rovná součtu dvou složených pravděpodobností; buď volíme bílé osudí a vytáhneme bílou (pravděpodobnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$) nebo volíme černé a vytáhneme bílou (pravděpodobnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$) a tedy

$$P(A) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Pravděpodobnost vytáhnouti při prvním tahu černou jest ovšem také $\frac{1}{2}$.

$P(B)$ je rovněž součet dvou složených pravděpodobností: buď v prvním tahu vyjde bílá a při druhém vytáhneme z bílého osudí bílou (pravděpodobnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$) nebo v prvním tahu vyjde černá a při druhém vytáhneme z černého osudí bílou (pravděpodobnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$). Je tedy

$$P(B) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Je-li známo, že v prvním tahu vyšla bílá, koná se druhý tah z bílého osudí, a tedy $P_A(B) = \frac{2}{3}$ je pravděpodobnost, že i ve druhém vyjde bílá. Prostou pravděpodobnost $P(A, B)$ vypočteme dvojím způsobem:

1. Podle rovnice (1) odst. 48 je

$$P(A, B) = P(A)\,P_A(B) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}.$$

2. Pravděpodobnost p_1, voliti bílé osudí, vytáhnouti bílou a pak znova z bílého vytáhnouti bílou, je $p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$; pravděpodobnost p_2 voliti černé osudí, vytáhnouti bílou a pak z bílého vytáhnouti bílou, je $p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$ a

$$P(A, B) = p_1 + p_2 = \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{3}.$$

Je tedy

$$P(A)\,P(B) = \tfrac{1}{4},\quad P(A, B) = \tfrac{1}{3},\quad P(A, B) > P(A)\,P(B).$$

Pravděpodobnost $P_B(A)$, že v prvním tahu vyšla bílá, je-li známo, že v druhém tahu vyšla bílá, vypočte se podle rovnice (1), odst. 48:

$$P_B(A) = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3}.$$

b) Pro obyvatele určitého města rozeznáváme několik pravděpodobností vztahujících se ke zjevům: A přijíti do nemocnice, a B zemříti.

Pravděpodobnost, že někdo během 1 roku zemře .... $P(B) = 0{,}006$

Pravděpodobnost, že někdo během 1 roku přijde do nemocnice .... $P(A) = 0{,}02$

Pravděpodobnost, že někdo, přijde-li během 1 roku do nemocnice, zemře tam během téhož roku.............................. $P_A(B) = 0{,}06$

Zde uvedené číselné hodnoty prostých pravděpodobností $P(A)$, $P(B)$ a podmíněné pravděpodobnosti $P_A(B)$ vyjadřují tyto poměry: má-li město 100 000 obyvatelů, zemře z nich během roku celkem 600; do nemocnice přijde během roku 2000 osob, z nichž 120 tam zemře během téhož roku.

Podle rovnic odst. 48 je pravděpodobnost, že osoba, která zemřela během roku, zemřela v nemocnici, rovna

$$P_B(A) = \frac{P_A \,.\, P_A(B)}{P(B)} = \frac{0{,}02 \,.\, 0{,}06}{0{,}006} = 0{,}2.$$

Pravděpodobnost, že někdo přijde do nemocnice a že tam zemře, je

$$P(A, B) = P(A)\,P_A(B) = 0{,}02\,.\,0{,}06 = 0{,}0012.$$

Je tedy

$$P(A)\,P(B) = 0{,}00012,\ P(A, B) = 0{,}0012,$$
$$P(A, B) > P(A)\,P(B).$$

Úmrtnost v nemocnici, vyjádřená pravděpodobností $P_A(B)$, je v našem případě desetkrát větší než prostá úmrtnost v městě vyjádřená pravděpodobností $P(B)$ (podle *S. Bernštejna*).

50. Tabulky úmrtnosti. a) Číselné vyjádření úmrtnosti odvozuje se ze změn, které nastávají v souboru osob žijících za celkem stejných podmínek. Budiž dán t. zv. *základní soubor* složený z l_0 osob, které se narodily v témže roce. Z těchto l_0 osob je po uplynutí x let na živu l_x osob; $l_0 - l_x$ osob tedy zemřelo během x let. Z toho plyne: pravděpodobnost, že někdo se dožije věku x let, je rovna

$$\frac{l_x}{l_0}. \tag{1}$$

Pravděpodobnost, že někdo zemře dříve, než dosáhne věku x, je

$$1 - \frac{l_x}{l_0} = \frac{l_0 - l_x}{l_0}. \tag{2}$$

b) Pravděpodobnost p_{xy}, že x-letá osoba dožije se věku y $(x < y)$, počítá se obdobně jako pravděpodobnost (1) s tím rozdílem, že základní soubor je zde utvořen l_x osobami x-letými; platí

$$p_{xy} = \frac{l_y}{l_x}. \tag{3}$$

Pravděpodobnost, že x-letá osoba se nedožije stáří y, je

$$1 - p_{xy} = \frac{l_x - l_y}{l_x}. \tag{4}$$

Pravděpodobnost p_{xy} dožíti se stáří y let je pravděpodobnost závislá, neboť závisí na stáří x, kterého osoba již dosáhla.

c) Pravděpodobnost, že a-letá osoba zemře do roka, je podle (4) pro $x = a$, $y = a + 1$ rovna

$$\frac{l_a - l_{a+1}}{l_a}. \tag{5}$$

Pravděpodobnost, že a-letá osoba bude žíti ještě x let a že během následujícího roku zemře, je

$$\frac{l_{a+x}}{l_a} \cdot \frac{l_{a+x} - l_{a+x+1}}{l_{a+x}} = \frac{l_{a+x} - l_{a+x+1}}{l_a}. \tag{6}$$

d) Veličiny $l_0, l_1, l_2, \ldots$ jsou sestaveny v tabulkách. Ve Valouchových tabulkách*) je tabulka úmrtnosti vypracovaná Státním úřadem statistickým. V tabulce pro muže je vzato za základ číslo $l_0 = 100\,000$; tabulka končí číslem $l_{104} = 1$, l_{105} a další jsou rovny 0. Tabulka pro ženy (také se základem $l_0 = 100\,000$) končí číslem $l_{106} = 1$.

51. Podmíněné střední hodnoty. Označme písmeny $A_1, A_2, \ldots, A_r$ zjevy, které se mohou vyskytnouti jakožto výsledky nějakého pokusu; pokus vede vždy k jedinému z nich. Nechť je p_k pravděpodobnost, že zjev A_k bude výsledkem pokusu ($k = 1, 2, \ldots, r$). Platí rovnice

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1.$$

Přiřaďme zjevu A_k veličinu α_k. Proměnná veličina x, závislá na výsledku pokusu, budiž rovna α_k, vyskytne-li se zjev A_k. Pak je *prostá střední hodnota veličiny* x rovna

$$E(x) = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_r\alpha_r.$$

---

*) *M. Valouch* a *M. A. Valouch*: Tabulky logaritmické, 10. vydání (1937), str. 102—105.

Budiž nyní, ve shodě s označením zavedeným v odst. 48, $P_B(A_k)$ pravděpodobnost, že se zjev A_k vyskytne za předpokladu, že se vyskytl mimo to jiný zjev B; předpokládáme, že objevení se zjevu B nezávisí na výsledku shora uvažovaného pokusu vedoucího k jednomu ze zjevů $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Pak je *podmíněná střední hodnota veličiny* x za předpokladu, že nastal zjev B, rovna

$$E_B(x) = P_B(A_1)\,\alpha_1 + P_B(A_2)\,\alpha_2 + \ldots + P_B(A_r)\,\alpha_r. \quad (1)$$

52. Příklady podmíněných středních hodnot. a) Budiž L_a *střední délka věku*, kterého se dočká a-letá osoba. Užívajíce tabulky úmrtnosti (odst. 50) vypočteme L_a takto:

Podle rovnice (6), odst. 50 je

$$\frac{l_{a+x} - l_{a+x+1}}{l_a}$$

pravděpodobnost, že a-letá osoba bude žíti ještě x let a že pak během následujícího roku zemře.

V rovnici (1) odst. 51 nechť A_k značí zjev: a-letá osoba bude žíti ještě k let a během následujícího roku zemře (ve stáří mezi $(a + k)$ a $(a + k + 1)$. V téže rovnici nechť B značí zjev: osoba dožije se stáří a. Dosaďme do rovnice (1), odst. 51:

$$\alpha_k = k,\; P_B(A_k) = \frac{l_{a+k} - l_{a+k+1}}{l_a};$$

její pravá strana bude pak rovna střední délce zbývajícího života pro a-letou osobu, tedy $L_a - a$. Je tedy

$$L_a - a = \frac{l_{a+1} - l_{a+2}}{l_a} \,.\, 1 + \frac{l_{a+2} - l_{a+3}}{l_a} \,.\, 2 + \\ + \frac{l_{a+3} - l_{a+4}}{l_a} \,.\, 3 + \ldots$$

nebo

$$L_a = a + \frac{l_{a+1} + l_{a+2} + l_{a+3} + \ldots}{l_a}.$$

Řada stojící v čitateli má kladné členy potud, pokud v tabulce l_x není rovno nule. Jedná-li se na př. o muže, je poslední člen řady $l_{104} = 1$; l_{105} a další jsou rovny nule. V tabulkách se někdy připojuje k napsanému zlomku hodnota $\frac{1}{2}$, čímž se vyjadřuje, že osoba se může dožíti části (průměrně poloviny) posledního (pro muže 105.) roku, ač tabulka dává pro ten rok nulovou hodnotu l_{105}.

b) Konáme řadu vzájemně nezávislých pokusů; budiž p pravděpodobnost, že se pokus zdaří, stejná pro každý pokus. Přiřadíme k-tému pokusu určitou veličinu $x^{(k)}$, ($k = 1, 2, 3, \ldots$), která se rovná 1, zdaří-li se pokus a která se rovná 0, nezdaří-li se. Užijeme označení zavedeného v odst. 13 a 14: m nechť značí skutečný počet zdařených pokusů, vykonáme-li celkem n pokusů, a h nechť je úchylka čísla m od jeho střední hodnoty np. Střední hodnotu nějakého čísla x budeme značiti $E(x)$ (dříve jsme užívali znaku s. h. (x)). Podle odst. 14b je

$$x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} = m,$$
$$h = x^{(1)} - p + x^{(2)} - p + \ldots + x^{(n)} - p = m - np,$$
$$E(x^{(k)} - p) = 0, \; E[(x^{(k)} - p)^2] = p(1 - p),$$
$$E[(x^{(k)} - p)(x^{(l)} - p)] = 0 \text{ pro } l \neq k, \tag{1}$$

$$E(h) = 0, \; E(h^2) = np(1 - p). \tag{2}$$

Prodlužme nyní řadu pokusů tak, že celkový jich počet bude $N (n < N)$; příslušnou úchylku nazveme H. Bude tedy

$$H = x^{(1)} - p + x^{(2)} - p + \ldots + x^{(n)} - p + x^{(n+1)} - p + \\ + \ldots + x^{(N)} - p, \; E(H) = 0.$$

Klademe si za úlohu vypočítati střední hodnotu součinu hH ve dvou různých případech: jednak za předpokladu, že h má danou známou hodnotu, jednak prostou střední hodnotu.

Podmíněná střední hodnota součinu hH za předpokladu, že h má danou známou hodnotu h je (viz odst. 10c)

$$E_h(h \,.\, H) = h \,.\, E(H) = 0.$$

Prostá střední hodnota součinu hH je $(n < N)$

$$E(hH) = E\{[x^{(1)} - p + x^{(2)} - p + \ldots + x^{(n)} - p] \,.$$
$$. \, [x^{(1)} - p + x^{(2)} - p + \ldots + x^{(N)} - p]\} =$$
$$= E[(x^{(1)} - p)^2 + (x^{(2)} - p)^2 + \ldots + (x^{(n)} - p)^2] =$$
$$= np(1 - p) = E(h^2),$$

neboť podle (1) má každý čtverec $(x^{(k)} - p)^2$ střední hodnotu $p(1 - p)$ a každý součin $(x^{(k)} - p)(x^{(l)} - p)$ střední hodnotu rovnou nule pro $k \neq l$. Výsledek shrneme takto:

Budiž H úchylka v řadě složené z N nezávislých pokusů a h úchylka v řadě složené z n prvních pokusů $(n < N)$. *Podmíněná střední hodnota součinu hH za předpokladu, že h má známou hodnotu, se rovná nule. Prostá střední hodnota součinu hH se rovná střední hodnotě čtverce úchylky h a nezávisí na čísle N.**)

53. Jak se normalisuje veličina závislá na náhodě. Budiž x veličina závislá na náhodě. V některých úlohách se hodí *normalisovati* veličinu x, t. j. zavésti do počtu novou veličinu ξ, která je lineární funkcí veličiny x a která má vlastnosti:

$$E(\xi) = 0, \; E(\xi^2) = 1. \tag{1}$$

Veličinu ξ odvodíme z x takto: odečteme od x její střední hodnotu $E(x)$ a rozdíl dělíme odmocninou ze střední hodnoty čtverce veličiny $[x - E(x)]$. Je tedy

$$\xi = \frac{x - E(x)}{\sqrt{E[x - E(x)]^2}}. \tag{2}$$

Výraz na pravé straně rovnice (2) má vlastnosti vyjádřené rovnicemi (1). Veličina ξ je *normalisovaná veličina závislá na náhodě*. Střední hodnota nalézající se pod znamením odmocniny v (2) může se upraviti takto:

$$E[x - E(x)]^2 = E(x^2) - 2[E(x)]^2 + [E(x)]^2 =$$
$$= E(x^2) - [E(x)]^2. \tag{3}$$

*) Viz *P. Lévy*: Commentarii Math. Helvetici, vol. *16* (1943—44), pg. 242.

Místo (2) dostaneme, užijeme-li této úpravy,

$$\xi = \frac{x - E(x)}{\sqrt{E(x^2) - [E(x)]^2}}. \tag{4}$$

54. Korelace a koeficient korelace. a) K pojmu korelace docházíme sledujíce souvislost dvou znaků na nějakém jedinci nebo vůbec dvou proměnných veličin x a y, které v různých případech současně nabývají různých hodnot. Nechť jsou $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ možné hodnoty veličiny x a $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ možné hodnoty veličiny y. Jeden „případ" jest určen, známe-li příslušný pár hodnot x_i a y_k.

Budiž $P(x_i, y_k)$ prostá pravděpodobnost případu, ve kterém $x = x_i$ a zároveň $y = y_k$. Podmíněné pravděpodobnosti:

$P_{y_k}(x_i)$, že $x = x_i$, dáno-li, že $y = y_k$, a
$P_{x_i}(y_k)$, že $y = y_k$, dáno-li, že $x = x_i$

souvisí s prostými pravděpodobnostmi

$$P(x_i), \text{ že } x = x_i; \; P(y_k), \text{ že } y = y_k$$

podle rovnice (1), odst. 48; tato rovnice má nyní tvar

$$P(x_i, y_k) = P(x_i)\, P_{x_i}(y_k) = P(y_k)\, P_{y_k}(x_i).$$

Poněvadž pak

$$P(x_i) = \sum_k P(x_i, y_k), \qquad P(y_k) = \sum_i P(x_i, y_k), \tag{1}$$

je

$$P_{x_i}(y_k) = \frac{P(x_i, y_k)}{\sum_k P(x_i, y_k)}, \quad P_{y_k}(x_i) = \frac{P(x_i, y_k)}{\sum_i P(x_i, y_k)}. \tag{1'}$$

Vzorci (1) a (1′) jsou určeny všechny pravděpodobnosti vztahující se k x a y, je-li dána pravděpodobnost $P(x_i, y_k)$ jako funkce indexů i a k. Součty dle i v předešlých vzorcích i v následujících vztahují se ke všem možným hodnotám x_i, součty dle k ke všem možným hodnotám y_k.

Zaveďme do počtu střední hodnoty veličin x a y:

$$E(x) = \sum_i P(x_i) \cdot x_i, \quad E(y) = \sum_k P(y_k) \cdot y_k, \tag{2}$$

střední hodnoty jejich čtverců:

$$E(x^2) = \sum_i P(x_i) \cdot x_i^2, \quad E(y^2) = \sum_k P(y_k) \cdot y_k^2 \tag{3}$$

a normalisované proměnné ξ, η podle rovnice (4), odst. 53:

$$\xi = \frac{x - E(x)}{\sqrt{E(x^2) - [E(x)]^2}}, \quad \eta = \frac{y - E(y)}{\sqrt{E(y^2) - [E(y)]^2}}. \tag{4}$$

Koeficient korelace R mezi veličinami x a y je roven střední hodnotě součinu normalisovaných veličin ξ, η, tedy

$$R = E(\xi \cdot \eta). \tag{5}$$

Dosadíme-li sem podle (4), bude

$$R = \frac{E\{[x - E(x)] \cdot [y - E(y)]\}}{\sqrt{E(x^2) - [E(x)]^2} \cdot \sqrt{E(y^2) - [E(y)]^2}}; \tag{6}$$

poněvadž

$$E\{[x - E(x)][y - E(y)]\} = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y),$$

můžeme psáti místo (6) též

$$R = \frac{E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)}{\sqrt{\{E(x^2) - [E(x)]^2\}\{E(y^2) - [E(y)]^2\}}}. \tag{7}$$

Vzhledem k hořejší definici pravděpodobnosti $P(x_i, y_k)$ je

$$E(x \cdot y) = \sum_i \sum_k P(x_i, y_k)\, x_i y_k; \tag{8}$$

ostatní veličiny $E(x)$, $E(y)$, $E(x^2)$, $E(y^2)$ vyskytující se v rovnici (7) jsou určeny vzorci (2) a (3).

b) *Absolutní hodnota* $|R|$ *koeficientu korelace není nikdy větší než* 1. Abychom to dokázali, utvořme střední hodnotu výrazu $(\xi - \lambda\eta)^2$, kde λ je libovolné reálné číslo a kde ξ a η jsou určeny rovnicemi (4). Vychází

$$E(\xi - \lambda\eta)^2 = E(\xi^2) - 2\lambda\, E(\xi\,.\,\eta) + \lambda^2\, E(\eta^2) \geqq 0.$$

Poněvadž tato nerovnost platí pro každou hodnotu veličiny λ, musí míti mnohočlen druhého stupně vzhledem k λ záporný diskriminant; je tedy

$$[E(\xi\,.\,\eta)]^2 \leqq E(\xi^2)\,.\,E(\eta^2).$$

Vzhledem k rovnici (5) a vzhledem k vlastnostem normalisovaných proměnných ξ a η (viz druhou rovnici (1), odst. 53) je

$$E(\xi\eta) = R,\; E(\xi^2) = E(\eta^2) = 1$$

a tedy

$$R^2 \leqq 1,\; -1 \leqq R \leqq +1.$$

c) Uveďme tři příklady:

První příklad. Mezi veličinami x a y je vztah

$$y = x + \alpha,$$

kde α je konstanta. Pak je

$$y - E(y) = x + \alpha - E(x) - \alpha = x - E(x)$$

a tedy — viz rovnici (3), odst. 53 —

$$E(y^2) - [E(y)]^2 = E[y - E(y)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \\ = E[x - E(x)]^2. \tag{9}$$

Koeficient korelace je zde podle (6)

$$R = \frac{E[x - E(x)]^2}{E[x - E(x)]^2} = +1.$$

Kdyby α nebyla konstanta, nýbrž nějaká veličina závislá na náhodě, avšak velmi malá, byl by koeficient R blízký jedné. Dvě veličiny x, y, které se mění přibližně stejně jedna jako druhá (takže rozdíl mezi nimi je malý), mají koeficient korelace blízký kladné jednotce.

Druhý příklad. Je-li mezi x a y vztah

$$y = -x + \alpha,$$

kde α je konstanta, je

$$y - E(y) = -x + \alpha + E(x) - \alpha = -[x - E(x)];$$

rovnice (9) zůstávají v platnosti. Dosadíme-li do (6), vychází

$$R = \frac{-E[x - E(x)]^2}{E[x - E(x)]^2} = -1.$$

Záporný koeficient korelace se vyskytuje v případech, kdy jedna z veličin x, y se zmenšuje, zvětšuje-li se druhá.

Třetí příklad. V osudí jsou koule tří barev; budiž p_i pravděpodobnost vytáhnouti kouli i-té barvy ($i = 1, 2, 3$),

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \tag{10}$$

Vykonáme n tahů kladouce po každém tahu kouli zpět do osudí. Budiž x počet vytažených koulí prvé barvy a y počet vytažených koulí druhé barvy. Abychom určili obecně koeficient korelace R mezi x a y (x a y mohou nabývati hodnot $0, 1, 2, 3, \ldots, n$), přiřaďme i-tému tahu veličiny u_i a v_i tak, že

$u_i = 1$, vytáhneme-li kouli první barvy v i-tém tahu,

$u_i = 0$, vytáhneme-li kouli druhé nebo třetí barvy v i-tém tahu,

$v_i = 1$, vytáhneme-li kouli druhé barvy v i-tém tahu,

$v_i = 0$, vytáhneme-li kouli první nebo třetí barvy v i-tém tahu.

Pak bude

$$x = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad y = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Tahu koule první barvy odpovídají: pravděpodobnost p_1 a hodnoty $u_i = 1$, $v_i = 0$.

Tahu koule druhé barvy odpovídají: pravděpodobnost p_2 a hodnoty $u_i = 0$, $v_i = 1$.

Tahu koule třetí barvy odpovídají: pravděpodobnost p_3 a hodnoty $u_i = 0$, $v_i = 0$.

Případ $u_i = 1$ a $v_i = 1$ není možný. Na základě těchto dat vypočítáme střední hodnoty veličin u_i a v_i pro i-tý tah:

$$E(u_i) = p_1, \quad E(v_i) = p_2, \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Poněvadž pokusy jsou nezávislé jeden na druhém, je pro $i \neq$ $\neq k$

$$E[(u_i - p_1)(u_k - p_1)] = E(u_i - p_1) \,.\, E(u_k - p_1) = 0. \quad (11)$$

Dále je $E(x) = np_1$, $E(y) = np_2$, $E[x - E(x)] = 0$,

$$E[y - E(y)] = 0,$$

$$\begin{aligned} E(x^2) - [E(x)]^2 &= E[x - E(x)]^2 = E[x - np_1]^2 = \\ &= E[u_1 - p_1 + u_2 - p_1 + \ldots + u_n - p_1]^2 = n\, E[u_i - p_1]^2 = \\ &= n[(1 - p_1^2)\, p_1 + p_1^2(1 - p_1)] = np_1(1 - p_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Podobně se odůvodní, že

$$\begin{aligned} E(y^2) - [E(y)]^2 = E[y - E(y)]^2 &= n\, E[v_i - p_2]^2 = \\ &= np_2(1 - p_2). \end{aligned} \quad (12a)$$

Pokud je $i \neq k$, je

$$E[(u_i - p_1)(v_k - p_2)] = E(u_i - p_1) \,.\, E(v_k - p_2) = 0; \quad (13)$$

střední hodnota součinu $(u_i - p_1)(v_i - p_2)$ rovná se součtu tří členů, které odpovídají po řadě třem shora uvedeným případům:

$$u_i = 1,\ v_i = 0;\ u_i = 0,\ v_i = 1;\ u_i = 0,\ v_i = 0$$

s příslušnými pravděpodobnostmi p_1, p_2, p_3. Je tedy vzhledem k (10)

$$\begin{aligned} E[(u_i - p_1)(v_i - p_2)] &= -(1 - p_1)\, p_2 p_1 - p_1(1 - p_2)\, p_2 + \\ &+ p_1 p_2(1 - p_1 - p_2) = -p_1 p_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Z rovnic (11), (12), (12a) a (13) následuje, že

$$\begin{aligned} &E\{[x - E(x)][y - E(y)]\} = \\ &= E\{[u_1 - p_1 + u_2 - p_1 + \ldots + u_n - p_1] \,. \\ &\quad . [v_1 - p_2 + v_2 - p_2 + \ldots + v_n - p_2]\} = \\ &= -np_1 p_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Dosaďme do (6) příslušné výrazy podle (12), (12a) a (15); vychází

$$R = -\frac{p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)\,p_2(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(p_1+p_3)(p_2+p_3)}}.$$

Kdyby nebylo koulí třetí barvy, bylo by $p_3 = 0$, $x + y = n$; y by bylo zcela určitou funkcí proměnné x a koeficient korelace R by byl roven -1. Je-li p_3 veličina malá proti p_1 a p_2 (je-li tedy koulí třetí barvy velmi málo), platí rovnice $x + y = n$ jen přibližně, koeficient R se liší málo od -1. Jsou-li naopak p_1 a p_2 čísla malá proti p_3 (v osudí je jen málo koulí první a druhé barvy, převládají koule třetí barvy), je R přibližně rovno nule; mezi x a y není určitého vztahu, tahy koulí první a druhé barvy jsou vzácné a nezávislé jedny na druhých.

55. Empirické stanovení koeficientu korelace. V odst. 54a jsme předpokládali, že jsou známy pravděpodobnosti $P(x_i, y_k)$, ze kterých jsme odvodili další pravděpodobnosti pro výskyt znaků x_i resp. y_k a pak koeficient korelace R. V empirických problémech nejsou však dány přímo pravděpodobnosti $P(x_i, y_k)$, nýbrž statistická data o výskytu znaků, které sestavujeme v t. zv. *korelační tabulku*. Budiž n_{ik} počet případů, kdy první proměnná x má hodnotu x_i a kdy zároveň druhá veličina y má hodnotu y_k; $i = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ Veličiny n_{ik} jsou dány; považujeme-li i za index řádku a k za index sloupce, napíšeme n_{ik} do korelační tabulky na místo, kde se i-tý řádek protíná s k-tým sloupcem. Empirické hodnoty pravděpodobností čárkovanými označíme písmeny. Empirická pravděpodobnost $P'(x_i, y_k)$, že $x = x_i$ a že $y = y_k$, je dána vzorcem

$$P'(x_i, y_k) = \frac{n_{ik}}{\sum\limits_i \sum\limits_k n_{ik}}.$$

Dále odvodíme z korelační tabulky, užívajíce označení obdobného tomu, které jsme zavedli v odst. 54a, tyto empirické pravděpodobnosti.

Pravděpodobnost $P'(x_i)$, že $x = x_i$, je rovna

$$\frac{\sum_k n_{ik}}{\sum_i \sum_k n_{ik}}.$$

Pravděpodobnost $P'(y_k)$, že $y = y_k$, je rovna

$$\frac{\sum_i n_{ik}}{\sum_i \sum_k n_{ik}}.$$

Pravděpodobnost $P_{y_k}'(x_i)$, že $x = x_i$, je-li dáno, že $y = y_k$, je rovna

$$\frac{n_{ik}}{\sum_i n_{ik}}.$$

Pravděpodobnost $P'_{x_i}(y_k)$, že $y = y_k$, je-li dáno, že $x = x_i$, je rovna

$$\frac{n_{ik}}{\sum_k n_{ik}}.$$

Příslušné empirické střední hodnoty součinu xy veličin x a y a jejich čtverců jsou

$$E'(xy) = \frac{\sum_i \sum_k n_{ik} x_i y_k}{\sum_i \sum_k n_{ik}}, \quad E'(x) = \frac{\sum_i \sum_k n_{ik} x_i}{\sum_i \sum_k n_{ik}}, \quad E'(y) = \frac{\sum_i \sum_k n_{ik} y_k}{\sum_i \sum_k n_{ik}},$$

$$E'(x^2) = \frac{\sum_i \sum_k n_{ik} x_i^2}{\sum_i \sum_k n_{ik}}, \quad E'(y^2) = \frac{\sum_i \sum_k n_{ik} y_k^2}{\sum_i \sum_k n_{ik}}.$$

Empirický koeficient korelace R' se vypočte z těchto empirických hodnot právě tak, jako jsme vypočetli theoretický koeficient korelace R na základě theoretických středních hodnot podle vzorce (6), odst. 54. Je tedy

$$R' = \frac{E'(xy) - E'(x) \,.\, E'(y)}{\sqrt{\{E'(x^2) - [E'(x)]^2\}\{E'(y^2) - [E'(y)]^2\}}} \tag{1}$$

nebo, dosadíme-li podle předešlých vzorců za $E'(xy)$, $E'(x)$, $E'(y)$, ...,

$$R' =$$

$$= \frac{N \,.\, \sum_i\sum_k n_{ik}x_iy_k - (\sum_i\sum_k n_{ik}x_i)(\sum_i\sum_k n_{ik}y_k)}{\sqrt{[N \,.\, \sum_i\sum_k n_{ik}x_i^2 - (\sum_i\sum_k n_{ik}x_i)^2][N \,.\, \sum_i\sum_k n_{ik}y_k^2 - (\sum_i\sum_k n_{ik}y_k)]}}, \tag{2}$$

kde jsme položili pro stručnost

$$N = \sum_i\sum_k n_{ik}.$$

Jsou-li tedy dány: korelační tabulka, t. j. hodnoty n_{ik}, ($i = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$), a hodnoty $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$, vypočte se empirická hodnota koeficientu korelace podle (2).*)

Poznámka. V odst. 54c jsme viděli, že zvláštní druhy závislosti mezi x a y odpovídají různým hodnotám koeficientu R. Je-li naopak dána empirická korelační tabulka, určíme z ní podle (2) empirický koeficient korelace R'. Ptáme se pak, jaký závěr možno učiniti z číselné hodnoty R' na povahu vztahu mezi x a y. Odpověď zní, že jediná číselná hodnota R' nestačí k tomu, aby charakterisovala závislost mezi x a y po všech stránkách.

56. Kvalitativní koeficient korelace. Podle definice (7) odst. 54 je koeficient korelace R funkcí veličin $x_1, x_2, \ldots$ a $y_1, y_2, \ldots$, při čemž pravděpodobnosti $P(x_i, y_k)$, $P(x_i)$ a $P(y_k)$ mají úlohu koeficientů. Naskytuje se otázka, může-li R býti veli-

*) Číselné příklady korelačních tabulek uvádí *S. Kohn* ve spise Základy teorie statistické metody (Praha 1929) na str. 297. Viz též *J. Kaucký*: Úvod do počtu pravděpodobnosti a teorie statistiky, str. 49, Praha 1934. *J. Kaucký-J. Novák-Vl. List*: Užití korelačního počtu, Praha 1948.

čina nezávislá na proměnných $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ Vyšetříme tuto otázku pro případ, že veličina x může nabýti jen dvou různých hodnot x_1, x_2 a veličina y také jen dvou hodnot y_1, y_2. Pro jednoduchost volíme o něco stručnější označení pravděpodobností; zavedeme na místo znaků definovaných v odst. 54a,

$$p_{ik} = P(x_i, y_k),\ i = 1, 2,\ k = 1, 2;$$
$$p_i = P(x_i),\ i = 1, 2;\ p_k' = P(y_k),\ k = 1, 2.$$

Pak bude

$$E(xy) = p_{11}x_1y_1 + p_{12}x_1y_2 + p_{21}x_2y_1 + p_{22}x_2y_2,$$
$$E(x) = p_1x_1 + p_2x_2,\ E(y) = p_1'y_1 + p_2'y_2,$$
$$E(x^2) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2,\ E(y^2) = p_1'y_1^2 + p_2'y_2^2,$$

při čemž

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_{11} + p_{12},\ p_2 = p_{21} + p_{22},\ p_1 + p_2 = 1, \\ p_1' &= p_{11} + p_{21},\ p_2' = p_{12} + p_{22},\ p_1' + p_2' = 1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Koeficient korelace se pak vyjádří podle (7), odst. 54 takto:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} p_{ik}x_ix_k - (\sum_{i=1}^{2} p_ix_i)(\sum_{k=1}^{2} p_k'y_k)}{\sqrt{[\sum_{i=1}^{2} p_ix_i^2 - (\sum_{k=1}^{2} p_kx_k)^2][\sum_{i=1}^{2} p_i'y_i^2 - (\sum_{k=1}^{2} p_k'y_k)^2]}}. \quad (2)$$

V čitateli je mnohočlen druhého stupně vzhledem k proměnným x_i a y_k. Ve jmenovateli je odmocnina ze součinu dvou mnohočlenů proměnných x_i resp. y_k. Proto nemůže býti R obecně veličinou nezávislou na proměnných x_1, x_2, y_1 a y_2. Případ nezávislosti může nastati jen tehdy, redukuje-li se výraz pod odmocninou jmenovatele na druhou mocninu mnohočlenu stojícího v čitateli násobenou nějakou konstantou. Aby tento případ nastal, je předně nutno položiti

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ p_1' = p_1,\ p_2' = p_2;$$

za tohoto předpokladu přejde (2) ve formuli

$$R =$$
$$= \frac{(p_{11} - p_1^2)\, x_1^2 + (p_{12} + p_{21} - 2p_1p_2)\, x_1x_2 + (p_{22} - p_2^2)\, x_2^2}{(p_1 - p_1^2)\, x_1^2 - 2p_1p_2x_1x_2 + (p_2 - p_2^2)\, x_2^2}. \tag{3}$$

R je tedy funkcí poměru $x_2 : x_1$. Aby R nezávisel vůbec na hodnotě tohoto poměru, je nutno a stačí položiti

$$\frac{p_{11} - p_1^2}{p_1 - p_1^2} = \frac{p_{12} + p_{21} - 2p_1p_2}{-2p_1p_2} = \frac{p_{22} - p_2^2}{p_2 - p_2^2} = R. \tag{4}$$

Jsou-li splněny tyto rovnice, mají mnohočleny druhého stupně vyskytující se v čitateli a ve jmenovateli výrazu (3) úměrné koeficienty; poměr souhlasných koeficientů je roven konstantě R, která nezávisí na hodnotách x_1, x_2.

Rovnicím (4) vyhoví se takto: Volíme nejprve p_1, p_2 a R tak, aby

$$p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ p_1 + p_2 = 1,\ -1 \leqq R \leqq +1; \tag{5}$$

pak ustanovíme p_{ik} rovnicemi:

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_1^2 + R(p_1 - p_1^2), \\ p_{12} &= p_{21} = p_1p_2(1 - R), \\ p_{22} &= p_2^2 + R(p_2 - p_2^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Jsou-li splněny rovnice (5) a (6), je vyhověno i prvním dvěma rovnicím (1). Neboť

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{12} &= p_1^2 + p_1p_2 + R(p_1 - p_1^2 - p_1p_2) = \\ &= p_1 + R[p_1 - p_1^2 - p_1(1 - p_1)] = p_1 \end{aligned}$$

a podobně se odůvodní, že

$$p_{21} + p_{22} = p_2.$$

Výsledek shrneme takto:

Budiž R koeficient korelace mezi dvěma veličinami x, y, z nichž první nabývá hodnot x_1, x_2 a druhá y_1, y_2. Platí-li v označení zavedeném v tomto odstavci

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ p_1' = p_1,\ p_2' = p_2$$

a jsou-li splněny podmínky (5) *a* (6), *je R veličina nezávislá na* x_1 *a na* x_2.

Veličina R se pak nazývá *kvalitativní koeficient korelace.* V případě, že x a y nabývají více hodnot než dvou, vyskytují se také kvalitativní koeficienty korelace.

Poznámka. Zjednodušení úlohy, jehož bylo docíleno druhou rovnicí (6), totiž předpoklad, že $p_{12} = p_{21}$, odpovídá případu, kdy běží o koeficient korelace mezi veličinami $x^{(m)}$ a $x^{(n)}$ přiřaděnými dvěma pokusům v případě stacionárního řetězu (viz odst. 82c).

KAPITOLA ŠESTÁ

MARKOVŮV JEDNODUCHÝ ŘETĚZ O DVOU EVENTUALITÁCH

57. Pojem Markovova řetězu. V druhé kapitole bylo pojednáno o pravděpodobnostech vztahujících se k opětovaným pokusům. Při tom se předpokládalo, že je určitá konstantní pravděpodobnost p, že se pokus zdaří, stejná pro všechny pokusy a nezávislá na tom, zda se pokusy, provedené před pokusem právě uvažovaném, zdařily či nezdařily. Nyní vezmeme v úvahu pravděpodobnosti vztahující se k opětovaným pokusům předpokládajíce, že pravděpodobnost, se kterou se vyskytne nějaký zjev jako výsledek určitého pokusu, závisí na výsledcích pokusů předcházejících.

Budiž $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}, \ldots, E^{(n)}, \ldots$ řada zjevů, z nichž první je výsledek prvního pokusu, druhý je výsledek druhého pokusu atd. *Pravíme, že pravděpodobnosti, se kterými se vyskytují zjevy $E^{(n)}$, jsou spojeny v Markovův řetěz, závisí-li pravděpodobnost, že n-tý pokus dá výsledek $E^{(n)}$ na tom, jaké výsledky daly pokusy předcházející.*

Závislosti mezi pravděpodobnostmi výsledků, které může míti n-tý pokus, a mezi výsledky, které daly pokusy předcházející, mohou býti různého druhu. V odst. 58 podáme přehled rozmanitých úloh o řetězech, kterými se budeme zabývati v kap. VI, VII a VIII.

58. Přehled úloh o Markovových řetězech. a) V kap. VI budeme jednati o *jednoduchém Markovově řetězu se dvěma eventualitami a s konstantními pravděpodobnostmi přechodu.* Každý z pokusů má jen dvě eventuality: buď se podaří, nebo se nepodaří. Řetěz je jednoduchý; to znamená, že, je-li znám výsledek n-tého pokusu, je tím určena jednoznačně pravděpodobnost, že se $(n + 1)$-tý pokus zdaří nezávisle na tom, jak dopadly pokusy předcházející před n-tým. Řečená pravděpodobnost je konstantní, nezávisí na pořadovém čísle pokusu.*) Veli-

*) Místo řetěz s konstantními pravděpodobnostmi přechodu se říká též *homogenní řetěz.*

činy definující takový řetěz a příklad, jak se řetěz uskuteční, jsou uvedeny v odst. 59. Pravděpodobnost, že n-tý pokus se podaří, závisí obecně na n; za určitých předpokladů má limitu, roste-li n do nekonečna (odst. 60), dodatky k této větě v odst. 61 a 62. Podobně jako v případě nezávislých pokusů zavádí se zde pro řadu n pokusů střední hodnota počtu m zdařených pokusů (63); střední hodnota čtverce úchylky, dělená počtem pokusů, má za určitých předpokladů limitu, roste-li n do nekonečna (64). Ve zvláštním případě může býti pravděpodobnost, že se n-tý pokus zdaří, nezávislá na n (65). Srovnání výsledků s obdobnými platnými pro nezávislé pokusy (66). Odst. 67—69 jednají o rozmanitých aplikacích. V odst. 70 se jedná o t. zv. charakteristické rovnici přiřaděné danému řetězu.

b) Kap. VII začíná definicí jednoduchého Markovova řetězu o libovolném (konečném) počtu eventualit (odst. 71). K rozboru některých úloh hodí se zavésti proměnnou veličinu závislou na výsledku pokusu (72). Geometrické znázornění řetězu (73). Na základě vlastností středních hodnot veličin vztahujících se k řetězu (74) dokazuje se věta o limitě pravděpodobnosti (75) s dodatky (76, 77). Kořeny charakteristické rovnice (78) slouží v některých případech k výhodnému vyjádření pravděpodobností přechodu (79). Po přehledu method k výpočtu disperse (80) je určena disperse pro libovolný počet n pokusů (81). Odst. 82 jedná o stacionárním řetězu.

c) Užití řetězů je objasněno v kap. VIII, kde jsou rozebírány úlohy o míchání karet (odst. 83, 84) a úloha o tazích ze dvou osudí se záměnou koulí (86—87); v této poslední úloze vyskytuje se případ zjevů $F_1, F_2, F_3, \ldots$ jež *netvoří* řetěz, jichž pravděpodobnosti jsou po řadě závislé na zjevech $E_1, E_2, E_3, \ldots$, které *tvoří* řetěz (86). Zákon velkých čísel platí též v případě řetězů (89). V odst. 41 jsme pojednali o regularisaci v případě geometrických pravděpodobností. V případě řetězů nastává regularisace, t. j. určitá pravděpodobnost se blíží limitě, vzrůstá-li počet pokusů do nekonečna (90, 91).

59. Jednoduchý řetěz se dvěma eventualitami a konstantními pravděpodobnostmi přechodu. a) Jsou dána dvě osudí, jedno bílé, druhé černé. V každém z nich jsou bílé a černé koule. Je tedy určitá pravděpodobnost p_{11}, že z bílého osudí vytáhneme kouli bílou a pravděpodobnost p_{12}, že z něho vytáhneme černou; platí

$$p_{11} + p_{12} = 1. \tag{1}$$

Podobně pravděpodobnosti p_{21} a p_{22}, že z černého osudí vytáhneme bílou resp. černou kouli, vyhovují rovnici

$$p_{21} + p_{22} = 1. \tag{1a}$$

Předpokládáme, že konáme postupně tahy za těchto podmínek: vytáhneme-li při n-tém tahu kouli bílou, koná se $(n + 1)$-tý tah z osudí bílého; vytáhneme-li při n-tém tahu kouli černou, koná se $(n + 1)$-tý tah z osudí černého.*) Pravděpodobnosti, že při 1., 2., 3., ... tahu vyjde na př. bílá koule, jsou spojeny v *jednoduchý Markovův řetěz*; p_{ik} jsou *pravděpodobnosti přechodu*, $(i, k = 1, 2)$. Aby byl řetěz úplně určen, musíme nějak určiti, ze kterého osudí se koná první tah. Toto určení se může provésti dvojím způsobem:

Buď je přímo dáno, ze kterého osudí se koná první tah, nebo jsou dány jen pravděpodobnosti $p_1^{(0)}$ a $p_2^{(0)}$, že první tah se koná z osudí bílého resp. černého; rozhodnouti o tom, ze kterého osudí se skutečně táhne, závisí na výsledku *předběžného pokusu*; uvedené pravděpodobnosti splňují podmínku

$$p_1^{(0)} + p_2^{(0)} = 1. \tag{2}$$

Není-li tedy dáno, ze kterého osudí se koná první tah, je pravděpodobnost $p_1^{(1)}$, že při prvním tahu vyjde bílá koule, rovna úhrnné pravděpodobnosti složené ze dvou sčítanců: buď se koná tah z bílého a vyjde bílá, nebo se koná z černého a vyjde bílá, tedy

$$p_1^{(1)} = p_1^{(0)} \cdot p_{11} + p_2^{(0)} \cdot p_{21}. \tag{3}$$

b) Za předpokladu, že pravděpodobnosti $p_1^{(0)}$ a $p_2^{(0)}$ jsou dány, budiž $p_1^{(n)}$ *prostá pravděpodobnost, že při n-tém tahu vyjde bílá koule a* $p_2^{(n)}$, že při n-tém tahu vyjde černá. Srovnáváme-li $p_k^{(n+1)}$ s $p_k^{(n)}$, $(k = 1, 2)$, dostaneme podle věty o úhrnné pravděpodobnosti

$$p_k^{(n+1)} = p_1^{(n)} \cdot p_{1k} + p_2^{(n)} \cdot p_{2k}, \; k = 1, 2. \tag{3a}$$

*) Zde i v dalším stále předpokládáme, že vytažená koule se vždy vloží zpět do osudí, z něhož byla vytažena; počet bílých koulí i počet černých zůstává v jednom i ve druhém osudí beze změny.

Napíšeme-li tuto rovnici postupně*) pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, vypočteme po řadě veličiny $p_k^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Vychází

$$p_k^{(1)} = p_1^{(0)} \cdot p_{1k} + p_2^{(0)} p_{2k}, \quad k = 1, 2,$$

což je zobecněná rovnice (3), a dále

$$p_k^{(2)} = p_1^{(0)}(p_{11}p_{1k} + p_{12}p_{2k}) + p_2^{(0)}(p_{21}p_{1k} + p_{22}p_{2k}), \quad \ldots$$

$$p_k^{(n)} = p_1^{(0)} \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \ldots \sum_{\omega=1}^{2} p_{1\alpha} p_{\alpha\beta} p_{\beta\gamma} \ldots p_{\omega k} +$$

$$+ p_2^{(0)} \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \ldots \sum_{\omega=1}^{2} p_{2\alpha} p_{\alpha\beta} p_{\beta\gamma} \ldots p_{\omega k}, \quad k = 1, 2. \tag{4}$$

Každý z obou součtů je $(n — 1)$-násobný; sčítá se podle $n — 1$ indexů $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$.

c) Koeficienty při $p_1^{(0)}$ a $p_2^{(0)}$ v rovnici (4) jsou

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \ldots \sum_{\omega=1}^{2} p_{i\alpha} p_{\alpha\beta} \ldots p_{\omega k}, \quad P_{ik}^{(1)} = p_{ik}, \tag{5}$$

$$i, k = 1, 2; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$P_{ik}^{(n)}$ je pravděpodobnost, že, konal-li se první tah z i-tého osudí ($i = 1$ odpovídá bílému, $i = 2$ černému), vyšla při n-tém tahu koule barvy k ($k = 1$ odpovídá bílé, $k = 2$ černé). Význam rovnice (5) pro $P_{ik}^{(n)}$ objasní se takto: $p_{i\alpha} p_{\alpha\beta} \ldots p_{\omega k}$ je složená pravděpodobnost, že při prvním, druhém, ..., n-tém tahu byly vytaženy postupně koule barev $\alpha, \beta, \ldots, \omega, k$; sečteme-li tyto složené pravděpodobnosti pro všechny možné hodnoty indexů $\alpha, \beta, \ldots, \omega$, dostaneme úhrnnou pravděpodobnost $P_{ik}^{(n)}$, že při n-tém tahu vyjde koule barvy k.

Obecněji ukazuje rovnice (5), že $P_{ik}^{(n)}$ má tento význam: je to *pravděpodobnost, že při* $(m + n)$-*tém tahu vyjde koule barvy* k, vyšla-li při m-tém tahu koule barvy i.

Místo rovnice (4) pišme stručněji

---

*) Index 0 platí pro *předběžný pokus.*

$$p_k^{(n)} = p_1^{(0)} P_{1k}^{(n)} + p_2^{(0)} P_{2k}^{(n)}. \tag{6}$$

Z definice veličin $P_{ik}^{(n)}$ plyne přímo, že

$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{2} P_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)}, \quad i, k = 1, 2, \tag{7}$$

kde m a n jsou libovolná kladná celá čísla; sečítajíce v rovnici (5) postupně podle indexů $k, \omega, \ldots, \beta, \alpha$ vždy od 1 do 2, najdeme s ohledem na (1) a (1a), že

$$\sum_{k=1}^{2} P_{ik}^{(n)} = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Z rovnic (2), (6) a (8) plyne vztah

$$p_1^{(n)} + p_2^{(n)} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

který ostatně je přímým důsledkem definice veličin $p_i^{(n)}$. Neboť rovnice (9) vyjadřuje větu, že při n-tém tahu je jisto, že bude tažena buď bílá nebo černá koule.

d) Obecný pojem jednoduchého řetězu se dvěma eventualitami a s konstantními pravděpodobnostmi přechodu p_{ik} stanoví se takto: Konáme postupně pokusy takové, že každý z nich dá za výsledek jeden ze dvou zjevů E_1, E_2. Je-li známo, že n-tý pokus dal výsledek E_i, je p_{ik} pravděpodobnost, že $(n + 1)$-tý pokus dá výsledek E_k, $(k = 1, 2)$; pravděpodobnosti p_{ik} nejsou závislé na tom, jak dopadly pokusy $(n—1)$-tý, $(n — 2)$-tý, ... Pravděpodobnosti vyhovují rovnicím (1) a (1a), jež shrneme v jedinou

$$p_{i1} + p_{i2} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Rovnice (5) určuje pravděpodobnost $P_{ik}^{(n)}$, že zjev E_k se vyskytne jakožto výsledek n-tého pokusu, dal-li „předběžný pokus“, který si myslíme vykonaný bezprostředně před prvním, zjev E_i. Veličiny $P_{ik}^{(n)}$ vyhovují rovnicím (7) a (8). Jsou-li $p_1^{(0)}$ a $p_2^{(0)}$ pravděpodobnosti, že E_1 resp. E_2 se vyskytne jakožto výsledek předběžného pokusu, je pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že n-tý pokus dá za výsledek E_k, určena rovnicí (6).

60. Markovova věta o limitě pravděpodobnosti. $P_{ik}^{(n)}$. a) Předpokládáme, že všechny pravděpodobnosti p_{ik} jsou kladné:

$$0 < p_{ik} < 1, \; i, k = 1, 2 \tag{1}$$

a že jsou splněny rovnice (1) a (1a), odst. 60, že tedy

$$p_{i1} + p_{i2} = 1, \; i = 1, 2. \tag{2}$$

Položme

$$\delta = p_{11} - p_{21}.$$

Z rovnice (3a) a (9), odst. 59 plyne pro $k = 1$, že

$$p_1^{(n+1)} = p_{21} + \delta \, . \, p_1^{(n)},$$

anebo, upravíme-li,

$$p_1^{(n+1)} - \frac{p_{21}}{1 - \delta} = \delta \left(p_1^{(n)} - \frac{p_{21}}{1 - \delta}\right).$$

Dosazujme do této rovnice na místo n postupně 0, 1, 2, ..., $n - 1$ a znásobme všechny tak utvořené rovnice. Vychází

$$p_1^{(n)} - \frac{p_{21}}{1 - \delta} = \delta^n \left(p_1^{(0)} - \frac{p_{21}}{1 - \delta}\right). \tag{3}$$

Poněvadž vzhledem k (1) je $|\delta| < 1$, máme pro $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} p_1^{(n)} = \frac{p_{21}}{1 - \delta}. \tag{3a}$$

Stejným postupem dostaneme z rovnic (3a) a (9), odst. 60 pro $k = 2$

$$p_2^{(n+1)} = p_{12} + \delta \, . \, p_2^{(n)}, \; \delta = p_{22} - p_{12} = p_{11} - p_{21},$$

$$p_2^{(n)} - \frac{p_{12}}{1 - \delta} = \delta^n \, . \left(p_2^{(0)} - \frac{p_{12}}{1 - \delta}\right)$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} p_2^{(n)} = \frac{p_{12}}{1-\delta}. \tag{3b}$$

Limitní hodnoty (3a) a (3b) označíme P_1, P_2. Je tedy

$$P_1 = \frac{p_{21}}{1-\delta}, \; P_2 = \frac{p_{12}}{1-\delta}, \; P_1 + P_2 = \frac{p_{21} + 1 - p_{11}}{1 - p_{11} + p_{21}} = 1. \tag{4}$$

Rovnice (3a) a (3b) vyjadřují *Markovovu větu o limitě pravděpodobnosti*, kterou vyslovíme, majíce na mysli tahy ze dvou osudí podle předpokladů odst. 59a, takto:

Prostá pravděpodobnost, že při n-tém pokuse bude vytažena koule bílá (černá), má, roste-li n do nekonečna, limitu P_1 (P_2) určenou rovnicí (4) *a nezávislou na počátečních pravděpodobnostech $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$* (jinými slovy: nezávislou na tom, konal-li se první tah z osudí bílého nebo z černého).

Kdybychom se drželi abstraktního pojetí řetězu podle odst. 59d, zněla by věta takto:

Prostá pravděpodobnost, že n-tý pokus má za výsledek zjev E_k, ($k = 1, 2$), *má pro $n \to \infty$ limitu P_k.*

b) Vyšetřme nyní limitní hodnoty veličin $P_{ik}^{(n)}$ pro $n \to \infty$. Dosaďme do rovnice (6), odst. 59

$$p_1^{(0)} = 1, \; p_2^{(0)} = 0.$$

Vychází

$$p_k^{(n)} = P_{1k}^{(n)}$$

a tedy podle (3), pro $k = 1$

$$P_{11}^{(n)} = \frac{p_{21}}{1-\delta} + \delta^n \left(1 - \frac{p_{21}}{1-\delta}\right) = \delta^n + P_1(1 - \delta^n). \tag{5}$$

Dosaďme nyní do (6), odst. 59

$$p_1^{(0)} = 0, \; p_2^{(0)} = 1.$$

Pak bude

$$p_k^{(n)} = P_{2k}^{(n)}$$

a rovnice (3) dá pro $k = 1$

$$P_{21}^{(n)} = \frac{p_{21}}{1-\delta} - \delta^n \frac{p_{21}}{1-\delta} = P_1(1-\delta^n). \tag{5a}$$

Z rovnic (5) a (5a) plyne, že

$$P_{11}^{(n)} - P_{21}^{(n)} = \delta^n \tag{6}$$

a dále

$$\lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{21}^{(n)} = P_1. \tag{7}$$

Poněvadž pak podle (8), odst. 59 a podle (4), odst. 60 je

$$P_{11}^{(n)} + P_{12}^{(n)} = 1,\ P_{21}^{(n)} + P_{22}^{(n)} = 1,\ P_1 + P_2 = 1, \tag{5b}$$

platí též

$$\lim_{n\to\infty} P_{12}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{22}^{(n)} = P_2. \tag{7a}$$

Považujeme rovnice (7) a (7a) za jiný výraz shora uvedené Markovovy věty. Jejich smysl je: *Pravděpodobnost $P_{ik}^{(n)}$, že n-tý pokus dá výsledek E_k, dal-li předběžný (nultý) pokus výsledek E_i, má za limitu P_k, ($k = 1, 2$) nezávislou na i.*

Limity P_1, P_2 jsou určeny rovnicemi (4).

61. Dodatek k větě o limitě pravděpodobnosti. Vyhovují-li pravděpodobnosti p_{ik} nejen podmínkám (1) a (2), odst. 60, nýbrž také podmínkám

$$p_{1k} + p_{2k} = 1,\ k = 1, 2, \tag{1}$$

je

$$1 = p_{11} + p_{12} = p_{11} + p_{21} = p_{21} + p_{22} = p_{21} + p_{11}$$

a tedy

$$p_{12} = p_{21},\ p_{11} = p_{22}. \tag{2}$$

Z toho plyne podle (4), odst. 60, že

$$P_1 = \frac{p_{21}}{1-\delta} = \frac{1-p_{11}}{1-p_{11}+p_{21}} = \frac{1-p_{11}}{2(1-p_{11})} = \tfrac{1}{2} = P_2. \quad (3)$$

Naopak plyne z rovnosti $P_2 = P_1$, že $p_{12} = p_{21}$ (srv. rovnice (4), odst. 60), z čehož následuje platnost rovnic (1).

Jsou-li splněny rovnice (1) *a* (2), *odst. 60, vyjadřují rovnice* (1) *nutnou a postačující podmínku pro to, aby limity P_1 a P_2 byly stejné.*

V případě dvou osudí (odst. 59a) mají podmínky (1) nebo z nich plynoucí důsledky tento význam: v bílém osudí je poměr počtu bílých koulí k počtu černých zrovna takový, jako je v černém osudí poměr černých k bílým. Po velmi velkém počtu tahů je pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli stejně veliká jako černou.

62. Zvláštní případ, kdy podmínky věty o limitě nejsou splněny. Předpoklad vyjádřený nerovnostmi (1), odst. 60 je podstatný pro platnost Markovovy věty o limitě. Kdyby na př.

$$p_{11} = 0,\ p_{22} = 0,\ p_{12} = p_{21} = 1, \quad (1)$$

zjevy E_1 a E_2 by se pravidelně střídaly; kdyby n-tý pokus vedl k E_1 (E_2), vedl by $(n+1)$-tý pokus k E_2 (E_1). Pravděpodobnosti $p_k^{(n)}$ a $P_{ik}^{(n)}$ by neměly limitu, rovnice (3a), (7) a (7a), odst. 60 by neplatily.

Vrátíme-li se k tahům ze dvou osudí (odst. 59a), mají podmínky (1) tento význam: V bílém osudí jsou jen černé koule, v černém jen bílé. Konáme-li n-tý tah z bílého (černého) osudí, koná se $(n+1)$-tý z černého (bílého). Kdyby se první tah konal z bílého, byla by pravděpodobnost $P_{11}^{(n)}$, že při n-tém tahu vyjde bílá koule, rovna nule pro liché n a rovna jedné pro sudé n.

63. Střední hodnota počtu zdařených pokusů. Vykonejme celkem n pokusů za předpokladů odst. 59d. Vyskytne-li se zjev E_1, pravíme, že se pokus zdařil; vyskytne-li se E_2, pravíme, že se pokus nezdařil. r-tému pokusu přiřadíme veličinu $x^{(r)}$;

zdaří-li se pokus, budiž $x^{(r)} = 1$, nezdaří-li se, budiž $x^{(r)} = 0$. Je-li v řadě n pokusů m pokusů zdařilých, je (jako v odst. 14b)

$$m = x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)}.$$

Budiž jako v odst. 59c $P_{ik}^{(s)}$ pravděpodobnost, že s-tý pokus bude míti výsledek E_k, dal-li předběžný (nultý) pokus výsledek E_i.

Pravděpodobnost, že se s-tý pokus zdaří, je tedy $P_{i1}^{(s)}$; střední hodnota veličiny $x^{(s)}$ je

$$E(x^{(s)}) = 1 \, . \, P_{i1}^{(s)} + 0 \, . \, (1 - P_{i1}^{(s)}) = P_{i1}^{(s)} \tag{2}$$

a střední hodnota počtu m zdařených pokusů je (pro $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} E(m) &= E(x^{(1)}) + E(x^{(2)}) + \dots + E(x^{(n)}) = \\ &= P_{i1}^{(1)} + P_{i1}^{(2)} + \dots + P_{i1}^{(n)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Předpokládáme, že jsou splněny podmínky (1), odst. 60. Podle (5) a (5a), odst. 60 je

$$P_{11}^{(s)} = \frac{p_{21}}{1 - \delta} + \frac{1 - p_{11}}{1 - \delta} \, . \, \delta^s,$$

$$P_{21}^{(s)} = \frac{p_{21}}{1 - \delta} - \frac{p_{21}}{1 - \delta} \, . \, \delta^s.$$

Hodnota $E(m)$ závisí tedy na indexu i, ale

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E(m)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{P_{i1}^{(1)} + P_{i1}^{(2)} + \dots + P_{i1}^{(n)}}{n} = P_1, \tag{4}$$

neboť podle (4) a (7), odst. 60 má $P_{i1}^{(n)}$ limitu P_1 pro $n \to \infty$. *Střední hodnota počtu podařených pokusů dělená celkovým počtem pokusů má pro $n \to \infty$ limitu P_1 nezávislou na výsledku předběžného pokusu.*

64. Markovova věta o limitě disperse. V případě nezávislých pokusů jsme dokázali — viz rovnici (1), odst. 15 — že střední hodnota druhé mocniny úchylky, totiž $(m - np)^2$, dělená počtem pokusů n, rovná se pro každou hodnotu čísla n výrazu

$p(1-p)$. V případě pokusů spojených v řetěz je výraz pro $E(m)$ (viz rovnici (3), odst. 63) složitější; vezmeme-li na místo p pravděpodobnost P_1, že n-tý pokus při nekonečně velikém n se podaří, vyjádří se střední hodnota druhé mocniny úchylky takto:

$$E(m-nP_1)^2 = E[\sum_{s=1}^{n}(x^{(s)}-P_1)]^2.$$

Veličina $x^{(s)}$ je zde definována jako v odst 62. Z toho plyne pro střední hodnotu výrazu $(m-nP_1)^2/n$, který se nazývá *disperse*, rovnice

$$E\,\frac{(m-nP_1)^2}{n} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}E(x^{(s)}-P_1)^2}{n} +$$

$$+\;2\,\frac{\sum\limits_{r=1}^{n-1}\sum\limits_{s=1}^{n-r}E[(x^{(r)}-P_1)(x^{(r+s)}-P_1)]}{n}. \qquad (5)$$

První člen napravo v této rovnici se snadno vypočte. Uvažme, že $x^{(s)}$ má hodnotu rovnou jedné nebo nule dle toho, vyjde-li při s-tém tahu koule bílá nebo černá; dále je (za předpokladu, že první tah se děje z i-tého osudí)

$P_{i1}^{(s)}$ pravděpodobnost rovnosti $x^{(s)}=1$,

$P_{i2}^{(s)}$ pravděpodobnost rovnosti $x^{(s)}=0$.

Z toho plyne, že

$$E(x^{(s)}-P_1)^2 = P_{i1}^{(s)}(1-P_1)^2 + P_{i2}^{(s)}P_1^2. \qquad (6)$$

K výpočtu druhého členu na pravé straně rovnice (5) poznamenejme (viz odst. 59c):

$P_{i1}^{(r)}P_{11}^{(s)}$ je pravděpodobnost, že platí obě rovnice

$$x^{(r)}=1,\ x^{(r+s)}=1,$$

$P_{i1}^{(r)}P_{12}^{(s)}$ je pravděpodobnost, že platí obě rovnice

$$x^{(r)}=1,\ x^{(r+s)}=0,$$

$P_{i2}^{(r)}P_{21}^{(s)}$ je pravděpodobnost, že platí obě rovnice

$$x^{(r)} = 0,\ x^{(r+s)} = 1,$$

$P_{i2}^{(r)}P_{22}^{(s)}$ je pravděpodobnost, že platí obě rovnice

$$x^{(r)} = 0,\ x^{(r+s)} = 0.$$

Je tedy
$$E[(x^{(r)} - P_1)(x^{(r+s)} - P_1)] =$$
$$= P_{i1}^{(r)}P_{11}^{(s)}(1 - P_1)^2 + P_{i1}^{(r)}P_{12}^{(s)}(1 - P_1)\,.\,(- P_1) +$$
$$+ P_{i2}^{(r)}P_{21}^{(s)}\,.\,(- P_1)(1 - P_1) + P_{i2}^{(r)}P_{22}^{(s)}\,.\,P_1^2. \qquad (7)$$

Dosaďme podle (6) a (7) příslušné výrazy do pravé strany rovnice (5), a na místo $P_{ik}^{(n)}$ dosaďme podle (5) a (5a), odst. 60 přihlížejíce k prvním dvěma rovnicím (5b), odst. 60. Pravá strana rovnice (5) objeví se nám jako výraz složený z několika geometrických řad; vychází

$$E\,\frac{(m - nP_1)^2}{n} = P_1(1 - P_1)\left[\frac{1 + \delta}{1 - \delta} - \frac{2}{n}\,\frac{\delta(1 - \delta^n)}{(1 - \delta)^2}\right] +$$
$$+ \frac{(1 - 2P_1)(2 - i - P_1)}{n(\delta - 1)}\left[(2n - 1)\delta^{n+1} - \right.$$
$$\left. - \delta - 2\,\frac{\delta^2 - \delta^{n+1}}{1 - \delta}\right]; \qquad (8)$$
$$i = 1, 2.$$

To je *obecná formule pro střední hodnotu čtverce úchylky dělenou počtem n pokusů* neboli pro dispersi. Předpokládá se, že p_{jk}, $(j, k = 1, 2)$ jsou kladné a dále

$$\sum_{k=1}^{2} p_{jk} = 1,\ j = 1, 2;\ P_1 = \frac{p_{21}}{1 - \delta},\ \ \delta = p_{11} - p_{21}.$$

Index i se vztahuje k výsledkům předběžného pokusu. V případě, že pokusy nejsou spojeny v řetěz, nýbrž že jsou nezávislé, platí

$$p_{11} = p_{21} = P_1 = p,\ \delta = 0;$$

rovnice (8) přechází v dříve odvozený vzorec (1), odst. 15. Uveďme tyto speciální případy formule (8):

a) Roste-li n do nekonečna, je $\lim \delta^n = 0$ poněvadž $|\delta| < 1$, a formule (8) přechází v

$$\lim_{n\to\infty} E \frac{(m - nP_1)^2}{n} = P_1(1 - P_1)\frac{1+\delta}{1-\delta}, \tag{9}$$

což je *Markovova věta o limitě disperse*.

b) Je-li

$$p_{12} = p_{21},\ p_{11} = p_{22}$$

a tedy

$$\delta = 2p_{11} - 1,\ 1 + \delta = 2p_{11},\ 1 - \delta = 2(1 - p_{11}),$$
$$P_1 = \tfrac{1}{2},$$

dá rovnice (8) pro libovolné celé n

$$E\frac{(m - \frac{1}{2}n)^2}{n} = \frac{1}{4}\frac{p_{11}}{1 - p_{11}} + \frac{1 - 2p_{11}}{8n}\cdot\frac{1 - (2p_{11} - 1)^n}{(1 - p_{11})^2}. \tag{10}$$

Poznamenejme, že ani ve formuli (9) ani v (10) se neprojevuje výsledek předběžného pokusu; pravé strany obou těchto rovnic jsou nezávislé na indexu i.

65. Stacionární řetěz. a) Podle 59b prostá pravděpodobnost $p_1^{(n)}$, že se n-tý pokus podaří (neboli, podle odst. 59a, pravděpodobnost, že při n-tém tahu vytáhneme bílou kouli), je funkcí indexu n; je obecně pro každý pokus jiná. Řetěz se nazývá *stacionární*, je-li $p_1^{(n)}$ nezávislá na n. Podmínka, která musí býti splněna, aby řetěz byl stacionární, vyplývá přímo z rovnice (3), odst. 60; $p_1^{(n)}$ bude veličina nezávislá na n, bude-li koeficient při δ^n na pravé straně oné rovnice roven nule. Podmínka, aby řetěz byl stacionární, zní tedy

$$p_1^{(0)} = \frac{p_{21}}{1 - p_{11} + p_{21}}. \tag{1}$$

Splněním této podmínky je zaručeno, že řetěz je stacionární; naopak, je-li řetěz stacionární, musí býti nutně splněna tato podmínka. Srovnáním rovnic (3) a (4), odst. 60 plynou z podmínky stacionárnosti důsledky:

$$p_1^{(0)} = p_1^{(1)} = p_1^{(2)} = \ldots = p_1^{(n)} = \ldots = P_1 = \frac{p_{21}}{1 - p_{11} + p_{21}}; \tag{2}$$

rovnice (5) a (5a), odst. 60 dají pro stacionární řetěz

$$P_{11}^{(n)} = \delta^n + p_{21}\frac{1-\delta^n}{1-\delta}, \; P_{21}^{(n)} = p_{21}\frac{1-\delta^n}{1-\delta}; \; \delta = p_{11} - p_{21}. \tag{3}$$

Rovnice (1) *vyjadřuje nutnou a postačující podmínku, aby řetěz byl stacionární*; pravděpodobnost, že se zdaří předběžný pokus, rovná se, je-li podmínka (1) splněna, pravděpodobnosti, že se zdaří n-tý pokus a limitě P_1 pravděpodobnosti přechodu $P_{i1}^{(n)}$ $(i = 1, 2)$ pro $n \to \infty$. Srv. odst. 82c.

b) Ve smyslu odst. 59a uskutečníme stacionární řetěz takto: první, druhý, třetí, ... tah konají se buď z bílého nebo z černého osudí; pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli z bílého je p_{11}, pravděpodobnost vytáhnouti bílou z černého je p_{21}. Předběžný (nultý) tah koná se z pomocného osudí, ve kterém jsou též bílé a černé koule; pravděpodobnost vytáhnouti bílou je $p_1^{(0)}$, určená rovnicí (1). Vytáhneme-li při předběžném tahu bílou (černou) kouli, koná se první tah z bílého (černého) osudí. n-tý tah koná se z osudí té barvy, kterou má koule vytažená při $(n - 1)$-tém tahu. Při kterémkoli tahu má pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli konstantní hodnotu $p_1^{(0)}$ danou rovnicí (1).

66. Srovnání s případem nezávislých pokusů. Srovnejme případ stacionárního řetězu, kdy konáme tahy ze dvou osudí, jak bylo vyloženo v odst. 65, s případem nezávislých tahů z jednoho osudí.

Uvedeme číselný *příklad*.

a) Máme dvě osudí, jedno bílé, druhé černé; pravděpodobnosti p_{11} a p_{21} vytáhnouti bílou kouli z prvního resp. ze druhého jsou

$$p_{11} = \tfrac{2}{3},\ p_{21} = \tfrac{1}{3};$$

předběžný tah nechť se koná z pomocného osudí, kde je jedna bílá koule a jedna černá; je tedy $p_1^{(0)} = \frac{1}{2}$. Podmínka stacionárnosti, vyjádřená rovnicí (1), odst. 65, je splněna a platí (viz odst. 63)

$$p_1^{(0)} = p_1^{(1)} = \ldots = P_{11}^{(n)} = P_{21}^{(n)} = P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2},$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Podle (3), odst. 63 je střední hodnota počtu m tahů, při nichž vyjde bílá koule, je-li n celkový počet tahů, roven

$$E(m) = \tfrac{1}{2}n. \tag{1}$$

Podle rovnice (9), odst. 64 je limita střední hodnoty čtverce úchylky

$$\lim_{n\to\infty} E\,\frac{(m - \frac{1}{2}n)^2}{n} = \tfrac{1}{2}. \tag{2}$$

b) V případě nezávislých pokusů, kdy konáme tahy z jediného osudí, ve kterém je tolik černých koulí kolik bílých, je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli, $p = \frac{1}{2}$. Poněvadž $p = p_{11} = p_{21} = \frac{1}{2}$, platí rovnice (1) jako v případě stacionárního řetězu, ale (viz odst. 15.)

$$E\,\frac{(m - \frac{1}{2}n)^2}{n} = \tfrac{1}{4}. \tag{2a}$$

Vykonáme-li tedy velký počet n tahů, je poměr m/n počtu tahů, při kterých byla tažena bílá koule, k celkovému počtu tahů přibližně roven $\frac{1}{2}$ v obou případech a) i b).

Ale *střední hodnota disperse,**) t. j. poměru $(m - \frac{1}{2}n)^2 : n$ je

*) Statisticky určíme střední hodnotu disperse z velikého počtu k serií tahů; každá serie má n tahů, v nichž celkem vyjde m-krát bílá koule. Aritmetický střed ze všech k hodnot disperse dává hledanou její střední hodnotu.

v případě a) stacionárního řetězu rovna $\frac{1}{2}$, kdežto v případě b) nezávislých tahů z jediného osudí je rovna $\frac{1}{4}$.

67. Výskyt samohlásek a souhlásek v souvislém textu. Markov vybral z Puškinova „*Oněgina*" část textu o 20 000 hláskách a rozdělil ji, bez porušení daného pořadí hlásek, na 200 skupin po 100 hláskách. V každé skupině čítal, kolik je v ní samohlásek; výsledek je vyjádřen statistickou tabulkou:

Počet samohlásek ve skupině	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Počet skupin	3	1	6	18	12	31	43	29	25	17	12	2	1

Nejčetnější jsou skupiny, jež obsahují střední počet 43 samohlásek; je jich 43. Čím více se počet samohlásek ve skupině uchyluje od 43, tím méně takových skupin se vyskytuje. Největší úchylky od středního počtu 43 jsou -6 a $+6$. Pravděpodobnost, že hláska zvolená namátkou ve skupině, která obsahuje 37 (nebo 38, 39, ...) samohlásek, je samohláska, rovná se 0,37 (nebo 0,38, 0,39, ...). Průměrná pravděpodobnost P_1, že hláska zvolená v některé skupině, je samohláskou, je dána rovnicí

$$P_1 = \tfrac{1}{200}(3 \,.\, 0{,}37 + 1 \,.\, 0{,}38 + \ldots + 1 \,.\, 0{,}49) = 0{,}432. \quad (1)$$

V jedné skupině je průměrně $100 \,.\, P_1 = 43{,}2$ samohlásek.

Jde nyní o to srovnati úchylky, o které se liší skutečný počet samohlásek vyskytujících se v té které ze 200 skupin od středního jich počtu 43,2. Za tím účelem vypočteme střední hodnotu čtverce úchylky (dispersi) ze dvou různých předpokladů: a) výskyt samohlásek je obdobný výskytu bílých koulí, konáme-li tahy z jednoho osudí za předpokladů odst. 13 a násl. b) výskyt samohlásek je obdobný výskytu bílých koulí, konáme-li tahy ze dvou osudí v případě Markovova řetězu uvažovaného v odst. 59a a násl.

a) Očíslujme 200 skupin hlásek čísly 1, 2, ..., 200 a budiž m_i počet samohlásek obsažených v i-té skupině. Pak bude

$(m_i - 100P_1)^2$ čtverec úchylky pro i-tou skupinu; P_1 je pravděpodobnost, že zvolená hláska je samohláskou, daná rovnicí (1). Přirovnáme-li výskyt samohlásek k výskytu bílých koulí při tazích z jednoho osudí, vzájemně nezávislých, má býti podle odst. 15 a 22 rovnost mezi theoretickým výrazem $np(1 - p)$ a empirickou střední hodnotou

$$\frac{1}{s}\left[(m_1 - np)^2 + (m_2 - np)^2 + \ldots + (m_s - np)^2\right].$$

Dosadíme-li sem $s = 200$ (počet serií), $n = 100$ (počet tahů v jedné serii), $p = P_1$ docházíme k závěru, že by měla platiti (přibližně) rovnost

$$\frac{1}{20000}\sum_{i=1}^{200}(m_i - 100P_1)^2 \doteq P_1(1 - P_1). \qquad (2)$$

Provedeme-li výpočet se shora uvedenými hodnotami pro m_i a pro P_1, shledáme, že levá strana v rovnici (2) má hodnotu 0,051, kdežto pravá hodnotu 0,245. Rovnost (2) není tedy v našem případě správná, výskyt samohlásek nelze přirovnati k vzájemně nezávislým tahům z osudí.

b) Skupiny po 100 hláskách jsou vzaty z textu, ve kterém pořadí hlásek je dáno smyslem textu. Hlásky nejsou zde vybrány jako koule vytahované z osudí.

Podle Markova jsou pravděpodobnosti, se kterými se vyskytne samohláska na prvém, druhém, třetím, ... místě textu spojeny v jednoduchý řetěz. Příslušné pravděpodobnosti stanovíme takto: Index 1 nechť odpovídá samohlásce, index 2 souhlásce; p_{11} bude pravděpodobnost, že po samohlásce bezprostředně následuje samohláska; p_{12} pravděpodobnost, že po samohlásce bezprostředně následuje souhláska atd. Platí rovnosti

$$p_{11} + p_{12} = 1, \; p_{21} + p_{22} = 1.$$

Veličiny p_{ik} se určí z textu statisticky: spočítáme, kolikrát po samohlásce bezprostředně následuje samohláska, dělíme číslo tak nalezené celkovým počtem samohlásek, čímž nalezneme p_{11} atd. Tak nalézá Markov hodnoty

$$p_{11} = \tfrac{1104}{8638} = 0{,}128,\ p_{21} = 0{,}663,$$

$$P_1(1 - P_1)\cdot\frac{1 + p_{11} - p_{21}}{1 - p_{11} + p_{21}} = 0{,}06. \qquad (3)$$

Podle theorie o dispersi — viz rovnici (9), odst. 64 — je nutno v případě řetězu nahraditi pravou stranu rovnice (2), odst. 67 výrazem (3). Levá strana má, jak víme, hodnotu 0,051, takže souhlas je nyní lepší než v případě a).

Výsledek úvah shrneme takto: Rovnice (2) by platila, kdyby 200 skupin po 100 hláskách bylo vybráno z textu namátkou beze vztahu k souvislosti textu (kdybychom na př. každou hlásku napsali na zvláštní lístek, vložili lístky do osudí a pak vytahali a libovolně uspořádali do 200 skupin po 100 hláskách); jsou-li však hlásky ponechány ve skupinách tak, jak následují jedna za druhou v daném textu, přicházejí k platnosti pravděpodobnosti p_{ik}, máme případ řetězu a nutno pravou stranu rovnice (2) nahraditi výrazem (3).

68. Brownův pohyb po přímce. a) Malé hmotné částice (na př. zrnka pylového prášku) suspendované ve vodě jsou v ustavičném pohybu, jenž je způsobován nárazy molekul vody na částice. Pohyb toho druhu nazývá se *Brownův pohyb* podle botanika Browna, jenž jej pozoroval r. 1828. Předpokládáme, že molekuly vody se pohybují nepravidelně ve všech směrech a že je vhodné počítati se středními hodnotami pošinutí, která jsou vyvolána nárazy molekul. Zjednodušme úlohu co nejvíce, předpokládajíce, že pohyb nějaké částice, která je vystavena náhodným nárazům, děje se podél přímky. Pak jsme vedeni k úloze, kterou se zabýval Rayleigh r. 1880: Někdo kráčí po rovné cestě. Každý krok má stejnou délku a, buď vpřed nebo vzad; oba případy mají pro každý krok stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{2}$ a to nezávisle na tom, jak dopadly kroky ostatní. Kam se chodec dostane po n krocích? Úsudek, že chodec se mnoho od původního svého místa nevzdálí, poněvadž učiní asi tolik kroků vpřed jako vzad, není správný. Počítejme každý krok dopředu za kladnou délku a, krok dozadu za zápornou délku $-a$; algebraický součet všech n délek budiž ma, dráha chodcem skutečně uražená. m je celé číslo buď kladné nebo záporné nebo rovné nule. Platí rovnice

$$E(ma) = a \,.\, E(m) = 0, \tag{1}$$

ale veličina

$$E[(ma)^2] = a^2 \,.\, E(m^2)$$

nerovná se nule.

Abychom určili $E(m^2)$, užijeme postupu obdobného tomu, kterého jsme užili v odst. 14b a 15b. Přiřadíme k-tému kroku veličinu $x^{(k)}$ rovnou $+1$ nebo -1 dle toho, je-li to krok vpřed nebo vzad. Pak bude

$$m = x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)},$$
$$E(x^{(k)}) = 0,\ E(x^{(k)})^2 = 1,\ E[x^{(k)} \,.\, x^{(l)}] = 0 \text{ pro } k \neq l;$$

správnost poslední rovnice vyplývá z nezávislosti k-tého a l-tého kroku. Z napsaných rovnic plyne, že

$$E(m) = E(x^{(1)}) + E(x^{(2)}) + \ldots + E(x^{(n)}) = 0$$

ve shodě s rovnicí (1) a

$$E(m^2) = E(x^{(1)})^2 + E(x^{(2)})^2 + \ldots + E(x^{(n)})^2 + \\ + 2E[x^{(1)} \,.\, x^{(2)}] + \ldots = n,$$

a tedy

$$E[(ma)^2] = na^2. \tag{2}$$

Je-li pravděpodobnost kroku vpřed stejně veliká jako kroku vzad a rovna $\frac{1}{2}$, *a délka jednoho kroku rovna* a, *je střední hodnota druhé mocniny dráhy uražené po* n *krocích rovna* na^2.

Kdyby všechny kroky byly vpřed (nebo všechny vzad), měla by úhrnná dráha délku na, a tedy její druhá mocnina by byla n^2a^2. Avšak dráha uražená po n krocích se zkracuje tím, že nejsou všechny kroky v témže směru; střední hodnota čtverce dráhy je podle (2) na^2 a nikoli n^2a^2.

Výsledek vyjádřený rovnicí (2) je matematicky skoro totožný s větou o střední hodnotě druhé mocniny chyby, která vzniká, měříme-li danou délku rozdělenou na n částí tak, že měříme každou část zvláště a výsledky sečteme (odst. 46a).

b) Odůvodnění rovnice (2) předpokládá, že pravděpodobnosti jednotlivých kroků vpřed nebo vzad jsou vzájemně nezávislé. Připusťme nyní, že tyto pravděpodobnosti jsou spojeny v jednoduchý Markovův řetěz. To znamená: byl-li některý krok vpřed, existují pravděpodobnosti

p_{11}, že bezprostředně následující krok bude také vpřed,
p_{12}, že bezprostředně následující krok bude vzad;

a dále: by-li některý krok vzad, jsou pravděpodobnosti

p_{21}, že bezprostředně následující krok bude vpřed,
p_{22}, že bezprostředně následující krok bude vzad.

Mimo to předpokládáme, že

$$p_{11} = p_{22} = p, \ p_{12} = p_{21} = 1 - p; \tag{3}$$

z toho plyne (viz odst. 61), že

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Po velmi velkém počtu kroků je tedy pravděpodobnost kroku vpřed rovna pravděpodobnosti kroku vzad.

Označme písmenem n úhrnný počet kroků; pro přehlednost budiž n sudé číslo. Délka kroku budiž a a celkový počet kroků vpřed budiž m'. Přiřaďme k-tému kroku číslo $x^{(k)}$, které je rovno 1, je-li krok vpřed, a které se rovná 0, je-li krok vzad; pak je

$$m' \doteq x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}.$$

Podle (4), odst. 63 je pro veliké n střední hodnota čísla m' rovna $E(m') = nP_1 = \frac{1}{2}n$. Poněvadž z celkového počtu n kroků je m' vpřed a $(n - m')$ vzad, je uražená dráha rovna $(2m' - n)\,a$. Zaveďme úchylku

$$h = m' - \tfrac{1}{2}n = m' - nP_1,$$

tedy $m' = h + \frac{1}{2}n$; uražená dráha bude rovna $2ha$. Z toho plyne střední hodnota druhé mocniny uražené dráhy $4a^2 E(h^2)$. Hodnota $E(h^2):n$ se počítá podle rovnice (10), odst. 64.

Píšeme-li p na místo p_{11}, platí

$$E(h^2) = E(m' - \tfrac{1}{2}n)^2 =$$

$$\tfrac{1}{4}n \frac{p}{1-p} + \frac{1-2p}{8} \cdot \frac{1-(2p-1)^n}{(1-p)^2}.$$

Střední hodnota druhé mocniny dráhy uražené po n krocích je tedy

$$4a^2 E(h^2) = \left[\frac{np}{1-p} + \frac{1-2p}{2} \cdot \frac{1-(2p-1)^n}{(1-p)^2}\right] a^2. \quad (4)$$

Pro velmi velké hodnoty čísla n přechází (4) v přibližný vzorec

$$4a^2 E(h^2) = \frac{npa^2}{1-p}. \quad (5)$$

Rovnice (4) zobecňuje rovnici (2) pro libovolnou hodnotu čísla. Kdyby pravděpodobnosti vztahující se k jednotlivým krokům byly nezávislé, bylo by vzhledem k (3)

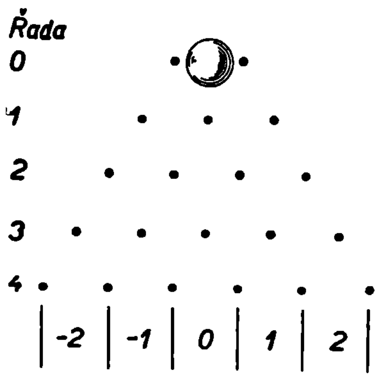
$$p_{11} = p_{21} = p, \; p_{12} = p_{22} = p = \tfrac{1}{2},$$

pravá strana rovnice (4) by se ztotožnila s pravou stranou rovnice (2).

V případě, že pravděpodobnost $p_{11} = p_{22} = p$ je veliká proti $p_{12} = p_{21} = 1 - p$, projevuje se závislost pravděpodobností tím, že chodec má jakousi „setrvačnost"; učiní-li k-tý krok vpřed (vzad), je pravděpodobnější, že $(k + 1)$-tý krok bude zase vpřed (vzad) než opačným směrem.

69. Theorie Galtonova přístroje. Galtonův přístroj je prkno, do kterého jsou zaraženy hřebíky ve vrcholech pravidelné sítě složené z rovnostranných trojúhelníků. Prkno se nakloní tak, aby hřebíky tvořily horizontální řady. Kulička, jejíž průměr je o něco menší (asi o čtvrtinu) než mezera mezi dvěma sousedními hřebíky, vloží se mezi dva hřebíky, které tvoří horní řadu. Kulička padá po nakloněné rovině, naráží na hřebíky a uchyluje se po každém nárazu buď napravo nebo nalevo; když prošla všemi vodorovnými řadami hřebíků, spadne do jedné z přihrádek umístěných pod spodní řadou hřebíků. Řadu, kde kuličku vkládáme do přístroje, označíme indexem 0, další řady pak 1, 2, 3, ... Přihrádky značíme indexy —1, —2, ... nebo 1, 2, ... dle toho, jsou-li nalevo nebo napravo od středu. Je-li n řad (nultou nepočítaje) a n sudé číslo, je $n + 1$ přihrádek s indexy $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{1}{2}n$. Obrazec č. 23 odpovídá případu $n = 4$.

Otázka zní: *Jak veliká je pravděpodobnost a_h, že kulička dopadne do přihrádky, označené číslem h, a jak veliká je střední*



Obr. 23.

hodnota $E(h^2)$? Budeme řešiti úlohu dvojím způsobem (pro n sudé).

a) Theorie s předpokladem o nezávislých pravděpodobnostech vychází z těchto podmínek:

I. Kulička vložená do horní mezery naráží na hřebík v řadě 1, který je pod onou mezerou, a uchýlí se buď napravo nebo nalevo. Pak narazí shora na nejbližší hřebík v řadě 2, zase se uchýlí napravo nebo nalevo, pak narazí na hřebík v řadě 3 atd. V každé horizontální řadě narazí na jediný hřebík; po n nárazech spadne do jedné z přihrádek.

II. Pravděpodobnost, že kulička při jednom (kterémkoli) nárazu se uchýlí napravo, rovná se pravděpodobnosti ($= \frac{1}{2}$), že se uchýlí nalevo.

III. Pravděpodobnost, že se kulička po nárazu na určitý hřebík uchýlí v určitém smyslu, nezávisí na tom, jak se uchýlila po nárazech v předcházejících řadách.*)

Kulička narazí n-krát; uchýlí-li se $\frac{1}{2}n$-krát napravo a tedy $\frac{1}{2}n$-krát nalevo, dopadne do přihrádky označené 0. Uchýlí-li se $(\frac{1}{2}n + h)$-krát napravo a tedy $(\frac{1}{2}n - h)$-krát nalevo, padne do přihrádky h ($h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{1}{2}n$). Všech možných případů (po každém z n nárazů napravo nebo nalevo) je 2^n; příznivých (t. j. těch, kdy mezi n nárazy je $(\frac{1}{2}n + h)$ takových, že po nich následuje úchylka napravo) je $(n)_{\frac{1}{2}n+h}$, takže

$$a_h = (n)_{\frac{1}{2}n+h} \cdot \frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

Dále je střední hodnota čtverce úchylky:

$$E(h^2) = \sum_{h=-\frac{1}{2}n}^{+\frac{1}{2}n} a_h \,.\, h^2. \tag{2}$$

(1) je Newtonova formule (viz (1) v odst. 13, kde je dosaditi $p = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}n + h$); podle vzorce (1), odst. 15 (zase $p = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}n + h$) je

$$\frac{E(h^2)}{n} = \frac{1}{4}. \tag{3}$$

b) Theorie s předpokladem o závislých pravděpodobno-

---

*) Podmínka III nevyplývá z podmínky II; viz srovnání dvou úloh o tazích z osudí v odst. 66.

stech. Vzorec (3) dá se kontrolovati pokusy; v poslední době několik autorů se zabývalo theorií Galtonova přístroje a výsledky theorie byly srovnávány s pokusy.*) Ukázalo se, že vzorec (3) nevyhovuje a že lepší výsledek dává theorie, která podržuje podmínky I a II shora uvedené, která však nahrazuje podmínku III touto:

III. Pravděpodobnost p_{11}, že kulička se uchýlí napravo po nárazu na hřebík v některé řadě, uchýlila-li se po bezprostředně předcházejícím nárazu napravo, liší se obecně od pravděpodobnosti p_{21}, že se uchýlí napravo, uchýlila-li se po bezprostředně předcházejícím nárazu nalevo. Dále máme obecně různé pravděpodobnosti p_{12}, že kulička, která se uchýlila napravo, uchýlí se po následujícím náraze nalevo, a p_{22}, že po náraze nalevo se uchýlí zase nalevo.

Poněvadž celý přístroj je souměrný, předpokládáme

$$p_{11} = p_{22}, \; p_{12} = p_{21}.$$

Padá-li kulička, jsou úchylky napravo či nalevo zjevy spojené v Markovův řetěz. Podmínky (1) a (2), odst. 60 a (2), odst. 61 jsou splněny, takže $P_1 = \frac{1}{2}$ podle (3), odst. 61. Pravděpodobnost $p_1^{(k)}$, že kulička po nárazu na hřebík v k-té řadě se uchýlí napravo, je konstantní:

$$p_1^{(1)} = p_1^{(2)} = \ldots = p_1^{(k)} = \ldots = p_1^{(n)} = \tfrac{1}{2}.$$

za předpokladu, že $p_1^{(1)} = \frac{1}{2}$. Řetěz je stacionární (odst. 65). Máme zde $h = m - \frac{1}{2}n$ a podle (9), odst. 64

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{h^2}{n}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{1 + p_{11} - p_{21}}{1 - p_{11} + p_{21}} = \frac{1}{4}\,\frac{p_{11}}{1 - p_{11}}. \tag{4}$$

*) *B. Schulz*: Zur Theorie des Galtonschen Brettes (Zeitschr. f. Physik 92, 747—754; 1934). — *H. Münzner*: Über eine spezielle Markoffsche Kette am Galtonbrett (Zeitschr. f. angew. Mathematik und Mechanik 14, 343—346; 1934). — *W. Seitz-K. Hamacher-Odenhausen*: Untersuchungen über das Galton'sche Brett (Phys. Zeitschrift 35, 530—532; 1934). — *B. Hostinský*: Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires liées entre elles (Annales de l'Institut Poincaré t. VII, fasc. II, p. 89—119; 1937).

Úloha o střední hodnotě h^2 je vlastně totožná s úlohou o lineárním Brownově pohybu (odst. 68).

Pravá strana (4) se může značně lišiti od pravé strany (3); je-li na př. $p_{11} = \frac{3}{4}$, $p_{21} = \frac{1}{4}$, je

$$\frac{1 + p_{11} - p_{21}}{1 - p_{11} + p_{21}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Pro veliké n je tedy $E\left(\frac{h^2}{n}\right)$ třikrát větší podle vzorce (4) než podle (3).

c) Vzorec (4) lze kontrolovati pokusně; předpokládáme, že n je velké (stačí n rovné asi 20). Vložme do přístroje velký počet N kuliček a budiž N_h počet těch, které spadnou do přihrádky h. Pak je

$$E(h^2) = \frac{1}{N} \sum_{h=-\frac{1}{2}n}^{+\frac{1}{2}n} h^2 N_h; \quad \sum_{-\frac{1}{2}n}^{+\frac{1}{2}n} N_h = N.$$

Budiž a_{11} (a_{22}) celkový počet případů, ve kterých po úchylce kuličky napravo (nalevo) následuje bezprostředně úchylka napravo (nalevo), a a_{12} (a_{21}) počet těch, kdy po úchylce napravo (nalevo) následuje úchylka nalevo (napravo). Přibližné hodnoty pravděpodobností p_{11} a p_{21} jsou

$$p'_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11} + a_{12}}, \quad p'_{21} = \frac{a_{21}}{a_{21} + a_{22}}.$$

Pokusy ukázaly, že v některých případech (při vhodném sklonu prkna) je $p'_{11} = \frac{3}{4}$, $p'_{21} = \frac{1}{4}$, takže theoretický vzorec (4) se potvrzuje. Okolnost, že p'_{11} je značně větší než p'_{21}, ukazuje k tomu, že kulička má jakousi *setrvačnost*: uchýlí-li se napravo, je pravděpodobnost, že po následujícím nárazu na hřebík se uchýlí napravo, značně větší než pravděpodobnost úchylky nalevo. Sklon prkna musí býti malý. Při větším sklonu se stává, že kulička proběhne uličkou mezi hřebíky a protne několik vodorovných řad, aniž by narazila na hřebík; podmínky I, II nejsou pak splněny.

Poznamenejme, že vzorec (10), odst. 64 dává přesnou hodnotu disperse pro jakýkoli počet n řad hřebíků.

70. Charakteristická rovnice. a) Rovnice druhého stupně v λ

$$\begin{vmatrix} \lambda p_{11} - 1, & \lambda p_{21} \\ \lambda p_{12}, & \lambda p_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

neboli

$$\lambda^2(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}) - \lambda(p_{11} + p_{22}) + 1 = 0 \tag{2}$$

nazývá se *charakteristickou rovnicí* příslušnou řetězu o pravděpodobnostech p_{ik}. Jeden její kořen je vždy $\lambda = 1$, neboť, dosadíme-li do determinantu (1) jednotku na místo λ, a přičteme-li pak prvky druhého řádku k příslušným prvkům prvého řádku, změní se determinant ve tvar

$$\begin{vmatrix} p_{11} + p_{12} - 1, & p_{21} + p_{22} - 1 \\ p_{12}, & p_{22} \end{vmatrix};$$

tento determinant se rovná nule vzhledem k rovnicím (1) a (1a), odst. 59. Z těchto dvou rovnic plyne, že

$$\begin{aligned} p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} &= p_{11}(1 - p_{21}) - (1 - p_{11})\, p_{21} = \\ &= p_{11} - p_{21}; \end{aligned}$$

rovnici (2) lze tedy psáti ve tvaru

$$\lambda^2 - \lambda \frac{p_{11} + p_{22}}{p_{11} - p_{21}} + \frac{1}{p_{11} - p_{21}} = 0;$$

z toho plyne, že druhý kořen rovnice (1) je

$$\lambda = \frac{1}{p_{11} - p_{21}} = \frac{1}{\delta},$$

užijeme-li označení zavedeného v odst. 60a.

b) Položme v rovnicích (7), odst. 59 $n = 1$; dostaneme pro $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} P_{i1}^{(m+1)} &= P_{i1}^{(m)} p_{11} + P_{i2}^{(m)} p_{21}, \\ P_{i2}^{(m+1)} &= P_{i1}^{(m)} p_{12} + P_{i2}^{(m)} p_{22}. \end{aligned}$$

Za předpokladu, že všechny pravděpodobnosti p_{ik} jsou kladné, mají $P_{i1}^{(m)}$ a $P_{i2}^{(m)}$ pro $m \to \infty$ limitní hodnoty P_1 resp. P_2 (viz odst. 60); je tedy

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_1 p_{11} + P_2 p_{21}, \\ P_2 &= P_1 p_{12} + P_2 p_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Veličiny P_1 a P_2 se jeví jakožto řešení dvou lineárních homogenních rovnic (3), k nimž připojíme podle rovnice (5b), odst. 60 podmínku

$$P_1 + P_2 = 1. \tag{4}$$

Determinant rovnic (3) vzhledem k P_1 a k P_2 musí býti roven nule, tedy

$$\begin{vmatrix} p_{11} - 1, & p_{21} \\ p_{12}, & p_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant je roven determinantu v rovnici (1) pro $\lambda = 1$, rovná se tedy skutečně nule. Veličiny P_1 a P_2 jsou jednoznačně určeny rovnicemi (3) a (4); jejich hodnoty se shodují s formulemi (4), odst. 60.

MARKOVŮV JEDNODUCHÝ ŘETĚZ S LIBOVOLNÝM POČTEM EVENTUALIT

71. Pravděpodobnosti přechodu a pravděpodobnosti prosté.

a) Konáme řadu pokusů za těchto podmínek: Každý z pokusů má za výsledek jeden z r zjevů $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Pravděpodobnost p_{ik}, že $(n+1)$-tý pokus povede k zjevu E_k, vedl-li n-tý pokus ke zjevu E_i, nezávisí na pořadovém čísle n ani na výsledcích pokusů předcházejících před n-tým $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$. Za těchto podmínek jsou pravděpodobnosti, které patří výsledkům jednotlivých pokusů, spojeny v *jednoduchý Markovův řetěz o r eventualitách*. p_{ik} jsou *pravděpodobnosti přechodu*. Tyto pravděpodobnosti vyhovují podmínkám

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

$$p_{ik} \geqq 0. \tag{2}$$

Rovnice (1) vyjadřuje jistotu, že, vedl-li n-tý pokus k výsledku E_i, povede $(n+1)$-tý pokus k jednomu z výsledků $E_1, E_2, \ldots, E_r$.

V odst. 59a bylo vyloženo, jak se realisuje jednoduchý Markovův řetěz o dvou eventualitách tahy ze dvou osudí, bílého a černého. V případě, že je r eventualit, realisujeme řetěz obdobně: je dáno r osudí označených zevně r různými barvami (první barvou, druhou barvou atd.). V každém osudí jsou smíchány koule těchže r barev. Zjev E_k je tah koule k-té barvy. p_{ik} je pravděpodobnost, že, vyšla-li při n-tém tahu koule i-té barvy, vyjde při $(n+1)$-tém tahu koule k-té barvy; tah koná se vždy z toho osudí, které má barvu shodnou s barvou koule tažené v tahu bezprostředně předcházejícím, a vytažená koule se vrací zpět do toho osudí, ze kterého byla vytažena.

b) K úplnému stanovení řetězu je třeba znáti pravděpodobnosti, se kterými se vyskytují zjevy $E_1, E_2, \ldots, E_r$ bezprostředně před prvním pokusem. Zavádíme předběžný (nultý) pokus; $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_r^{(0)}$ jsou pravděpodobnosti, že předběžný pokus má za výsledek resp. $E_1, E_2, \ldots, E_r$. $p_k^{(0)}$ vyhovují podmínkám

$$\sum_{k=1}^{r} p_k^{(0)} = 1, \quad p_k^{(0)} \geqq 0. \tag{3}$$

c) Zaveďme pravděpodobnosti $P_{ik}^{(n)}$, že $(p + n)$-tý pokus dá výsledek E_k, dal-li p-tý pokus výsledek E_i. Tyto veličiny vyhovují následujícím rovnicím, jichž správnost vyplývá přímo z vět o pravděpodobnosti úhrnné a složené (srv. odst. 59):

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} \cdots \sum_{\omega=1}^{r} p_{i\alpha} p_{\alpha\beta} \cdots p_{\omega k}, \tag{4}$$

kde se sčítá podle $(n - 1)$ indexů $\alpha, \beta, \ldots, \omega$,

$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)}, \quad P_{ik}^{(1)} = p_{ik}; \; m, n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} P_{is}^{(n-1)} p_{sk} = \sum_{s=1}^{r} p_{is} P_{sk}^{(n-1)}, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} = 1; \; i = 1, 2, \ldots, r; \; n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

d) *Prostá pravděpodobnost* $p_k^{(n)}$, že n-tý pokus bude míti za výsledek zjev E_k, souvisí s pravděpodobnostmi $p_j^{(0)}$ a $P_{ik}^{(n)}$ podle rovnic

$$p_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} p_j^{(0)} P_{jk}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

$$p_k^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{r} p_j^{(m)} P_{jk}^{(n)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \; n = 1, 2, \ldots; \tag{9}$$

konečně platí

$$\sum_{k=1}^{r} p_k^{(n)} = 1, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Kdyby bylo známo, že předběžný pokus vedl ke zjevu E_i, specialisovala by se rovnice (8) tak, že všechny hodnoty $p_j^{(0)}$ by se rovnaly nule až na $p_i^{(0)}$, která by byla rovna 1, takže bychom měli na místo (8)

$$p_k^{(n)} = P_{ik}^{(n)}; \tag{11}$$

prostá pravděpodobnost $p_k^{(n)}$ by se rovnala pravděpodobnosti $P_{ik}^{(n)}$.

72. Proměnná veličina přiřaděná výsledkům pokusů. Přiřaďme každému zjevu E_k určitou veličinu α_k; n-tému pokusu přiřadíme pak veličinu $x^{(n)}$ nebo zkrátka x,*) která se rovná α_k, byl-li zjev E_k výsledkem n-tého pokusu.

73. Geometrický obraz řetězu. Výsledky postupně prováděných pokusů znázorníme geometricky takto: Budiž dáno r pevných bodů $A_1, A_2, \ldots, A_r$ odpovídajících po řadě zjevům $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Pohyblivý bod B pohybuje se tak, že po každém pokuse splývá s bodem A_k odpovídajícím tomu zjevu E_k, který se objevil jakožto výsledek pokusu. Konáme-li postupně řadu pokusů, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v řetěz, koná bod B pohyb, který přirovnáme k Brownovu pohybu. Hodnota veličiny $x^{(n)}$, přiřaděná výsledku n-tého pokusu (viz odst. 72) mění se podle polohy bohu B; splývá-li B s A_k, je $x^{(n)} = \alpha_k$. $P_{ik}^{(n)}$ je pravděpodobnost, že, byl-li bod B původně v poloze A_i (a měla-li tedy proměnná x původně hodnotu α_i), po dalších n pokusech bude B v poloze A_k (a že tedy proměnná x bude míti nakonec hodnotu α_k).

*) Kdybychom výslovně srovnávali hodnotu proměnné veličiny po m-tém pokusu s její hodnotou po n-tém, bylo by nutno rozlišovati $x^{(m)}$ a $x^{(n)}$. Máme-li však na mysli obecně proměnnou veličinu závislou na výsledcích pokusů, stačí psáti x.

74. Střední hodnota proměnné veličiny závislé na výsledcích jednotlivých pokusů. Označme symbolem $P(S)$ pravděpodobnost, že je splněn vztah S; S je buď nějaká rovnice, nebo nerovnost, nebo soustava nerovností a pod. Veličina $x^{(n)}$ přiřaděná výsledku n-tého pokusu ve smyslu odst. 72 rovná se jedné z hodnot α_k a platí

$$P(x^{(n)} = \alpha_k) = p_k^{(n)}, \ k = 1, 2, \ldots, r;$$

$p_k^{(n)}$ je prostá pravděpodobnost ve smyslu odst. 71d. Střední hodnotu $E(x^{(n)})$ veličiny $x^{(n)}$ označíme $a^{(n)}$; je tedy

$$a^{(n)} = E(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{r} p_k^{(n)} \alpha_k. \tag{1}$$

Předpokládejme nyní, že před prvním pokusem začínáme s určitým zjevem E_i; pak je $p_i^{(0)} = 1$, $p_j^{(0)} = 0$ pro $j \neq i$ a platí rovnice (11), odst. 71. Místo předchozí rovnice (1) budeme tedy míti

$$a_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} \alpha_k, \tag{2}$$

střední hodnotu $a_i^{(n)}$ píšeme nyní s indexem i, poněvadž je to střední hodnota podmíněná předpokladem $p_i^{(0)} = 1$.

75. Markovova věta o limitě střední hodnoty. a) Markov dokázal větu: *Jsou-li všechny pravděpodobnosti přechodu p_{ik} kladné, t. j.*

$$p_{ik} > 0, \ i, k = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

má střední hodnota $a_i^{(n)}$ veličiny $x^{(n)}$, roste-li n do nekonečna, určitou limitu a nezávislou na indexu i.

Markovův důkaz z r. 1907 užívá postupu, který nazveme *methodou postupných aritmetických středů*. Vylučme z rovnice (2), odst. 74 veličinu $P_{ij}^{(n)}$ užívajíce druhé rovnice (6), odst. 71. Vychází

$$a_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} p_{is} P_{sk}^{(n-1)} \alpha_k = \sum_{s=1}^{r} p_{is} a_s^{(n-1)} \tag{2}$$

a tedy

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} (p_{is} - p_{js})\, a_s^{(n-1)}.$$

Podmínka (1), odst. 71 dává

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} - \sum_{k=1}^{r} p_{jk} = 1 - 1 = 0.$$

Proto v řadě r rozdílů

$$p_{i1} - p_{j1},\ p_{i2} - p_{j2},\ \ldots,\ p_{ir} - p_{jr}$$

bude několik kladných veličin $\beta_1, \beta_2, \ldots$ a několik záporných $-\beta'_1, -\beta'_2, \ldots$ Každé z čísel β_k, β'_k je kladné a poněvadž je menší než určitá pravděpodobnost p_{uv} a poněvadž

$$\sum_{v=1}^{r} p_{uv} = 1,\ u = 1, 2, \ldots, r,$$

je

$$0 < \Sigma\beta_k = \Sigma\beta'_k = h < 1.$$

Číslo h závisí na volbě indexů i a j; budiž H největší hodnota, které může h dosáhnouti vhodnou volbou indexů i a j. Patrně je $0 < H < 1$.

Je-li $\Delta^{(n-1)}$ rozdíl mezi největším a nejmenším z čísel

$$a_1^{(n-1)},\ a_2^{(n-1)},\ \ldots,\ a_r^{(n-1)}, \tag{3}$$

je

$$|a_i^{(n)} - a_j^{(n)}| < |\sum_s \beta_s a_s^{(n-1)} - \sum_s \beta'_s a_s^{(n-1)}| < H\Delta^{(n-1)}$$

a tedy také

$$\Delta^{(n)} < H\Delta^{(n-1)}.$$

Napišme tuto nerovnost pro $n, (n-1), \ldots, 2$. Násobíce všechny nerovnosti tak vzniklé dostaneme

$$\Delta^{(n)} = H^n \Delta^{(1)},$$
$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{(n)} = 0. \tag{4}$$

Podle (2) je $a_i^{(n)}$ pro libovolné i obecný aritmetický střed veličin (3). Roste-li tedy n, maximum v řade (3) nemůže se zvětšovati a minimum se nemůže zmenšovati. Rozdíl $\Delta^{(n-1)}$ maxima a minima konverguje k nule dle (4); tudíž maximum i minimum mají společnou limitu a, když n roste do nekonečna. Je tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a; \tag{5}$$

tím je Markovova věta dokázána.

b) Rovnice (5) platí pro libovolně volené hodnoty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ veličiny x. Volme je nyní takto (k je určitý pevný index)

$$\alpha_k = 1, \ \alpha_j = 0 \ \text{pro} \ j \neq k;$$

vzorec (2), odst. 74 ukazuje, že v tomto případě

$$a_i^{(n)} = P_{ik}^{(n)}.$$

Poněvadž dle (5) má $a_i^{(n)}$ limitu nezávislou na i, platí totéž o $P_{ik}^{(n)}$, a máme

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_k, \ k = 1, 2, \ldots, r. \tag{6}$$

Pravděpodobnost $P_{ik}^{(n)}$, že n postupně provedených pokusů povede od zjevu E_i k E_k, má limitu závislou jen na k, roste-li n do nekonečna.

Rovnice (2), odst. 74 dává, pro případ libovolných hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, roste-li n do nekonečna:

$$\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a = \sum_{k=1}^{r} P_k \alpha_k. \tag{7}$$

Známe-li tedy veličiny $P_1, P_2, \ldots, P_k$, lze a vypočísti dle (7). Poznamenejme, že prostá pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že při n-tém pokuse se vyskytne zjev E_k, má za limitu P_k; neboť podle rovnice (8), odst. 71 je

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} p_j^{(0)} P_k = P_k, \tag{8}$$

přihlédneme-li k podmínce (10), odst. 71 pro $n = 0$. Podle (1), odst. 74 je

$$\lim_{n\to\infty} E(x^{(n)}) = a = \sum_{k=1}^{r} P_k \alpha_k. \tag{7a}$$

c) Roste-li n do nekonečna, dává první rovnice (6), odst. 71

$$P_k - \sum_{j=1}^{r} P_j p_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{9}$$

a z rovnice (7), odst. 71 plyne současně, že

$$\sum_{k=1}^{r} P_k = 1. \tag{10}$$

Rovnicemi (9) *a* (10) *jsou veličiny* $P_1, P_2, \ldots, P_r$ *jednoznačně určeny.* Determinant soustavy r rovnic (9) vzhledem k neznámým $P_1, P_2, \ldots, P_r$

$$\begin{vmatrix} 1 - p_{11}, & - p_{21}, & \ldots, & - p_{r1} \\ - p_{12}, & 1 - p_{22}, & \ldots, & - p_{r2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ - p_{1r}, & - p_{2r}, & \ldots, & 1 - p_{rr} \end{vmatrix}$$

rovná se nule; o tom se přesvědčíme přičtouce 2., 3., ... a r-tý řádek k prvnímu a přihlédnouce k podmínce (1), odst. 71. Vzhledem k (1), odst. 75 a k (5), odst. 71 *jsou* P_k *vesměs čísla kladná.*

d) Vraťme se k případu, kdy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ mají libovolné hodnoty. Z rovnice (2), odst. 74 následuje, že

$$E\left(\frac{x^{(n)}}{m}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} \alpha_k}{m};$$

v této rovnici značí $x^{(n)}$ veličinu přiřaděnou n-tému pokusu ve smyslu odst. 73 a m, n celá kladná čísla. Je tedy

$$E\left(\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(m)}}{m}\right) = \frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{r}\alpha_k \sum_{n=1}^{m} P_{ik}^{(n)}\right];$$

Vzhledem k rovnici (6) je

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} P_{ik}^{(n)} = P_k$$

a tedy podle (7)

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(m)}}{m}\right) = \sum_{k=1}^{r}\alpha_k P_k = a. \quad (11)$$

Limita a střední hodnoty veličiny $a_i^{(m)}$ se tedy jeví jakožto střední hodnota aritmetického středu veličin $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$, roste-li m do nekonečna.

76. Dodatek k Markovově větě. K předpokladům vyjádřeným rovnicemi (1), odst. 71 a (1), odst. 75, totiž

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \ i = 1, 2, \ldots, r; \ p_{ik} > 0 \quad (1)$$

připojme další předpoklad

$$\sum_{i=1}^{r} p_{ik} = 1, \ k = 1, 2, \ldots, r. \quad (2)$$

Jsou-li všechny předpoklady (1) a (2) splněny, plyne z rovnic (9), odst. 75, že

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_r$$

a, přihlédneme-li k rovnici (10), odst. 75,

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_1 = P_2 = \ldots = P_r = \frac{1}{r} \quad (3)$$

pro $i, k = 1, 2, \ldots, r$. Naopak snadno se odůvodní, že z rovnic (1) a (3) plynou rovnice (2). Shrneme takto:

Jsou-li v matici

$$\left\|\begin{matrix} p_{11}, & p_{12}, & \ldots, & p_{1r} \\ p_{21}, & p_{22}, & \ldots, & p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{r1}, & p_{r2}, & \ldots, & p_{rr} \end{matrix}\right\| \tag{4}$$

všechny prvky kladné a je-li součet prvků v každém řádku roven jednotce, zní podmínka, aby všechny pravděpodobnosti $P_{ik}^{(n)}$ *měly pro* $n \to \infty$ *tutéž limitu* $1 : r$, *takto: Součet prvků v každém sloupci matice musí se rovnati jednotce.*

V případě, že podmínky (2) jsou splněny, zní rovnice (7), odst. 75 takto:

$$a = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} \alpha_k.$$

77. Zvláštní případ, kdy některé pravděpodobnosti přechodu jsou rovny nule. Důkaz, že existují limity veličin $a_i^{(n)}$ a $P_{ik}^{(n)}$ pro $n \to \infty$, podaný v odst. 75, předpokládá, že všechny pravděpodobnosti p_{ik} jsou kladné. Ale limita existuje i v jiných případech, kdy některé z veličin p_{ik} jsou rovny nule.

Budiž Δ hlavní úhlopříčka determinantu $|p_{ik}|$ stupně r-tého složená z elementů p_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, r)$; Δ_i pak příčka s ní rovnoběžná obsahující elementy $p_{i1}, p_{i+1,2}, p_{i+2,3}, \ldots, p_{r,r-i+1}$, a Δ_i' příčka rovnoběžná s Δ po druhé straně s elementy $p_{1i}, p_{2,i+1}, p_{3,i+2}, \ldots, p_{r-i+1,r}$ $(i = 2, 3, \ldots)$. Předpokládáme, že

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

že všechny elementy obsažené v příčkách Δ, Δ_2 a Δ_2' jsou kladné a že ostatní všechny elementy jsou rovny nule. Utvořme determinant r-tého stupně $|P_{ik}^{(2)}|$ a označme v něm příčky obdobně jako dříve písmeny Δ, Δ_2, Δ_2' atd.; vzhledem k rovnici (6), odst. 71 snadno se odůvodní, že v novém determinantu budou všechny elementy na příčkách Δ, Δ_2, Δ_2',

$\varDelta_3$ a $\varDelta_3'$ kladné. Utvořme dále determinant $|P_{ik}^{(3)}|$; v něm budou mimo to i všechny elementy příček $\varDelta_4$ a $\varDelta_4'$ kladné atd. Pro dosti veliké n budou všechny veličiny $P_{ik}^{(n)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ kladné. Dokážeme větu:

Splňují-li veličiny p_{ik} rovnice (1) *a jsou-li příslušné veličiny $P_{ik}^{(m)}$ pro určité m všechny kladné, platí*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_k, \quad \sum_{k=1}^{r} P_k = 1.$$

Důkaz provedeme takto: Poněvadž pro uvažované m jsou $P_{ik}^{(m)}$ kladná čísla, jsou také čísla

$$P_{ik}^{(m+1)} = \sum_{s=1}^{r} p_{is} P_{sk}^{(m)}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, r \tag{2}$$

kladná a vůbec čísla $P_{rk}^{(n)}$ jsou kladná pro každé $n > m$. Největší z čísel

$$P_{1k}^{(m)}, P_{2k}^{(m)}, \ldots, P_{rk}^{(m)}$$

označíme L_m, nejmenší pak l_m; obě tyto extrémní hodnoty závisí obecně na indexu k. S rostoucím n se L_n nikdy nezvětšuje a l_n se nikdy nezmenšuje, neboť vzhledem k rovnicím (1) a (2) je každé $P_{ik}^{(m+1)}$ jakousi střední hodnotou veličin $P_{sk}^{(m)}$, $(s = 1, 2, \ldots, r)$. Proto bude

$$l_n < P_{ik}^{(m+n)} < L_n. \tag{3}$$

Kladná čísla $P_{ik}^{(m)}$ vyhovují rovnici (7), odst. 71 a tedy všem těm podmínkám, které musejí splňovati veličiny p_{ik}, aby platila rovnice (6), odst. 75. Posloupnost

$$P_{ik}^{(m)}, P_{ik}^{(2m)}, P_{ik}^{(3m)}, \ldots$$

má tedy limitu P_k nezávislou na i. Obě posloupnosti

$$l_m, l_{2m}, l_{3m}, \ldots \text{ a } L_m, L_{2m}, L_{3m}, \ldots$$

mají rovněž P_k za limitu a vzhledem k (3) má $P_{ik}^{(n)}$ stejnou limitu pro $n \to \infty$.

K existenci limity výrazu $P_{ik}^{(n)}$ pro $n \to \infty$ tedy stačí, aby byly splněny rovnice (1) a aby šikmé příčky Δ, Δ_2 a Δ_2' v determinantu $|p_{ik}|$ byly složeny z prvků vesměs kladných.

78. Charakteristická rovnice. Utvořme z pravděpodobností přechodu p_{ik}, které vyhovují podmínkám

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, r; \; p_{ik} > 0, \; i, k = 1, 2, \ldots, r \quad (1)$$

determinant r-tého stupně $D_r(\lambda)$ závislý na proměnné λ

$$D_r(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda p_{11}, & -\lambda p_{12}, & \ldots, & -\lambda p_{1r} \\ -\lambda p_{21}, & 1 - \lambda p_{22}, & \ldots, & -\lambda p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda p_{r1}, & -\lambda p_{r2}, & \ldots, & 1 - \lambda p_{rr} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Podle odst. 75c vyhovují limity $P_1, P_2, \ldots, P_r$ soustavě rovnic

$$P_k - \sum_{j=1}^{r} p_{jk} P = 0, \; k = 1, 2, \ldots, r, \quad (3)$$

která má determinant $D_r(1)$ rovný nule.

Veličiny P_k jsou kladná čísla a jejich poměry jsou totožné s poměry minorů příslušných k elementům libovolného sloupce v determinantu $D_r(1)$; žádný minor determinantu se nerovná nule.

Napišme soustavu rovnic sdruženou k (3):

$$Q_k - \sum_{j=1}^{r} p_{kj} Q_j = 0, \; k = 1, 2, \ldots, r. \quad (3a)$$

Vzhledem k (1) vyhovíme této soustavě kladouce

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_r.$$

Z toho plyne, že všechny minory příslušné k elementům libovolného řádku v determinantu $D_r(1)$ jsou si rovny. Srovnáme-li s tím, co jsme výše uvedli o poměrech minorů příslušných

ných k elementům jednoho sloupce, docházíme k závěru, že všechny minory determinantu $D_r(1)$ mají totéž znamení. Proto je

$$D_r'(1) = -[M_1(1) + M_2(1) + \ldots + M_r(1)] \neq 0,$$

kde $D_r'(\lambda)$ značí derivaci determinantu $D_r(\lambda)$ dle λ a $M_1(1)$, $M_2(1), \ldots, M_r(1)$ minory příslušné elementům hlavní úhlopříčky v determinantu $D_r(1)$. To znamená: *Jsou-li splněny podmínky* (1), *má charakteristická rovnice*

$$D_r(\lambda) = 0 \tag{2a}$$

jednoduchý kořen $\lambda = 1$. *Limitní hodnoty* P_k *pravděpodobností* $P_{ik}^{(n)}$ *pro* $n \to \infty$ *jsou úměrny minorům, které patří k elementům libovolného sloupce v determinantu* $D_r(1)$.

Poznámka. Charakteristická rovnice (2a), má vždy kořen rovný 1, tedy i když některé z veličin p_{ik} jsou rovny nule.

79. Pravděpodobnosti přechodu jakožto funkce kořenů charakteristické rovnice. a) Předpokládáme stále, že veličiny p_{ik} vyhovují podmínkám (1), odst. 71; připouštíme, že některé z nich mohou býti rovny nule.

Vezměme pak v úvahu dvě soustavy rovnic pro neznámé $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ a $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$:

$$\varphi_k - \lambda\sum_{s=1}^{r} p_{sk}\varphi_s = 0, \quad \psi_h - \lambda\sum_{s=1}^{r} p_{hs}\psi_s = 0, \tag{1}$$
$$k, h = 1, 2, \ldots, r,$$

kde λ je konstanta. Soustavy jsou homogenní vzhledem k neznámým φ_k resp. ψ_h; podmínka řešitelnosti (nehledíme-li k řešení $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_r = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_r = 0$) pro jednu i pro druhou soustavu zní

$$D_r(\lambda) = 0; \tag{2}$$

λ musí tedy býti kořenem charakteristické rovnice (odst. 78). Víme, že tato rovnice má kořen $\lambda = 1$. Pro $\lambda = 1$ přecházejí soustavy (1) v soustavy

$$\varphi_r - \sum_{s=1}^{r} p_{sk}\varphi_s = 0,\ \psi_h - \sum_{s=1}^{r} p_{hs}\psi_s = 0,$$

kterým vyhovují veličiny — viz odst. 75c a 78 —

$$\varphi_k = P_k,\ k = 1, 2, \ldots, r;\ \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_r = \text{const.}$$

V dalším předpokládáme, že charakteristická rovnice (2) má r různých a tedy jednoduchých kořenů. Označíme je takto:

$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}.$$

Poněvadž veličiny φ_k a ψ_h závisí na tom, který z kořenů dosadíme na místo λ do rovnic (1), píšeme na místo (1) obě soustavy v tomto tvaru

$$\varphi_{kj} - \lambda_j \sum_{s=1}^{r} p_{sk}\varphi_{sj} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, r, \tag{3}$$

$$\psi_{hj} - \lambda_j \sum_{s=1}^{r} p_{hs}\psi_{sj} = 0,\ h = 1, 2, \ldots, r. \tag{3a}$$

Pro každý kořen λ_j dostáváme tedy soustavu rovnic (3) pro neznámé φ_{kj}, $(k = 1, 2, \ldots, r)$ a soustavu (3a) pro neznámé ψ_{hj}, $(h = 1, 2, \ldots, r)$. Poněvadž pak

$$\sum_{h=1}^{r} \varphi_{hg}\psi_{hj} = \lambda_g \sum_{s=1}^{r} \Big(\sum_{h=1}^{r} p_{sh}\psi_{hj}\Big)\varphi_{sg} = \frac{\lambda_g}{\lambda_j} \sum_{s=1}^{r} \varphi_{sg}\psi_{sj},$$

je

$$(\lambda_j - \lambda_g) \sum_{h=1}^{r} \varphi_{hg}\psi_{hj} = 0.$$

Pro dva *různé kořeny* λ_j, λ_g platí tedy

$$\sum_{h=1}^{r} \varphi_{hg}\psi_{hj} = 0,\ g, j = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ g \neq j. \tag{4}$$

Je-li $g = j$, je součet na levé straně rovnice (4) obecně různý od nuly. Předpokládejme, že tomu tak je, a násobme čísla $\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \ldots, \varphi_{rj}$ vhodnou konstantou tak, aby (znásobená čísla značíme zase φ_{hj})

$$\sum_{h=1}^{r}\varphi_{hj}\psi_{hj} = 1, \; j = 0, 1, 2, \ldots, r - 1. \tag{5}$$

Tím nejsou veličiny φ_{hj} ani ψ_{hj} jednoznačně stanoveny, ale jsou určeny hodnoty součinů $\varphi_{hj}\psi_{hj}$; násobíme-li všechny veličiny φ_{hj}, $(h = 1, 2, \ldots, r)$ určitou konstantou, musí se všechny veličiny ψ_{hj}, $(h = 1, 2, \ldots, r)$ děliti toutéž konstantou, aby bylo vyhověno podmínkám (5). Součin $\varphi_{hj}\psi_{hj}$ se při tom nemění.

Pro kořen $\lambda_0 = 1$ je (viz rovnice (3) a (3a), odst. 78)

$$\varphi_{k0} = P_k, \; \psi_{k0} = 1, \; k = 1, 2, \ldots, r \tag{6}$$

a rovnice (5) dávají známé podmínky (10), odst. 75. Dosadíme-li do rovnic (4) $j = 0$, obdržíme

$$\sum_{h=1}^{r}\varphi_{hg} = 0, \; g = 1, 2, \ldots, r - 1. \tag{7}$$

b) Hledíme nyní vyjádřiti veličiny p_{ik} veličinami φ_{kj}, ψ_{hj} a kořeny λ_j. Za tím účelem napíšeme rovnici (3) pro určitě zvolené k a dosazujeme do ní za j postupně hodnoty 0, 1, 2, …, $(r - 1)$. Tak dostaneme soustavu r rovnic pro r neznámých veličin $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{rk}$. Determinant rovnic nezávisí na volbě indexu k, takže řešením soustavy obdržíme vzorec

$$p_{ik} = \sum_{g=0}^{r-1} c_{ig}\frac{\varphi_{kg}}{\lambda_g}, \; i = 1, 2, \ldots, r.$$

Dosaďme nyní do rovnice (3a) na místo veličiny p_{hs} pravou stranu právě odvozeného vzorce (se záměnou indexů i, k za h, s); vychází

$$\psi_{hj} = \lambda_j \sum_{s=1}^{r} \sum_{g=0}^{r-1} c_{hg}\frac{\varphi_{sg}\varphi_{sj}}{\lambda_g}.$$

Součet vzhledem k s dá podle (4) nulu, pokud $g \neq j$; v případě, že $g = j$ dostáváme 1 podle (5). Je tedy

$$\psi_{hj} = c_{hj};$$

z toho plyne pro pravděpodobnosti přechodu:

$$p_{ik} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j}. \tag{7a}$$

Abychom určili $P_{ik}^{(n)}$, užijeme rovnice (4), odst. 71. Pro $n = 2$ je

$$P_{ik}^{(2)} = \sum_{s=1}^{r} p_{is}p_{sk} = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{s=1}^{r} \frac{\varphi_{sj}\psi_{ij}\varphi_{kl}\psi_{sl}}{\lambda_j\lambda_l}.$$

Součet podle s dá vzhledem k (4) a (5) nulu, pokud $l \neq j$, a jednotku pro případ, že $l = j$. Součet dle l se tedy redukuje na jediný člen odpovídající indexu $l = j$ a máme

$$P_{ik}^{(2)} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^2}.$$

Docela podobně dostaneme užívajíce rovnice (6), odst. 71 pro

$$P_{ik}^{(3)} = \sum_{s=1}^{r} P_{is}^{(2)} p_{sk} = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{s=1}^{r} \frac{\varphi_{sj}\psi_{ij}\varphi_{kl}\psi_{sl}}{\lambda_j^2\lambda_l} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^3}$$

a obecně

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^n}. \tag{7b}$$

Rovnice (7b) zahrnuje hořejší rovnici (7a) pro p_{ik} jako speciální případ, neboť $P_{ik}^{(1)} = p_{ik}$.

Vypišme v součtu na pravé straně poslední rovnice člen odpovídající indexu $j = 0$ zvláště; vzhledem k (6) bude

$$P_{ik}^{(n)} = P_k + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^n}. \tag{8}$$

Formuli (8) odvodil *V. Romanovsky*.

Veličiny $P_{ik}^{(n)}$, a tedy také veličiny $p_{ik} = P_{ik}^{(1)}$, jsou takto vyjádřeny jako bilineární funkce dvou řad veličin

$$P_k, \varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots, \varphi_{k,r-1};$$
$$1, \psi_{i1}, \psi_{i2}, \ldots, \psi_{i,r-1};$$

veličiny první řady jsou nezávislé na i, veličiny druhé řady nezávislé na k. Z formule (8) plyne, že žádný kořen λ_j charakteristické rovnice nemůže míti absolutní hodnotu menší než 1. Abychom to dokázali, dokažme nejprve, že existuje aspoň jeden pár indexů i a k takový, že

$$\varphi_{kj}\psi_{ij} \neq 0, \; j = 1, 2, \ldots, r-1. \tag{9}$$

Soustava homogenních rovnic (3) má totiž pro kterýkoli z kořenů nenulové řešení takové, že aspoň jedna z veličin φ_{kj}, ($k = 1, 2, \ldots, r$) se nerovná nule. Rovněž tak soustava (3a) má řešení takové, že aspoň jedna z veličin ψ_{hj}, ($h = 1, 2, \ldots, r$) se nerovná nule. Lze tedy k danému λ_j voliti i a k, aby platila nerovnost (9). Kdyby uvažovaný kořen λ_j byl co do absolutní hodnoty menší než 1, rostl by příslušný člen ve výraze (8) do nekonečna s rostoucím n. To však není možno, poněvadž veličiny $P_{ik}^{(n)}$ jsou kladné a menší než 1 vzhledem k rovnici (7), odst. 71. Jsou-li všechny kořeny λ_j, ($j = 1, 2, \ldots, r-1$) co do absolutní hodnoty větší než 1, konverguje pravá strana rovnice (8) k P_k pro $n \to \infty$ a máme větu: *Jsou-li kořeny charakteristické rovnice $D_r(\lambda) = 0$ vesměs různy jeden od druhého a není-li žádný z nich roven -1 nebo komplexnímu číslu s absolutní hodnotou rovnou 1, má $P_{ik}^{(n)}$ limitu (když n roste do nekonečna) nezávislou na i.*

c) Kdyby některý z kořenů λ_j byl roven buď -1 nebo komplexnímu číslu s absolutní hodnotou rovnou 1, neměla by pravá strana rovnice (8) limitu pro $n \to \infty$. O takovém případě jsme uvažovali v odst. 62. Tehdy bylo

$$r = 2, \; p_{11} = 0, \; p_{22} = 0, \; p_{12} = 1, \; p_{21} = 1;$$

příslušná charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} 1, & -\lambda \\ -\lambda, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

má kořeny $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -1$. Podle (3), odst. 78 je

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2};$$

rovnice (3) a (3a), odst. 79 znějí (pro $\lambda_1 = -1$)

$$\varphi_{11} + \varphi_{21} = 0, \ \psi_{11} + \psi_{21} = 0$$

a tedy, vzhledem k (5),

$$\varphi_{11} = 1, \ \varphi_{21} = -1, \ \psi_{11} = \tfrac{1}{2}, \ \psi_2 = -\tfrac{1}{2},$$

takže rovnice (7) dává v souhlase s úvahami odst. 62

$$P_{11}^{(n)} = P_1 + \frac{\varphi_{11}\psi_{11}}{\lambda_1} = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

P_1 nemá ovšem význam limity; P_1 a P_2 jsou definovány jakožto řešení rovnic (3), odst. 78.

80. O různých methodách k výpočtu disperse. Podle odst. 75d má výraz

$$\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}}{n},$$

kde $x^{(k)}$ jsou veličiny přiřaděné výsledkům pokusů (odst. 72), určitou střední hodnotu a tato střední hodnota má limitu a:

$$a = \lim_{n \to \infty} E\,\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}}{n}.$$

Předpokládáme stále, že všechny pravděpodobnosti p_{ik} jsou kladné. Veličina

$$E\,\frac{[x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - na]^2}{n}$$

nazývá se *disperse* a má podle Markova určitou limitní hodnotu pro $n \to \infty$.

Markov odvodil původně vzorec pro dispersi na základě t. zv. *vytvořující funkce*; jeho vzorec pak byl různě upravován.

J. Potoček odvodil jiný vzorec užívaje úvah z theorie funkcí za předpokladu, že všechny p_{ik} jsou kladné.

Za stejného předpokladu, avšak algebraickou methodou odvodil M. Fréchet stejný výsledek.

Připustíme-li, že má charakteristická rovnice vesměs jednoduché kořeny a že mezi nimi není ani -1, ani komplexní číslo s absolutní hodnotou rovnou 1, lze odvoditi přímo vzorec pro dispersi bez předpokladu, že všechny p_{ik} jsou kladné. Tento důkaz uvedu v odst. 81.*)

81. Výpočet disperse. a) Předpokládáme, že charakteristická rovnice $D_r(\lambda) = 0$ má r jednoduchých kořenů a že mezi nimi není ani -1 ani komplexní číslo s absolutní hodnotou rovnou 1. Pak platí rovnice (8), odst. 79 a

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = P_k;$$

dále je podle rovnice (7a), odst. 75

$$\lim_{n\to\infty} Ex^{(n)} = a = \sum_{k=1}^{r} P_k\alpha_k.$$

Vyjdeme z rovnice

$$[\sum_{n=1}^{N}(x^{(n)} - a)]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(x^{(n)} - a)^2 + 2\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}(x^{(n)} - a)(x^{(n+m)} - a);$$

střední hodnota levé strany dělené N rovná se dispersi. Abychom utvořili střední hodnotu pravé strany, uvažme, že

$$P[x^{(n)} = \alpha_k, \text{ je-li } x^{(0)} = \alpha_i] = P_{ik}^{(n)},$$

$$P[x^{(n+m)} = \alpha_k, \text{ je-li } x^{(n)} = \alpha_i] = P_{ik}^{(m)},$$

tedy

*) Přehled prací o řetězech, které mají souvislost s theorií disperse a příslušné citáty jsou uvedeny v odst. 93 a 94.

$$E[\sum_{n=1}^{N}(x^{(n)} - a)]^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)}(\alpha_k - a)^2 +$$
$$+ 2\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-n} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} P_{ik}^{(n)} P_{kl}^{(m)}(\alpha_k - a)(\alpha_l - a). \tag{1}$$

Počítejme postupně oba členy na pravé straně rovnice (1). Dosadíme-li do prvního členu za $P_{ik}^{(n)}$ pravou stranu rovnice (8), odst. 79, obdržíme po úpravě součet dvou výrazů; první z nich je

$$N \,.\, \sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a)^2 \tag{α}$$

a druhý je

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{ij}}{\lambda_j^n}(\alpha_k - a)^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1 - \lambda_j^{-N}}{\lambda_j - 1} \,.$$
$$. \,\varphi_{kj}\psi_{ij}(\alpha_k - a)^2. \tag{β}$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (1) nabude, dosadíme-li příslušné výrazy za $P_{ik}^{(n)}$ a $P_{kl}^{(n)}$, tvaru

$$2\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-n} \sum_{k=1}^{r} \left[P_k + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\psi_{sj}}{\lambda_j^n}\right](\alpha_k - a) \,.$$
$$. \sum_{l=1}^{r} \left[P_l + \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\varphi_{ls}\psi_{ks}}{\lambda_s^m}\right](\alpha_l - a).$$

Proveďme násobení dvojčlenů v lomených závorkách; dostaneme celkem čtyři výrazy:

První výraz

$$2\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-n} \sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a) \sum_{l=1}^{r} P_l(\alpha_l - a)$$

rovná se nule, poněvadž podle (7a) a (10) v odst. 75

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a) = \sum_{k=1}^{r} P_k\alpha_k - a\sum_{k=1}^{r} P_k = a - a = 0.$$

Druhý výraz, provedeme-li v něm sečítání dle m a dle n:

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\lambda_s^{-m} = \frac{\lambda_s^{-N+1}-1}{(\lambda_s-1)^2}+\frac{N-1}{\lambda_s-1},$$

redukuje se na

$$2\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}\sum_{s=1}^{r-1}P_k\varphi_{ls}\psi_{ks}(\alpha_k-a)(\alpha_l-a)\left[\frac{\lambda_s^{-N+1}-1}{(\lambda_s-1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{N-1}{\lambda_s-1}\right]. \qquad (\gamma)$$

Třetí výraz

$$2\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{r-1}P_l\frac{\varphi_{kj}\psi_{lj}}{\lambda_j^n}(\alpha_k-a)(\alpha_l-a)$$

rovná se nule; o tom se přesvědčíme, provedeme-li nejprve sečítání dle l.

Čtvrtý výraz redukuje se, provedeme-li sečítání:

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\lambda_j^{-n}\lambda_s^{-m} = \frac{\lambda_j^{-N+1}-\lambda_s^{-N+1}}{(1-\lambda_s)(\lambda_s-\lambda_j)}+\frac{1-\lambda_j^{-N+1}}{(1-\lambda_s)(1-\lambda_j)}$$

na

$$2\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{s=1}^{r-1}\varphi_{kj}\psi_{lj}\varphi_{ls}\psi_{ks}(\alpha_k-a)(\alpha_l-a)\,.$$
$$\cdot\left[\frac{\lambda_j^{-N+1}-\lambda_s^{-N+1}}{(1-\lambda_s)(\lambda_s-\lambda_j)}+\frac{1-\lambda_j^{-N+1}}{(1-\lambda_s)(1-\lambda_j)}\right] \qquad (\delta)$$

za předpokladu, že $s \neq j$. V případě, že $s = j$, musíme nahraditi výraz v hranaté závorce výrazem

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-n}\lambda_j^{-m-n} = \frac{(N-1)\,\lambda_j^{-N}}{1-\lambda_j}+\frac{1-\lambda_j^{-N+1}}{(1-\lambda_j)^2}.$$

Máme tedy výsledek: *Veličina*

$$E[x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots+x^{(N)}-Na]^2$$

rovná se součtu čtyř výrazů (α), (β), (γ) a (δ); *dělíme-li ji číslem* N, *dostáváme dispersi.*

Podle odst. 79b jsou kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}$ vesměs co do absolutní hodnoty větší než 1. Dělíme-li součet zmíněných čtyř výrazů číslem N a přejdeme-li pak k limitě $N \to \infty$, vychází *vzorec pro limitu disperse*:

$$\lim_{N\to\infty} E \frac{[x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(N)} - Na]^2}{N} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a)^2 + 2\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\varphi_{ls}\psi_{ks}}{\lambda_s - 1} P_k(\alpha_k - a)(\alpha_l - a). \tag{2}$$

b) Dáme pravé straně rovnice jiný tvar; zavedeme veličiny

$$s_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty}(P_{ik}^{(n)} - P_k), \quad i, k = 1, 2, \ldots, r,$$

které vzhledem k (8), odst. 79 vyjádříme takto:

$$s_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\psi_{ij}\varphi_{kj}}{\lambda_j^n} = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\psi_{ij}\varphi_{kj}}{\lambda_j - 1}.$$

Pravá strana rovnice (2) může se tedy psáti takto:

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(\alpha_k - a)^2 + 2\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \sum_{s=1}^{r-1} s_{lk} P_k(\alpha_k - a)(\alpha_l - a). \tag{2a}$$

c) *Levá strana rovnice* (2) *je totožná s limitou*

$$\lim_{n\to\infty} E \frac{[x^{(1)} - a_i^{(1)} + x^{(2)} - a_i^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - a_i^{(n)}]^2}{n}. \tag{3}$$

Zde $a_i^{(k)}$ značí střední hodnotu veličiny $x^{(k)}$ definovanou v odst. 74; předpokládáme, že $x^{(0)} = \alpha_i$. Abychom dokázali, že limita (3) se shoduje s limitou na levé straně rovnice (2), pišme n na místo N a utvořme rozdíl R obou výrazů v čitatelích:

$$R = [\sum_{k=1}^{n} x^{(k)} - na]^2 - [\sum_{k=1}^{n} (x^{(k)} - a_i^{(k)})]^2 =$$

$$= [\sum_{k=1}^{n} (2x^{(k)} - a_i^{(k)}) - na][\sum_{k=1}^{n} (a_i^{(k)} - a)].$$

Poněvadž $E(x^{(k)}) = a_i^{(k)}$, je

$$E(R) = [\sum_{r=1}^{n} a_i^{(k)} - na]^2.$$

Podle odst. 75a je a mezi největší a nejmenší z hodnot $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}, \ldots, a_r^{(k)}$ a platí

$$|a_i^{(k)} - a| < H^{k-1} . \Delta^{(1)}, \; |H| < 1.$$

Proto je

$$E(R) < [\Delta^{(1)} \sum_{r=0}^{n-1} H^k]^2 = \left[\frac{\Delta^{(1)}(1 - H^n)}{1 - H}\right]^2$$

a tedy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E(R)}{n} = 0,$$

čímž je věta dokázána.

d) Výpočtem disperse zde provedeným lze verifikovati výsledky, které jsme odvodili pro řetěz se dvěma eventualitami v odst. 64. Tak na př. v odst. 64b jsme vypočetli dispersi za předpokladu, že

$$p_{12} = p_{21}, \; p_{11} = p_{22}.$$

V tomto zvláštním případě má charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda p_{11}, & -\lambda(1 - p_{11}) \\ -\lambda(1 - p_{11}), & 1 - \lambda p_{11} \end{vmatrix} = 0$$

kořeny

$$\lambda_0 = 1, \; \lambda_1 = \frac{1}{2p_{11} - 1}.$$

Podmínka různosti kořenů je splněna, takže dispersi dostaneme jakožto součet výrazů (α), (β), (γ) a (δ) kladouce do nich (srov. odst. 79)

$$r = 2,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ p_{22} = p_{11},\ p_{12} = p_{21} = 1 - p_{11},$$

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2},\ a = \tfrac{1}{2},\ \lambda_1 = \frac{1}{2p_{11} - 1},\ \varphi_{11} = 1,$$

$$\varphi_{21} = -1,\ \psi_{11} = \tfrac{1}{2},\ \psi_{21} = -\tfrac{1}{2}.$$

Provedeme-li výpočet, shledáme, že součet

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) + (\delta)$$

se skutečně rovná pravé straně rovnice (10), odst. 64.

82. Stacionární řetěz. a) Řetěz o r eventualitách je *stacionární*, je-li absolutní pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že n-tý pokus vede ke zjevu E_k, nezávislá na indexu n. Podmínky stacionárnosti jsou tedy

$$p_k^{(0)} = p_k^{(1)} = p_k^{(2)} = \ldots = p_k^{(n)} = \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, r. \tag{1}$$

Dosaďme do rovnice (8), odst. 71

$$n = 1,\ P_{jk}^{(1)} = p_{jk},\ p_k^{(1)} = p_k^{(0)}.$$

Vychází

$$p_k^{(0)} - \sum_{j=1}^{r} p_j^{(0)} p_{jk} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, r. \tag{2}$$

Připojíme-li k těmto rovnicím podmínku (10), odst. 71, totiž

$$\sum_{k=1}^{r} p_k^{(0)} = 1, \tag{3}$$

jsou pravděpodobnosti $p_k^{(0)}$ jednoznačně určeny rovnicemi (2) a (3); rovnice (2) a (3) jsou totožné se vztahy (9) a (10), odst. 75, kterými byly určeny veličiny $P_1, P_2, \ldots, P_r$. V případě, že existují limity

$$P_k = \lim_{n \to \infty} P_{ik}^{(n)},\ k = 1, 2, \ldots, r,$$

je P_k totožná s $p_k^{(0)}$. Pravděpodobnosti $p_k^{(0)}$ určené rovnicemi (2) a (3) vyhovují podmínkám (1). Tak na př. dává rovnice (8), odst. 71 pro $n = 2$

$$p_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{r} p_j^{(0)} P_{jk}^{(2)} = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(0)} p_{ik} = p_k^{(0)}$$

a obecně se dokáže stejným postupem, že

$$p_k^{(n)} = p_k^{(n-1)} = \ldots = p_k^{(1)} = p_k^{(0)}.$$

Absolutní pravděpodobnost že m-tý pokus vede k E_i a $(m + n)$-tý k E_k, je v případě stacionárního řetězu

$$p_i^{(m)} P_{ik}^{(n)} = p_i^{(0)} \, . \, P_{ik}^{(n)}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, r,$$

závisí tedy na n, nikoli na m.

b) Stacionární řetěz se realisuje tahy z r osudí, v nichž jsou smíchány koule r různých barev a která jsou zevně označena týmiž r barvami (viz odst. 71a). Tahy se konají za těchto podmínek: vyjde-li při n-tém tahu koule i-té barvy, koná se $(n + 1)$-tý tah z osudí i-té barvy; předběžný (nultý) tah se koná z pomocného osudí, ve kterém jsou koule oněch r barev v takovém poměru, že pravděpodobnost vytáhnouti kouli j-té barvy je rovna $p_j^{(0)}$, $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Pravděpodobnost, že koule vytažená z i-tého osudí má k-tou barvu, je rovna p_{ik}. Absolutní pravděpodobnosti $p_j^{(0)}$ jsou určeny na základě daných pravděpodobností p_{ik} rovnicemi (2).

c) Všimněme si ještě *stacionárního řetězu v případě* $r = 2$. Absolutní pravděpodobnost, že veličina $x^{(m)}$, přiřaděná m-tému pokusu, má hodnotu α_i a že současně $x^{(m+n)} = \alpha_k$ budiž $p_{ik}^{(n)}$, tedy

$$P[x^{(m)} = \alpha_i, \; x^{(m+n)} = \alpha_k] = p_{ik}^{(n)}; \; i, k = 1, 2, \ldots, r.$$

Tato veličina nezávisí na m, neboť

$$p_{ik}^{(n)} = p_i^{(m)} \, . \, P_{ik}^{(n)} = p_i^{(0)} \, . \, P_{ik}^{(n)}. \tag{4}$$

Podle rovnic (2) a (3), odst. 65 je

$$P_{12}^{(n)} = 1 - P_{11}^{(n)} = p_{12}\frac{1-\delta^n}{1-\delta},\ P_{21}^{(n)} = p_{21}\frac{1-\delta^n}{1-\delta},$$

$$p_1^{(0)} = \frac{p_{21}}{1-\delta},\ \delta = p_{11} - p_{21},$$

přihlížíme-li k tomu, že $p_{11} + p_{12} = 1$. Rovnice (4) dává

$$p_{21}^{(n)} = p_{21}p_{12}\frac{1-\delta^n}{1-\delta} = p_{21}^{(n)},\ p_{11}^{(n)} = p_1^{(0)}P_{11}^{(n)},\ p_{22}^{(n)} = p_2^{(0)}P_{22}^{(n)}. \tag{5}$$

Počítejme nyní *koeficient korelace R mezi veličinami $x^{(m)}$* a $x^{(m+n)}$. Srovnejme označení, kterého užíváme v kap. VI a VII s tím, kterého jsme užili v rovnici (3), odst. 56 pro R; abychom přešli k hledané hodnotě R, musíme na místo dřívějších znaků

$$p_1,\ p_2,\ p_{11},\ p_{12},\ p_{21},\ p_{22},\ x_1,\ x_2$$

psáti po řadě

$$p_1^{(0)},\ p_2^{(0)},\ p_{11}^{(n)},\ p_{12}^{(n)},\ p_{21}^{(n)},\ p_{22}^{(n)},\ \alpha,\ \beta.$$

Rovnice (4), odst. 56 jsou splněny, neboť přecházejí, zkrátíme-li první dva zlomky činitelem $p_1^{(0)}$ a třetí činitelem $p_2^{(0)}$, v

$$\frac{P_{11}^{(n)} - p_1^{(0)}}{1 - p_1^{(0)}} = \frac{P_{12}^{(n)} - p_2^{(0)}}{-p_2^{(0)}} = \frac{P_{22}^{(n)} - p_2^{(0)}}{1 - p_2^{(0)}}. \tag{6}$$

Tyto tři výrazy jsou identické, což poznáme vyjádříce podle (5) všechny veličiny zde se vyskytující pomocí δ a p_{21}:

$$P_{11}^{(n)} = \delta^n + p_{21}\frac{1-\delta^n}{1-\delta},\ P_{12}^{(n)} = 1 - P_{11}^{(n)},$$

$$P_{22}^{(n)} = 1 - p_{21}\frac{1-\delta^n}{1-\delta},\ p_1^{(0)} = \frac{p_{21}}{1-\delta},\ p_2^{(0)} = 1 - p_1^{(0)}.$$

Společná hodnota tří zlomků (6) je δ^n, tedy

$$R = \delta^n = (p_{11} - p_{21})^n.$$

Je-li jednoduchý řetěz o dvou eventualitách stacionární a je-li n-tému pokusu přiřaděna veličina $x^{(n)}$, *která má hodnotu* α (β) *pro zdařený (nezdařený) pokus, je koeficient korelace mezi* $x^{(m)}$ *a* $x^{(m+n)}$ *kvalitativní, nezávislý na* α *a* β, *a rovná se* $(p_{11} - p_{21})^n$.

ROZMANITÁ UŽITÍ MARKOVOVÝCH ŘETĚZŮ

83. Poincaréova úloha o míchání karet. Je dáno q karet, které jsou původně uspořádány v určité počáteční sestavě S_1; ostatní sestavy (neboli permutace) označíme $S_2, S_3, \ldots, S_r$, kde $r = q!$. Operace, t. j. způsob zamíchání (přemístění) karet se určuje takto: Místa, která zaujímají jednotlivé karty před operací, označíme pořadovými čísly $1, 2, \ldots, q$; je dáno číslo místa, které bude míti po operaci karta zaujímající před operací prvé místo; podobně je dáno číslo místa, které bude míti po operaci karta zaujímající před operací druhé místo atd. pro všechna místa. Operaci, která převádí počáteční sestavu S_1 do S_k, označíme S_k.

Hráč míchá karty opětovně. Každé zamíchání spočívá v tom, že hráč provede jednu z operací S_i. Budiž p_i pravděpodobnost, že provede S_i. Jak veliká je pravděpodobnost, že po n postupně provedených operacích budou karty tvořiti sestavu S_k? Předpokládáme, že

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1, \; p_k > 0, \; k = 1, 2, \ldots, r.$$

Znak $S_i S_j$ (symbolický součin) značí operaci, která vznikne, když provedeme nejprve S_i (tato operace převádí původní sestavu S_1 do sestavy S_i) a pak S_j. Znak S_i^{-1} značí operaci inversní k S_i, t. j. operaci, která vede od sestavy S_i k S_1. Sestavme tabulku symbolických součinů:

$$\begin{array}{l}
S_1^{-1}S_1, \; S_1^{-1}S_2, \; S_1^{-1}S_3, \; \ldots, \; S_1^{-1}S_r \\
S_2^{-1}S_1, \; S_2^{-1}S_2, \; S_2^{-1}S_3, \; \ldots, \; S_2^{-1}S_r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_r^{-1}S_1, \; S_r^{-1}S_2, \; S_r^{-1}S_3, \; \ldots, \; S_r^{-1}S_r.
\end{array}$$

Každý z těchto součinů je rovnocenný určité z operací $S_1, S_2, \ldots$ Vepíšeme-li ji do tabulky na místo toho součinu, obdržíme „multiplikační tabulku grupy permutací". V každém řádku této tabulky vyskytují se všechny operace S_k, každá právě jednou. Rovnost dvou operací v i-tém řádku by totiž vyžadovala, aby

$$S_i^{-1} S_j = S_i^{-1} S_k,$$

tedy, aby $S_j = S_k$, což není možno, pokud $j \neq k$. Podobně v každém sloupci se vyskytuje každá operace právě jednou. V průseku i-tého řádku tabulky s k-tým sloupcem stojí operace $S_i^{-1} S_k$, která převádí i-tou sestavu v k-tou. V každém poli úhlopříčky je operace identická $S_k^{-1} S_k = S_1$, která nemění sestavení karet.

Nahraďme nyní v multiplikační tabulce v každém jejím poli symbol operace S_j, který je tam vepsán, příslušnou pravděpodobností p_j. V nové tabulce stojí pak v průseku i-tého řádku s k-tým sloupcem pravděpodobnost p_{ik}, že nějaká operace vede od i-té sestavy ke k-té. Každá p_{ik} je totožná s jednou z veličin p_j. Poněvadž v každém řádku a v každém sloupci nové tabulky jsou zastoupeny všechny veličiny p_j, každá jednou, platí

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, r; \; \sum_{i=1}^{r} p_{ik} = 1, \; k = 1, 2, \ldots, r.$$

Jsou tedy splněny všechny podmínky nutné k tomu, aby platil dodatek k Markovově větě (odst. 76), takže pro $p_{ik} > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P_{ik}^{(n)} = \frac{1}{r}, \; r = q! \tag{1}$$

Zde značí $P_{ik}^{(n)}$ pravděpodobnost, že, jsou-li karty původně v sestavě S_i, přejdou po n postupně provedených operacích do sestavy S_k.

Tedy: *Pravděpodobnost, že se dostaví určitá sestava karet, když karty byly nekonečně mnohokrát postupně zamíchány, je* *konstantní; nezávisí ani na počáteční sestavě karet ani na hodnotách pravděpodobností p_i.*

Soustava pravděpodobností p_i charakterisuje individualitu hráčovu, jak praví Poincaré; některý hráč je nakloněn aplikovati spíše některou operaci než jinou, takže některá z čísel p_i mají pro něj větší hodnoty, jiná menší. Pro jiného hráče mají p_i zase jiné hodnoty, ale limita (1) je stejná pro všechny hráče a pro libovolné sestavy karet počátečnou a konečnou.*)

84. Lévyova úloha o míchání karet. a) Nechť jsou 1, 2, ... pořadová čísla karet v počáteční sestavě a ptejme se, jaká je pravděpodobnost, že po n operacích karta, která v počáteční sestavě měla pořadové číslo i, bude míti pořadové číslo k. Tyto pravděpodobnosti jsou v určité souvislosti s pravděpodobnostmi p_s, které jsme zavedli v odst. 83. Počítejme nejprve pravděpodobnost a_{ik}, že karta přejde jedinou operací z pořadí i do pořadí k.

Předně je

$$a_{ii} = \sum_i p_{si};$$

sumační index s probíhá hodnoty i příslušné po řadě všem těm operacím S_i, kterými se nemění poloha karty nalézající se na i-tém místě. Všech těchto operací, při nichž se ostatních $(q - 1)$ karet libovolně permutuje, je celkem $(q - 1)!$; tolik sčítanců má náš součet.

Buďte nyní S a T dvě různé operace takové, že každou z nich se převádí karta z pořadí i do pořadí k; patrně je $ST^{-1} = U$, kde U značí operaci, která nemění pořadí karty nacházející se na i-tém místě. Z toho plyne, že $S = UT$, t. j. že všechny operace, které převádějí kartu z pořadí i do pořadí k, dostaneme takto: napřed provedeme nějakou operaci U, která kartu ponechává na i-tém místě a pak provedeme jednu určitou operaci T, která ji převede na k-té místo.

*) *H. Poincaré*: Calcul des probabilités, 2ème édition, p. 301, Paris 1912.

Všech operací U je celkem $(q - 1)!$, zrovna tolik je tudíž operací vyjádřitelných ve tvaru UT. Napišme pravděpodobnosti p_s příslušné všem těmto operacím a sečtěme je. Součet dává hledanou pravděpodobnost:

$$a_{ik} = \sum_{i,k} p_s; \quad i, k = 1, 2, \ldots, q.$$

Napravo se sečítají pravděpodobnosti p_s všech těch operací, které převádějí kartu z i-tého místa (pořadí) na k-té.

Veličiny a_{ik}, $(i, k = 1, 2, \ldots, q)$ jsou vesměs kladné (po případě některé z nich jsou rovny nule, jsou-li některé z veličin p_s rovny nule) a vyhovují rovnicím

$$\sum_{k=1}^{q} a_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{1}$$

Každá karta může totiž přejíti z pořadí i do pořadí k (jedinou operací) celkem $(q - 1)!$ různými operacemi; a_{ik} se tedy vyjadřuje jakožto součet $(q - 1)!$ čísel p_s. Celý součet na levé straně kterékoli z rovnic (1) skládá se tedy z $q(q - 1)! = q!$ vesměs různých sčítanců p_s, jichž součet se ovšem rovná 1. Zcela stejně se odůvodní, vezmeme-li v úvahu inversní operace, že

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ik} = 1.$$

Veličiny a_{ik}, $(i, k = 1, 2, \ldots, q)$, vyhovující rovnicím (1) a (2), splňují tedy podmínky, za kterých platí dodatek k Markovově větě uvedený v odst. 76, takže máme pro $a_{ik} > 0$ výsledek: *Nechť je počáteční číslo karty jakékoli, pravděpodobnost, že karta bude míti po nekonečně velikém počtu operací pořadové číslo k, je rovna* $1 : q$, *kde q je počet karet.**)

b) Všimněme si blíže případu tří karet, kdy $q = 3$. Celkem je šest operací ($r = q! = 6$), kterými lze permutovati tři karty. Označíme je takto:

*) *P. Lévy*: Calcul des probabilités, p. 49; Paris 1925.

$$S_1 = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}; \; S_2 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}, \; S_3 = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}, \; S_4 = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},$$

$$S_5 = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}, \; S_6 = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}.$$

S_1 je operace identická; S_2 nechává kartu stojící na 1. místě v klidu a permutuje karty stojící na 2. a 3. místě; S_4 je permutace cyklická, jež zvyšuje pořadové číslo každé karty(myslíme si karty rozloženy dokola, podél kružnice) o jednotku atd. Jsou-li pak p_i pravděpodobnosti operací S_i, $(i = 1, 2, \dots, 6)$, máme v označení odst. 83

$$\begin{aligned} a_{11} &= p_1 + p_2, & a_{12} &= p_3 + p_4, & a_{13} &= p_5 + p_6, \\ a_{21} &= p_3 + p_5, & a_{22} &= p_1 + p_6, & a_{23} &= p_2 + p_4, \\ a_{31} &= p_4 + p_6, & a_{32} &= p_2 + p_5, & a_{33} &= p_1 + p_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Z těchto rovnic odvodíme, přihlížejíce k podmínce

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1,$$

vztahy

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} = 1, \; \sum_{k=1}^{3} a_{ik} = 1; \; i = 1, 2, 3.$$

85. Veličiny závislé na veličinách, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v řetěz. Nechť jsou $E_1, E_2, \dots, E_r$ zjevy, jež se mohou vyskytnouti jakožto výsledky nějakého pokusu; předpokládáme, že výsledky opětovně prováděných „pokusů prvního druhu" jsou spojeny v jednoduchý řetěz s konstantními pravděpodobnostmi přechodu p_{ik}. Nechť jsou dále $F_1, F_2, \dots, F_s$ jiné zjevy, které se vyskytují jakožto výsledky „pokusů druhého druhu". Pokusy prvního a druhého druhu jsou v určité souvislosti, která je stanovena takto: $P_{ij}^{(n)}$ značí jako dříve pravděpodobnost, že n-tý pokus prvního druhu dá výsledek E_j, dal-li předběžný (nultý) pokus prvního druhu výsledek E_i. ϱ_{jk} je pravděpodobnost, že n-tý pokus druhého druhu dá výsledek F_k, je-li známo, že n-tý pokus prvého druhu dal E_j. Dále budiž $R_{ik}^{(n)}$ pravděpodobnost, že n-tý pokus druhého druhu dá F_k, dal-li předběžný (nultý) pokus prvého druhu výsledek E_i. Platí rovnice

$$R_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(n)} \varrho_{jk}, \quad i = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Roste-li n do nekonečna a vyhovují-li p_{ik} podmínkám (1), odst. 75, má $P_{ij}^{(n)}$ limitu P_j a tedy také $R_{ik}^{(n)}$ má limitu R_k a platí, že

$$R_k = \lim_{n \to \infty} R_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} P_j \varrho_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, s; \tag{1}$$

R_k nezávisí na i.

Toto schema, ve kterém přicházejí v úvahu zjevy F_k netvořící řetěz, ale spojené s jinými zjevy E_i, které tvoří řetěz, pochází od Markova; v odst. 88 bude uveden příklad.

86. Tahy ze dvou osudí se záměnou koulí. Úloha, kterou se zabýval D. Bernoulli, Laplace a Markov, zní takto: Dvě osudí A a B obsahují každé e koulí; v úhrnném počtu $2e$ všech koulí je polovina bílých a polovina černých. Tah se provádí tak, že současně vytáhneme po jedné kouli z každého osudí; pak vložíme do B kouli vytaženou z A, a do A kouli vytaženou z B. Vykonejme n takových tahů; jak veliká je pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že v osudí A je po n tazích právě k bílých koulí? ($k = 0, 1, 2, \ldots, e$).

Počet bílých koulí v A po 1. tahu, po 2. tahu, po 3. tahu, ... jsou veličiny, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v řetěz o $(e + 1)$ eventualitách. Budiž p_{ik}, $(i, k = 0, 1, 2, \ldots, e)$ pravděpodobnost, že v A bude po tahu k bílých koulí, bylo-li jich tam i před tahem. Dostaneme tyto vzorce:

$$p_{j,j-1} = \frac{j^2}{e^2}, \quad p_{jj} = 2\frac{(e-j)\,j}{e^2}, \quad p_{j,j+1} = \frac{(e-j)^2}{e^2},$$
$$\text{pro } 0 < j < e, \tag{1}$$

$$p_{00} = 0, \quad p_{01} = 1, \quad p_{e,e-1} = 1, \quad p_{ee} = 0. \tag{2}$$

Mimo to je

$$p_{ik} = 0, \text{ je-li } |i - k| \geqq 2, \tag{3}$$

neboť počet bílých koulí v A se může tahem změniti nejvýše o jednu.

Z rovnic (1) a (2) plyne, že rovnice (1), odst. 71 jsou splněny pro $r = e + 1$, že totiž je

$$\sum_{k=0}^{e} p_{ik} = 1,\ i = 0, 1, 2, \ldots, e.$$

Prostá pravděpodobnost $p_k^{(n)}$, že po n-tém tahu bude v A právě k bílých koulí, vyjádří se pravděpodobnostmi $p_{k-1}^{(n-1)}$, $p_k^{(n-1)}$ a $p_{k+1}^{(n-1)}$. Neboť $p_k^{(n)}$ je úhrnná pravděpodobnost rovná součtu tří pravděpodobností, které odpovídají třem možným případům: po $(n - 1)$-tém tahu je v osudí A buď $(k - 1)$ bílých koulí nebo k nebo $(k + 1)$. Vyjádříme-li tyto tři pravděpodobnosti a sečteme-li je, vychází

$$p_k^{(n)} = p_{k-1}^{(n-1)} \cdot p_{k-1,k} + p_k^{(n-1)} \cdot p_{kk} + p_{k+1}^{(n-1)} \cdot p_{k+1,k}. \tag{4}$$

Tato rovnice je totožná s rovnicí (9), odst. 71, dosadíme-li $n = 1$ a píšeme-li pak $(n - 1)$ na místo m, a p_{jk} na místo $P_{jk}^{(1)}$. Na pravé straně (4) jsou ovšem jen tři členy, neboť ostatní p_{jk} jsou rovny nule podle podmínek (2) a (3). Dosaďme nyní do rovnice (4) na místo p_{jk} příslušné výrazy (1) a (2); dostaneme

$$p_k^{(n)} = p_{k-1}^{(n-1)} \cdot \frac{(e - k + 1)^2}{e^2} +$$

$$+ 2p_k^{(n-1)} \frac{(e - k) \cdot k}{e^2} + p_{k+1}^{(n-1)} \frac{(k + 1)^2}{e^2}. \tag{5}$$

Považujme $p_k^{(n)}$ za funkci dvou proměnných celých čísel k a n, $(k = 0, 1, 2, \ldots, e;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$; (5) je parciální diferenční rovnice pro neznámou $p_k^{(n)}$. Známe-li pravděpodobnosti $p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_e^{(0)}$, že před prvním tahem je v osudí A po řadě 0, 1, 2, ..., e bílých koulí, určíme z rovnice (5) nejprve $p_k^{(1)}$, pak $p_k^{(2)}$ atd.

Je-li ve zvláštním případě dáno, že před prvním tahem je v osudí A právě i bílých koulí, je (srov. odst. 71)

$$p_i^{(0)} = 1,\ p_j^{(0)} = 0 \text{ pro } j \neq i;\ p_k^{(n)} = P_{ik}^{(n)},\ P_{ik}^{(1)} = p_{ik}.$$

$P_{ik}^{(n)}$, ($k = 0, 1, 2, \ldots, e$; $n = 1, 2, \ldots$) značí zde pravděpodobnost, že v A je po n-tém tahu k bílých koulí, bylo-li jich tam i před prvním tahem. Dosaďme do (5) $P_{ik}^{(n)}$ na místo $p_k^{(n)}$; dostaneme rovnici

$$P_{ik}^{(n)} = P_{i,k-1}^{(n-1)} \cdot \frac{(e-k+1)^2}{e^2} + 2P_{ik}^{(n-1)} \frac{(e-k)\,k}{e^2} + \\ + P_{i,k+1}^{(n-1)} \frac{(k+1)^2}{e^2}; \qquad (5a)$$

tato rovnice je totožná s první rovnicí (6), odst. 71, máme-li na mysli, že p_{jk} jsou definovány hořejšími vzorci (1), (2) a (3).

Napišme veličiny p_{ik} do tvaru matice o $e + 1$ řádcích a $e + 1$ sloupcích. Užijme označení zavedeného v odst. 77; vzhledem k rovnicím (1), (2) a (3) jsou v hlavní úhlopříčce Δ matice a na přilehlých s ní rovnoběžných příčkách Δ_2 a Δ_2' vesměs kladné*) prvky p_{ik}, kdežto všechny ostatní jsou rovny nule. Podle úvah uvedených v odst. 77 jsou všechny veličiny $P_{ik}^{(n)}$ kladné, je-li n dosti veliké. Z toho pak plyne, že $P_{ik}^{(n)}$ má pro $n \to \infty$ limitu P_k nezávislou na i (odst. 77). Mezní hodnoty P_k se určí řešením rovnic (9) a (10), odst. 75, které nyní píšeme ve tvaru:

$$P_k - \sum_{i=0}^{e} P_i p_{ik} = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, e;\ \sum_{k=0}^{e} P_k = 1. \qquad (6)$$

Abychom potvrdili, že těmto rovnicím se vyhoví, položíme-li**)

*) S výjimkou prvků $p_{00} = 0$, $p_{ee} = 0$.

**) $(e)_k$ je binomický symbol (viz odst. 3c); $(e)_k = \dfrac{e!}{k!(e-k)!}$.

$$P_k = \frac{[(e)_k]^2}{(2e)_e}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, e, \tag{7}$$

napišme levou stranu k-té rovnice (6) ve tvaru

$$P_k(1 - p_{kk}) - P_{k-1} \cdot p_{k-1,k} - P_{k+1}p_{k+1,k} \tag{8}$$

a dosaďme sem za P_k a p_{jk} podle (7) a (1), (2), (3); přihlížejíce k vztahům

$$(e)_k = (e)_{k-1} \cdot \frac{e - k + 1}{k};$$

$$(e)_{k+1} = (e)_{k-1} \frac{(e - k + 1)(e - k)}{k(k + 1)},$$

shledáme, že výraz (8) se rovná nule. Soustavě homogenních rovnic (6) je tedy vyhověno. Abychom dokázali, že součet všech P_k se rovná 1, srovnejme koeficienty při x^e na obou stranách rovnice

$$(1 + x)^e(1 + x)^e = (1 + x)^{2e};$$

vychází

$$\sum_{j=0}^{e}[(e)_j]^2 = (2e)_e, \tag{9}$$

a tedy, dosadíme-li za P_k podle (7),

$$\sum_{k=0}^{e} P_k = 1.$$

Pravá strana rovnice (7) je rovna pravděpodobnosti, že skupina koulí vyvolená z $2e$ koulí, z nichž je e bílých a e černých, obsahuje právě k bílých koulí. Docházíme k výsledku:

Po nekonečně velkém počtu postupně provedených tahů je pravděpodobnost, že v osudí A bude právě k bílých koulí, rovna pravděpodobnosti, že bude právě k bílých koulí ve skupině e koulí vytažených z osudí, ve kterém je smícháno e koulí bílých a e černých.

87. Charakteristická rovnice příslušná předešlé úloze. Utvořme charakteristickou rovnici (odst. 78), v níž jsou p_{ik} definovány rovnicemi (1), (2) a (3), odst. 86. Změníme-li znaménka u všech členů determinantu $D_r(\lambda)$ a píšeme-li pak s na místo $1 : \lambda$, nabude rovnice tvaru

$$\varDelta_{e+1} = \begin{vmatrix} p_{00} - s, & p_{01}, & \ldots, & p_{0e} \\ p_{10}, & p_{11} - s, & \ldots, & p_{1e} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ p_{e0}, & p_{e1}, & \ldots, & p_{ee} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Tak dostaneme pro $e = 2$

$$\varDelta_3(s) = \begin{vmatrix} -s, & 1, & 0 \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} - s, & \frac{1}{4} \\ 0, & 1, & -s \end{vmatrix} = 0,$$

kde

$$\varDelta_3(s) = -(s-1)(s+\tfrac{1}{2})\, s,$$

a dále

$$\begin{aligned} \varDelta_4(s) &= (s-1)(s+\tfrac{1}{9})(s+\tfrac{1}{3})(s-\tfrac{1}{3}) \\ \varDelta_5(s) &= -(s-1)(s-\tfrac{1}{2})(s+\tfrac{1}{4})(s+\tfrac{1}{8})(s-\tfrac{1}{8}) \\ \varDelta_6(s) &= (s-1)(s-\tfrac{3}{5})(s-\tfrac{7}{25})(s+\tfrac{1}{5})(s+\tfrac{3}{25})(s-\tfrac{1}{25}) \\ \varDelta_7(s) &= -(s-1)(s-\tfrac{2}{3})(s-\tfrac{7}{18})(s+\tfrac{1}{6})(s-\tfrac{1}{6})(s+\tfrac{1}{9})\, s. \end{aligned}$$

Kořeny rovnice $\varDelta_{e+1}(s) = 0$ jsou racionální čísla, pokud $e \leqq 6$. J. Potoček poznamenal r. 1937, že toto pravidlo platí obecně a že kořeny rovnice

$$\varDelta_{e+1}(s) = 0$$

jsou pro každé e vyjádřeny vzorcem:

$$s_k = \frac{(e-k)^2 - k}{e^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, e, \tag{1}$$

který pro $e = 2, 3, 4, 5, 6$ souhlasí se shora uvedenými rozklady determinantu $\varDelta_{e+1}(s)$ v činitele. Podle Fréchetovy zprávy*) dokázal T. R. Rawles obecně vzorec (1) nezávisle na Potočkovi.

Zavedeme-li do počtu kořeny $s_0 = 1, s_1, s_2, \ldots, s_e$ na místo kořenů λ_j původní charakteristické rovnice, změní se formule Romanovského (8), odst. 79 takto:

$$P_{ik}^{(n)} = P_k + \sum_{j=1}^{e} \varphi_{kj}\psi_{ij}s_j^n.$$

88. Tahy ze dvou osudí se záměnou koulí; druhá úloha. Vraťme se k tahům ze dvou osudí za podmínek uvedených v odst. 86 a položme si úlohu: Ustanoviti limitu pro $n \to \infty$ pravděpodobnosti, že při n-tém tahu se záměnou koulí bude z osudí A vytažena bílá koule.

Užijeme Markovova schematu vyloženého v odst. 85. Za podmínek naší úlohy je počet bílých koulí v A roven buď 0 nebo 1, 2, 3, ..., e. Za zjev E_i považujeme případ, že v A je právě i bílých koulí ($i = 0, 1, 2, \ldots, e$). Za zjev F_1 považujeme tah bílé koule z A, a za zjev F_2 tah černé z osudí A; v označení odst. 85 je tedy $r = e + 1$, $s = 2$. Poněvadž P_j jsou určeny rovnicí (7), odst. 86 a

$$\varrho_{j1} = \frac{j}{e}, \quad \varrho_{j2} = \frac{e-j}{e},$$

bude hledaná limita R_1 dána vzorcem (1), odst. 85:

$$R_1 = \sum_{j=0}^{e} P_j\varrho_{j1} = \sum_{j=0}^{e} \frac{[(e)_j]^2}{(2e)_e} \cdot \frac{j}{e}. \tag{1}$$

Podle Potočka dokáže se, že poslední součet je roven $\frac{1}{2}$ takto: Z rovnice

$$\sum_{j=0}^{e} [(e)_j]^2 \cdot j = \sum_{j=0}^{e} [(e)_j]^2 (e-j)$$

*) *M. Fréchet*: Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités, second livres p. 285 (Paris 1938) cituje práci: *T. R. Rawles*: A problem of Laplace (Report of third annual Conference on economics and statistics; Colorado Springs, 1937).

plyne, že

$$\sum_{j=0}^{e}[(e)_j]^2 \cdot j = \tfrac{1}{2}e \cdot \sum_{j=0}^{e}[(e)_j]^2.$$

Podle (9), odst. 86 je pravá strana této rovnice rovna

$$\tfrac{1}{2}e(2e)_e$$

a tedy, dosadíme-li do pravé strany rovnice (1), vychází

$$R_1 = \tfrac{1}{2}.$$

Po nekonečně velkém počtu tahů ze dvou osudí se záměnou koulí, je-li v každém osudí stejný počet koulí a úhrnný počet bílých koulí v obou osudích roven úhrnnému počtu černých, je pravděpodobnost vytáhnouti z daného osudí bílou kouli rovna jedné polovině.

89. Zákon velkých čísel v případě řetězu. Nechť jsou $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ veličiny přiřaděné po řadě výsledkům prvního, druhého, ..., n-tého, ... pokusu; $a^{(n)}$ nechť značí střední hodnotu veličiny $x^{(n)}$. Veličiny $x^{(n)}$ splňují zákon velkých čísel, liší-li se aritmetický střed veličin $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ od aritmetického středu hodnot $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ o méně než ε s pravděpodobností blížící se jistotě, když n roste do nekonečna.

Položme

$$B_n = E[x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - a^{(1)} - a^{(2)} - \ldots - a^{(n)}]^2.$$

Podle odst. 24 splňují veličiny $x^{(n)}$ zákon velkých čísel, je-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{n^2} = 0. \tag{1}$$

Důkaz podaný v odst. 24 platí i v tom případě, že veličiny $x^{(n)}$ nejsou vzájemně nezávislé. *Zákon velkých čísel platí pro veličiny $x^{(n)}$, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v jednoduchý Markovův řetěz o r alternativách, jsou-li všechny pravděpodob-*

nosti přechodu p_{ik} *kladné,* neboť, podle rovnice (2), odst. 81 existuje konečná limita disperse, t. j.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{n}$$

a tedy je splněna podmínka (1).

90. Regularisace pravděpodobností spojených v řetěz. Ergodický princip. a) Konáme pokus, jenž může míti různé výsledky $E_1, E_2, \ldots, E_r$ s různými pravděpodobnostmi; pravíme, že tomu pokusu náleží určité *rozdělení pravděpodobností* (t. j. že různé jeho výsledky mají různé pravděpodobnosti). Konáme-li řadu pokusů, z nichž každý má za výsledek některý ze zjevů $E_1, E_2, \ldots, E_r$ a jsou-li pokusy spojeny v řetěz, závisí rozdělení pravděpodobností na pořadovém čísle n pokusu. V obecném případě (na př. jsou-li všechny prvky p_{ik} jednoduchého řetězu konstantní a kladné) se rozdělení pravděpodobností zjednodušuje s rostoucím n, nastává *regularisace.*

Tak v úloze o míchání karet (odst. 83) jeví se na př. po pátém zamíchání vliv počáteční sestavy karet. Kdybychom srovnali karty do dané počáteční sestavy S_1, a pětkrát zamíchali, a kdybychom pak karty znovu srovnali do téže sestavy S_1, a zase pětkrát zamíchali atd., dostali bychom na konci každé takové serie pěti „operací" postupně provedených nějakou konečnou sestavu karet. Proveďme mnoho takových pokusů a zaznamenejme konečné sestavy po pěti operacích. Tak dostaneme statistiku o tom, kolikrát se vyskytla která konečná sestava a tím přibližně rozdělení pravděpodobností pro jednotlivé sestavy. Rozdělení bude závislé na tom, jakou sestavu jsme volili za počáteční; kdybychom místo S_1 volili jinou za počáteční, dopadla by statistika konečných sestav jinak. Kdybychom však zamíchali karty n-krát (místo pětkrát), ukázalo by se, že vliv počáteční sestavy po n-tém zamíchání je tím menší, čím je n větší. Provedeme-li postupně nekonečně veliký počet operací, má každá sestava karet stejnou pravděpodobnost, že se objeví jakožto konečná; rozdělení pravděpodobností se regularisuje.

V úloze o tazích ze dvou osudí se záměnou koulí (odst. 86—88) jde o pravděpodobnost, s jakou očekáváme určité složení osudí po n-tém tahu (buď není v A žádná bílá koule, nebo je tam jedna, dvě, ...). Rozdělení těchto pravděpodobností jistě závisí na tom, kolik bílých koulí bylo v A před prvním tahem. Ale roste-li n do nekonečna, tato závislost zmizí; po nekonečně velikém počtu tahů je pravděpodobnost P_k, že v A bude k bílých koulí, rovna $[(e)_k]^2 : (2e)_e$. Regularisace je zde taková, že konečné rozdělení pravděpodobností není rovnoměrné (P_k závisí na k), nezávisí však na počátečním složení osudí.

b) Geometrický obraz řetězu (odst. 72) hodí se ke studiu soustav, které se vyvíjejí během času. Znázorněme si jednotlivé stavy, ve kterých uvažovaná soustava (na př. soustava molekul plynu uzavřeného v nádobě) může býti, body A_1, $A_2, \ldots, A_r$. Pozorujeme soustavu po uplynutí určitého časového intervalu τ, pak po intervalu 2τ, 3τ atd. Soustava je znázorněna pohyblivým bodem B, jenž po každé splývá s některým z bodů A_k. Připouštíme, že zákony, jimiž se řídí časový vývoj soustavy, neurčují vývoj naprosto přesně, nýbrž že jsou dány jen pravděpodobnosti přechodů z jednoho stavu A_i do druhého A_k. V některých případech přijímáme t. zv. *ergodický princip*, podle kterého pravděpodobnost, že soustava se dostane za určitou dobu do určitého stavu A_k, se s časem mění, ale po uplynutí nekonečně dlouhé doby nabývá určité hodnoty závislé jen na indexu k. Ergodický princip se odůvodňuje regularisací, která ve smyslu shora uvedených příkladů o míchání karet a o tazích ze dvou osudí se záměnou koulí, nastává za určitých podmínek u zjevů spojených v Markovův řetěz; význam řetězů je právě v tom, že dávají základ k přesnému vyjádření ergodického principu.

91. Obecný pojem náhody a statistické zákonitosti. a) V odst. 36—41 jsme jednali o regularisaci při geometrických pravděpodobnostech. Tento případ a případy regularisace zmíněné v odst. 90 odpovídají dvěma základním vlastnostem zjevů, které se všeobecně považují za náhodné a na něž se dá aplikovati počet pravděpodobnosti. Podle Poincaréa shledáváme totiž, když zjevy toho druhu rozebíráme: buď jsou takové, že malá změna v příčině má za následek velkou změnu v účinku, nebo že jsou velmi složité.

V prvním případě jde o vztah mezi pravděpodobností příčin a pravděpodobností účinku. Za určitých předpokladů dá se pravděpodobnost účinku vyjádřiti, zavedeme-li parametr n a mimo to libovolnou funkci, která definuje rozdělení pravděpodobnosti pro příčinu; shledáváme, že roste-li n do nekonečna, pravděpodobnost účinku se stává nezávislou na oné libovolné funkci (methoda libovolných funkcí, viz odst. 36 a násl.).

Ve druhém případě (zjevy spojené v řetěz) rovněž máme co činiti s počátečním rozdělením pravděpodobností a s číslem n (t. j. počtem postupně provedených pokusů). Roste-li n, zjev se komplikuje a stupeň složitosti je právě dán velikostí čísla n. Tak míchá-li hráč karty postupně n-krát (odst. 83) a je-li n veliké číslo, je zajisté objevení se konečné sestavy následek velikého počtu složitých příčin (účinek každého zamíchání se kombinuje s účinky následujících).

Úlohy, ve kterých regularisace vede ke zjevům stejně pravděpodobným (v úloze o ruletě — odst. 36 — vychází stejná pravděpodobnost pro černou a červenou; v úloze o míchání karet — odst. 83 — stejná pravděpodobnost pro každou konečnou sestavu) ukazují, že v určitých úlohách je odůvodněno považovati některé případy za stejně pravděpodobné. Zamícháme-li dobře koulemi v osudí, můžeme tah každé koule považovati za stejně pravděpodobný (obdoba k úloze o míchání karet). Užívání pojmu „zjevů stejně pravděpodobných“, na němž se zakládá elementární definice pravděpodobnosti (odst. 1), odůvodňuje se tak v mnohých případech regularisací. Poznamenejme k tomu, že všechny výpočty o souvislostech mezi pravděpodobnostmi a regularisaci se opírají o dvě základní věty (odst. 6), které připouštíme jako axiomy.

b) Již v odst. 1 bylo poukázáno ke dvěma stránkám náhodných zjevů; k podmínkám, za kterých se koná pokus s výsledkem závislým na náhodě, a k pravidelnosti, která se jeví ve statistice veliké řady pokusů. Všechny úlohy o výpočtu pravděpodobnosti, kterými jsme se zabývali, jsou toho druhu, že číselné hodnoty uvažovaných pravděpodobností jsou přibližně určitelné ze statistických dat.

Všechny theoretické vzorce o pravděpodobnostech lze takto statisticky kontrolovati; výpočty, které konáme na základě statistických dat, jsou vlastně aplikace počtu pravděpodobnosti.

DOPLŇKY K THEORII ŘETĚZŮ

92. Veličiny $P_{ik}^{(n)}$ jakožto koeficienty lineární substituce. Budiž dán jednoduchý řetěz o r eventualitách s konstantními pravděpodobnostmi přechodu p_{ik}, $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$. Je-li

$$y_k = \sum_{l=1}^{r} p_{kl} x_l; \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

homogenní lineární substituce, která vede od proměnných x_l k proměnným y_k, dostaneme, aplikujíce tutéž substituci na proměnné y_k, nové proměnné z_i, jež budou určeny rovnicemi:

$$z_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} p_{ik} p_{kl} x_l = \sum_{i=1}^{r} P_{il}^{(2)} x_l,$$

kde $P_{il}^{(2)}$ jsou veličiny definované v odst. 71c. Kdybychom aplikovali substituci (1) postupně n-kráte, byly by výsledné proměnné w_i, jakožto funkce původních proměnných x_k, vyjádřeny rovnicemi

$$w_i = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Veličiny $P_{ik}^{(n)}$, zavedené v odst. 71c, jsou tedy koeficienty substituce, která vznikne n-násobnou iterací (opakováním) substituce (1) s koeficienty p_{ik}.

93. O kořenech charakteristické rovnice. Romanovského formule (8), odst. 79 ukazuje zřetelně, že způsob, kterým $P_{ik}^{(n)}$ závisí na indexu n, je podmíněn vlastnostmi kořenů λ_j charakteristické rovnice (odst. 78). Zavedeme-li na místo λ převrácenou hodnotu $s = 1 : \lambda$, nabude charakteristická rovnice tvaru

$$\begin{vmatrix} p_{11} - s, & p_{12}, & \ldots, & p_{1r} \\ p_{21}, & p_{22} - s, & \ldots, & p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{r1}, & p_{r2}, & \ldots, & p_{rr} - s \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \ i = 1, 2, \ldots, r; \ p_{ik} \geqq 0, \ i, k = 1, 2, \ldots, r. \tag{2}$$

J. Kaucký ukázal, jak se pozmění obecný tvar Romanovského formule, má-li rovnice (1) mnohonásobné kořeny, a dokázal větu: Nemá-li rovnice (1), za předpokladů (2), jiných kořenů o absolutní hodnotě rovné 1 než kořen 1, existují limity $P_{ik}^{(n)}$ pro $n \to \infty$ a závisí obecně na obou indexech i, k, $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$; je-li kořen 1 jednoduchý a existují-li tyto limity, jsou nezávislé na indexu i. M. Konečný dokázal větu obrácenou: existují-li řečené limity pro všechna $i, k = 1, 2, \ldots, r$, mají kořeny rovnice (1) všechny kromě kořenu 1 absolutní hodnotu menší než 1; jsou-li ony limity nezávislé na indexu i, je jednotkový kořen jednoduchý.*) M. Fréchet doplnil tyto výsledky,**) zejména rozborem vlastností aritmetických středů:

$$\pi_{ik}^{(n)} = \frac{P_{ik}^{(1)} + P_{ik}^{(2)} + \ldots + P_{ik}^{(n)}}{n};$$

v další práci pojednal o vlastnostech veličin $P_{ik}^{(n)}$ a $\pi_{ik}^{(n)}$, tvoříme-li je na základě zcela libovolně daných veličin p_{ik}, bez ohledu na podmínky (2), a dokázal větu: všechny kořeny rovnice (1), platí-li podmínky (2), jsou obsaženy v rovině komplexní proměnné s v kruhu, který prochází bodem $s = 1$

---

*) *J. Kaucký*: Několik poznámek o Markovových řetězech (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 131; Brno 1930). — *M. Konečný*: K teorii Markovových řetězů (tamtéž, č. 147; 1931).

**) *M. Fréchet*: Compléments à la théorie des Probabilités discontinues, „en chaîne“ (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (2), 2, p. 131; 1931).

a má střed v bodě $s = \omega$; ω značí nejmenší z čísel $p_{11}, p_{22}, \ldots, p_{rr}$.*)

94. Methoda vytvořujících funkcí v případě řetězu. Podle odst. 43 je v některých úlohách výhodno určiti hledanou pravděpodobnost závislou na celém čísle α jakožto koeficient při t^α v Maclaurinově řadě, která vyjadřuje příslušnou „vytvořující funkci" proměnné t. Markov užil této methody v theorii řetězů, zejména k výpočtu disperse.**)

95. Řetěz s nekonečně velkým počtem eventualit. a) Předpokládejme, že pokus má za výsledek jeden z nekonečně velikého počtu zjevů $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ a podržme definici pravděpodobností přechodu p_{ik} tak, jak jsme ji uvedli v odst. 71 pro jednoduchý řetěz s konstantními p_{ik}. Pak budeme míti pro pravděpodobnosti vztahující se k opětovaným pokusům

$$P_{ik}^{(n)} \geqq 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}^{(n)} = 1, \ P_{ik}^{(1)} = p_{ik},$$

$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)}, \ i, k, m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Studiem takovýchto řetězů se zabývali zejména R. Fortet a A. Kolmogorov***).

---

*) *M. Fréchet*: Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes aux différences finies du premier ordre à coefficients constants (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 178; Brno 1933).

**) *A. A. Markov*: Izčislěnije věrojatnostej, 4. vyd. (Moskva 1924); něm. překlad: *Markoff-Liebmann*: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Anhang II (Leipzig 1912). Viz též autorovu práci o řetězech z r. 1929 citovanou dále v poznámce k odst. 96.

***) *R. Fortet*: Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne (Thèse; Revista de Ciencias 40; Lima 1938). Viz též *A. Kolmogoroff*: Anfangsgründe der Theorie der Markoff'schen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen (Matěmatičeskij Sbornik, (2), I; Moskva 1936).

b) Jako příklad uvádím úlohu, kterou se zabýval Markov ve své první práci o řetězech:*) V osudí je jedna koule bílá a jedna černá. Vytáhneme jednu kouli, vložíme ji zpět a zároveň tam přidáme jednu další kouli a to barvy, jakou měla vytažená koule. Tah opakujeme vždy za téže podmínky: vytažená koule se vrací do osudí a přidává se jedna téže barvy. Po n-tém tahu bude v osudí $(n + 2)$ koulí. Ptáme-li se na pravděpodobnosti přechodu z jednoho složení osudí ke druhému, máme zde řetěz o nekonečně velikém počtu eventualit; mimo to pravděpodobnosti přechodu závisí na pořadovém čísle tahu.

Položme si otázku: Jak veliká je pravděpodobnost P, že v n tazích bude tažena bílá koule celkem m-krát?

P určíme postupem podobným tomu, kterého jsme užili v odst. 13a. Pravděpodobnost P', že každý z prvních m tahů dá bílou kouli a že každý z dalších $(n - m)$ tahů dá černou, je

$$P' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{m+2} \cdot \frac{2}{m+3} \cdot \frac{3}{m+4} \cdots \frac{n-m}{n+1}.$$

Stejnou hodnotu P' má pravděpodobnost, že v m tazích, jichž pořadová čísla $a, b, c, \ldots$ jsou předem dána, vyjde bílá a v ostatních $(n - m)$ tazích černá. P je úhrnná pravděpodobnost rovná součtu všech pravděpodobností, které odpovídají případům s různými pořadovými čísly $a, b, c, \ldots$ Těch případů je $(n)_m$ a proto

$$P = (n)_m \cdot P' = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!(n-m)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

P tedy nezávisí na m. V n tazích se stejnou pravděpodobností $1 : (n + 1)$ vyjde bílá koule jen jednou, nebo jen dvakrát atd.

---

*) *A. A. Markov*: Razprostraněnije zakona bolšich čísel zavisaščija drug od druga (Izvěstija fis.-mat. obščestva pri imper. Kasanskom Universitetu (2), 15, 135; 1906). Viz též *Eggenberger-M. Pólya*: Über die Statistik verketterter Vorgänge (Zeitschr. für angewandte Mathematik und Mechanik 3, 279; 1923).

nebo vůbec nevyjde. Střední hodnota $E(m)$ počtu vytaženýoh bílých koulí v n tazích je

$$E(m) = \sum_{m=0}^{n} P \,.\, m = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n + 1} = \tfrac{1}{2}n.$$

Poměr $m : n$ nabývá každé z možných hodnot

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$$

se stejnou pravděpodobností $P = 1 : (n + 1)$; roste-li n do nekonečna, pravděpodobnost nerovnosti

$$\left| \frac{m}{n} - E\left(\frac{m}{n}\right) \right| < \varepsilon,$$

kde E je libovolně malé dané kladné číslo, nemá za limitu jednotku. Zákon velkých čísel zde neplatí.

Rozdíl proti případu opětovaných pokusů s konstantní pravděpodobností p, že se pokus zdaří (odst. 13), je v tom: v případě odst. 13 má pravděpodobnost, že m pokusů se zdaří, maximální hodnotu pro určité m_1; s rostoucím celkovým počtem n pokusů se pravděpodobnost případů, ve kterých se m liší od m_1, zmenšuje.

96. Bibliografické poznámky. Z knih, které poslouží k dalšímu studiu řetězů, upozorňuji na knihu Bernštejnovu,*) která je i jinak znamenitou učebnicí počtu pravděpodobnosti vůbec, a na Fréchetovu, citovanou v poznámce k odst. 87.

Dále uvádím dvě základní práce o řetězech se spojitě proměnnými veličinami**) a několik souborných pojednání a spisů věnovaných jednak úlohám, které byly rozebírány v těchto přednáškách, jednak dalším úlohám týkajícím se řetězů a jejich aplikací ve fysice.***)

---

*) *S. N. Bernštejn*: Těoria věrojatnostěj, 4. vyd., Moskva 1946.

**) *A. Kolmogoroff*: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mathem. Annalen 104, 415; 1931). — *M. Fréchet*: Les probabilités continues „en chaîne" (Commentarii mathem. helvetici 5, 175; 1933).

***) *S. Bernštejn*: Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires (Verhandlungen des internat. Mathematiker-Kongresses Bd. I, 288; Zürich 1932). — *W. Doeblin*: Exposé de la Théorie des Chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'Etats (Revue mathém. de l'Union interbalkanique 2, 77; Athènes 1938). — *B. Hostinský*: O pravděpodobnosti zjevů, jež jsou spojeny v Markovovy řetězy (Sborník přírodovědecký vyd. Českou akademií 1929, str. 289). — Méthodes générales du Calcul des Probabilités (Mémorial des Sciences mathém. fasc. 52; Paris 1931). — Application du Calcul des Probabilités à la Théorie du mouvement Brownien (Annales de l'Institut H. Poincaré 3, 1; Paris 1932). — Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires liées entre elles. Applications diverses (tamtéž 7, 69; 1939). — Čtyři přednášky o různých problémech theoretické fysiky (Časopis pro pěstování matem. a fysiky *61*, 33; 1931). — O teorii Markovových řetězů a o integraci lineárních transformací (tamtéž, *63*, 167; 1934). — Équations fonctionnelles relatives aux probabilités en chaîne (Actualités scientifiques et industrielles No 782; Paris 1939).

OBSAH

Kapitola pátá: ZÁVISLÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

Kapitola šestá: MARKOVŮV JEDNODUCHÝ ŘETĚZ O DVOU EVENTUALITÁCH

Kapitola sedmá: MARKOVŮV JEDNODUCHÝ ŘETĚZ S LIBOVOLNÝM POČTEM EVENTUALIT

Spisovatel	*Prof. Dr Bohuslav Hostinský*
Název díla	*Počet pravděpodobnosti, druhá část*
Nákladem	*Přírodovědeckého nakladatelství v Praze*
vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1950 v Praze*
v edici	*Cesta k vědění, svazek 57*
za redakce	*Dra F. Vyčichla*
Vytiskly	*Středočeské tiskárny n. p., závod 07 (Prometheus)*
Stran	*100*
Obrazců	*1*
Vydání	*první, (3300 výtisků)*
Cena	*Kčs 37,—*