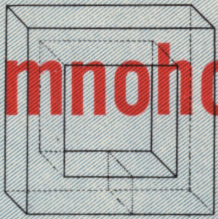
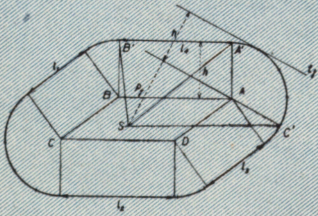
O mnohoúhelnících a mnohostěnech

Bohuslav Hostinský

O mnohoúhelnících a mnohostěnech





CESTA K VĚDĚNÍ SV. 33

Dr. Bohuslav Hostinský

O mnohoúhelnících a mnohostěnech

Mnohoúhelníky a mnohostěny mají v matematice velkou důležitost z několika důvodů. Především některé, zejména *metrické vlastnosti* křivek a ploch (jako oblouk, křivky, obsah rovinné plochy ohraničené uzavřenou křivkou nebo objem tělesa ohraničený plochou) se určují tak, že křivky, resp. plochy se aproximují lomenou čarou (mnohoúhelníkem), resp. mnohostěnem a pro ně se nejprve vlastnost dokáže a pak se studuje vlastnost limity. Za druhé jsou významné proto, že úzce souvisí s *theorií celých čísel* (s neurčitými rovnicemi, kongruencemi, theorií mřížových bodů a j.). Konečně studujeme *topologické vlastnosti* geometrických útvarů, t. j. (zhruba řečeno) takové vlastnosti, které se nemění spojitou deformací, tak, že vyšetřujeme nejprve obdobné vlastnosti

DR BOHUSLAV HOSTINSKÝ
PROFESOR MASARYKOVY UNIVERSITY V BRNĚ

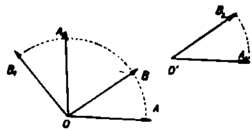
O MNOHOÚHELNÍCÍCH A MNOHOSTĚNECH

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

I. ÚHLY A MNOHOÚHELNÍKY V ROVINĚ

1. Úhel jakožto velikost otočení. a) Přímka, kterou si představujeme v jednom i opačném smyslu do nekonečna prodlouženou, nazývá se také *paprsek*. Každý bod O paprsku dělí jej na dvě části, které nazýváme *polopaprsky;* polopaprsku vycházejícímu z O přisuzujeme určitý smysl $\overrightarrow{OA}$ (od O ku A), je-li A libovolný jeho bod různý od O.

Nechť jsou OA a OB dva polopaprsky vycházející z téhož bodu O. Část roviny jimi omezená nazývá se *úhel* AOB (obr. 1). Měrou úhlu AOB je velikost otočení (kolem bodu O), kterým se převádí polopaprsek OA do polohy OB; srovnáváme-li různé úhly co do velikosti, nemáme na mysli plošné obsahy částí roviny takových jako na př. AOB, nýbrž jen příslušné velikosti otočení. Polopaprsky OA a OB jsou *ramena* úhlu, bod O je jeho *vrchol*.



Obr. 1.

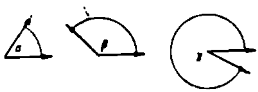
b) Otočme každé rameno úhlu AOB o stejně veliký úhel a to každé ve stejném smyslu (na př. proti smyslu pohybu, který mají hodinové ručičky) kolem bodu O. Nové polohy OA_1 a OB_1 ramen OA resp. OB tvoří úhel A_1OB_1 rovný úhlu AOB; úhel A_1OB_1 vzniká otočením úhlu AOB (obr. 1).

Budiž nyní O' bod různý od O a veďme polopaprsek $O'A_2$ souhlasně rovnoběžný s OA a polopaprsek $O'B_2$ souhlasně rovnoběžný s OB; tak vznikne úhel $A_2O'B_2$ rovný úhlu AOB.

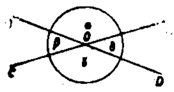
Z obr. 1 jsou zřejmé tyto vztahy mezi úhly: Dva úhly, jež mají společný vrchol O, jsou si rovny, odvodí-li se každé rameno jednoho úhlu stejným (i co do smyslu) otočením kolem bodu O z odpovídajícího ramena druhého úhlu; dva úhly o různých vrcholech, jejichž odpovídající si ramena jsou souhlasně rovnoběžná, jsou si rovny.

c) *Plný úhel* je název pro úhel, jenž se vytvoří úplným otočením polopaprsku OA kolem O, takže jeho konečná poloha splývá s počáteční. Polovina plného úhlu je *přímý úhel;* obě ramena BO a OA přímého úhlu leží v jedné a téže přímce. Polovina přímého úhlu je *pravý úhel. Ostrý úhel* (α v obr. 2) je úhel, který je menší než pravý. *Tupý* (β v obr. 2) je úhel, který je menší než přímý a větší než pravý. Úhel, který je buď pravý nebo ostrý nebo tupý, nazývá se *dutý*. *Vypuklý* (γ v obr. 2) je úhel, který je menší než plný a větší než přímý.

Dva paprsky protínající se v bodě O vytvořují čtyři úhly α, β, γ, δ (obr. 3). Dva sousední s jedním společným ramenem neboli *styčné* úhly dávají dohromady úhel přímý:



Obr. 2.



Obr. 3.

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = \text{přímému úhlu};$$

dva protější (neboli *vrcholové*) jsou si rovny:

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

2. Jak se měří úhly. Abychom přirovnali různé úhly co do velikosti, volíme určitý úhel za jednotku úhlové míry. Uveďme dva způsoby měření úhlů:

a) *Obyčejná stupňová míra:* Jednotkou úhlu je devadesátina pravého úhlu neboli 1 stupeň, který značíme 1°. Přímý úhel má pak 180°, plný úhel 360°.

b) *Absolutní neboli oblouková míra;* Úhel se měří délkou oblouku, který vytínají ramena úhlu na kružnici k opsané poloměrem rovným 1 kolem vrcholu úhlu. Jednotkou úhlu je zde *radián*, t. j. úhel takový, že příslušný oblouk na kružnici k má délku rovnou jednotce.

Budiž α_1 měrné číslo nějakého úhlu v obyčejné stupňové míře a α jeho měrné číslo v míře absolutní. Pak platí rovnice

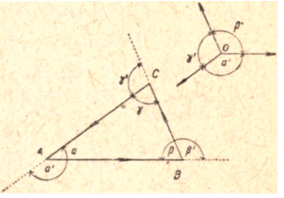
$$\frac{\alpha_1}{180} = \frac{\alpha}{\pi},$$

která vyjadřuje vztah mezi měrnými čísly jednoho a téhož úhlu v oněch dvou soustavách.

Pokud nebude výslovně jinak stanoveno, vyjadřujeme v dalším úhly v míře obloukové.

3. Úhly v trojúhelníku. a) Tři body A, B, C neležící v jedné přímce určují *trojúhelník*. Body A, B, C jsou jeho vrcholy; úsečky AB, BC, CA jsou jeho strany. Úhel α sevřený stranami AB a AC je *vnitřní úhel* trojúhelníka při vrcholu A; podobně jsou β a γ vnitřní úhly při vrcholech B resp. C (obr. 4).

Prodlužme stranu CA za vrchol A; prodloužená strana (v obr. 4 vytečkovaná) svírá se stranou AB úhel α', který se nazývá *vnější úhel* trojúhelníka při vrcholu A; podobně jsou β' a γ' vnější úhly při vrcholech B, resp. C.



Obr. 4.

b) *Součet vnějších úhlů v trojúhelníku rovná se úhlu plnému*, tedy

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2\pi.$$

Abychom to dokázali, přeneseme úhly α', β', γ' tak, aby měly společný vrchol O. Za tím účelem volíme podél obvodu trojúhelníka určitý smysl oběhu (v obr. 4 vyznačený šipkami na stranách) takto: od A k B, od B k C a od C k A. Volíme pak pevný bod O a sestrojíme tři polopaprsky vybíhající z O a po řadě rovnoběžné s CA, AB a BC. Podle odst. 1b) je úhel sevřený prvním a druhým polopaprskem roven α', úhel mezi druhým a třetím je β' a úhel mezi třetím a prvním je γ'. Z obrazce je patrno, že součet všech tří úhlů je 2π, čímž je věta dokázána.

c) Znajíce součet vnějších úhlů odvodíme součet vnitřních takto:

$$\alpha + \alpha' = \pi, \quad \beta + \beta' = \pi, \quad \gamma + \gamma' = \pi,$$

tedy

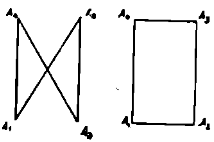
$$\alpha + \beta + \gamma = 3\pi - (\alpha' + \beta' + \gamma') = \pi.$$

Součet vnitřních úhlů trojúhelníka rovná se úhlu přímému.

d) Trojúhelník se nazývá *ostroúhlý*, jsou-li všechny jeho vnitřní úhly ostré. Trojúhelník je *pravoúhlý*, má-li jeden úhel pravý; součet zbývajících dvou rovná se pravému úhlu. Trojúhelník je *tupoúhlý*, je-li jeden jeho úhel tupý; součet zbývajících dvou je menší než úhel pravý.

4. O mnohoúhelníku. a) V rovině budiž dáno n různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Spojme A_1 s A_2, A_2 s A_3, ..., A_{n-1} s A_n. Tak dostaneme $(n - 1)$ úseček, které dohromady tvoří *neuzavřenou lomenou čáru* $A_1A_2 \ldots A_n$; A_1 je její počáteční bod, A_n koncový. Připojíme-li k ní ještě úsečku A_nA_1, dostaneme uzavřenou lomenou čáru $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ neboli *mnohoúhelník* o n stranách $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, jinak též n-úhelník.

Podle toho, jak byly body A_k voleny, protíná uzavřená čára $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ sama sebe nebo neprotíná. První případ nastává na př. pro čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4 v obr. 5a, druhý případ v obr. 5b. V dalších úvahách se budeme zabývati jen mnohoúhelníky, jichž strany se mimo vrcholy neprotínají. Tato podmínka platí ovšem pro uzavřenou čáru $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ složenou z *úseček* A_1A_2, A_2A_3 atd.; některé z nich *prodlouženy* za svoje koncové body mohou ji protínati v dalších bodech (tak v obr. 7b strana CD čtyrúhelníka $ABCD$ prodloužena za bod D protíná stranu AB v bodě E).



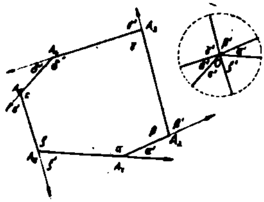
Obr. 5.

Uzavřená čára $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ nazývá se také určitěji *obvod* n-úhelníka. Rovina dělí se obvodem n-úhelníka na dvě části; jedna část je vnitřek n-úhelníka a druhá je jeho vnějšek.

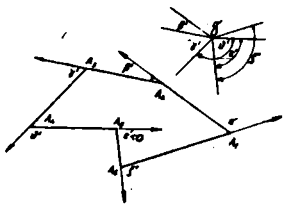
Délku obvodu n-úhelníka nazýváme také zkrátka jeho obvodem, plošný obsah jeho vnitřku jeho obsahem.

b) Věty dokázané v odst. 3 o součtu úhlů vnějších nebo vnitřních pro trojúhelníky dají se jednoduše zobecniti tak, že platí pro mnohoúhelníky.

Všimněme si nejprve šestiúhelníka, jehož všechny vnitřní úhly jsou duté, takže i každý jeho vnější úhel je dutý (obr. 6a). Při vrcholu A_1 jsou vnitřní úhel α a vnější úhel α' sevřený prodlouženou stranou A_6A_1 a stranou A_1A_2; při vrcholu A_2 jsou vnitřní úhel β a vnější β' atd. Veďme pomocným bodem O přímky rovnoběžné po řadě se stranami A_1A_2, A_2A_3, ... A_6A_1 šestiúhelníka. Tak obdržíme šest polopaprsků vybíhajících z O; první s druhým svírá úhel α', druhý se třetím úhel β' atd. Součet všech šesti vnějších úhlů je tedy



Obr. 6a.



Obr. 6b.

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon' + \zeta' = 2\pi.$$

Poněvadž pak

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = \varepsilon + \varepsilon' = \zeta + \zeta' = \pi,$$

je součet všech vnitřních úhlů

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = 6\pi -$$
$$- (\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon' + \zeta') = 4\pi.$$

Přejděme nyní k šestiúhelníku, jenž má při jednom vrcholu (A_5 v obr. 6b) vnitřní úhel ε vypuklý, takže příslušný vnější úhel ε' je záporný, neboť $\varepsilon + \varepsilon' = \pi$. Zase bude součet všech vnějších úhlů roven 2π. K důkazu sestrojíme jako dříve polopaprsky vedené bodem O rovnoběžně k jednotlivým stranám A_1A_2, A_2A_3, ... Rozdíl proti předešlému případu, kdy byly všechny vnější úhly kladné, je v tom, že nyní je úhel ε' záporný. Sečteme-li kladné úhly α', β', γ', δ', ζ' a odečteme-li od součtu číselnou hodnotu úhlu ε', dostaneme plný úhel, jak je patrno z obr. 6b. Součet vnitřních úhlů bude zase roven 4π.

c) Budiž dán obecně n-úhelník, jehož obvod nikde sám sebe neprotíná. Každý jeho vnější úhel α' počítáme podle rovnice

$$\alpha' = \pi - \alpha,$$

kde α je příslušný úhel vnitřní (dutý nebo vypuklý); je-li $\alpha < \pi$, je $\alpha' > 0$; je-li $\alpha > \pi$, je $\alpha' < 0$. Označme znakem $\Sigma\alpha$ součet úhlů vnitřních a znakem $\Sigma\alpha'$ součet úhlů vnějších. Pak bude

$$\Sigma\alpha' = 2\pi, \quad \Sigma\alpha = (n - 2)\,\pi,$$

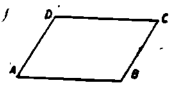
neboť součet všech vnitřních i vnějších dohromady dává $n\pi$. Slovy: *Součet vnějších úhlů v n-úhelníku rovná se* 2π. *Součet vnitřních úhlů v n-úhelníku rovná se* $(n - 2)\,\pi$.

II. VYPUKLÉ MNOHOÚHELNÍKY V ROVINĚ

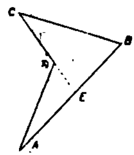
5. Vypuklý mnohoúhelník. Mnohoúhelník je *vypuklý* (neboli *konvexní*), vyhovuje-li každá jeho strana A_kA_{k+1} této podmínce: Prodloužíme-li ji v obou smyslech do nekonečna, nemá žádného dalšího bodu společného s obvodem mnohoúhelníka mimo body úsečky A_kA_{k+1}.

Příkladem vypuklého mnohoúhelníka je rovnoběžník (obr. 7a). Naproti tomu čtyrúhelník $ABCD$ v obr. 7b není vypuklý, neboť strana CD prodloužená za bod D (prodloužení je v obr. 7b vytečkováno) protíná stranu AB v bodě E.

Z obrazce 7b vyplývá, že vnitřní úhel vypuklého mnohoúhelníka není nikdy vypuklý; všechny vnitřní úhly vypuklého mnohoúhelníka jsou duté.



Obr. 7a.



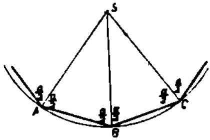
Obr. 7b.

6. Pravidelné mnohoúhelníky. Podle odst. 4 je součet vnitřních úhlů v n-úhelníku roven $(n - 2)\,\pi$. Jsou-li tedy všechny vnitřní úhly v n-úhelníku stejné, má každý z nich velikost $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)\pi$, je tedy dutý.

Mnohoúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly stejně veliké, nazývá se *pravidelný*. Podle právě uvedené poznámky jsou vnitřní úhly pravidelného mnohoúhelníka duté a totéž platí o jeho vnějších úhlech. Vnější úhel v pravidelném n-úhelníku je roven $2\pi : n$, poněvadž součet všech vnějších je 2π (odst. 4b). Tak pravidelný (rovnostranný) trojúhelník má vnější úhel $2\pi : 3 = 120°$; pravidelný čtyrúhelník, t. j. čtverec, má vnější úhel $\pi : 2 = 90°$, atd.

Buďte A, B, C tři sousední vrcholy pravidelného n-úhelníka a α jeho vnitřní úhel. Rozpůlíme-li vnitřní úhly při A

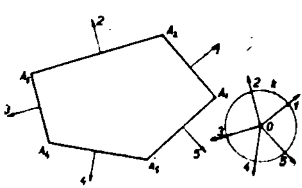
a B, protnou se půlící přímky v bodě S; ABS je rovnoramenný trojúhelník ($\overline{SA} = \overline{SB}$), jenž má při základně AB úhly $\frac{1}{2}\alpha$. Půlící přímka CS vnitřního úhlu při C prochází rovněž bodem S (obr. 8) a to platí vůbec o půlící přímce každého vnitřního úhlu; $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \ldots$, všechny vrcholy $ABC \ldots$ mají od bodu S stejné vzdálenosti. Bod S je středem kružnice opsané n-úhelníku. Kterákoli jeho strana je tětivou této kružnice a neprotíná, prodloužíme-li ji, obvod n-úhelníka v dalším bodě. *Pravidelný mnohoúhelník je vypuklý.*



Obr. 8.

7. Obraz normály u vypuklého mnohoúhelníka. a) Kolmice vztyčená na stranu n-úhelníka v libovolném jejím bodě nazývá se *normála* té strany. Každá strana má *vnější* normálu, která míří ven z n-úhelníka a *vnitřní normálu*, která míří dovnitř. V následujícím budeme nazývati vnější normálu zkrátka normálou; jen směr normály bude míti význam, nezáleží na tom, ve kterém bodě uvažované strany normálu sestrojíme.

b) Kolem pomocného bodu O opíšeme kružnici k jednotkovým poloměrem. Normálu (vnější) strany A_1A_2 daného vypuklého mnohoúhelníka označíme zkrátka *1*, normálu strany A_2A_3 označíme *2* atd. V obr. 9 je vypuklý pětiúhelník s příslušnými pěti směry *1, 2, 3, 4, 5* normál. Veďme nyní v kružnici k poloměry *O1, O2*, ... po řadě souhlasně rovnoběžné s oněmi normálami. Bod *1* na kružnici k se nazývá *obraz normály 1* mnohoúhelníka; bod *2* na k je obrazem normály *2* atd. Každá normála má svůj určitý obraz na k.

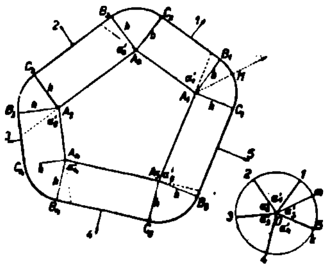


Obr. 9.

8. Zaoblený vypuklý mnohoúhelník. a) Ve všech bodech obvodu vypuklého n-úhelníka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sestrojíme kolmice, vždy ve smyslu vnější normály, a naneseme na každou úsečku délky h tak, že jeden koncový bod úsečky leží na obvodě. Druhé koncové body naplňují úsečky B_1C_2, $B_2C_3, \ldots$ (viz obr. 10, kde je $n = 5$) po řadě rovnoběžné se stranami n-úhelníka a stejně s nimi dlouhé:

$$\overrightarrow{B_1C_2} \# \overline{A_1A_2}, \quad \overline{B_2C_3} \# \overline{A_2A_3}, \ldots$$

Nechť jsou $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ po řadě vnější úhly mnohoúhelníka. Úhel $C_1A_1B_1$ je roven α'_1, neboť C_1A_1 stojí kolmo na A_5A_1 a B_1A_1 kolmo na A_1A_2 (obr. 10). Podobně je úhel $C_2A_2B_2$ roven α'_2 atd. Opíšeme-li kolem A_1 kruhový oblouk C_1B_1 poloměrem h, kolem A_2 kruhový oblouk C_2B_2 se stejným poloměrem atd., doplní se tyto oblouky s úsečkami B_1C_2, $B_2C_3, \ldots$ na souvislou uzavřenou čáru $C_1B_1C_2B_2C_3B_3 \ldots B_nC_1$, kterou nazveme *zaobleným vypuklým n-úhelníkem* sestrojeným rovnoběžně k původnímu $A_1A_2A_3 \ldots$ ve vzdálenosti h.



Obr. 10.

b) Normála *1* sestrojená k straně B_1C_2 v libovolném jejím bodě má stejný směr s normálou sestrojenou ke straně A_1A_2 původního n-úhelníka; podobně normála *2* sestrojená k B_2C_3 má stejný směr s normálou k A_2A_3 atd.

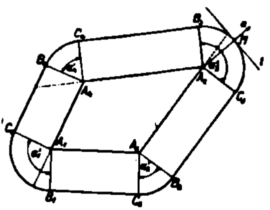
Za normálu v některém bodě M kruhového oblouku C_1B_1 považujeme poloměr A_1M (v obr. 10 vytečkovaný); tato normála má na kružnici k obraz m. Pohybuje-li se bod M podél oblouku C_1B_1, mění se směr normály tak, že její obraz vytvoří na k oblouk se středovým úhlem α'_1. Obecně obrazy všech normál sestrojených k bodům oblouku C_kB_k opsaného kolem A_k naplňují oblouk kružnice k se středovým úhlem α'_k.

Poněvadž

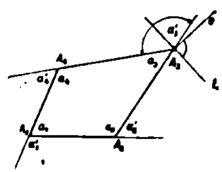
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha'_k = 2\pi,$$

tvoří všech n oblouků opsaných kolem vrcholů $A_1, A_2, \ldots A_n$ původního n-úhelníka, dohromady kružnici o poloměru h; obrazy všech normál zaobleného mnohoúhelníka naplňují tedy celou kružnici k. Shrneme takto: *Každý bod na obvodu zaobleného mnohoúhelníka má určitou normálu a každý bod na kružnici k je obrazem jedné z těchto normál;* při tom ovšem mají všechny body strany B_1C_2 stejný směr normály, podobně všechny body strany B_2C_3 atd (viz obr. 10).

9. Opěrné přímky vypuklého mnohoúhelníka. a) Budiž $A_1A_2A_3\ldots$ vypuklý n-úhelník (v obr. 11a je $A_1A_2A_3A_4$ čtyrúhelník), k němuž sestrojíme rovnoběžný zaoblený n-úhelník ve vzdálenosti h. Na jednom z kruhových oblouků, jež jsou částmi obvodu zaobleného mnohoúhelníka (na př. na oblouku C_3B_3 opsaném kolem bodu A_3), zvolme bod M a budiž a příslušný směr vnější normály (prodlouženého poloměru). Sestrojme tečnu t k oblouku kružnice v M; t je kolmá ke směru a.



Obr. 11a.



Obr. 11b.

Předpokládejme nyní, že h se blíží k nule a že se při tom směr a nemění. Bod M se tedy blíží podél určitého poloměru ke středu A_3 kružnice a přímka t se blíží limitní poloze t_0 (viz obr. 11b, kde je znázorněn limitní tvar zaobleného čtyrúhelníka pro lim $h = 0$ totožný s původním čtyrúhelníkem

$A_1A_2A_3A_4$). Přímka t_0 má s obvodem $A_1A_2A_3A_4$ jediný společný bod A_3.

b) *Opěrná přímka zaobleného vypuklého mnohoúhelníka* je název pro přímku, která je buď prodlouženou jeho stranou (jako na př. B_2C_3 v obr. 11a) nebo tečnou některého z kruhových oblouků tvořících jeho obvod (jako na př. t v obr. 11a).

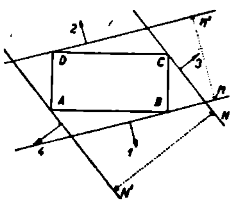
Opěrná přímka vypuklého mnohoúhelníka nezaobleného je název pro přímku, která je buď jeho prodlouženou stranou (na př. A_1A_2 v obr. 11b) nebo prochází jeho vrcholem a nemá žádného dalšího bodu s ním společného (jako na př. t_0 v obr. 11b).

c) Každé opěrné přímce t vypuklého mnohoúhelníka (zaobleného nebo nezaobleného) patří určitý směr normály. Sledujme, jak se ten směr mění, zaujímá-li t postupně všechny možné polohy (t. j. valí-li se t po obvodě mnohoúhelníka). Docházíme k výsledku: Odvalí-li se přímka t podél celého obvodu, proběhne obraz normály celou kružnici k. *Obrazy všech normál vypuklého mnohoúhelníka naplňují celou kružnici k; normála každé jeho opěrné přímky má za obraz určitý bod na kružnici k a naopak každý bod kružnice k je obrazem normály k jediné určité opěrné přímce.*

V obr. 12 je plný úhel s vrcholem ve středu kružnice k rozdělen na čtyři části $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$; obvod kružnice k se tak dělí rovněž na čtyři části. Jedna z nich je vytvořena obrazy normál pro ty opěrné přímky, které procházejí vrcholem A_1 čtyrúhelníka $A_1A_2A_3A_4$ (obr. 11b), druhá je vytvořena obrazy normál pro opěrné přímky jdoucí vrcholem A_2 čtyrúhelníka atd.


Obr. 12.

10. Šířka vypuklého mnohoúhelníka. a) Budiž M vypuklý n-úhelník a k jednotková kružnice, jejíž body jsou podle odst. 9 obrazy normál sestrojených k opěrným přímkám n-úhelníka M. Volme na k pár protilehlých bodů 1 a 2, takže jejich spojnice 12 je průměrem kružnice k. Bodu 1 odpovídá určitá opěrná přímka t_1 n-úhelníka a bodu *2* jeho opěrná přímka t_2 rovnoběžná s t_1. Naopak ke každé opěrné přímce t_1 daného vypuklého mnohoúhelníka patří jiná jeho opěrná přímka t_2 rovnoběžná s t_1 a obrazy příslušných dvou normál jsou koncové body průměru v kružnici k. Vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek t_1 a t_2, měřená podél jejich společné kolmice nazývá se *šířkou* vypuklého mnohoúhelníka ve směru 1 nebo 2. V obr. 13 jsou dva páry opěrných přímek obdélníka $ABCD$. Opěrné přímky prvního páru mají normály ve směrech 1 a 2, a příslušná šířka obdélníka je MM'; přímky druhého páru mají normály ve směrech *3* a *4* a příslušná šířka je NN'.



Obr. 13.

b) Z obr. 13 je zřejmo, že šířka daného n-úhelníka v daném směru závisí na tom, jak ten směr volíme. Šířka obdélníka $ABCD$ má nejmenší hodnotu ve směru kolmém k AB nebo k CD (je-li $AB > AD$) a největší hodnotu ve směru kolmém k uhlopříčce AC nebo BD.

c) Rozdělme obvod jednotkové kružnice k o středu O na sudý počet $2m$ stejných dílů a označme dělící body *1*, *2*, ..., *2m*. Polopaprsky (poloměry v k), jež vedou z O k jednotlivým dělícím bodům, označíme po řadě x_1, x_2, ..., x_{2m}. Každý z nich má směr normály sestrojené k určité opěrné přímce daného n-úhelníka. Polopaprsky x_1 a x_{m+1} mají protivné smysly, podobně x_2 a x_{m+2}, obecně x_i a x_{m+i}. Je-li s_j šířka n-úhelníka ve směru j ($s_{j+m} = s_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$), je střední hodnota šířky dána výrazem

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_m}{m}$$

nebo, označíme-li součet symbolem $\sum$,

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} s_j.$$

Tato střední hodnota závisí na m a na tom, jak volíme polohu prvního dělícího bodu na k. Limitní hodnota

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} s_j \tag{1}$$

je však číslo, které — je-li n-úhelník M dán — nezávisí ani na m ani na poloze prvního dělícího bodu na k a které se nazývá *střední šířka* mnohoúhelníka.

Hodnotu limity (1) vypočteme v odst. 12; budeme k tomu potřebovati dvou formulí pro obsah vypuklého mnohoúhelníka, které odvodíme v odst. 11.

11. Věty o obsahu vypuklých mnohoúhelníků. a) Budiž L_0 obvod (délka obvodu) daného vypuklého n-úhelníka M_0 a P_0 jeho obsah. Sestrojme zaoblený mnohoúhelník M rovnoběžný k M_0 ve vzdálenosti h ($h > 0$); viz odst. 8. Je-li L obvod mnohoúhelníka M a P jeho obsah, klademe si za úlohu vypočísti L a P jakožto funkce veličin L_0, P_0 a h.

Z obr. 10, kde $A_1A_2A_3 \ldots$ je n-úhelník M_0 ($n = 5$ v obrazci), plyne: Obvod L se skládá jednak ze stran B_1C_2, B_2C_3, ..., jednak z kruhových oblouků C_1B_1, C_2B_2, ... Strany B_kC_{k+1} ($k = 1, 2, 3, \ldots$) jsou po řadě rovny stranám n-úhelníka M_0, totiž

$$\overline{B_1C_2} = \overline{A_1A_2}, \quad \overline{B_2C_3} = \overline{A_2A_3}, \ldots,$$

takže jejich součet se rovná L_0. Oblouky $C_1B_1, C_2B_2, \ldots$ opsané poloměrem h mají středové úhly $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ rovné po řadě vnějším úhlům mnohoúhelníka L_0; poněvadž (odst. 4c)

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n = 2\pi,$$

je součet všech těch oblouků roven obvodu kružnice o poloměru h:

$$\widehat{C_1B_1} + \widehat{C_2B_2} + \ldots + \widehat{C_nB_n} = 2\pi h.$$

Hledaná formule pro obvod L je tedy

$$L = L_0 + 2\pi h. \tag{1}$$

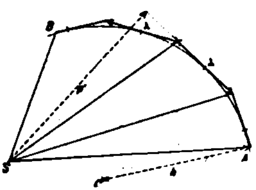
b) Obsah P skládá se z obsahu P_0, z obsahu n obdélníků $A_1B_1C_2B_2$, $A_2B_2C_3B_3$, ... a z obsahu n kruhových výsečí o poloměru h se středovými úhly po řadě rovnými α'_1, $\alpha'_2 \ldots \alpha'_n$. Základny oněch obdélníků A_1B_1, A_2B_2, ... mají součet rovný L_0; všechny obdélníky mají stejnou výšku h, takže součet obsahů všech obdélníků je L_0h. Součet všech kruhových výsečí je celý kruh o poloměru h; jeho obsah je πh^2. Hledaná formule pro obsah P je tedy*)

$$P = P_0 + L_0 \,.\, h + \pi h^2. \tag{2}$$

c) Obsah vypuklého n-úhelníka nezaobleného vypočteme tímto způsobem:

Budiž S bod zvolený uvnitř n-úhelníka, l_1 délka jedné jeho strany a p_1 její vzdálenost od S (t. j. délka kolmice spuštěné z bodu S na onu stranu, vždy kladně čítaná); budiž pak l_2 délka druhé strany, p_2 její vzdálenost od S atd. Spojnice, kterými se spojuje bod S s jednotlivými vrcholy n-úhelníka, dělí n-úhelník na n trojúhelníků. První z nich má základnu o délce l_1 a výšku p_1, tedy obsah $\frac{1}{2}p_1l_1$, druhý má obsah $\frac{1}{2}p_2l_2$ atd. Obsah P_0 vypuklého nezaobleného n-úhelníka, jehož strany mají délky $l_1, l_2, \ldots, l_n$ a vzdálenosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ od bodu S voleného uvnitř n-úhelníka, je tedy dán vzorcem

$$P_0 = \frac{p_1l_1 + p_2l_2 + \ldots + p_nl_n}{2}. \tag{3}$$



Obr. 14.

d) Uveďme ještě vzorec pro obsah Q obrazce SAB (obr. 14) omezeného jednak kruhovým obloukem AB o poloměru h a středu C, jednak úsečkami SA a SB. Mysleme si *celou* kružnici, jejíž částí je oblouk AB, rozdělenu na $2m$ stejných dílů. Několik dělících bodů, řekněme

*) Formule (1) a (2) jsou obdobné vzorcům pro povrch a objem vypuklých mnohostěnů, které odvodil *J.* Steiner (viz odst. 34).

r (v obr. 14 je $r = 4$), bude na oblouku AB; číslo r závisí na m (a také na volbě prvního dělícího bodu) a je tím větší, čím je m větší. V dělících bodech sestrojíme tečny ke kruhovému oblouku AB, tečny tvoří podél AB část pravidelného $2m$-úhelníka opsaného kružnici o poloměru h. Budiž λ délka jedné strany tohoto $2m$-úhelníka a σ délka příslušného kruhového oblouku se středovým úhlem rovným $(2\pi) : (2m) = \pi : m$; je tedy

$$\sigma = \frac{\pi}{m} \cdot h.$$

Trojúhelník, jehož základnou je jedna z r stran o délce λ a jenž má vrchol v S, nazveme „elementární trojúhelník“; jeho obsah je

$$\frac{\lambda p'}{2},$$

kde p' značí vzdálenost jeho základny (tečny kružnice) od bodu S. Součet všech r elementárních trojúhelníků má, roste-li m do nekonečna, za limitu plochu Q našeho obrazce SAB. Je tedy

$$Q = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1} \frac{\lambda p'_k}{2};$$

p'_k značí vzdálenost k-té strany λ od bodu S. Poněvadž pak*)

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\lambda}{\sigma} = 1,$$

je

$$Q = \frac{1}{2} \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{r} \sigma \cdot p'_k$$

a tedy, dosadíme-li na místo σ shora odvozený výraz,

*) Odvoláváme se na větu: Strana pravidelného m-úhelníka opsaného kružnici dělená m-tým dílem obvodu kružnice dává podíl rovný v limitě jednotce, roste-li m do nekonečna.

$$Q = \frac{\pi h}{2} \lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{r} p'_k}{m} \tag{4}$$

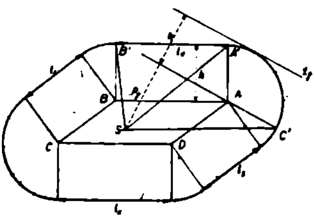
Roste-li m do nekonečna, roste též r do nekonečna.

12. Cauchyova věta o střední šířce vypuklého mnohoúhelníka. a) Vraťme se nyní k úloze vyslovené na konci odst. 10, totiž k výpočtu limity (1) odst. 10. Za tím účelem vyjádříme dvojím způsobem obsah P zaobleného n-úhelníka M sestrojeného rovnoběžně k M_0 ve vzdálenosti h (srv. odst. 11); srovnáním obou příslušných výrazů dostaneme hledanou hodnotu.

První způsob výpočtu P poskytuje vzorec (2) odst. 11. Je-li L_0 obvod n-úhelníka M_0 a P_0 jeho plošný obsah, platí

$$P = P_0 + L_0 h + \pi h^2. \tag{a}$$

Druhý způsob výpočtu: zvolme uvnitř M_0 bod S a spojme S přímkami se všemi vrcholy zaobleného n-úhelníka M (jeho vrcholy rozumíme body, v nichž se přímočaré části obvodu stýkají s kruhovými oblouky). Tak se rozdělí vnitřek M jednak na trojúhelníky, jichž obsah se počítá podle (3) odst. 11, jednak na křivočaré trojúhelníky, jichž obsah se počítá podle (4) odst. 11. V obr. 15 je M_0 rovnoběžník o stranách l_1, l_2, l_3, l_4. Pomocnou kružnici o poloměru h dělíme v obrazci na 12 dílů ($m = 6$); na kruhovém oblouku o středu A (a také na oblouku o středu C) budou čtyři dělící body, na oblouku o středu B (nebo D) budou dva dělící body. Budiž q_k vzdálenost k-té strany n-úhelníka M_0 od S a tedy $(q_k + h)$ vzdálenost k-té strany n-úhelníka M od S. K tečně t_j kruhového oblouku sestrojené v j-tém dělícím bodě veďme rovnoběžku středem kružnice (na př. bodem A v obr. 15,



Obr. 15.

jenž je středem oblouku $C'A'$). Vzdálenost této rovnoběžky od S budiž p_j, takže t_j má od S vzdálenost $(p_j + h)$. Sečtěme obsahy všech n trojúhelníků jako $SA'B'$ a obsahy všech n obrazců jako $SC'A'$. Podle uvedených vzorců bude

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{(q_k + h)\, l_k}{2} + \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{2m} (p_j + h)}{m}.$$

Součet za znamením lim má $2m$ členů, neboť všech n kruhových oblouků, jež jsou částmi obvodu obrazce M, má dohromady $2m$ dělících bodů. Vzhledem k tomu, že

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k l_k}{2} = P_0, \quad \sum_{k=1}^{n} l_k = L_0, \quad \frac{\pi h}{2} \,.\, 2m \,.\, \frac{h}{m} = \pi h^2,$$

nabývá vzorec pro P tvaru

$$P = P_0 + \frac{L_0 h}{2} + \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{2m} p_j}{m} + \pi h^2.$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek obrazce M_0 je jeho šířka, která se rovná součtu vzdáleností, jež mají jedna a druhá přímka od S. V označení odst. 10c je tedy

$$p_1 + p_{m+1} = s_1, \quad p_2 + p_{m+2} = s_2, \ldots, \quad p_m + p_{2m} = s_m,$$

a máme

$$P = P_0 + \frac{L_0 h}{2} + \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} s_j}{m} + \pi h^2. \tag{b}$$

Přirovnejme vzorce (a) a (b). Vychází

$$L_0 h = \frac{L_0 h}{2} + \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} s_j}{m}$$

aneb

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j}{m} = \frac{L_0}{\pi}, \tag{1}$$

což jest Cauchyova věta: *Střední šířka vypuklého mnohoúhelníka rovná se jeho obvodu dělenému číslem π.*

Zaveďme střední hodnotu vzdáleností p_j opěrných přímek od S. Patrně je

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{2m} p_j}{2m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j}{2m} = \frac{L_0}{2\pi}.$$

Střední hodnota vzdálenosti opěrné přímky od pevného bodu voleného uvnitř mnohoúhelníka rovná se jeho obvodu dělenému číslem 2π; to je jiný tvar Cauchyovy věty.

b) Uveďme některé příklady: Rovnostranný trojúhelník o straně a má střední šířku $3a : \pi = 0{,}955 \ldots a$; čtverec o straně a má střední šířku $4a : \pi = 1{,}273 \ldots a$; pravidelný šestiúhelník o straně a má střední šířku $6a : \pi = 1{,}910 \ldots a$.

13. O vztahu mezi obvodem a obsahem vypuklého mnohoúhelníka. Z rovnic (1) a (2) odst. 11 vyplývá snadným výpočtem

$$L^2 - 4\pi P = L_0{}^2 - 4\pi P_0,$$

nechť je h jakékoli (kladné) číslo. Čtverec obvodu zmenšený o 4πnásobný obsah je tedy veličina, která má stejnou hodnotu pro všechny zaoblené mnohoúhelníky rovnoběžné s daným.

Každý vypuklý mnohoúhelník o obsahu P_0 a obvodu L_0 má tu vlastnost, že

$$L_0{}^2 - 4\pi P_0 > 0.$$

Kořeny rovnice druhého stupně pro neznámou x:

$$P_0 + L_0 x + \pi x^2 = 0$$

jsou tedy pro každý vypuklý mnohoúhelník reální. Neuvádíme zde obecný důkaz této věty; potvrdíme toliko její platnost ve dvou zvláštních případech:

a) Je-li dán obdélník o stranách a a b, je

$$L_0 = 2(a + b), \quad P_0 = ab, \quad a > 0, b > 0,$$

$$\begin{aligned} L_0^2 - 4\pi P_0 &= 4[(a + b)^2 - \pi ab] \\ &= 4[(a - b)^2 + (4 - \pi)ab] > 0. \end{aligned}$$

Srovnejme hodnoty výrazu v lomené závorce pro různé obdélníky, které mají daný obsah $P_0 = ab$. Druhý člen v lomené závorce je pro ně konstantní; první člen, totiž $(a - b)^2$ nabývá nejmenší možné hodnoty, je-li $a = b$, t. j. pro čtverec. Z předchozí nerovnosti plyne, že *ze všech obdélníků, které mají daný obsah, má čtverec nejmenší obvod.*

b) Je-li dána kružnice o poloměru r, je strana a pravidelného n-úhelníka vepsaného do té kružnice dána vzorcem

$$a = 2r \sin \frac{\pi}{n};$$

obvod L_0 a obsah P_0 tohoto n-úhelníka jsou

$$L_0 = na = 2nr \sin \frac{\pi}{n},$$

$$P_0 = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = nr^2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n}.$$

Z toho plyne

$$L_0^2 - 4\pi \cdot \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot P_0 = 0.$$

Poněvadž úhel $\pi : n$ je pro $n = 3, 4, 5, \ldots$ v prvním kvadrantu, platí

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}, \quad \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} > 1$$

a tedy

$$L_0^2 - 4\pi P_0 > 0 \text{ pro každé } n.$$

Podle věty

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

je, položíme-li $\alpha = \pi : n$ nebo $\alpha = 2\pi : n$,

$$\lim_{n \to \infty} L_0^2 = \lim_{n \to \infty} 4\pi^2 r^2 \left(\frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}\right)^2 = 4\pi^2 r^2$$

$$\lim_{n \to \infty} 4\pi P_0 = \lim_{n \to \infty} 4\pi^2 r^2 \left(\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}\right) = 4\pi^2 r^2,$$

a tedy

$$\lim_{n \to \infty} (L_0^2 - 4\pi P_0) = 0.$$

Z toho plyne: $\lim\limits_{n \to \infty} L_0 = 2\pi r$, t. j. obvodu kružnice o poloměru r, a $\lim\limits_{n \to \infty} P_0 = \pi r^2$, t. j. obsahu příslušného kruhu; pro obvod L a obsah kruhu P platí

$$L^2 - 4\pi P = 0.$$

III. ÚHLY V PROSTORU, MNOHOHRANY A MNOHOSTĚNOVÉ PLOCHY

14. Úhly v prostoru. Úhel dvou rovin. Odchylka přímky od roviny. a) V prostoru jsou dány dva polopaprsky OA a $O'B$. Úhel jimi sevřený stanovíme takto: Sestrojíme bodem O polopaprsek OC rovnoběžný k $O'B$; úhel AOC rovná se úhlu polopaprsků OA a $O'B$. Všechny souhlasně rovnoběžné paprsky mají stejný směr a smysl.

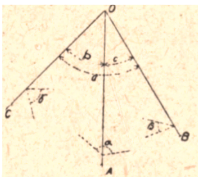
b) V prostoru jsou dány dvě roviny, jež se protínají v přímce p. Úhel α obou rovin stanovíme takto: Sestrojíme rovinu kolmou k p; tato rovina protíná obě dané roviny ve dvou přímkách a a a'. Jejich úhel rovná se úhlu α. Úhel α je určen dvojznačně, neboť přímky a a a' tvoří jeden úhel ostrý a druhý tupý (k vypuklým úhlům nepřihlížíme).

Úhel dvou rovin rovná se úhlu, jehož ramena jsou kolmice vztyčené v některém bodě průsečné přímky p k jedné a ke druhé rovině.

c) Odchylka přímky od roviny je úhel mezi přímkou a jejím kolmým průmětem do roviny. Je-li přímka k rovině kolmá, je jejím kolmým průmětem do roviny jediný bod; v tomto případě považujeme odchylku přímky od roviny za rovnou pravému úhlu. Přímka kolmá k rovině svírá pravý úhel s každou přímkou v té rovině ležící.

15. Trojhran a sférický trojúhelník. a) Tři polopaprsky OA, OB, OC, vedené daným bodem O, určují *trojhran*; O je jeho *vrchol*; OA, OB a OC jsou jeho *hrany*; část roviny BOA ležící mezi OA a OB nazývá se *stěna* mnohohranu, COB a AOC jsou další dvě stěny. Rovina stěny BOA, dělí prostor na dvě části; v jedné z nich je třetí hrana OC a tuto část nazveme kladnou částí prostoru vzhledem k rovině BOA, druhou pak nazveme zápornou. Podobně se dělí prostor na dvě části rovinou COB nebo AOC; kladná část je vždy ta, ve které leží třetí hrana. *Vnitřek trojhranu* obsahuje ty body, které leží vzhledem ke každé jeho stěně v kladné části prostoru. Pravíme, že každý trojhran je *vypuklý*, což znamená, že celý jeho vnitřek leží po jediné straně každé jeho stěny.

b) Úhel, jehož ramena jsou dvě hrany trojhranu na př. OA a OB, nazývá se *strana* trojhranu; je to vždy úhel dutý. Úhel dvou stěn, jež se protínají podél hrany trojhranu, nazývá se *úhel* trojhranu; každý úhel trojhranu je dutý a je jednoznačně určen takto: Libovolný bod M příslušné hrany je jeho vrchol a kolmice MP a MQ sestrojené k OA ve stěnách BOA, resp. AOC, jsou jeho ramena. V obr. 16 jsou naznačeny tři strany a, b, c a tři úhly α, β, γ trojhranu.



Obr. 16.

Obr. 17.

c) Opišme kolem vrcholu O trojhranu kulovou plochu o poloměru 1, která protne jeho hrany v bodech A, B, C. Stěny trojhranu protínají kulovou plochu v obloucích CB, AC, BA hlavních kružnic (t. j. kružnic, jichž poloměr se rovná poloměru kulové plochy). Obrazec utvořený těmito třemi oblouky se nazývá *sférický trojúhelník*. V obr. 17 je naznačen střed O koule a sférický trojúhelník ABC; strany a, b, c trojhranu jsou stranami sférického trojúhelníka a úhly α, β, γ trojhranu jsou vnitřní úhly sférického trojúhelníka.

Bereme v úvahu jen takové sférické trojúhelníky, jichž úhly i strany jsou duté úhly. Kulová plocha dělí se sférickým trojúhelníkem na dvě části: vnitřek trojúhelníka a vnějšek. Vnitřek leží ve vnitřku příslušného trojhranu s vrcholem v O.

16. Sférický obraz stěny trojhranu. Výplňkový trojhran. a) Směr v prostoru se zobrazuje na povrchu pomocné kulové plochy o středu O bodem M tak, že poloměr OM je s oním směrem souhlasně rovnoběžný. Bod M je *sférický obraz* daného směru. Zavádíme dále *sférický obraz roviny* (nebo stručně: *obraz roviny*) jakožto sférický obraz směru kolmého k rovině; aby zobrazení bylo jednoznačné, nutno voliti určitý smysl normály.

Vnější normála ke stěně AOB trojhranu je kolmice vztýčená k ní do *záporné* části prostoru vzhledem k AOB; podobně jsou určeny vnější normály ke stěnám BOC a COA a tím i sférické obrazy C', A', B' stěn, resp. AOB, BOC a COA. Střed pomocné kulové plochy volíme v O. Trojhran $OA'B'C'$ se jmenuje *výplňkový* neboli *polární trojhran* k trojhranu $OABC$. Tři body A', B', C' určují na kulové ploše *výplňkový* neboli *polární sférický trojúhelník* k trojúhelníku, ve kterém se kulová plocha protíná s původním trojhranem $OABC$.

Příklad: Jsou-li všechny úhly původního sférického trojúhelníka pravé, je vnitřek trojúhelníka jedna osmina (oktant) celé kulové plochy; vnitřek příslušného výplňkového trojúhelníka, jenž má také tři pravé úhly, je oktant protilehlý k předešlému.

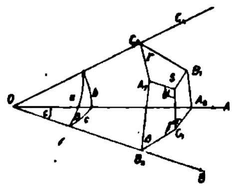
b) Jsou-li $a = BOC$, $b = COA$, $c = AOB$ strany daného sférického trojúhelníka a α, β, γ jeho úhly při A, B, C, jsou-li pak $a' = B'OC'$, $b' = C'OA'$, $c' = A'OB'$ strany a α', β', γ' úhly polárního trojúhelníka, platí šest rovnic

$$\begin{aligned} a + \alpha' &= \pi, & \alpha + a' &= \pi, \\ b + \beta' &= \pi, & \beta + b' &= \pi, \\ c + \gamma' &= \pi, & \gamma + c' &= \pi. \end{aligned}$$

K důkazu (viz obr. 18) sestrojíme tři kolmice ke stěnám daného trojhranu $OABC$ spuštěné z bodu S ležícího uvnitř trojhranu. První z nich SA_1, spuštěná na rovinu BOC, protíná ji v bodě A_1; druhá SC_1, spuštěná na AOB, protíná ji v bodě C_1. Obě tyto kolmice leží v rovině SA_1C_1 kolmé ke hraně OB trojhranu a proťaté touto hranou v bodě B_2.

V rovinném čtyrúhelníku $A_1SC_1B_2$ jsou úhly při A_1 a C_1 pravé; úhel při S je b', úhel při B_2 je β, tedy $\beta + b' = \pi$. Třetí kolmice SB_1 spuštěná na rovinu OCA protíná ji v B_1. Rovina SC_1B_1 je kolmá k hraně OA a protíná ji v A_2. Čtyrúhelník $OA_2C_1B_2$ v rovině OAB má pravé úhly při A_2 a B_2; úhel při O je c a úhel při C_1 je γ', tedy $c + \gamma' = \pi$. Tím jsou dokázány dvě z hořejších šesti rovnic; zbývající čtyři se dokáží stejným postupem.

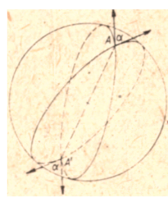
Z obr. 18 plyne, že hrana OA původního trojhranu je kolmá ke stěně SB_1C_1 polárního trojhranu a obdobnou vlastnost mají hrany OB a OC; původní trojhran $OABC$ je tedy polární k druhému. *Je-li jeden trojhran polární k druhému, je také druhý polární k prvnímu; je-li jeden sférický trojúhelník polární k druhému, je také druhý polární k prvnímu.*



Obr. 18.

17. Plošný obsah sférického dvojúhelníka a trojúhelníka. — a) Budiž A bod na kulové ploše o poloměru 1 a A' bod protilehlý. Spojme A a A' dvěma hlavními polokružnicemi; jejich tečny sestrojené v A a v A' protínají se v jednom i ve druhém bodě v úhlu α (viz obr. 19). Obsah P sférického dvojúhelníka omezeného oběma polokružnicemi má se k povrchu celé koule (který je roven 4π) jako úhel α k 2π, je tedy

$$P : 4\pi = \alpha : 2\pi,$$
$$P = 2\alpha. \qquad (1)$$



Obr. 19.

Obsah sférického dvojúhelníka rovná se dvojnásobku jeho úhlu měřeného v absolutní míře.

b) Budiž nyní dán sférický trojúhelník o úhlech α, β, γ na povrchu jednotkové kulové plochy. Abychom ustanovili jeho obsah P, prodlužme všecky jeho strany na úplné hlavní kružnice; těmito třemi hlavními kružnicemi dělí se celá kulová plocha na osm sférických trojúhelníků*). Daný trojúhelník doplňuje se s každým přilehlým (totiž s trojúhelníkem, který má s ním jednu společnou stranu) na dvojúhelník. Označme P_α, P_β, P_γ obsahy těchto přilehlých trojúhelníků, které mají s původním společné strany ležící po řadě proti úhlům α, β, γ. Podle (1) platí

$$P + P_\alpha = 2\alpha, \quad P + P_\beta = 2\beta, \quad P + P_\gamma = 2\gamma$$

a tedy

$$3P + P_\alpha + P_\beta + P_\gamma = 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Dále je

$$P + P_\alpha + P_\beta + P_\gamma = 2\pi,$$

neboť původní trojúhelník se doplňuje se třemi přilehlými na polovinu kulového povrchu. Z obou předešlých rovnic plyne, že

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{2}$$

Obsah sférického trojúhelníka rovná se sférickému nadbytku, t. j. veličině, o kterou je součet jeho úhlů větší než úhel přímý.

c) Jsou-li dvojúhelníky nebo trojúhelníky na kulové ploše o poloměru r, jsou jejich obsahy — srovnáváme-li je při neproměnných stranách a úhlech s trojúhelníky na kulové ploše o poloměru 1 — větší proti původním v poměru $r^2 : 1$, takže platí vzorce

$$P = 2\alpha r^2 \tag{1'}$$

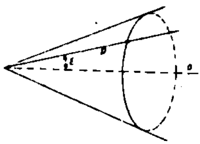
$$P = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\, r^2 \tag{2'}$$

pro obsah sférického dvojúhelníka resp. trojúhelníka na povrchu kulové plochy o poloměru r.

18. O tělesném úhlu. a) Přímka p, jež se otáčí kolem osy o ji protínající, vytvoří rotační kuželovou plochu (obr. 20). Je-li úhel ε mezi o a p malý, pravíme, že je kužel úzký; čím větší je ε, tím je kužel širší. Úhel ε (nebo 2ε) nazývá se *otvorem* kužele. Obecněji měří se šířka nebo otvor jakéhokoli

*) Srv. *J. Vojtěch:* Geometrie pro V. třídu reálek, 6. vyd. 1935, str. 171.

kužele (nejen rotačního) *tělesným úhlem* takto: Obecná kuželová plocha je dána svým vrcholem O a řídící křivkou k; plocha je vytvořena přímkou, která se pohybuje tak, že stále prochází bodem O a protíná křivku k. Předpokládáme, že křivka k leží na kulové ploše o poloměru 1 opsané kolem O, že je uzavřená a že sama sebe neprotíná. Vnitřek křivky k (část kulové plochy) má obsah P, který se nazývá tělesný úhel kužele. Křivka k může býti na př. složena z několika kruhových oblouků.



Obr. 20.

b) Tělesný úhel trojhranu je roven obsahu příslušného sférického trojúhelníka. Jsou-li α, β, γ úhly trojhranu, je jeho tělesný úhel podle (2) odst. 17 roven

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Tělesný úhel trojhranu, jehož všechny tři úhly jsou pravé, rovná se tedy obsahu kulového oktantu, totiž $\frac{1}{2}\pi$. Tělesný úhel shora zmíněné rotační kuželové plochy (obr. 20) je roven obsahu kulového vrchlíku o výšce $1 - \cos \varepsilon$; poněvadž tento obsah se rovná obvodu 2π hlavní kružnice násobenému výškou vrchlíku, má tělesný úhel rotačního kužele velikost $2\pi (1 - \cos \varepsilon)$.

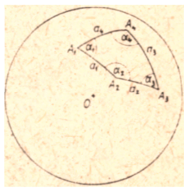
19. Mnohohran a sférický mnohoúhelník. a) n polopaprsků vedených bodem O a uspořádaných v určitém pořadí $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ definuje *n-hran* (mnohohran) o vrcholu O. Polopaprsky OA_k jsou *hrany* n-hranu. Rovina obsahující hrany OA_1 a OA_2 je *stěna* n-hranu; rovina obsahující OA_2 a OA_3 je jeho druhá stěna atd. Rovina hran OA_n a OA_1 je n-tá stěna. Úhel dvou sousedních hran je *strana* n-hranu; je celkem n stěn: $A_1OA_2, A_2OA_3, \ldots, A_nOA_1$. Podél každé hrany se protínají dvě stěny n-hranu v úhlu, jenž se nazývá *úhel* n-hranu.

b) Mnohohran je *vypuklý*, má-li každá jeho stěna tuto vlastnost: Mimo dvě hrany, které leží v dané stěně, leží všechny ostatní hrany po jedné a téže straně roviny obsahující danou stěnu. Podle této definice je trojhran vždy vypuklý (viz odst. 15a). Úhly vypuklého mnohohranu jsou vždy duté.

V dalším budeme se zabývati jen vypuklými mnohohrany, jichž úhly i strany jsou vesměs úhly duté.

Příklad mnohohranů, jež nejsou vypuklé, bude uveden jedině v odst. 25.

c) Stěny jakéhokoli mnohohranu protínají kulovou plochu, která má střed ve vrcholu O mnohohranu a poloměr rovný jednotce, v obrazci, jenž se nazývá *sférický mnohoúhelník*. Jeho *strany* rovnají se po řadě stranám mnohohranu; jsou to středové úhly $a_1, a_2, \ldots$ příslušné obloukům $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ hlavních kružnic (v obr. 21 je sférický čtyrúhelník $A_1A_2A_3A_4$ se stranami a_1, a_2, a_3, a_4 a úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$). Rovina oblouku A_1A_2 svírá s rovinou oblouku A_2A_3 *úhel* α_2 mnohoúhelníka; roviny oblouků A_2A_3 a A_3A_4 svírají úhel α_3 atd. Body $A_1, A_2, \ldots$ jsou *vrcholy* mnohoúhelníka.



Obr. 21.

V dalším jednáme vesměs o vypuklých sférických mnohoúhelnících, t. j. takových, které jsou vytvořeny průsekem kulové plochy s vypuklým mnohohranem. Každý úhel i každá strana vypuklého mnohoúhelníka je úhel dutý.

20. Tělesný úhel vypuklého mnohohranu a obsah sférického mnohoúhelníka. a) Každý vypuklý mnohohran má svůj tělesný úhel; podle definice podané v odst. 18a je tělesný úhel mnohohranu roven obsahu příslušného sférického mnohoúhelníka.

b) *Obsah P sférického n-úhelníka* je funkcí jeho úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a vypočteme jej takto: Uvnitř mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$ volíme na kulové ploše bod S, který spojíme oblouky hlavních kružnic s body $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Mnohoúhelník se tak rozdělí na n sférických trojúhelníků, takže

$$P = \triangle SA_1A_2 + \triangle SA_2A_3 + \ldots + \triangle SA_nA_1.$$

Součet všech vnitřních úhlů v těchto n trojúhelnících je

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + 2\pi;$$

podle vzorce (2) odst. 17 pro obsah trojúhelníka je tedy

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + 2\pi - n\pi,$$

nebo, značíme-li součet zkráceně,

$$P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - (n - 2)\,\pi. \tag{1}$$

c) Tento vzorec upravíme zavedouce součet vnějších úhlů. Je-li α vnitřní úhel, je $(\pi - \alpha)$ příslušný vnější úhel mnohohranu. Výraz

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \ldots + (\pi - \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k)$$

rovná se tedy součtu vnějších úhlů. Patrně je

$$P = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k), \tag{2}$$

kterožto rovnici vyjádříme větou: *Součet vnějších úhlů sférického mnohoúhelníka doplňuje se s jeho obsahem na povrch polokoule.*

d) Předchozí vzorce platí pro obrazce na kulové ploše o poloměru 1. Sférický n-úhelník o úhlech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sestrojený na kulové ploše o poloměru r má plošný obsah (srv. odst. 17c)

$$P = r^2 \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - (n - 2)\,\pi\right]$$

nebo

$$P = r^2 \left[2\pi - \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k)\right].$$

21. Výplňkový neboli polární mnohohran. a) Budiž dán vypuklý n-hran T, jehož strany jsou $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a jehož úhly jsou $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (roviny stran a_n a a_1 svírají úhel α_1, roviny stran a_1 a a_2 úhel α_2 atd.). Předpokládáme, že

$$0 < a_k < \pi, \quad 0 < \alpha_k < \pi; \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Kulová plocha Σ_1 o poloměru rovném 1, jež má střed ve vrcholu O n-hranu T, protíná se s jeho stěnami ve sférickém n-úhelníku T'. Podobně jako v odst. 15a v případě trojhranu tak i zde dělí se prostor každou stěnou n-hranu T na kladnou a zápornou část; kladná je ta, v níž jsou obsaženy další hrany (polopaprsky) n-hranu T. Bod, jenž je v kladné části prostoru vzhledem ke každé stěně mnohohranu T, leží, jak pravíme, uvnitř T; tak na př. všechny body na Σ_1, které leží uvnitř sférického n-úhelníka T', leží uvnitř T.

Normála (vnější) vztýčená ke stěně n-hranu T je kolmice, která míří z jeho vnitřku ven.

b) Sestrojme k jednotlivým stěnám n-hranu T normály $ON_1, ON_2, \ldots, ON_n$ ve smyslu právě vytčeném. Dostaneme tak n polopaprsků, které tvoří nový n-hran U; je to n-hran *výplňkový* neboli *polární* k danému T. Jeho strany označíme $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ a jeho úhly $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$; úhel α'_1 je utvořen jeho n-tou a první stěnou, jež se protínají v ON_1; úhel α'_2 první a druhou stěnou, jež se protínají v ON_2 atd. Strana a'_1 má ramena ON_n a ON_1, strana a'_2 ramena ON_1 a ON_2 atd.

Je-li U výplňkový n-hran k T, je T výplňkový k U a platí vztahy

$$a_k + \alpha'_k = \pi, \quad a'_k + \alpha_k = \pi; \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Důkaz provede se právě tak jako obdobný důkaz o trojhranu v odst. 16b; pro lepší přehled užijeme zase pomocného bodu S, ležícího uvnitř T, jakožto vrcholu trojhranu výplňkového k T (T má vrchol O). Výplňkový n-hran U je vypuklý právě tak jako T.

T protíná Σ_1 ve sférickém n-úhelníku T' o stranách a_k a úhlech α_k; výplňkový n-hran U protíná Σ_1 ve *výplňkovém* neboli *polárním sférickém n-úhelníku* U' o stranách a'_k a úhlech α'_k. Budiž P obsah n-úhelníka T' a L' obvod výplňkového U', vzhledem k (1) a k rovnici (2) odst. 20 je

$$P + L' = 2\pi,$$

kde

$$L' = \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} a'_k.$$

Tedy: *Obsah vypuklého sférického mnohoúhelníka doplňuje se s obvodem polárního na plný úhel.*

Z toho plyne dále: *Obvod vypuklého sférického mnohoúhelníka je menší než* 2π. Jinými slovy: *Součet stran vypuklého n-hranu je menší než plný úhel.*

c) Hrany n-hranu U protínají plochu Σ_1 v bodech N_1, $N_2, \ldots, N_n$, jež jsou vrcholy sférického n-úhelníka U'; U' se nazývá *sférickým obrazem* daného n-hranu T. Vrchol N_k sférického n-úhelníka U' odpovídá k-té stěně n-hranu T; ON_k je kolmice k té stěně.

22. Věta o deformaci vypuklého mnohohranu. Budiž T vypuklý n-hran a U' jeho sférický obraz. Má-li T strany $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a U' úhly $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$, je podle (1) odst. 20 obsah P' n-úhelníka U' roven

$$P' = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k - (n-2)\pi.$$

Podle (1) odst. 21 je

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha'_k = \sum_{k=1}^{n} (\pi - a_k) = n\pi - \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

takže

$$P' = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1}$$

P' nezávisí tedy na úhlech n-hranu T, nýbrž jen na součtu jeho stran. Představme si, že T je zhotoven na př. z dřevěných desek, jež jsou podél hran opatřeny závěsy, takže se

mohou kolem nich volně otáčeti; pravíme, že se T může takto „deformovat". Rovnice (1), kterou znal již Descartes, má pak tento smysl: *Deformuje-li se mnohohran beze změny svých stran, nemění se obsah jeho sférického obrazu.* Jinými slovy: nemění se tělesný úhel mnohohranu polárního.

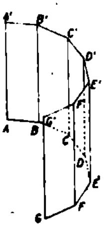
Poznamenejme, že nelze deformovati trojhran, neboť trojhran je jednoznačně určen svými třemi stranami. Deformovati lze n-hran, je-li $n > 3$.

23. Mnohostěnové plochy. Jednoduché příklady. a) Spojíme-li několik mnohoúhelníků (srv. odst. 4a) tak, že každý z nich má se sousedním společnou jen stranu, vznikne *mnohostěnová plocha.* Mnohostěnová plocha je *otevřená*, je-li omezena jednou nebo více lomenými čarami, které tvoří její *kraj*. Mnohostěnová plocha je *uzavřená*, dělí-li prostor na dvě části, t. j. vnějšek a vnitřek plochy, tak že z jedné části nelze do druhé přejíti aniž by se prošlo plochou; uzavřená plocha nemá kraje. Mnohoúhelníky, z nichž se skládá mnohostěnová plocha, jsou její *stěny*; jejich vrcholy jsou *vrcholy* plochy a jejich strany jsou *hrany* plochy.

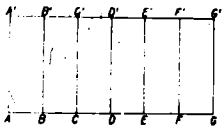
Příkladem otevřené plochy omezené jedinou uzavřenou lomenou čarou je plášť jehlanu; obvod podstavy jehlanu je krajem plochy. Příkladem otevřené plochy, jejíž kraj se skládá ze dvou oddělených uzavřených lomených čar, je plocha složená ze čtyř stěn krychle; dostaneme ji vynechajíce ze šesti stěn krychle dvě protější. Uzavřené mnohostěnové plochy (mnohostěny) jsou na př. čtyřstěn, krychle atd. O vlastnostech mnohostěnů jedná se v kap. IV.

b) Ohýbáme-li kus tenkého a původně rovného papíru, nabývá tvaru buď válcové plochy, nebo kuželové plochy a j. Sledujeme-li blíže způsob, kterým se tyto nové plochy obyčejně odvozují z původní roviny, shledáme, že se ohýbání papíru děje vždy podél přímky. Přechází-li na př. rovina do tvaru kuželové plochy, ohýbá se ovšem kolem nekonečně mnohých přímek (kuželová plocha má nekonečně mnoho hran) a podobně i v ostatních případech ohybu. Ohýbání roviny do tvaru křivé plochy dá se *přibližně* nahraditi ohýbáním, při kterém z roviny vznikne ne křivá nýbrž mnohostěnová plocha. Uveďme tři příklady:

Plášť kolmého hranolu má, rozvineme-li jej do roviny, síť složenou z několika obdélníků o stejné výšce. V obr. 22a je znázorněna část hranolového pláště složená ze šesti stejných obdélníků; v obr. 22b je táž část pláště rozvinutá do roviny.

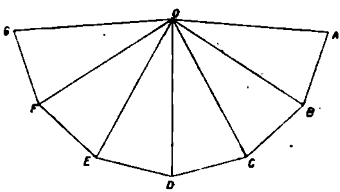


Obr. 22a.

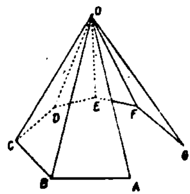


Obr. 22b.

Plášť pravidelného jehlanu má, rozvineme-li jej do roviny, síť složenou z několika rovnoramenných trojúhelníků o stejně dlouhých ramenech.



Obr. 23a.

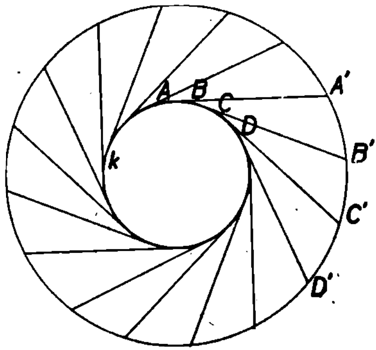


Obr. 23b.

V obr. 23a je znázorněna část jehlanového pláště složená ze šesti shodných rovnoramenných trojúhelníků; v obr. 23b je táž část pláště rozvinutá do roviny.

Na kruhový list tuhého papíru narýsujeme kružnici *k*, jejíž obvod rozdělíme na šestnáct stejných dílů; v dělících bodech narýsujeme tečny, které jsou stranami pravidelného šestnáctiuhelníka o vrcholech *ABC* ... opsaného kružnici *k* (obr. 24). Na jeho obvodě volme určitý smysl oběhu na př. od *A* přes *B* k *C* atd. Každou stranu prodlužme v tomto smyslu, až protne kraj papíru. *AB* prodloužena protne kraj papíru v *A'*, *BC* v *B'* atd.

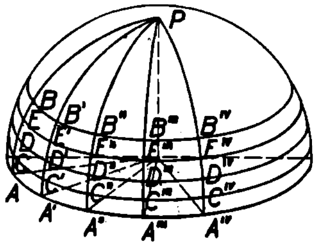
Nařízněme pak papír, podél úseček *BB'*, *CC'*, ... tak, aby se mohl podél nich ohýbati. Podél *AA'* jej prořízneme a vystřihneme vnitřek šestnáctiúhelníka. Oddalme jeden „břeh“ řezu AA' od druhého tak, že se list papíru ohýbá kolem úseček BB', CC', ... šestnáct trojúhelníků $BA'B'$, $CB'C'$, $DC'D'$, ..., které původně byly v rovině, rozloží se v prostoru.



Obr. 24.

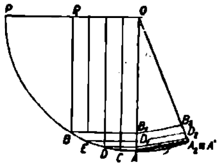
Body, které původně byly vrcholy šestnáctiúhelníka, budou rozloženy podél šroubovice. Deformace mnohostěnové plochy složené ze šestnácti trojúhelníků dává obraz o deformaci roviny v plochu, kterou vytvořují tečny obyčejné šroubovice.

24. Mnohostěn vepsaný do kulového pásu. Budiž dán kulový pás omezený hlavní kružnicí koule a kružnicí s ní rovnoběžnou; vzdálenost obou kružnic budiž rovna polovině poloměru koule. Rozdělme pás na několik na př. na šestnáct stejných dílů oblouky hlavních kružnic (meridiánů) AB, $A'B'$, $A''B''$ atd. (obr. 25). Rozdělme mimo to vzdálenost mezi rovinami obou kružnic, které omezují pás, na čtyři stejné díly a dělícími body veďme roviny (tři) rovnoběžné s rovinami kružnic. Tak se rozdělí pás na 64 *křivočarých lichoběžníků*. Volme jejich vrcholy za vrcholy mnohostěnové plochy, která je omezena 64 *obyčejnými lichoběžníky*.



Obr. 25.

Čtyři lichoběžníky (obyčejné), jichž ramena AC, CD, DE, EB, resp. $A'C', C'D', D'E', E'B'$ jsou vepsána do oblouku AB, resp. $A'B'$ (obr. 25), sestrojíme takto: Narýsujeme kvadrant AOP hlavní kružnice, rozpůlíme jeho poloměr OP bodem P_1 a úsečku OP_1 rozdělíme na čtyři stejné díly. Dělícími body vedeme rovnoběžky k poloměru OA ($OA \perp OP$); tak dostaneme na oblouku AP body C, D, E, B. Tětivy AC, CD, DE, EB jsou hledaná ramena lichoběžníků (obr. 26). Promítněme nyní body C, D, E, B kolmo do OA a buďte C_1, D_1, E_1, B_1 příslušné průměty. V kruhové výseči OAA', která má za jeden krajní poloměr OA a středový úhel rovný $\frac{1}{16}$ plného úhlu, t. j. $\frac{1}{8}\pi$, vedeme tětivu AA' a k ní rovnoběžky body C_1, D_1, E_1, B_1. Jejich průsečíky s OA' buďte C_2, D_2, E_2, B_2. Úsečky $C_1C_2, D_1D_2, E_1E_2, B_1B_2$ jsou hledané základny lichoběžníků.



Obr. 26.

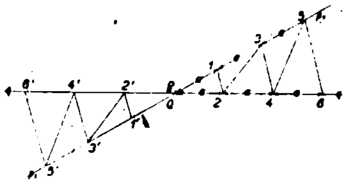
Vystřihněme z tuhého papíru čtyři lichoběžníky $AA'C'C$, $CC'D'D, DD'E'E, EE'B'B$ a spojme podél společných hran buď závěsy nebo přilepenými proužky plátna; připojme pak podle obr. 25 další stejné skupiny po čtyřech lichoběžnících. Tak dostaneme mnohostěnovou plochu o 64 stěnách, model kulového pásu, a můžeme na ní sledovati různé tvary, do kterých lze zohýbati kulový pás *proříznutý podél AB*. Mnohohrany při vrcholech této mnohostěnové plochy jsou všechny vypuklé.

Na rozdíl od příkladů uvedených v odst. 23 *není možno rozvinouti tento pás do roviny;* takové rozvinutí stává se možným teprve když provedeme v pásu další řezy podél vhodně volených hran.

25. Příklad mnohostěnové plochy, jejíž mnohohrany při vrcholech nejsou vypuklé. Otáčí-li se přímka rovnoměrně kolem pevné osy, kterou kolmo protíná, a pošinuje-li se zároveň podél ní, vytvoří *kolmou šroubovou plochu* neboli *helikoid*. Helikoid je (pravotočivý) *pravý*, souhlasí-li otáčivý pohyb přímky, pozorovaný ve smyslu jejího postupného pohybu, s pohybem hodinových ručiček; v opačném případě je helikoid (levotočivý) *levý*. Část helikoidu vytvořená otočením přímky o plný úhel nazývá se *závit* helikoidu.

Mnohostěnovou plochu vepsanou do závitu helikoidu sestrojíme tak, že rozdělíme celý závit na dvanáct stejných dílů, vepíšeme mnohostěnovou plochu (složenou z trojúhelníků) do jedné dvanáctiny závitu a pak spojíme dvanáct takovýchto ploch.

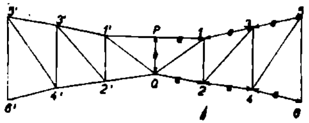
Budiž p počáteční poloha tvořicí přímky a q poloha, do které se přímka dostane po otočení o dvanáctinu plného úhlu (o 30°); současně s tímto otočením pošine se přímka podél osy otáčení o délku h. V obr. 27 je průmět p_1 přímky p do



Obr. 27.

průmětny kolmé k ose otáčení a přímka q, jež leží v průmětně. Průmět P_1 bodu P, v němž osa protíná přímku p, a bod Q, v němž protíná přímku q, se ztotožňují. Na přímku p naneseme počínajíce bodem P stejně dlouhé úsečky o délce a (v obr. 27 jsou naneseny tři na jednu stranu a tři na druhou). Jejich koncové body označíme po řadě *1, 3, 5* (na jedné straně) a *1', 3', 5'* (na druhé). Podobně naneseme stejně dlouhé úsečky a na přímku q počínajíce od bodu Q; jejich koncové body jsou *2, 4, 6* resp. *2', 4', 6'*. Spojme Q s *1*, *1* s *2*, *k* s *3* atd. Dostaneme celkem dvanáct trojúhelníků *456*, *345*, *234*, *123*, *Q12*, *Q1P*, *Q1'P*, *Q1'2'*, *1'2'3'*, *2'3'4'*, *3'4'5'*, *4'5'6'*, *2*teré tvoří mnohostěnovou plochu vepsanou do dvanáctiny závitu pravého helikoidu.

Skutečné délky hran *P1*, *13*, *35*, *24* atd. jsou stejné, každá se rovná a. Skutečná délka hrany na př. *34* rovná se přeponě pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna je úsečka *34* jevící se v obrazci 27; druhá odvěsna má délku h. Sestrojíme-li ze skutečných délek všech hran síť oné dvanáctistěnné mnohostěnové plochy, dostaneme obrazec 28. Ohneme-li stěnu *456* podél hrany *45* dozadu (za rovinu nákresu), stěnu *345* podél hrany *34* dopředu atd, srovnají se do přímky jednak hrany *5'3'*, *3'1'*, ..., *35*, jednak hrany *6'4'*, *4'2'*, ..., *46* a dostaneme mnohostěnovou plochu vepsanou do jedné dvanáctiny pravého helikoidu (kdybychom ohýbali všude dopředu místo dozadu a dozadu místo dopředu, dostali bychom plochu vepsanou do levého helikoidu).



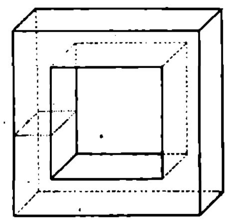
Obr. 28.

Spojíme-li dvanáct takových stejných ploch, dostaneme plochu vepsanou do jednoho závitu pravého helikoidu (výška závitu je 12 h). Spojení se provede tak, že hrana *6'4'* jedné plochy splyne s hranou *5'3'* následující plochy, hrana *4'2'* jedné s hranou *3'1'* následující atd. *Ani jediný mnohohran při vrcholech mnohostěnové plochy vepsané do závitu helikoidu není vypuklý*, neboť na př. při vrcholu *4'* jsou v obrazci 28 tři úhly α, β, γ (strany), jež mají součet větší než 180°, a podobně při vrcholu *3'* tři úhly $\delta, \varepsilon, \eta$ se součtem větším než 180°. Plocha, jež vznikne právě popsaným spojením dvanáctistěnových ploch (obr. 28), bude míti tedy při jednom vrcholu šest hranových úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ se součtem větším než 360°.

26. Jednoduše souvislý uzavřený mnohostěn. a) Mnohostěnová plocha nazývá se *uzavřená*, dělí-li prostor na dvě části (odst. 23a).

b) Mnohostěnová uzavřená plocha je *jednoduše souvislá*, rozpadá-li se každým řezem, jenž má tvar uzavřené a neprotínající se čáry, na dvě části. Tak na př. všechny stěny krychle tvoří dohromady jednoduše souvislou plochu. Příkladem uzavřené plochy, která není jednoduše souvislá, je mnohostěnová plocha mající tvar rámu (obr. 29); prořízneme-li ji podél vytečkovaně naznačené čáry, nerozpadne se na dvě části.

c) Těleso omezené uzavřenou a jednoduše souvislou mnohostěnovou plochou nazveme *mnohostěn*; přesnější označení: uzavřený a jednoduše souvislý vynecháváme, poněvadž v dalším jednáme jen o mnohostěnech tohoto druhu.



Obr. 29.

Mnohostěn má určitý *počet stěn*, který označíme písmenem s; má-li s_3 stěn trojúhelníkových, s_4 čtyrúhelníkových atd, je

$$s = \sum s_n; \tag{1}$$

součet $\sum s_n$ má konečný počet sčítanců a index n probíhá všechny možné hodnoty počínaje hodnotou $n = 3$.

Mnohostěn má určitý *počet vrcholů*, který nazveme v. Je-li v_n počet těch vrcholů, v nichž se sbíhá vždy n hran, je

$$v = \sum v_n. \tag{2}$$

Je-li h *počet hran* mnohostěnu, je

$$\sum n s_n = 2h, \tag{3}$$

kde součet zase začíná s hodnotou $n = 3$ a vztahuje se ke všem možným hodnotám n. K odůvodnění rovnice (3) připomeneme, že její levá strana má tolik jednotek, kolik hran bychom dostali, kdybychom mnohostěn podél všech hran rozřezali na jednotlivé stěny (každá trojúhelníková stěna by dala tři hrany, každá čtyrúhelníková čtyři atd.). Při tom by se vyskytla každá hrana mnohostěnu dvakrát, neboť každá náleží dvěma stěnám; proto je napravo v rovnici (3) $2h$. Stejně se odůvodní rovnice

$$\sum n v_n = 2h. \tag{4}$$

d) Označme písmenem w součet všech *hranových úhlů* mnohostěnu, t. j. úhlů utvořených dvěma hranami sbíhajícími se v některém vrcholu mnohostěnu. Poněvadž součet úhlů v n-úhelníku činí $(n - 2)\,\pi$ (odst. 4c), je

$$w = \sum (n - 2)\,\pi s_n = \pi \sum n s_n - 2\pi \sum s_n,$$

nebo, užijeme-li rovnic (1) a (3):

$$w = 2\,(h - s)\,\pi. \tag{5}$$

Součet hranových úhlů rovná se rozdílu mezi počtem hran a stěn násobenému 2π.

e) Úhel, v němž se protínají dvě sousední stěny podél společné hrany, nazývá se *stěnový úhel* mnohostěnu příslušný té hraně.

27. Vypuklé mnohostěny. Mnohostěn je *vypuklý*, má-li každá jeho stěna tuto vlastnost: Rovina obsahující stěnu nemá mimo tuto stěnu žádný další bod společný s mnohostěnem. Vnitřek vypuklého mnohostěnu leží vždy celý po jedné straně roviny, která obsahuje kteroukoli jeho stěnu.

Každá stěna vypuklého mnohostěnu je vypuklý mnohoúhelník (srv. odst. 5). Každý mnohohran utvořený hranami vypuklého mnohostěnu, které se sbíhají v libovolném jeho vrcholu, je vypuklý (srv. odst. 19b).

Příklady vypuklých mnohostěnů jsou: kvádr, jehlan nebo hranol, jehož podstavou je vypuklý mnohoúhelník.

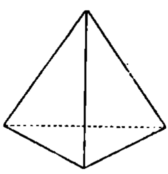
28. Pravidelné mnohostěny. Vypuklý mnohostěn nazývá se *pravidelný*, jsou-li všechny jeho hrany stejně dlouhé, všechny hranové úhly (odst. 26d) stejné a všechny stěnové úhly (odst. 26e) stejné. Takový mnohostěn je omezen vesměs shodnými pravidelnými mnohoúhelníky; mnohohrany při jeho vrcholech jsou stejné a pravidelné (každý má všechny úhly stejné i všechny strany stejné). Celkem *je pět pravidelných mnohostěnů*, jak poznáme touto úvahou:

a) V případě, že je mnohostěn omezen pravidelnými (t. j. rovnostrannými) trojúhelníky, sbíhají se v jednom vrcholu mnohostěnu buď tři stěny nebo čtyři nebo pět; šest nebo více stěn se nemůže v jednom vrcholu stýkati, neboť součet hranových úhlů u takového vrcholu by byl větší než 2π, což není možno (odst. 21b).

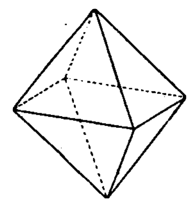
Sestrojme trojhran o vrcholu A ze tří shodných rovnostranných trojúhelníků ABC, ACD a ABD; doplníme-li jej stěnou BCD, která sama je trojúhelník shodný s předešlými třemi, dostaneme *pravidelný čtyrstěn* $ABCD$ (obr. 30).

Sestrojme čtyrhran o vrcholu A ze čtyr shodných rovnostranných trojúhelníků; doplníme-li při vrcholech B, C, D, E další trojúhelníky shodné s předešlými, vznikne *pravidelný osmistěn* $ABCDEF$ (obr. 31).

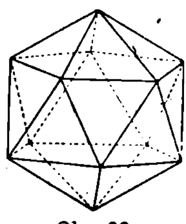
Sestrojme pětihran $ABCDEF$ o vrcholu A z pěti shodných rovnostranných trojúhelníků (obr. 32); doplňme jej dalšími desíti trojúhelníky shodnými s předešlými, které tvoří dohromady „pás“ přiléhající k pětihranu, a konečně



Obr. 30.



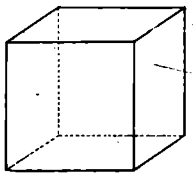
Obr. 31.



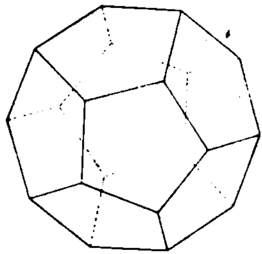
Obr. 32.

připojme k druhému kraji pásu pětihran shodný s původním. Tak obdržíme *pravidelný dvacítistěn* (obr. 32).

b) V případě, že stěny pravidelného mnohostěnu jsou čtverce, mohou se v jednom vrcholu stýkati jen tři stěny; dostaneme *pravidelný šestistěn* neboli *krychli* (obr. 33).



Obr. 33.



Obr. 34.

c) Zbývá případ, kdy pravidelný mnohostěn je omezen pětiúhelníky. V každém vrcholu se stýkají tři pravidelné pětiúhelníky; doplňujeme-li dále, dostaneme *pravidelný dvanáctistěn* (obr. 34).

Pravidelné mnohostěny omezené pravidelnými šestiúhelníky, nebo n-úhelníky pro $n > 6$ nejsou možné, neboť součet hranových úhlů při vrcholu (t. j. součet stran v m-hranu, $m \geqq 3$) takového mnohostěnu byl by větší (pro $n = 6$, $m = 3$ roven) úhlu 2π, což je ve sporu s odst. 21b. Vyčerpali jsme tedy všechny případy, které jsou možné.

Sestavme ještě tabulku, ve které jsou uvedena čísla s (počet stěn), v (počet vrcholů) a h (počet hran) pro pravidelné mnohostěny (viz tab. na str. 43).

29. Sférický obraz vypuklého mnohostěnu. Descartova věta. — a) Přímka kolmá ke stěně mnohostěnu a mířící z jeho vnitřka ven nazývá se *vnější normála* nebo zkrátka normála sestrojená k té stěně. Veďme poloměr ON v pomocné kulové ploše Σ_1 (opsané kolem O poloměrem 1) rovnoběžně k této nor-

	s	v	h
čtyrstěn	4	4	6
krychle	6	8	12
osmistěn	8	6	12
dvanáctistěn	12	20	30
dvacetistěn	20	12	30

mále. Bod N je *sférický obraz* stěny mnohostěnu (viz odst. 16a).

Má-li mnohostěn celkem s stěn, skládá se sférický obraz jeho stěn z s bodů na ploše Σ_1. Všimněme si zvláště toho, jak se zobrazí stěny, které se stýkají v daném vrcholu mnohostěnu. Prochází-li vrcholem O mnohostěnu celkem n stěn, označme je (v tom pořadí, jak jedna po druhé následuje v mnohohranu s vrcholem O) písmeny $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Příslušné sférické obrazy $N_1, N_2, \ldots, N_n$ tvoří sférický n-úhelník.

b) Předpokládejme nyní, že mnohostěn M je vypuklý. Podle odst. 27 tvoří ty jeho stěny $S_1, S_2, \ldots, S_n$, které procházejí některým jeho vrcholem O vypuklý n-hran T; příslušný sférický obraz $N_1, N_2, \ldots, N_n$ je vypuklý sférický n-úhelník a podle rovnice (1) odst. 22 má obsah

$$P' = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{1}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou strany n-hranu T (neboli hranové úhly mnohostěnu M při vrcholu O).

Napišme rovnici (1) pro každý z v vrcholů mnohostěnu M a sečtěme všechny tak vzniklé rovnice. Z názoru je patrno, že součet všech obsahů P' dá dohromady obsah celé kulové plochy Σ_1*), tedy 4π. Součet členů 2π dá $2\pi v$. Sečteme-li součty

$$\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

utvořené pro všechny vrcholy mnohostěnu M, dostaneme součet w všech jeho hranových úhlů (srv. odst. 26d). Bude tedy

$$4\pi = 2\pi v - w$$

nebo

$$w = 2\pi (v - 2). \tag{2}$$

Tato rovnice vyjadřuje Descartovu větu: *Součet hranových úhlů rovná se počtu vrcholů zmenšenému o dvě násobenému 2π.*

c) Sledujme, jaký výsledek dají předchozí úvahy pro krychli a pro pravidelný osmistěn.

V případě *krychle* tři stěny sbíhající se v jednom jejím vrcholu mají za sférické obrazy tři body, které tvoří rovnostranný sférický trojúhelník s třemi pravými úhly (oktant). Osm takových trojúhelníků, jež dostaneme po řadě pro osm vrcholů krychle, pokrývá celou kulovou plochu Σ_1. Součet hranových úhlů krychle je podle (2) roven (dosazujeme $v = 8$) 12π.

V případě *pravidelného osmistěnu* sférické obrazy čtyr stěn sbíhajících se v jednom jeho vrcholu tvoří sférický čtyrúhelník; celá plocha Σ_1 skládá se ze šesti takových čtyrúhelníků odpovídajících jednotlivým vrcholům osmistěnu. Součet hranových úhlů osmistěnu je ($v = 6$) podle (2) roven 8π.

30. Eulerova věta. a) Rovnice (5) odst. 26 a rovnice (2) odst. 29 vyjadřují dvěma různými způsoby veličinu w, součet hranových úhlů na povrchu vypuklého mnohostěnu. Srovnáme-li oba způsoby, dostaneme

$$w = 2\pi (h - s) = 2\pi (v - 2)$$

a tedy

$$h = s + v - 2, \tag{1}$$

---

*) Tuto větu opírající se o názor považujeme za samozřejmou.

což je Eulerova věta: *Počet hran vypuklého mnohostěnu rovná se součtu počtu jeho stěn a vrcholů zmenšenému o dvě.*

Tato věta platí obecně pro každý jednoduše souvislý mnohostěn. — V případě pravidelných mnohostěnů se potvrzuje její platnost podle tabulky uvedené na konci odst. 28.

b) Označme jako v odst. 26 písmenem s_n počet těch stěn vypuklého mnohostěnu, které mají tvar n-úhelníka a v_n počet těch jeho vrcholů, v nichž hrany tvoří n-hran. Podle odst. 26c je

$$s = \sum s_n, \quad v = \sum v_n,$$
$$\sum n s_n = \sum n v_n = 2h;$$

všechny součty v těchto rovnicích začínají s hodnotou $n = 3$. Kombinujeme-li tyto rovnice s (1), dostáváme různé vztahy:

Pišme rovnici (1) ve tvaru

$$s + v = 2 + \tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}h$$

a dosaďme sem

$$s = s_3 + s_4 + \ldots, \quad v = v_3 + v_4 + \ldots,$$
$$\tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{4}(3s_3 + 4s_4 + \ldots), \quad \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{4}(3v_3 + 4v_4 + \ldots);$$

vychází

$$s_3 + s_4 + \ldots + v_3 + v_4 + \ldots = 2 + \tfrac{1}{4}(3s_3 + 4s_4 + \ldots) + \\ + \tfrac{1}{4}(3v_3 + 4v_4 + \ldots)$$

nebo, násobíme-li po obou stranách čtyřmi a upravíme

$$s_3 + v_3 = 8 + s_5 + 2s_6 + \ldots + v_5 + 2v_6 + \ldots.$$

Číslo $s_3 + v_3$ je tedy rovno nejméně osmi; *pro každý vypuklý mnohostěn je počet jeho trojúhelníkových stěn zvětšený o počet trojhranových vrcholů roven aspoň osmi.*

Píšeme-li rovnici (1) ve tvaru

$$s + v = 2 + \tfrac{1}{3}h + \tfrac{2}{3}h,$$

dostaneme

$$s_3 + s_4 + \ldots + v_3 + v_4 + \ldots =$$
$$= 2 + \tfrac{1}{6}(3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \ldots) + \tfrac{1}{3}(3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \ldots):$$

platí tedy rovnice

$$3s_3 + 2s_4 + s_5 = 12 + s_7 + 2s_8 + \ldots + 2v_4 + 4v_5 + \ldots$$

Z toho plyne, že není možno, aby

$$s_3 = 0, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 0,$$

neboť na pravé straně poslední rovnice je kladné číslo. Jinými slovy: *Vypuklý mnohostěn má aspoň jednu stěnu, která má pět hran nebo méně než pět.*

Podobně se dokáže, že

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 = 12 + v_7 + 2v_8 + \ldots + 2s_4 + 4s_5 + \ldots;$$

vypuklý mnohostěn má aspoň jeden vrchol, ve kterém se sbíhá pět hran nebo méně než pět.

31. Zaoblený vypuklý mnohostěn. a) V každém bodě P některé stěny $ABCD\ldots$ vypuklého mnohostěnu sestrojíme vnější normálu (odst. 29a) a naneseme na ni délku $(\overline{PP'}) = k$. Koncové body P' takto sestrojených kolmic vytvoří mnohoúhelník $A'B'C'D'\ldots$ shodný s původní stěnou $ABCD\ldots$ mnohostěnu. Proveďme tuto konstrukci pro všechny stěny mnohostěnu. Dostaneme tak tolik nových stěn kolik stěn má daný mnohostěn. Nové stěny nemají společných bodů, lze je však doplniti na souvislou plochu, připojíme-li podél každé hrany mnohostěnu určitou válcovou plochu a u každého jeho vrcholu část kulové plochy takto:

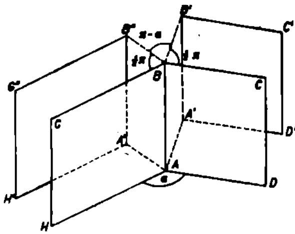
Podél hrany AB mnohostěnu stýkají se dvě jeho stěny ϱ a σ. Zmíněná konstrukce dá k první z těch stěn novou stěnu $A'B'C'D'\ldots$ shodnou a rovnoběžnou s ϱ a podobně dostaneme novou stěnu $A''B''G''H''\ldots$ shodnou a rovnoběžnou s σ (v obr. 35 je $\varrho \equiv ABCD$, $\sigma \equiv ABGH$). Při tom je

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{A''B''}, \ldots,$$
$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \parallel \overline{A''B''}, \ldots,$$
$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{AA''} = \overline{BB''} = k, \ldots.$$

Budiž α stěnový úhel mnohostěnu, v němž se protínají stěny ϱ a σ podél hrany AB. Pak je patrně (obr. 35)

$$\sphericalangle A''AA' = \sphericalangle B''BB' = \pi - \alpha. \tag{1}$$

Považujme AB za osu rotační válcové plochy o poloměru $k = \overline{AA'} = \overline{AA''}$ a o výšce $\overline{AB}$; výseč té plochy příslušná středovému úhlu $\sphericalangle A''AA' = = \pi - \alpha$ (omezená úsečkami $A'B'$, $A''B''$ a kruhovými oblouky $A'A''$, $B'B''$ o poloměru k) spojuje hranu $A'B'$ s hranou $A''B''$.



Obr. 35.

Sestrojme takovouto válcovou plochu (resp. výseč válcové plochy) pro každou hranu mnohostěnu. Všechny tyto plochy dohromady se stěnami dříve sestrojenými jako $A'B'C'D'$ ... atd. tvoří plochu, která není uzavřená, nýbrž je omezena tolika sférickými mnohoúhelníky, kolik má mnohostěn vrcholů. Abychom dostali uzavřenou jednoduše souvislou plochu (bez otvorů), připojíme ještě tyto sférické mnohoúhelníky.

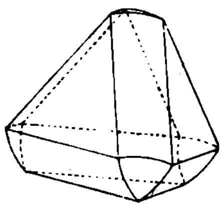
Každý z těchto mnohoúhelníků je na kulové ploše o poloměru k; první z nich je na kulové ploše opsané kolem prvního vrcholu mnohostěnu, druhý na kulové ploše opsané kolem druhého vrcholu mnohostěnu atd. Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ stěnové úhly mnohostěnu podél hran sbíhajících se ve vrcholu A, jsou strany příslušného sférického n-úhelníka

$$\pi - \alpha_1, \quad \pi - \alpha_2, \ldots, \quad \pi - \alpha_n.$$

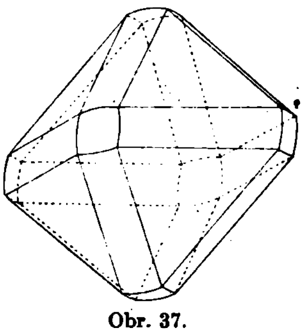
Všech těch n-úhelníků je v (v je počet vrcholů mnohostěnu). Zobrazme všech s stěn mnohostěnu na povrchu koule Σ_k o poloměru k. Dostaneme tak na Σ_k celkem s bodů, které jsou vrcholy sítě složené z v sférických mnohoúhelníků shodných s těmi, o kterých právě uvažujeme. Podle odst. 29b vyplňují tyto mnohoúhelníky celou kulovou plochu, takže mají součet obsahů rovný povrchu koule, t. j. $4\pi k^2$.

Shrneme takto: s stěn sestrojených ke stěnám daného mnohostěnu vždy rovnoběžně a ve vzdálenosti k, h válcových ploch (výsečí), jichž osami jsou jednotlivé hrany mnohostěnu, a v sférických mnohoúhelníků na kulových plochách opsaných kolem vrcholů mnohostěnu, tvoří dohromady uzavřenou plochu, která má název *zaoblený mnohostěn* sestrojený k danému rovnoběžně ve vzdálenosti k.

Na obr. 36 je zaoblený pravidelný čtyrstěn omezený čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky, šesti válcovými plochami a čtyřmi sférickými trojúhelníky.



Obr. 36.



Obr. 37.

Na obr. 37 je zaoblený pravidelný osmistěn omezený osmi rovnostrannými trojúhelníky, dvanácti válcovými plochami a šesti sférickými čtyrúhelníky.

b) Zaoblený mnohostěn má v každém bodě P svého povrchu určitou normálu (vnější): Je-li bod P na rovinné stěně, je normálou kolmice k té stěně. Je-li P na některé z oněch válcových ploch, je normálou poloměr kružnice, která prochází bodem P a má za osu příslušnou hranu původního (nezaobleného) mnohostěnu. Je-li konečně bod P uvnitř některého ze sférických n-úhelníků, je normálou poloměr kulové plochy, na níž n-úhelník leží.

Zobrazme vnější normály zaobleného mnohostěnu na kulové ploše Σ_1. Sférické obrazy normál vyplní celou plochu. *Každému bodu kulové plochy Σ_1 odpovídá jediný směr normály zaobleného mnohostěnu.* Poznamenejme k tomu, že všem bodům rovinné stěny odpovídá ve sférickém obrazu jediný bod; všem bodům, jež leží na téže hraně válcové plochy, odpovídá též jediný bod ve sférickém obrazu.

32. Opěrné roviny vypuklého mnohostěnu. a) Budiž dán vypuklý mnohostěn a sestrojme k němu zaoblený rovnoběžný ve vzdálenosti k. Zvolme na povrchu zaobleného mnohostěnu bod P, sestrojme normálu v P a rovinu τ, která v bodě P kolmo protíná normálu; sledujme pak, jak se mění poloha roviny τ, blíží-li se k k nule.

Je-li P na rovinné části povrchu, je τ totožná s příslušnou rovinou a přechází pro $\lim k = 0$ v rovinu té stěny původního mnohostěnu, která je s τ rovnoběžná. Je-li P na válcové ploše, dotýká se jí rovina τ podél určité hrany; pro $\lim k = 0$ přechází τ v rovinu, která je s τ rovnoběžná a má s mnohostěnem společnou jen jednu hranu. Je-li konečně P uvnitř jednoho ze sférických mnohoúhelníků, dotýká se τ příslušné kulové plochy a pro $\lim k = 0$ přechází v rovinu, která má s mnohostěnem společný jen jeden bod, totiž jeden z jeho vrcholů.

b) *Opěrná rovina zaobleného vypuklého mnohostěnu* je název pro rovinu, která je buď rovinou některé jeho stěny nebo tečnou rovinou některé z jeho válcových ploch (dotýká se válcové plochy podél její hrany) nebo konečně tečnou rovinou ke kulové ploše, která obsahuje některý z jeho sférických mnohoúhelníků.

Opěrná rovina vypuklého mnohostěnu (nezaobleného) je název pro rovinu, která je buď rovinou některé jeho stěny, nebo má s ním společné všechny body některé jeho hrany (a žádný jiný bod), nebo konečně prochází některým jeho vrcholem a nemá s mnohostěnem žádný další bod společný.

c) Ve smyslu odst. 16a a 20a má každá opěrná rovina zaobleného nebo nezaobleného vypuklého mnohostěnu určitý sférický obraz. Větu vyslovenou v odst. 31b vyjádříme takto: *Sférické obrazy všech opěrných rovin vypuklého mnohostěnu* (zaobleného nebo nezaobleného) *vyplňují celou kulovou plochu Σ_1; každá opěrná rovina má za obraz určitý bod na Σ_1 a naopak každý bod na Σ_1 je obrazem jediné opěrné roviny.*

33. Jak se dělí kulová plocha na části o stejném obsahu. a) Podle známé věty*) rovná se obsah P kulového pásu, který vytínají dvě rovnoběžné roviny z kulové plochy, součinu z obvodu hlavní kružnice a ze vzdálenosti obou rovin, tedy

$$P = 2\pi rz,$$

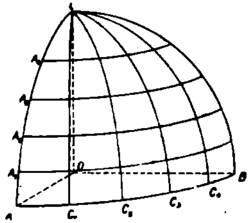
kde r značí poloměr koule a z vzdálenost obou rovin (neboli výšku pásu).

Rozdělíme-li tedy průměr koule na určitý počet stejných dílů a vedeme-li dělícími body roviny kolmé na ten průměr, rozdělí se jimi kulová plocha na stejné části. Sestrojme mimo to několik hlavních kružnic, které mají za společný průměr onen průměr koule; předpokládáme, že rovina první hlavní kružnice svírá s rovinou druhé stejný úhel jako rovina druhé s rovinou třetí atd. Těmito rovnoběžnými rovinami a hlavními kružnicemi rozdělí se povrch koule na stejnoploché části, jednak na křivočaré čtyrúhelníky, jednak na křivočaré trojúhelníky u koncových bodů průměru.

V obr. 38 je naznačeno rozdělení kulového oktantu ABC (O je střed koule; $OB \perp OA$, $OC \perp OA$) na 25 stejnoplochých dílů. Poloměr koule OC je rozdělen čtyřmi dělícími body na pět stejných dílů. Dělícími body jsou vedeny roviny

*) Viz *J. Vojtěch:* Geometrie pro V. tř. r., 1935, str. 121.

kolmé k OC, které protínají kulovou plochu v rovnoběžkách (rovnoběžných kružnicích); v obr. 38 jsou A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 kvadranty (čtvrtkruhy) těchto rovnoběžek. Čtyři kvadranty hlavních kružnic CC_1, CC_2, CC_3, CC_4 dělí pravý úhel sférického trojúhelníka ABC při C na pět stejných dílů. Tak je rozdělen kulový oktant na 25 stejných dílů; kdybychom obdobně rozdělili dalších sedm oktantů, rozdělila by se celá kulová plocha na 200 stejnoplochých dílů.


Obr. 38.

Kdybychom rozdělili poloměr OC ne na pět, nýbrž na n stejných dílů a kdybychom rozdělili pravý úhel při C také na n dílů, rozdělil by se oktant na n^2 a obdobně celá kulová plocha na $8n^2$ stejnoplochých dílů.

Kulová plocha by se dala ovšem i jinými způsoby děliti na části o stejném obsahu; ale uvedený způsob je zvláště jednoduchý a hodí se nám v dalších úvahách.

b) Z $8n^2$ obrazců, na které se dělí kulová plocha právě uvedeným způsobem, jsou některé křivočaré čtyrúhelníky, ostatní křivočaré trojúhelníky. Vrcholy každého z těch čtyrúhelníků jsou zároveň vrcholy rovinného rovnoramenného lichoběžníka, který nazveme *vepsaným* do onoho čtyrúhelníka; vrcholy křivočarého trojúhelníka jsou zároveň vrcholy vepsaného rovinného trojúhelníka. Všechny tyto vepsané lichoběžníky a trojúhelníky tvoří dohromady *vypuklý mnohostěn M o $8n^2$ stěnách vepsaný do kulové plochy.* Mnohostěn M má tyto vlastnosti:

1. Všechny rozměry každé stěny mnohostěnu M se blíží nule, roste-li n do nekonečna.

2. Rovina každé stěny přechází spojitě v tečnou rovinu kulové plochy, roste-li n do nekonečna.

3. Je-li σ plošný obsah kterékoli stěny mnohostěnu a P povrch koule, je

$$\lim_{n \to \infty} (8n^2\sigma : P) = 1;$$

roste-li n do nekonečna, přechází povrch mnohostěnu v povrch koule.

Obsahy jednotlivých stěn mnohostěnu M nejsou stejné, ale (vlastnost 3) čím je n větší, tím přesněji platí, že obsah σ kterékoli stěny rovná se přibližně $P : 8n^2$, totiž obsahu příslušného křivočarého čtyrúhelníka nebo trojúhelníka.

c) Budiž dána část F kulové plochy a bod S ležící mimo F. Spojíme-li každý bod ležící na F s bodem S, vyplní spojnice těleso J, které nazveme *jehlan s křivoplochou podstavou* F a vrcholem S. Abychom vypočetli objem tělesa J, užijeme věty*), že objem (obyčejného) jehlanu, jehož podstavou je rovinný mnohoúhelník o obsahu z a jehož vrchol má od podstavy vzdálenost p, je $\frac{1}{3}zp$.

Rozdělme *celou* kulovou plochu, jejíž částí je F, na $8n^2$ stejných dílů a vezměme v úvahu jen ty plošky (křivočaré čtyrúhelníky nebo trojúhelníky), které leží celé uvnitř F. Do každé z nich vepišme příslušný rovinný lichoběžník nebo trojúhelník a označme obsahy těchto rovinných obrazců $z_1, z_2, \ldots, z_m$; píšeme m místo $8n^2$. p_i budiž vzdálenost roviny obrazce z_i od bodu S. Hledaný objem V tělesa J bude roven limitě součtu, který dostaneme sečtouce objemy všech obyčejných jehlanů o podstavách $z_1, z_2, \ldots z_m$ a o výškách $p_1, p_2, \ldots, p_m$, je tedy

$$V = \lim_{m \to \infty} \tfrac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} z_i p_i.$$

Vzhledem k vlastnosti 3 nahradíme v tomto vzorci veličinu z_i obsahem σ_i příslušného křivočarého obrazce a p_i budeme považovati za vzdálenost tečné roviny (sestrojené ke kulové ploše v některém bodě plošky z_i) od bodu S. Tak dostaneme vzorec

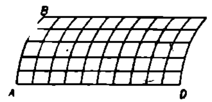
---

*) Viz *J. Vojtěch:* Geometrie pro V. tř. r., 1935, str. 113.

$$V = \lim_{m \to \infty} \tfrac{1}{3} \sum_{i=1}^{m} \sigma_i p_i. \qquad (1)$$

d) Platnost vzorce (1) je obecná; lze ho užíti pro případ, že křivočará podstava F tělesa J, jehož objem V hledáme, není částí kulové plochy, nýbrž jakékoli jiné plochy. $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_m$ značí pak obsahy plošek, které vznikají dělením plochy F na m stejnoplochých dílů (při čemž se zachovávají vlastnosti 1, 2, 3 obdobné shora uvedeným vlastnostem při dělení kulové plochy; vždy je $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m = \sigma$); p_i jest pak vzdálenost bodu S od tečné roviny sestrojené k ploše F v některém bodě plošky σ_i.

V dalším užijeme vzorce (1) pro případ, že F je částí (výsečí) kolmé válcové plochy. V obr. 39 je naznačeno dělení takové plochy (omezené shodnými kruhovými oblouky AB a CD ležícími ve dvou rovnoběžných rovinách a hranami AD a BC kolmými k těm rovinám) na 50 stejných dílů jednak přímkami rovnoběžnými s AD jednak kruhovými oblouky shodnými s AB.



Obr. 39.

34. Steinerovy vzorce. Výpočet povrchu a objemu zaobleného mnohostěnu. Steiner odvodil vzorce pro povrch zaoblené mnohostěnové plochy rovnoběžné k dané a pro objem části prostoru omezené oběma plochami (po případě neuzavřenými). Uvedeme zde důkaz Steinerových vzorců pro případ vypuklého uzavřeného mnohostěnu.

a) Budiž dán vypuklý mnohostěn M_0 o povrchu P_0 a objemu V_0; v, s, h mají význam jako v odst. 26. Sestrojme zaoblený mnohostěn M rovnoběžný k M_0 ve vzdálenosti k (odst. 31); jeho povrch budiž P, objem V.

Povrch P skládá se jednak z s stěn po řadě shodných se stěnami mnohostěnu M_0, které mají součet obsahů P_0, jednak z částí U_j válcových ploch ($j = 1, 2, \ldots, h$), jež mají za osy hrany mnohostěnu M_0, a konečně z částí kulových ploch

K_j (sférických mnohoúhelníků) opsaných kolem jeho vrcholů ($j = 1, 2, \ldots, v$).

Je-li l_j délka j-té hrany na M_0 ($j = 1, 2, \ldots, h$) a α_j příslušný stěnový úhel, má U_j poloměr podstavy k, středový úhel $\pi - \alpha_j$ [viz rovnici (1) odst. 31] a výšku l_j; rozvinuta do roviny má tvar obdélníka o stranách $(\pi - \alpha_j)\, k$ a l_j, takže její obsah je

$$kl_j\,(\pi - \alpha_j).$$

Součet všech K_j rovná se povrchu koule o poloměru k (viz odst. 31a), totiž

$$4\pi k^2.$$

Hledaný vzorec pro P má tedy tvar

$$P = P_0 + k \sum_{j=1}^{h} l_j(\pi - \alpha_j) + 4\pi k^2. \qquad (1)$$

b) Objem V skládá se ze *čtyr částí*: Z objemu V_0, z objemů kolmých hranolů, jichž podstavami jsou stěny mnohostěnu M_0 a jež mají všechny výšku k, z objemů válcových výsečí omezených plochami U_j a z objemů kulových výsečí příslušných sférickým mnohoúhelníkům K_j.

Součet objemů hranolů je roven

$$P_0 \,.\, k.$$

Objem výseče omezené plochou U_j je roven součinu z obsahu podstavy (kruhové výseče o středovém úhlu $\pi - \alpha_j$ a poloměru k) rovného $\frac{1}{2}\,(\pi - \alpha_j)\, k^2$ a výšky l_j; součet těchto objemů je

$$\tfrac{1}{2}k^2 \sum_{j=1}^{h} l_j\,(\pi - \alpha_j).$$

Součet všech kulových výsečí dává objem koule o poloměru k, tedy

$$\tfrac{4}{3}\pi k^3.$$

Sečtouce všechny čtyři části dostaneme hledaný vzorec pro V:

$$V = V_0 + P_0 \,.\, k + \tfrac{1}{2}k^2 \sum_{j=1}^{h} (\pi - \alpha_j)\, l_j + \tfrac{4}{3}\pi k^3. \tag{2}$$

(1) a (2) jsou *Steinerovy vzorce*. P je mnohočlen 2. stupně vzhledem ke k, V je mnohočlen 3. stupně.

c) Objem V lze vypočítati ještě jiným způsobem. Budiž S bod uvnitř M_0, r_j jeho vzdálenost od j-té stěny mnohostěnu M_0 ($j = 1, 2, \ldots, s$), f_j obsah této stěny, p_i jeho vzdálenost od některé opěrné roviny mnohostěnu M_0, která má s M_0 jen jeden vrchol společný, a q_i jeho vzdálenost od některé opěrné roviny mnohostěnu M_0, která má s M_0 společné body podél jediné hrany.

j-tá rovinná stěna mnohostěnu M má od bodu S vzdálenost

$$r_j + k.$$

Část válcové plochy, která je omezena při podstavách kruhovými oblouky o poloměru 1 se středovým úhlem $(\pi - \alpha_j)$ a která má výšku l_j, rozdělíme na velký počet stejnoplochých dílů (viz odst. 33d a obr. 39) o velikosti ϱ; plocha V_j, jež má poloměr k, rozdělí se podobným dělením na stejný počet dílů o velikosti $k\varrho$. Očíslujme jednotlivé plošky indexy; velikosti plošek budou $k\varrho_1, k\varrho_2, \ldots$ ($\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho$); tečná rovina v některém bodě plošky ϱk_i je opěrnou rovinou mnohostěnu M, je tedy rovnoběžná s určitou opěrnou rovinou mnohostěnu M_0 (obsahující jeho hranu) a má proto od bodu S vzdálenost

$$q_i + k.$$

Kulovou plochu o poloměru 1 rozdělme na velký počet malých stejnoplochých dílů způsobem vyloženým v odst. 33; budiž σ obsah jednoho dílu. Kulová plocha o poloměru k rozdělí se podobným dělením na stejný počet dílů o velikosti $k^2\sigma$. Očíslujme jednotlivé plošky indexy $k^2\sigma_1, k^2\sigma_2, \ldots$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma$); tak se rozdělí současně všechny sférické mnohoúhelníky K_j na plošky o velikosti $k^2\sigma$, neboť všechny K_j dohromady vzaty tvoří povrch celé koule. Tečná rovina sestrojená k příslušné kulové ploše v některém bodě plošky $k^2\sigma_i$ je opěrnou rovinou mnohostěnu M, je tedy rovnoběžná s určitou opěrnou rovinou mnohostěnu M_0 (obsahující jediný jeho vrchol) a má proto od bodu S vzdálenost

$$p_i + k.$$

Objem V skládá se ze tří částí: Ze součtu objemů jehlanů, které mají za podstavy rovinné stěny mnohostěnu M, ze součtu objemů jehlanů, které mají křivoploché podstavy U_j a konečně ze součtu objemů jehlanů s křivoplochými podstavami K_j; vrcholy jehlanů všech tří druhů jsou v bodě S.

První část objemu V má hodnotu

$$\tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{s}(r_j + k)\,f_j = V_0 + \tfrac{1}{3}P_0k,$$

neboť $\frac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{s} r_jf_j$ je objem V_0 původního mnohostěnu a $\sum\limits_{j=1}^{s} f_j$ jeho povrch P_0.

Druhá část má hodnotu

$$\tfrac{1}{3}\lim\sum(q_i + k)\,k\varrho_i = \tfrac{1}{3}k\lim\sum q_i\varrho_i + \tfrac{1}{3}k^2\sum\varrho_i;$$

každý součet se vztahuje ke všem ploškám $k\varrho_i$, na něž se dělí všechny plochy U_j dohromady, a znamení lim značí limitu pro případ, že rozměry všech plošek se blíží nule. Poslední součet

$$\sum\varrho_i = \lim\sum\varrho_i = \sum_{j=1}^{h}(\pi - \alpha_j)\,l_j$$

je součet všech obsahů ploch U_j za předpokladu, že $k = 1$.

Třetí část má hodnotu

$$\tfrac{1}{3}\lim\sum(p_i + k)\,k^2\sigma_i = \tfrac{1}{3}k^2\lim\sum p_i\sigma_i + \tfrac{1}{3}k^3\sum\sigma_i;$$

součty se vztahují ke všem ploškám σ_i, na něž se dělí všechny mnohoúhelníky K_i a lim má obdobný význam jako dříve. Poslední člen

$$\sum \sigma_i = \lim \sum \sigma_i = 4\pi$$

je roven povrchu jednotkové koule.

Sečteme-li všechny tři části, obdržíme hledanou formuli:

$$V = V_0 + [P_0 + \lim \sum q_i \varrho_i] \tfrac{1}{3}k +$$
$$+ [\sum_{j=1}^{h} (\pi - \alpha_j)\, l_j + \lim \sum p_i \sigma_i] \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{4}{3}\pi k^3,$$

$\sum p_i \sigma_i$ je součet všech součinů, které dostaneme násobíce část σ_i kulové plochy o poloměru 1 vzdáleností p_i, kterou má bod S od té opěrné roviny mnohostěnu M_0, která má sférický obraz v některém bodě plošky σ_i. Je-li m počet všech částí, na které se dělí povrch jednotkové koule (užíváme způsobu dělení vyloženého v odst. 33; $m = 8n^2$), je

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m = \sigma = \frac{4\pi}{m},$$

takže

$$\sum p_i \sigma_i = 4\pi \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{m}$$

a máme

$$V = V_0 + [P_0 + \lim \sum q_i \varrho_i] \tfrac{1}{3}k +$$
$$+ \left[\sum_{j=1}^{h} (\pi - \alpha_j)\, l_j + 4\pi \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{m}\right] \tfrac{1}{3}k^2 + \tfrac{4}{3}\pi k^3. \qquad (3)$$

35. Tloušťka vypuklého mnohostěnu a její střední hodnota. — a) Budiž γ opěrná rovina vypuklého mnohostěnu M_0 a C její sférický obraz na pomocné kulové ploše Σ_1. Bod C' protilehlý k C je obrazem opěrné roviny γ', která je s γ rovnoběžná. Vzdálenost rovnoběžných rovin γ a γ' se nazývá *tloušťka mnohostěnu* M_0 ve směru CC' nebo $C'C$.

Budiž S bod uvnitř M_0, p jeho vzdálenost od γ a p' jeho vzdálenost od γ' ($p > 0$, $p' > 0$). Pak je tloušťka t rovna součtu $p + p'$:

$$t = p + p'.$$

b) Střední hodnotu tloušťky vypočteme takto: Rozdělíme kulovou plochu Σ_1 na m stejnoplochých dílů $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ (užijeme postupu podle odst. 33, takže bude $m = 8\eta^2$) o velikosti σ; platí, že $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_m = \sigma = \frac{4\pi}{m}$.

Uvnitř každé plošky σ_i volíme určitý bod, jenž je sférickým obrazem určité opěrné roviny γ_i mnohostěnu M_0 (odst. 32c). Vzdálenost roviny γ od S budiž p_i.

Střední hodnota vzdálenosti p bodu S od opěrné roviny mnohostěnu je

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i. \tag{1}$$

Táž střední hodnota vyjadřuje se také vzorcem

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p'_i, \tag{2}$$

kde p'_i je vzdálenost bodu S od opěrné roviny, která má sférický obraz v bodě protilehlém k obrazu roviny γ_i. Sečtením rovnic (1) a (2) dostaneme pro *střední hodnotu t^* tloušťky t* vzorec

$$t^* = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (p_i + p'_i)$$

nebo

$$t^* = 2 \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i. \tag{3}$$

Hodnotu pravé strany v rovnici (3) určíme srovnajíce vzorce (2) a (3) odst. 34 pro objem V. V je totiž mnohočlen 3. stupně vzhledem ke k. Pravé strany vzorců (2) a (3) odst. 34 musí býti totožné; koeficient při t^2 v jednom vzorci musí se rovnati koeficientu při t^2 ve druhém. Rovnost obou koeficientů dává vztah

$$\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j) = \tfrac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j) + \lim_{m \to \infty} \frac{4\pi}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i \right].$$

Z toho plyne

$$2 \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j)$$

a tedy vzhledem k (3)

$$t^* = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j). \tag{4}$$

Tím je dokázána věta o střední hodnotě tloušťky: *Střední hodnotu tloušťky vypuklého mnohostěnu vypočteme, násobíme-li délku každé jeho hrany příslušným vnějším stěnovým úhlem, všechny tyto součiny sečteme a dělíme číslem* 4π; vnějším stěnovým úhlem nazýváme úhel, jenž se s (vnitřním) stěnovým úhlem α_j vyplňuje na úhel přímý.

Rovnice (4) je rovnocenná s rovnicí

$$p^* = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^{h} l_j (\pi - \alpha_j),$$

kde p^* značí střední hodnotu vzdálenosti bodu S (voleného libovolně uvnitř mnohostěnu) od opěrných rovin.

c) Příklady:

Pravoúhlý rovnoběžnostěn o rozměrech a, b, c; zde jest $h = 12$, všechny úhly α_j jsou rovny $\frac{1}{2}\pi$; z čísel l_j jsou čtyři rovna a, čtyři rovna b a čtyři rovna c, takže podle (4)

$$t^* = \tfrac{1}{2} (a + b + c).$$

Vypočtěme *střední tloušťky pravidelných mnohostěnů*. Je-li l délka hrany, h počet hran a α vnitřní stěnový úhel pravidelného mnohostěnu, je střední jeho tloušťka dána rovnicí

$$t^* = \frac{h(\pi - \alpha)}{4\pi} \cdot l.$$

Úhel α je určen rovnicí*)

*) Viz *J. Vojtěch:* Geometrie pro VI. třídu reálek, 1935, str. 119.

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos \dfrac{\pi}{n}}{\sin \dfrac{\pi}{m}},$$

kde m značí počet hran v jedné stěně a n počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu.

Pro jednotlivé pravidelné mnohostěny dostáváme tyto výsledky (α čítáme ve stupních):

Mnohostěn	n	m	$\tfrac{1}{2}\alpha$	h	$\dfrac{t^*}{l}$
čtyrstěn	3	3	35 15′53″	6	0,912
krychle	3	4	45	12	1,500
osmistěn	4	3	54°43′15″	12	1,175
dvanáctistěn	3	5	58 16′53″	30	2,643
dvacetistěn	5	3	69°5′48″	30	1,742

POZNÁMKY

k jednotlivým odstavcům:

K odst. 12. Cauchy dokázal větu o střední hodnotě šířky obecně pro vypuklé uzavřené rovinné křivky (ovály). Je-li L obvod oválu, je jeho střední šířka rovna $L : \pi$. Viz *A. Cauchy*: Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes (Mémoires de l'Acad. des Sc., t. XXII, 1850; otištěno v Oeuvres de Cauchy 1e serié, t. 2, p. 167—177). — Věta má význam v theorii geometrických pravděpodobností. Viz *B. Hostinský:* Geometrické pravděpodobnosti, Praha 1926.

K odst. 13. Stran důkazu věty $L^2 - 4\pi P > 0$ (a obdobné věty pro vypuklé mnohostěny jakož i pro vypuklé uzavřené křivky a plochy) viz *T. Bonnessen:* Quelques problèmes isopérimétriques (Acta Mathematica *48*, 1926) a knihu *T. Bonnessen-W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper (Berlin 1934).

K odst. 22 a 29. Veličina v rovnici (1) odst. 29. $2\pi - \sum_{k=1}^{n} a_k$ pro jeden n-hran při vrcholu vypuklého mnohostěnu je obdobná vnějšímu úhlu při vrcholu vypuklého mnohoúhelníka v rovině. To je základ Descartových úvah, jenž se snažil zobecniti věty o úhlech v mnohoúhelnících na věty o úhlech v mnohostěnech. Jeho nedokončená práce De solidorum elementis vyšla až po jeho smrti. Viz Oeuvres de Descartes publiées par Adam et Tannery, t. X, p. 265.

K odst. 24. a 25. Věty o deformaci mnohostěnových ploch objasňují některé věty o deformaci ploch. Viz *B. Hostinský:* Diferenciální geometrie křivek a ploch, 2. vydání, Praha 1942, str. 90—91, 135 až 136.

K odst. 30. Důkaz Eulerovy věty byl uveřejněn 1758 v jeho práci Elementa doctrinae solidorum (Novi Commentarii Acad. sc. Petropolitenae ad Annum 1752—53). Soustavný přehled vět o souvislosti mnohostěnů má *J. Hadamard* v článku Notions élémentaires sur la géométrie de situation (Nouvelles Annales de mathém., 4e série, *9*, 1909). O různých důkazech Eulerovy věty viz *J. Steiner* (Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. I., 1826; otištěno v Ges. Werke, Bd. I., p. 97).

K odst. 34. Steinerovy vzorce (1) a (2) jsou dokázány v jeho pojednání Ueber parallele Flächen (Monatsber. d. Ak. d. wiss., Berlin 1840; otištěno v Ges. Werke, Bd. II., p. 171).

K odst. 35. Rovnice (4) je zahrnuta v obecné Minkovského rovnici platné pro uzavřené konvexní plochy: *Minkowski:* Volumen und Oberfläche (Math. Annalen, Bd. *57*, 44 —495, 1903) a viz citovanou knihu Bonnessenovu-Fenchelovu, str. 66, rovnice (8) a (9).

K dalšímu studiu mnohostěnů poslouží tyto spisy:

Rouché-Comberousse: Traité de Géométrie (Nouveau tirage, Paris 1931).

J. Hadamard: Leçons de géométrie élémentaire (Nouvelle édition, Paris 1916).

D. Hilbert-S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie (Berlin 1932).

E. Steinitz: Polyeder und Raumteilungen (Enzyklopädie der math. Wissenschaften, III. Band, 1 Teil, 2. Hälfte).

OBSAH

Spisovatel *Prof. Dr Bohuslav Hostinský*

Název díla *O mnohoúhelnících a mnohostěnech*

Vydala *Jednota československých matematiků a fysiků*

roku *1947*

Edice *Cesta k vědění, svazek 33*

Za redakce *Dra R. Brdičky, Dra M. A. Valoucha, Dra F. Vyčichla*

Stran *64*

Obrazců *39*

Vytiskla *Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII*

Náklad *3500 výtisků*

Vydání *první*

Cena *Kčs 22,—*

mnohoúhelníků a mnohostěnů, a tyto spojitě deformujeme.

Z bohaté theorie vypuklých mnohostěnů a mnohoúhelníků, kterou se již zabývali slavní matematici jako Descartes, Cauchy a Euler, a v novější době Minkowski, uvedl prof. Hostinský v této knížce některé hlavní vlastnosti, související jednak s *metrickou geometrií*, jednak s *topologickými vlastnostmi* těchto základních geometrických útvarů. Methoda zpracování je opřena o názor a o poznatky elementární geometrie. Jen tak se podařilo autorovi jednoduše ukázati, jak hluboké partie matematiky jsou úzce spjaty právě s elementární geometrií.

Téměř bez námahy se čtenář seznámí se střední šířkou vypuklého mnohoúhelníku a pozná, jak závisí jeho obvod na obsahu. V oddíle věnovaném mnohohranu se dozví o jeho deformaci a v bohaté kapitole věnované mnohostěnům se mu názorně ozřejmí Eulerova věta a přiblíží věta o povrchu a objemu zaoblených mnohostěnů a j.

Kčs 22