Jaká je logická výstavba matematiky?

MIROSLAV KATĚTOV

Jaká je logická výstavba matematiky?

J č
m + f

CESTA K VĚDĚNÍ • SVAZEK 31

DR MIROSLAV KATĚTOV

JAKÁ JE LOGICKÁ VÝSTAVBA MATEMATIKY?

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

PŘEDMLUVA

Tato knížka je určena (jako elementární úvod) každému, kdo se zajímá o logickou stavbu a základy matematiky a o začátky moderní t. zv. matematické logiky. Pro její čtení není třeba žádných zvláštních věcných znalostí, avšak jisté záliby a nadání pro přesné abstraktní myšlení. Snažil jsem se navazovat na tradiční logiku, jak se vykládala na střední škole, při tom však postupně přibližovat čtenáři způsob vyjádřování a metody moderní matematické logiky.

Některé otázky, o nichž se mluví v této knížce, těsně souvisí s celkovým světovým názorem. Nebylo mým úmyslem zabývat se zde filosofickou stránkou těchto problémů a také jsem se jí vyhýbal; doufám však, že celková linie výkladu směřuje dosti jasně proti jakémukoliv idealistickému stanovisku. S filosofického hlediska pojednává o těchto otázkách a zároveň kriticky hodnotí význam matematické logiky univ. prof. dr. A. Kolman v knize, která má vyjít v nejbližší době.

Tato knížka vznikla z podnětu a na přátelský nátlak doc. dr. F. Vyčichla, jenž značně přispěl k jejímu zlepšení a obětavě četl rukopis i korektury. Vzdávám mu upřímný dík. Za čtení korektur a některá zlepšení děkuji dále dr. K. Havlíčkovi, doc. dr. V. Knichalovi a S. Riegrovi.

M. Katětov.

ÚVOD

Když se zabýváme logickou výstavbou matematiky, stojíme před dvěma otázkami: (1) jak se odvozují matematické věty, (2) jaké jsou logické základy matematiky.

Když studujeme odvození matematických vět, pak se musíme tázat, jaké hlavní typy matematických vět rozeznáváme s logického hlediska, jaké typy logických závěrů (úsudků) známe, jaké methody důkazů rozeznáváme atd. Jsou to, jak vidíme, čistě logické otázky. Budeme se proto zabývat logickým odvozením (dedukcí) vůbec a při tom současně poznáme, jak se odvozují matematické věty. Vlastnímu výkladu o logické dedukci předešleme jakousi „mluvnici logiky", totiž výklad o tvaru a druzích vět (výroků).

Základem každého matematického oboru jsou, jak známo, určité axiomy; pro jeho další výstavbu pak mají základní důležitost definice, jimiž zavádíme nové „matematické objekty". Až se obrátíme k logickým základům matematiky, promluvíme tedy o tom, jaké definice rozeznáváme a jaké vlastnosti musí definice mít. Pak se budeme zabývat systémy axiomů a požadavky, které na ně klademe (bezespornost atd.).

Konečně některé matematické pojmy, na př. pojem množiny, vztahu, zobrazení (korespondence), funkce, se vyskytují ve všech oborech matematiky a mají pro její výstavbu základní důležitost. Musíme proto věnovat pozornost také těmto pojmům.

Načrtli jsme náš program. Musíme ještě říci, že na četných místech knížky bylo nutné omezit se na tvrzení bez bližšího odůvodnění nebo na zběžné náznaky. Upozorňujeme na to čtenáře a odkazujeme ho na literaturu, uvedenou na konci knížky.

1. SPOJOVÁNÍ VÝROKŮ

1·1. Výroky. Obvykle se říká, že logika je „věda o obecných formách vědomě odůvodněného myšlení". Její částí je tak zvaná formální logika, jejímž předmětem je dedukce (odvození) soudů z jiných soudů. Soudem se zde míní každá myšlenka, kterou něco konstatujeme. Na příklad uvědomím si, že teď je tma; podívám se na zem a zjistím, že v noci pršelo; konstatuji, že $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; to všechno jsou soudy.

Bude nás zde zajímat jen tato t. zv. formální logika. Nebudeme však mluvit o soudech, neboť naše výklady budou založeny na jiném pojetí, které je obvyklé v moderní logice: místo o soudech budeme mluvit o **výrocích.** Je zřejmé, že soud, t. j. určitá myšlenka, může se stát předmětem logiky jen do té míry, do jaké se dá zachytit a formulovat tak, aby se dal sdělit jiné osobě. Výrokem se však právě rozumí formulace soudu v nějaké řeči (ať již v obvyklé řeči, kterou mluvíme, nebo ve zvláštním systému značek). Tím, že mluvíme o výrocích místo o soudech, neztratíme nic z obsahu logiky, získáváme však na přesnosti a jasnosti úvah.

Výrokem nazýváme tedy každý projev (tvrzení), o kterém má smysl říci, že je pravdivý nebo nepravdivý. Výroky jsou na příklad „včera pršelo, dnes je hezky", „v březnu r. 1987 bude sluneční zatmění", „$2+2=4$", „$2+2=5$"; avšak „přines knihu!", „kdy přijdeš?" výroky nejsou. Termín **věta** bude pro nás znamenat totéž co výrok; vyhradíme si jej však pro výroky, jejichž správnost je již prokázána.

Termínů pravdivý, správný, platný výrok budeme užívat ve stejném významu, v jakém se jich užívá v běžné řeči a nebudeme prozatím mezi nimi rozlišovat; později se k nim ještě vrátíme. Termínu správně utvořený výrok užíváme, abychom zdůraznili, že jde skutečně o výrok. Tak „sin 45° = 1" je správně utvořený, avšak nesprávný (nepravdivý) výrok, kdežto na př. „sin 15 cm = 0,5 kg" je nesprávně utvořený výrok, t. j. přesně řečeno, není to vůbec výrok — jen snůška značek.

Promluvíme nyní o tom, jak tvoříme z daných výroků výroky nové (ať již pravdivé či nikoliv, avšak správně utvořené).

1'2. **Souvětí.** Když je dáno několik výroků, pak můžeme vytvořit nový výrok tím, že je spojíme vhodným způsobem jako celky. Tak z výroků (A) „pan M. N. byl v sobotu v divadle" a (B) „pan M. N. byl v neděli na výletě" lze utvořit mimo jiné tyto výroky: (1) „pan M. N. byl v sobotu v divadle a v neděli na výletě"; (2) „pan M. N. byl buď v sobotu v divadle nebo v neděli na výletě"; (3) „když pan M. N. byl v sobotu v divadle, pak byl v neděli na výletě". Při tom je podstatné, že správnost nebo nesprávnost výroků (1), (2), (3) závisí pouze na správnosti nebo nesprávnosti původních výroků (A), (B).

Výrok, který vzniká z daných výroků (případně z jediného výroku) takovým způsobem (tedy tak, že jeho správnost nebo nesprávnost závisí pouze na správnosti nebo nesprávnosti původních výroků), budeme nazývat **spojením** daných výroků anebo krátce **souvětím.** Probereme nyní jednotlivé druhy souvětí.

1'3. **Negace.** Z jednoho výroku jako celku můžeme bez přibrání dalších výroků vytvořit nový výrok (souvětí) jediným způsobem, totiž tak, že jej popřeme (negujeme). Tak z výroku „byl v sobotu v divadle" vytvoříme výrok „nebyl v sobotu v divadle"; takto vzniklý výrok nazýváme **negací** původního výroku. Negaci můžeme vyjádřit také slovním obratem „není pravda, že . . .", tedy v našem příkladě „není pravda, že byl v sobotu v divadle". Výraz „není pravda, že..." považujeme zde za formální obrat, který je rovnocenný se slůvkem „ne-". — Při symbolickém označování, o němž mluvíme podrobněji v odst. 3'5, užívají různí autoři pro negaci výroku **A** rozdílných symbolů, tak non **A** nebo ∾ **A** nebo $\bar{\mathbf{A}}$.

Je jasné, že negace nesprávného výroku je správná a naopak negace správného výroku je nesprávná. — Negujeme-li negaci nějakého výroku, dostaneme výrok, který je rovnocenný s původním výrokem. Tak na příklad výrok „není pravda, že nebyl v sobotu v divadle" znamená totéž, co výrok „byl v sobotu v divadle". Dvojnásobnou negací*) nedostáváme tedy nic nového.

Když je předložen nějaký výrok, pak můžeme utvořit nový výrok také jiným způsobem, než negací, na příklad pomocí rčení „je prokázáno, že..." nebo „je možné, že..." Dostaneme tak z výroku „pan M. N. byl v sobotu v divadle" výrok „je prokázáno, že pan M. N. byl v sobotu v divadle" nebo „je možné, že pan M. N. byl v sobotu v divadle". Zde však jde o něco zcela jiného, než je negace. Výrok „je prokázáno, že pan M. N. byl v sobotu v divadle" znamená totiž vlastně toto: byl podán důkaz výroku „byl v sobotu v divadle". Jde o jistý výrok o výroku „pan M. N. byl v sobotu v divadle" — a současně také o našich znalostech; jeho správnost závisí nejen na správnosti původního výroku „pan M. N. byl v sobotu v divadle", nýbrž též na jiných okolnostech (je dobře možné, že pan M. N. sice v divadle byl, že to však není prokázáno). Výrok „je prokázáno, že pan M. N. byl v sobotu v divadle" nepovažujeme tedy za souvětí v našem smyslu, a totéž platí o výroku „je možné, že pan M. N. byl v sobotu v divadle" a o jiných podobných výrocích. — Zůstává tedy při tom, že ne-

*) Rozumí se, negací ve smyslu tradiční formální logiky.

gaci považujeme za jediný způsob, jakým lze z jediného výroku utvořit výrok nový.

Promluvíme nyní o spojení dvou výroků. Zde je ovšem možnost různých kombinací mnohem větší. Hlavní druhy spojení dvou výroků jsou: konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence; probereme je nyní postupně.

1'4. **Konjunkce.** Souvětí, které vznikne, když spojíme dva výroky slovem „a" nebo „ale" (nebo jiným výrazem stejného významu) nazýváme **konjunkcí.** Příklady: (1) výrok „včera pršelo, ale dnes je hezky" je konjunkcí výroků „včera pršelo" a „dnes je hezky" (slovo „ale" značí při spojování výroků totéž logické spojení jako „a", vyjadřuje však současně určitý postoj k výroku, který pro logický rozbor nemá význam); (2) „tento trojúhelník je pravoúhlý a rovnoramenný"; zde máme konjunkci výroků „tento trojúhelník je pravoúhlý" a „tento trojúhelník je rovnoramenný".

Konjunkce tvrdí tedy, že jsou splněny oba výroky, které jsme spojili. Jinak řečeno, konjunkce dvou výroků je pravdivá pouze tehdy, když o b a spojené výroky jsou správné, kdežto v ostatních případech je nesprávná. — Při symbolickém označování výroků užíváme pro konjunkci výroků **A** a **B** znaku **A . B** nebo **A. & B.**

1'5. **Disjunkce.** Výrok, který dostaneme, když spojíme dva dané výroky spojkou „nebo" (anebo jiným výrazem stejného významu), nazýváme **disjunkcí.** Příklady: (1) „buď přijde večer nebo zatelefonuje odpoledne"; zde máme disjunkci výroků „přijde večer" a „zatelefonuje odpoledne"; (2) „trojúhelník *ABC* je buď pravoúhlý nebo rovnoramenný"; zde máme disjunkci výroků „trojúhelník *ABC* je pravoúhlý" a „trojúhelník *ABC* je rovnoramenný". Spojku „nebo" pojímáme při tom vždy ve smyslu latinského v e l, totiž tak, že připouštíme, aby nastaly obě uvedené možnosti (tak v prvním příkladě tvrdíme vlastně: buď přijde večer nebo zatelefonuje odpoledne anebo udělá obojí), a nikoli ve vylučovacím smyslu (latinské aut — aut), kdy takový případ vylučujeme. Disjunkce říká tedy, že je splněn aspoň jeden (tedy případně také oba) z výroků, které jsou v ní spojeny. Disjunkce dvou výroků je podle toho správná tehdy, když je správný některý z těchto výroků a je nesprávná pouze v tom případě, že oba tyto výroky jsou nesprávné. — Pro disjunkci výroků **A**, **B** se užívá symbolu **A** v **B**.

1·6. Implikace. Souvětí, které vznikne, když spojíme dva dané výroky pomocí výrazu „když... pak..." (nebo pomocí jiného výrazu, který má stejný význam), nazýváme **implikací.**

První z výroků, které takto spojíme, nazýváme výrokem **implikujícím**, druhý výrok výrokem **implikovaným.** Pro implikaci výroků **A**, **B** užíváme symbolu **A** $\Rightarrow$ **B**. Příklady implikace: (1) „když tento trojúhelník je pravoúhlý, pak není rovnostranný"; „tento trojúhelník je pravoúhlý" je zde výrok implikující, „není rovnostranný" je výrok implikovaný; (2) „nepřijde-li dnes, přijde zítra", čili „nepřijde dnes $\Rightarrow$ přijde zítra"; implikujícím výrokem je zde „nepřijde dnes", implikovaným výrokem je „přijde zítra"; (3) „má-li prosinec 30 dní, pak je $2 + 2 = 5$", čili „prosinec má 30 dní $\Rightarrow$ $\Rightarrow 2 + 2 = 5$"; tato implikace je správným výrokem; (4) „má-li listopad 30 dní, pak $2 + 2 = 5$"; zde máme nesprávnou implikaci (správně utvořenou, avšak nepravdivou, neplatnou; připomínáme znovu rozdíl mezi správně utvořeným a správným výrokem).

Implikace výroků **A** a **B** říká tedy toto: je-li splněn výrok **A**, pak je splněn výrok **B**, jinými slovy: je vyloučeno, aby platilo **A**, nikoli však **B**. Podle toho považujeme implikaci „když **A**, pak **B**" za správnou, když implikující výrok **A** je nesprávný — ať již při tom **B** je správné či nikoliv. To sice může na první pohled zarazit, avšak v matematice to je obvyklé a odpovídá to také dobře běžné hovorové řeči. Příkladem může být výrok „když toto je pravda, pak jsem blázen". Ten, kdo jej vysloví, považuje oba výroky „toto je pravda" a „jsem blázen" za nepravdivé, celý svůj výrok však za správný.

Implikace „když **A**, pak **B**" je tedy správným výrokem v těchto případech: (1) **A** správné, **B** správné; (2) **A** nesprávné, **B** správné, (3) **A** nesprávné, **B** nesprávné. Je nesprávným výrokem pouze v případě (4) implikující výrok **A** je správný, implikovaný výrok **B** je nesprávný.

V případě, že implikace „když **A**, pak **B**" je správná, říkáme, že výrok **A** **implikuje** výrok **B**. Když tedy řeknu, že výrok **A** implikuje výrok **B**, pak to znamená, že souvětí „když **A**, pak **B**" je správné, a to zase znamená (srov. odst. 4·2), že z výroku **A** vyplývá výrok **B**.

Implikaci dvou výroků lze vyjádřit nejrůznějšími slovními obraty. Je užitečné, abychom si to dobře uvědomili, neboť takové obraty se vyskytují v matematice velmi často. Všimněme si souvětí „je-li toto číslo dělitelné 6, pak je dělitelné 2", „k tomu, aby toto číslo bylo dělitelné 2, stačí, aby bylo dělitelné 6"; „postačující podmínka k tomu, aby toto číslo bylo dělitelné 2, je, aby bylo dělitelné 6" a konečně „n u t n á podmínka k tomu, aby toto číslo bylo dělitelné 6, je, aby bylo dělitelné 2". Každé z těchto souvětí je v podstatě implikací výroků „toto číslo je dělitelné 6" a „toto číslo je dělitelné 2". Považujeme tato souvětí za logicky totožná, ač se značně liší svým slovním tvarem.

1·7. Ekvivalence. Souvětí, které vznikne, když spojíme dva výroky pomocí výrazu „. . . v tom a jen v tom případě, že..." (nebo pomocí jiného výrazu, který má tentýž význam, na příklad „... tehdy a jen tehdy, když..." nebo „... když a jen když") nazýváme **ekvivalencí**. Příklady: (1) „přijde zítra v tom a jen v tom případě, že nepřijde dnes"; zde máme ekvivalenci výroků „přijde zítra" a „nepřijde dnes"; (2) „prosinec má 30 dní, když a jen když $2+2=5$"; to je správná ekvivalence. Ekvivalence říká, že buď jsou splněny oba spojené výroky anebo není splněn žádný. Je tedy správná v těchto případech: (1) když oba spojené výroky jsou správné; (2) když jsou oba nesprávné. Když je jeden výrok pravdivý, druhý nepravdivý, je jejich ekvivalence nesprávná. — Pro ekvivalenci výroků **A**, **B** užíváme symbolu $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$.

Je-li ekvivalence dvou výroků správná, říkáme, že tyto výroky jsou **ekvivalentní**. To naprosto neznamená, že tyto výroky mají stejný význam (obsah), nýbrž pouze to, že jsou buď oba správné nebo oba nesprávné. Tak jsou v tomto smyslu ekvivalentní výroky „$2+2=4$" a „Vltava protéká Prahou" nebo „$2+2=5$" a „Vltava protéká Vídní".

1'8. Spojení několika výroků. Probrali jsme čtyři druhy spojení dvou výroků. Jsou ovšem také jiná spojení, na příklad spojení pomocí rozlučovacího „nebo", o němž jsme se zmínili v odstavci 1'5. Všechna tato spojení jsou však rovnocenná s různými kombinacemi zmíněných čtyř spojení a negace. Rovněž spojení několika výroků vznikají kombinováním negace a zmíněných čtyř spojení: konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence. Uvedeme jenom několik příkladů:

(1) „Buď byl v sobotu v divadle a v neděli na výletě, nebo byl v sobotu a v neděli na služební cestě"; zde máme disjunkci dvou konjunkcí; (2) „první trojúhelník je pravoúhlý a rovnoramenný, když a jen když je kongruentní buď s prvním nebo třetím trojúhelníkem";

zde máme ekvivalenci jedné konjunkce a jedné disjunkce.

1'9. Tautologicky správná souvětí. V každé úvaze, ať z běžného života nebo z některého vědního oboru, neustále spojujeme výroky, dokazujeme správnost různých souvětí atd. Všechny tyto obraty jsou zcela běžné a samozřejmé, takže během úvahy si je naprosto neuvědomujeme a ani nepotřebujeme uvědomovat. Je však užitečné, podrobit je dodatečně rozboru (jak jsme to nyní učinili pro jednotlivé druhy spojení).

Především se v úvahách leckdy vyskytují souvětí, která jsou správná bez ohledu na správnost nebo nesprávnost jednotlivých spojených výroků. O takových souvětích (spojeních výroků) budeme říkat, že jsou **tautologicky správná.** Příklady: (1) „Tento trojúhelník buď je anebo není pravoúhlý"; (2) „není pravda, že tento trojúhelník současně je a není pravoúhlý"; (3) „je-li tento trojúhelník pravoúhlý a rovnoramenný, pak je pravoúhlý". V příkladě 1. máme disjunkci výroku a jeho negace, v příkladě 2. máme negaci konjunkce výroku a jeho negace.

Jak se snadno můžeme přesvědčit, lze vyslovit následující pravidla: (1) konjunkce libovolného výroku a jeho negace (t. j. výrok „**A** a non **A**") je vždy nesprávná, (2) disjunkce libovolného výroku a jeho negace (t. j. výrok „buď **A** nebo non **A**") je vždy správná. Čtenář snadno pozná, že jsme vlastně vyslovili v této formě dva t. zv. základní zákony logiky. První pravidlo totiž říká, že nemůže být správný výrok a současně jeho negace; to je právě tak zvaná z á s a d a s p o r u. Druhé pravidlo říká, že je správný buď výrok nebo jeho negace, není však žádné třetí možnosti; to je právě tak zvaná z á s a d a o v y l o u č e n é m t ř e t í m („tertium non datur"). K těmto zásadám se ještě vrátíme v jedné z dalších kapitol.

Mluvili jsme o tautologicky správných souvětích. Jsou ještě jiné případy, kdy můžeme něco říci o spojení výroků, aniž něco víme o těchto výrocích samých.

1. Dvě souvětí mohou být navzájem **tautologicky ekvivalentní**, t. j. ekvivalentní bez ohledu na správnost nebo nesprávnost jednotlivých spojených výroků. V tomto případě je ekvivalence těchto souvětí tautologicky správným výrokem. Tak výroky „když **A**, pak **B**" a „buď **B** anebo non **A**" jsou ekvivalentní (t. j. buď jsou oba správné nebo oba nesprávné), ať již jsou **A** a **B** jakékoliv výroky. Dvě tautologicky ekvivalentní souvětí jsou zcela rovnocenná, t. j. můžeme beze všeho nahrazovat jedno druhým.

2. Jedno souvětí může **tautologicky implikovat** souvětí druhé, t. j. implikovat je, ať jsou jednotlivé spojené výroky správné či nesprávné. Tak výrok (1) „když **A** pak **B**, a když **B**, pak **C**" (je to konjunkce dvou implikací) implikuje výrok (2) „když **A**, pak **C**", ať jsou **A**, **B**, **C** jakékoliv výroky. To znamená, že výrok (2) je vždy důsledkem výroku (1). Nemůžeme však vždy nahrazovat jeden druhým, neboť se může stát, že výrok (2) je pravdivý, (1) však nikoliv.

2. VÝROKOVÉ VZORCE

2·1. Výrokové vzorce. V běžném životě se setkáváme často (na př. v úředních formulářích) s výrazy jako: „podepsaný se narodil dne...“ V matematice se zase vyskytují velmi často výrazy jako: „čtverec čísla x je sudý“, „$y = x^2 + x$“. Výrazy tohoto druhu nejsou výroky; nemůžeme říci: je pravda, že „podepsaný se narodil dne...“ nebo je pravda, že „čtverec čísla x je sudý“, ani nemůžeme říci, že to pravda není. Takové výrazy prostě nejsou úplné a proto nic netvrdí. Dosadíme-li však ve výraze „podepsaný se narodil dne...“ do mezery, vyznačené tečkami, jakékoli datum, pak vznikne výrok, ať již pravdivý nebo nepravdivý. Stejně tak netvrdí nic výraz „čtverec čísla x je sudý“ (leda že by symbol x vystupoval jako označení určitého čísla, tak jako na příklad π označuje číslo 3,14...); dosadíme-li však za symbol x nějaké určité číslo, pak vznikne výrok, na příklad „čtverec čísla 2 je sudý“ (správný výrok) nebo „čtverec čísla 3 je sudý“ (nesprávný výrok).

Místo, případně několik míst, kde má být takový neúplný výraz doplněn, může být, jak jsme viděli, označeno buď mezerou (tečkováním) nebo — jak je to zvykem v matematice — tak zvanou **neurčitou** (na př. x, y, z atd.), t. j. symbolem, který má právě naznačit, že za něj můžeme a máme něco doplnit.

Výrazy, jejichž příklady jsme zde uvedli, mají úlohu jakési předlohy nebo vzorce, jejíž vhodným doplněním vznikne výrok. Nazveme je proto výrokovými vzorci. **Výrokový vzorec** je tedy výraz, jenž sám není výrokem, avšak obsahuje neurčité, jejichž vhodným nahrazením vznikne výrok.*) Toto nahrazení se provede — jak je ostatně samozřejmé — tak, že za každou neurčitou se dosadí všude t e n t ý ž výraz; nesmíme tedy ve výrokovém vzorci nahradit x na jednom místě a, na druhém b.

Všimněme si znovu výrokového vzorce „čtverec čísla x je sudý"; tento výrokový vzorec vyjadřuje určitou vlastnost čísel, totiž „míti sudý čtverec". Dosadíme-li totiž za x číslo, které tuto vlastnost má, dostaneme správný výrok, dosadíme-li však číslo, které tuto vlastnost nemá, dostaneme výrok nesprávný. Ve stejném smyslu můžeme říci, že výrokový vzorec „$x > y$" vyjadřuje vztah „větší" atd. Každou vlastnost a každý vztah můžeme tedy vyjádřit výrokovým vzorcem s jednou nebo několika neurčitými, a naopak každý výrokový vzorec můžeme považovat za vyjádření vlastnosti nebo vztahu.

2·2. **Dosazení.** Mluvíme zde o vhodném, čili dovoleném nahrazení (dosazení). Je jasné, že nesmíme dosazovat za neurčitou cokoliv, neboť mohli bychom dostat nesmyslnou snůšku slov; drastický příklad: kdybychom dosadili do výrokového vzorce „čtverec čísla x je sudý" slovo „kočka", dostali bychom snůšku slov: „čtverec čísla kočka je sudý". Za neurčitou smíme dosadit pouze takový výraz, aby po dosazení skutečně vznikl výrok, případně — dosazujeme-li výraz, který sám zase obsahuje neurčité — aby vznikl znovu výrokový vzorec. Příklad: do výrokového vzorce „$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$" dosadíme za x výraz $a + 2y$; tím vznikne znovu výrokový vzorec

$$„\sin^2 (a + 2y) + \cos^2 (a + 2y) = 1".$$

*) Obvyklý termín pro výrokový vzorec je v ý r o k o v á f u n k c e. Užíváme zde jiného slova, abychom se vyhnuli záměně s matematickým pojmem funkce. Místo neurčitá se zpravidla říká p r o m ě n n á. Tento termín si rovněž reservujeme pro matematický pojem proměnné veličiny.

Kromě tohoto základního omezení je ještě jedno další. Smluvili-li jsme na příklad, že budeme uvažovat pouze o reálných číslech, pak nesmíme do výrokového vzorce „čtverec čísla x není záporný" dosadit za x číslo $\sqrt{-1}$, ač „čtverec čísla $\sqrt{-1}$ není záporný" je správně utvořený výrok (ovšem nepravdivý); imaginární čísla jsme totiž vyloučili ze svých úvah, takže tento výraz pro nás vskutku nemá smysl — obrazně řečeno, nepatří do řeči, kterou chceme užívat, neboť ta nezná komplexních čísel.

2'3. **Rovnice a otázka.** Nyní si všimněme dvou velmi důležitých druhů výrazů, které jsou vlastně výrokovými vzorci. Jsou to r o v n i c e a o t á z k a.

Všimněme si třeba rovnice „$x^2 - 3x + 2 = 0$". Je to výraz, obsahující neurčitou x; dosadíme-li do něho za tuto neurčitou nějaké číslo, pak dostaneme výrok, ať již správný či nikoliv, na př. „$2^2 - 3 \,.\, 2 + 2 = 0$" (správný výrok) nebo „$3^2 - 3 \,.\, 3 + 2 = 0$" (nesprávný výrok). Výraz (rovnice) „$x^2 - 3x + 2 = 0$" je tedy výrokovým vzorcem; řešením této rovnice nazýváme právě takové číslo, jehož dosazením vznikne správný výrok (zde jsou to čísla 1 a 2).

Jak vidíme již z tohoto příkladu, je vlastně každá rovnice, ať již o jedné nebo o několika neznámých, výrokovým vzorcem.

Totéž platí o systému rovnic, který je vlastně konjunkcí několika výrokových vzorců, totiž jednotlivých rovnic systému, a o nerovnostech.

Dejme tomu, že pan Josef Pokorný byl 2. srpna 1942 večer v biografu. „Pan J. P. byl večer dne 2. srpna 1942 . . ." je výrokový vzorec; dosadíme-li do vytečkované mezery výraz „v biografu", dostaneme správný výrok. Když pronášíme otázku: „kde byl pan J. P. dne 2. srpna 1942 večer?" pak tím jednak předkládáme zmíněný výrokový vzorec, jednak vybízíme k vytvoření z něho správného výroku. Po logické stránce je tedy otázka výrokovým vzorcem; obsahuje však též něco, co leží vlastně mimo logiku, totiž pobídku k určité činnosti.

2'4. **Spojení výrokových vzorců.** Mluvili jsme již o spojování výroků. Ježto výrokový vzorec je vlastně neúplný výrok, je jasné, že výrokové vzorce se dají spojovat stejně jako výroky. Tak na příklad z výrokových vzorců „x je větší než y" a „x se rovná y", můžeme utvořit jejich disjunkci, totiž výrokový vzorec „x je buď větší než y nebo se rovná y".

Další příklady spojení výrokových vzorců: „když $x > y$, pak $2^x > 2^y$" (implikace); „číslo x je dělitelné 3 v tom a jen v tom případě, že je dělitelné 6" (ekvivalence). Z prvního z těchto dvou výrokových vzorců vzniká, jak se čtenář snadno přesvědčí, pravdivý výrok, ať za x a y dosadíme jakákoliv čísla. Naproti tomu, dosadíme-li do druhého výrokového vzorce za x třeba číslo 15, vznikne nesprávný výrok „15 je dělitelné 3 v tom a jen v tom případě, že je dělitelné 6".

2'5. **Označení a označovací vzorce.** Obrátíme se nyní k jinému důležitému druhu výrazů. Všimněme si výrazů „bezprostřední představený pana J. N. bydlí v Dejvicích"; „čtverec čísla 6 je dělitelný 4". Výraz „bezprostřední představený pana J. N." označuje určitou osobu; výraz „čtverec čísla 6" označuje číslo 36. Výrazům tohoto druhu právě budeme říkat **označení**. Další příklady označení: (1) číslo, které násobeno 3 dá 6, (2) dekadický logaritmus čísla 100, (3) normální počet prstů na lidské ruce. Jak vidíme z těchto příkladů, mohou dvě označení označovat totéž, aniž jsou sama totožná [příklady (1) a (2)]. Naproti tomu však požadujeme, aby označení bylo j e d n o z n a č n é; na př. výraz „číslo, jehož čtverec se rovná 4" nebudeme považovat za označení, neboť $2^2 = 4$, ale také

$(-2)^2 = 4$, takže výraz „číslo, jehož čtverec se rovná 4" byl by dvojznačný.

Všimněme si nyní výrazu „čtverec čísla x". Dosadíme-li do tohoto výrazu za neurčitou x nějaké číslo, pak dostaneme označení, na příklad „čtverec čísla 4" (to je označení čísla 16) nebo „čtverec čísla 10" (to je označení čísla 100). Takovým výrazům, které obsahují jednu nebo několik neurčitých, jejichž vhodným nahrazením vznikne označení, říkáme **označovací vzorce.** Další příklady označovacích vzorců: (1) bezprostřední představený pana X; (2) logaritmus čísla x; (3) číslo, jež vynásobeno x, dá 1; (4) součin čísel x a y. Dosazovat za neurčité do označovacího vzorce smíme jen takové výrazy, abychom skutečně dostali označení, které má smysl, případně, když dosazujeme výraz, který sám zase obsahuje neurčité, abychom dostali zase správně utvořený označovací vzorec. Podmínky, které platí pro dosazování do označovacích vzorců, jsou tedy zcela obdobné podmínkám pro dosazování do výrokových vzorců.

Uvedeme ještě příklady dovoleného a nepřípustného dosazení. Z označovacího vzorce „logaritmus čísla x" můžeme dostat dosazením za neurčitou x tyto správně utvořené výrazy (1) „logaritmus čísla 5"; (2) „logaritmus součinu čísel 3 a 4"; (3) „logaritmus součinu čísel x a y"; zde nevzniklo dosazením označení, nýbrž zase označovací vzorec. Naproti tomu není přípustné dosadit do označovacího vzorce „bezprostřední představený pana X" za X jméno člověka, který je na př. samostatným podnikatelem, nebo — abychom zase uvedli drastický příklad — dosadit do označovacího vzorce „logaritmus x" za neurčitou x slovo „Vltava"; dostali bychom pak skupinu slov, která nemá smysl. Právě tak není přípustné dosadit do označovacího vzorce „číslo, jež vynásobeno x dá 1" za x číslo 0, načež bychom dostali skupinu slov „číslo, jež vynásobeno 0, dá 1".

3. OBECNÉ A EXISTENČNÍ VÝROKY

3'1. Obecné a existenční výroky. Z výrokového vzorce dostaneme výrok, když vhodným způsobem nahradíme neurčité. Tím vznikne výrok, který již neobsahuje žádnou neurčitou. Takový výrok budeme nazývat výrokem **individuálním.** Jsou však také jiné druhy výroků, které dostaneme, když vyjdeme z výrokového vzorce. Budeme se jimi nyní zabývat.

Všimněme si výroků „pro některá x je $x^2 - x = 2$" (tento výrok je pravdivý, nebcť na př. $2^2 - 2 = 2$); „pro každé x je $x^2 - x = 2$" (tento výrok je nesprávný, neboť na př. není $3^2 - 3 = 2$). Smysl těchto výroků je jasný; po ryze formální stránce je zřejmé, že vzniknou z výrokového vzcrce $x^2 - x = 2$" pomocí výrazu „pro některá x..." nebo „pro každé x..." Je jasné, že tímto způsobem můžeme vytvořit výroky z libovolného výrckového vzorce. Místo „pro některé..." můžeme také říkat „existuje... tak, že..."; logický význam obou výrazů považujeme — jak je to v matematice obvyklé — za naprosto stejný, takže na př. výroky „pro některé x je $x^2 - x = 2$" a „existuje x takové, že $x^2 - x = 2$" se liší jenom slovním tvarem.

Výrokům, které se utvoří z výrokového vzorce pomocí slov „pro některé..." nebo „existuje..." budeme říkat **existenční** výroky. Výrokům, které se vytvoří pomocí slcv „pro libovolné..." nebo „pro každé..." nebo „pro všechny..." nebo pomocí jiného výrazu, který má stejný význam, budeme říkat **obecné** výroky. Výrazům „existuje", „pro některé", „pro každé" atd., pomocí kterých se tvoří cbecné nebo existenční výroky, se někdy říká **logické operátory.**

Obecný výrok zastupuje vlastně všechny individuální výroky, které se dají vytvořit z daného výrokového vzorce. Dá se říci, že je jakousi „neomezenou konjunkcí" těchto individálních výroků. Tak na příklad obecný výrok „pro libovolné x je $(x+1)(x-1) = x^2-1$" znamená vlastně toto: „$(1+1)(1-1) = 1^2-1$ a také $(2+1)(2-1) = 2^2-1$ a také..." Podobně je existenční výrok vlastně jakousi „neomezenou disjunkcí" všech možných individálních výroků, které vznikají z daného výrokového vzorce. Tak na příklad existenční výrok „pro některé x je $x^2-x=2$" znamená vlastně toto: „buď $1^2-1=2$ nebo $2^2-2=2$ nebo $3^2-3=2$ nebo..."

Obecné a existenční výroky mají tedy v podstatě stejný význam jako spojení výroků, totiž konjunkce nebo disjunkce, jenže spojují nikoliv dva nebo několik daných výroků, nýbrž všechny výroky, které mohou vzniknout dosazením z daného výrokového vzorce.

Uváděli jsme dosud jako příklady pouze takové obecné a existenční výroky, které vznikly z výrokových vzorců, obsahujících pouze jednu neurčitou. Je samozřejmé, že lze vytvořit obecné a existenční výroky stejným způsobem také z výrokových vzorců, které obsahují několik neurčitých, na příklad „pro libovolná x a y je $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$" nebo „existují x a y tak, že $x^2+y^2=1$ a $xy=\frac{1}{2}$.

Existenční a obecné výroky se vyskytují velmi často v matematice. Každý matematický vzorec je obecným výrokem; slova „pro každé x" a pod. se ovšem zpravidla buď nahrazují slovy „platí vždy" a pod. nebo ještě častěji se vůbec nevyslovují a musíme si je domyslit. Tak na příklad místo „$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$" bychom měli říci obšírněji „pro každé x je $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$". Proto často můžeme poznat jen z celkové souvislosti, zda určitý výraz je výrokovým vzorcem nebo obecným výrokem.

V běžné řeči vyslovujeme obecné a existenční výroky rovněž jinou formou, na příklad „někteří ssavci žijí ve vodě", „všichni ssavci dýchají plicemi". Takové výroky jsou však logicky totožné s výroky utvořenými pomocí t. zv. logických operátorů z výrokových vzorců. Kromě toho je ještě jeden případ, kdy obecný výrok se netvoří pomocí slov „pro každé..." a pod., nýbrž jiným způsobem. Utvoříme-li totiž obecný výrok z výrokového vzorce „x nemá vlastnost V", pak neříkáme „každé x nemá vlastnost V", nýbrž „žádné x nemá vlastnost V". V takovém případě má tedy obecný logický operátor slovní tvar „žádné".

3'2. **Kombinování logických operací a spojení.** Dosud jsme se setkali pouze s logickými operátory, které se vztahovaly na všechny neurčité, obsažené ve výrokovém vzorci. Logické operátory mohou se však také vztahovat pouze na některé neurčité. Příklad: „existuje x takové, že $x^2 = y$"; zde jsme dostali pomocí existenčního operátoru z výrokového vzorce „$x^2 = y$", který obsahoval dvě neurčité, výrokový vzorec „existuje x tak, že $x^2 = y$", který obsahuje již jen jednu neurčitou, za níž smíme dosazovat, a to y. Kdybychom totiž dosadili za x, dostaneme snůšku slov bez smyslu (na příklad „existuje 3 tak, že $3^2 = y$"). Vůbec nesmíme nikdy dosazovat za neurčitou, na kterou se již vztahuje některý logický operátor. Aplikujeme-li dále na výrokový vzorec „existuje x takové, že $x^2 = y$" obecný operátor „pro každé y", dostaneme výrok „pro každé y existuje x takové, že $x^2 = y$". Tento výrok jest správný, když mluvíme o komplexních číslech, je však nesprávný, když mluvíme jen o číslech reálných, t. j. když smíme dosazovat za neurčité jen reálná čísla.

Výroky tohoto druhu, t. j. výroky, které vznikají užitím několika logických operátorů za sebou (střídavě existenčního a obecného), se vyskytují velmi často v matematice, zvláště v jejich abstraktních oborech. Uvedeme ještě dva příklady takových výroků. (1) „Pro libovolná x a y existují φ a r tak, že r je kladné, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$". Základem je zde výrokový vzorec (konjunkce tří výrokových vzorců), „r je kladné, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$". Aplikujeme postupně existenční operátor „existují φ a r" a obecný operátor „pro libovolná x a y". (2) Existuje x takové, že pro každé y je $x + y = y$". Základem je výrokový vzorec „$x + y = y$"; aplikujeme postupně operátory „pro každé y" a „existuje x".

Všimněme si nyní příkladu jiného druhu: „když $-1 < x < 1$, pak $x^2 < 1$". Je to obecný výrok, nikoli výrokový vzorec; jak jsme již řekli, vyslovují se totiž v matematice obecné výroky zpravidla tak, že se vysloví výrokový vzorec a doložka „pro každé x" se domyslí. Stavebními kameny tohoto výroku jsou výrokové vzorce „$-1 < x < 1$" a „$x^2 < 1$". Když utvoříme jejich implikaci a pak aplikujeme obecný operátor, dostaneme náš výrok. Kombinujeme zde tedy logické spojování výroků a logické operace, totiž tvoření obecných a existenčních výroků. Můžeme je vůbec kombinovat nejrůznějším způsobem: zde jsou na to dva příklady: (1) „existuje x takové, že $\cos x = 1$, a také existuje x takové, že $\sin x = 1$"; (2) „existuje x takové, že $\cos x = 1$ a také $\sin x = 1$". Tyto dva výroky jsou si zdánlivě svou stavbou velmi podobné. První vznikne tak, že nejdříve utvoříme z výrokových vzorců „$\cos x = 1$" a „$\sin x = 1$" existenční výroky a pak utvoříme konjunkci těchto výroků. Druhý vznikne obráceným postupem: utvoříme nejdříve konjunkci daných výrokových vzorců a pak z ní utvoříme existenční výrok. Přes zdánlivou podobnost stavby, dostáváme však takto zcela různé výroky: výrok (1) je správný, výrok (2) nesprávný.

Stejně tak jsou zcela různé tyto výroky: (1) „pro každé φ je buď $-\frac{3}{4} < \cos \varphi < \frac{3}{4}$ nebo $-\frac{3}{4} < \sin \varphi < \frac{3}{4}$"

a (2) „buď je pro každé φ $-\frac{3}{4} < \cos\varphi < \frac{3}{4}$ nebo je pro každé φ $-\frac{3}{4} < \sin\varphi < \frac{3}{4}$".

3·3. Tautologicky správné výroky. Všimněme si nyní výroku „buď některé x má vlastnost V nebo žádné x nemá vlastnost V". Tento výrok je zřejmě správný. Je vytvořen z výrokového vzorce „x má vlastnost V" pomocí logických spojek a operátorů, přitom však je správný, ať již V je jakákoliv vlastnost a zůstává správným, když nahradíme zmíněný výrokový vzorec „x má vlastnost V" jakýmkoliv jiným vzorcem, který obsahuje x a žádnou jinou neurčitou. Takové výroky budeme nazývati **tautologicky správnými** (viz 1. kapitolu).

Od podrobného rozboru různých druhů takových výroků zde upustíme a všimneme si jenom jednoho důležitého případu. Každý existenční výrok je totiž **tautologicky ekvivalentní** s negací jistého obecného výroku (tím míníme to, že jejich ekvivalence je tautologicky správným výrokem). Na příklad výroky „existuje x, které nemá vlastnost V" a „není pravda, že každé x má vlastnost V", jsou ekvivalentní, t. j. jsou buď oba správné nebo oba nesprávné. Obecně platí, že výroky „existuje … tak, že platí A" a „není pravda, že pro každé … platí non A" jsou vždy ekvivalentní. To znamená, že můžeme nahradit každý existenční výrok negací obecného výroku (obdobně, jako můžeme vždy nahradit disjunkci negací jisté konjunkce); nemuseli bychom tedy vůbec užívat existenčních výroků. Ve skutečnosti jich ovšem užíváme, neboť bez nich by se úvahy staly delší, málo přehledné, ale hlavně „nenázorné".

Od ekvivalence dvou výroků musíme odlišovat ekvivalenci dvou výrokových vzorců. Říkáme, že **výrokové vzorce** „x je P" a „x je Q" jsou **ekvivalentní**, když je správný obecný výrok „pro každé x platí: x je P, když a jen když x je Q". Příklad:

výrokové vzorce „x je větší než 1" a „x má kladný dekadický logaritmus" jsou ekvivalentní.

3·4. Dvojí pojetí existence. Přistoupíme nyní k jedné obtížné otázce, které se zde můžeme dotknout jen zběžně. Řekli jsme, že výroky „existuje ... tak, že platí A" a „není pravda, že pro každé ... platí non A" jsou tautologicky ekvivalentní. To se zdá zcela samozřejmé, nicméně se proti tomu činí námitky. Tvrdí se totiž toto: když vyvrátíme tvrzení, že každé x má vlastnost V, pak tím není nikterak prokázáno, že existuje x, které tuto vlastnost nemá. Zde prý totiž jen zdánlivě platí „tertium non datur" (vyloučení třetí možnosti), neboť kromě dvou možností (1) všechna x mají vlastnost V, (2) některé určité x nemá vlastnost V, je prý ještě třetí možnost: není sice pravda, že všechna x mají vlastnost V, avšak také se nedá najít žádné x, které by tuto vlastnost nemělo. Někdy se jde ještě dál a tvrdí se, že existenční výroky nemají vůbec smysl a jsou proto nepřípustné, pokud přímo neudávají určitý prvek, který má vlastnost, o niž nám jde, nebo aspoň neudávají předpis, jak nalézt takový prvek konečným počtem kroků.

Proti těmto námitkám lze říci toto: především je nutné objasnit, co rozumíme v matematických úvahách slovem „existuje". Je jasné, že v matematice tím nemíníme existenci v nějakém filosofickém (metafysickém) smyslu, třeba že slovo „existuje" často svádí k takovému výkladu (právě proto je někdy lépe místo „existuje ..." říkat „některé ..."). Je zde tedy možné v podstatě dvojí pojetí: 1. Výrok jako na příklad „některé x má vlastnost V" zavádíme vlastně jako z k r a t k u za výrok „nikoli každé x má vlastnost non V". Existence je tedy d e f i n o v á n a jako negace obecné platnosti opaku. Existenční výroky nejsou potom ničím zásadně novým a všechny námitky padají. 2. Pojímáme existenci jako *možnost konstrukce*, t. j. na příklad výrok „existuje x, které má vlastnost V" pro nás znamená, že lze *udat* (konstruovat) prvek, který má vlastnost V. Výraz „lze udat (sestrojit)" je ovšem velmi mlhavý, takže je nezbytné jej především přesně definovat. Pak jde zřejmě o existenci v jiném smyslu než při prvním pojetí; neměli bychom vlastně již mluvit o existenci, nýbrž třeba o sestrojitelnosti. Ekvivalence takové existence (sestrojitelnosti) s negací obecné platnosti opaku zřejmě nemusí být správná. Skutečně: když lze udat x, které nemá vlastnost V, pak ovšem není pravda, že by každé x mělo tuto vlastnost; když však naopak víme jenom toto: není pravda, že každé x má vlastnost V, pak z toho nikterak nevyplývá, že můžeme udat x, které nemá tuto vlastnost. Při tomto druhém pojetí padá tedy ekvivalence mezi existencí na jedné straně a negací obecné platnosti opaku na straně druhé. Existenční výroky se pak nedají nahradit negacemi obecných výroků, nýbrž jsou něčím podstatně novým.

Jsou tedy dvě pojetí existence, čili „dva druhy" existence v matematice. První pojetí je v matematice běžné; při druhém pojetí (existence jako sestrojitelnost) velmi vadí to, že není snadné dobře definovat sestrojitelnost, a že se s tímto pojmem dostáváme do obtížných logických úvah. Je však jeden směr (*intuicionismus*), který zavrhuje vůbec první pojetí existence a připouští pouze existenci jako sestrojitelnost. Důvody pro to jsou spíše filosofického rázu. Nebudeme se tím zde tedy zabývat.

3·5. Logické značky. Uvádíme ještě pro informaci přehled značek, jichž se užívá pro logická spojení a logické operátory, jakož i několik příkladů výroků, vyjádřených pomocí těchto značek (o nichž jsme se ostatně již zmiňovali).

Negaci výroku p označujeme $\sim p$; konjunkci výroků p a q označíme $p \mathbin{\&} q$, jejich disjunkci $p \vee q$, implikaci $p \Rightarrow q$, ekvivalenci $p \Leftrightarrow q$. Správnost souvětí závisí, jak víme (odst. 1·2) jenom na správnosti nebo nesprávnosti spojovaných výroků. Uvádíme zde tabulku, v níž je pro jednotlivé druhy souvětí uvedeno, ve kterých případech (ze čtyř možných kombinací správnosti a nesprávnosti výroků p a q) je souvětí správné (zkratka S), ve kterých nesprávné (zkratka N).

výrok	p	S	S	N	N
výrok	q	S	N	S	N
negace	$\sim p$	N	N	S	S
negace	$\sim q$	N	S	N	S
konjunkce	$p \mathbin{\&} q$	S	N	N	N
disjunkce	$p \vee q$	S	S	S	N
implikace	$p \Rightarrow q$	S	N	S	S
implikace	$q \Rightarrow p$	S	S	N	S
ekvivalence	$p \Leftrightarrow q$	S	N	N	S

Uvádíme dále několik příkladů tautologicky správných souvětí (viz odst. 1·9): $p \vee \sim p$; $\sim (p \mathbin{\&} \sim p)$; $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$; $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \mathbin{\&} \sim q)$.

Logický operátor „pro každé x..." vyjadřujeme symbolem (zkratkou) „(x)"; místo „pro každé x je $V(x)$", kde $V(x)$ je určitý výrokový vzorec, píšeme tedy „$(x) V(x)$". Příklady: (1) $(x)(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$; (2) $(x)(x > 0 \Rightarrow 10^x > 1)$, což znamená: pro každé kladné x je $10^x > 1$; (3) $(x)(y)(z)(x > y \mathbin{\&} y > z \Rightarrow x > z)$, což znamená, že pro libovolná čísla x, y, z platí: když $x > y$ a $y > z$, pak $x > z$. — Existenční operátor místo slovy „pro některé x..." vyjadřujeme symbolem „$(\exists x)$"; místo „pro některé x platí $V(x)$" nebo „existuje x, pro něž platí $V(x)$", píšeme tedy „$(\exists x)\ V(x)$". Příklady: (1) $(\exists x)\ (10^x = 2)$; (2) $\sim(\exists x)\ (10^x = 0)$, což znamená: neexistuje x, pro něž by bylo $10^x = 0$; (3) $(x)\ [x > 0 \Rightarrow (\exists y)\ (10^y = x)]$, což znamená: ke každému kladnému x existuje takové y, že $10^y = x$.

Konečně uvádíme dva příklady tautologicky správných vět (viz odst. **3˙3**), v nichž vystupují logické operátory (x) a $(\exists x)$.

1. příklad: $(\exists x) V(x) \Leftrightarrow \sim (x) \sim V(x)$, což znamená ekvivalenci existenčního výroku s negací obecné platncsti opaku.

2. příklad: $(x)\,[A(x) \Rightarrow B(x)]\ \&\ (x)\,[B(x) \Leftrightarrow C(x)] \Rightarrow$ $\Rightarrow (x)\ [A(x) \Rightarrow C(x)]$, což znamená: když z $A(x)$ vždy vyplývá $B(x)$ a z $B(x)$ vždy vyplývá $C(x)$, pak z $A(x)$ vždy vyplývá $C(x)$.

4. LOGICKÁ DEDUKCE

4·1. Odvození a důkaz. Důkazem rozumíme logické odvození výroku z jiných správných výroků. Termín **odvození** má tedy širší význam než důkaz, neboť můžeme logicky odvozovat důsledky také z nesprávných výroků (takové odvození, t. zv. „reductio ad absurdum" tvoří součást nepřímého důkazu) nebo z výroků, o nichž nevíme, zda jsou správné (na př. když odvozujeme důsledky z nějaké hypothesy). Důkazem však nazýváme pouze odvození ze správných výroků.

Výroky, z nichž při odvození (důkazu) vycházíme, nazýváme **premisami**; výrok, k němuž nakonec dospějeme, nazýváme **závěrem** odvození (důkazu).

Premisami důkazu mohou být výroky různého druhu: výroky bezprostředně založené na zkušenosti, na příklad „tato tužka je červená" (v matematice se však takovéto výroky nevyskytují); axiomy a definice; věty v užším smyslu, totiž výroky, logicky odvozené z jiných správných výroků; konečně tautologicky správné výroky, na příklad „buď některé x má vlastnost P, nebo žádné x ji nemá". Takové tautologicky správné výroky však zpravidla mezi premisy nepočítáme.

Každé odvození (důkaz), ať je jakkoliv složité, se dá vždy rozložit v řetěz jednoduchých kroků — říkejme jim termínem obvyklým v tradiční logice **úsudky** — jimiž bezprostředně odvozujeme jeden výrok z jednoho nebo několika jiných. Tyto úsudky se dají redukovat na několik málo základních typů. Uvedeme nyní hlavní typy úsudků.

4·2. Implikační úsudek. Začneme příklady.

P ř í k l a d 1. Dejme tomu, že chci dokázat, že určitý roztok je zásaditý. Vím, že každý roztok, který barví reakční papírek modře, je zásaditý. Z toho vyplývá, že

(1) „barví-li náš roztok reakční papír modře, pak je tento roztok zásaditý". Provedu nyní pokus a zjistím, že skutečně (2) „náš roztok barví reakční papírek modře". Z těchto dvou výroků vyplývá bezprostředně důsledek (3) „náš roztok je zásaditý".

P ř í k l a d 2. V tomto příkladě smíme dosazovat za neurčité pouze c e l á č í s l a. Premisy jsou tyto: (1) „pro každé n je buď n nebo $n^4 - 1$ dělitelné 5"; (2) „když buď n nebo $n^4 - 1$ je dělitelné 5, pak $n^5 - n$ je dělitelné 5". Z toho vyplývá závěr (3) „pro každé n je číslo $n^5 - n$ dělitelné 5".

Schematisujeme si nyní první příklad. Premisy jsou tyto: (1) když **A**, t. j. když náš roztok barví..., pak **B**, t. j. náš roztok je zásaditý; (2) **A**, t. j. náš roztok barví...; závěr: (3) **B**, t. j. roztok je zásaditý. Máme zde tedy následující schema (v němž **A** a **B** jsou zkratky za určité výroky):

$$\left.\begin{array}{l}\text{když } \mathbf{A}\text{, pak } \mathbf{B} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ \mathbf{A} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\end{array}\right\}\text{ premisy}$$
$$\text{tedy } \mathbf{B} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \text{ závěr}$$

Podobné schema má druhý příklad, jen s tím rozdílem, že v prvním příkladě jsme měli individuální výroky, kdežto zde máme výroky obecné:

$$\left.\begin{array}{l}\text{pro každé } n \text{ platí: když } P(n)\text{, pak } Q(n) \\ \text{pro každé } n \text{ platí } P(n) \;.\;.\;.\;.\;.\end{array}\right\}\text{ premisy}$$
$$\text{tedy pro každé } n \text{ platí } Q(n) \;.\;.\;.\;.\;. \text{ závěr}$$

Konečně může úsudek téhož typu mít za závěr také existenční výrok.

P ř í k l a d: (1) Když x má vlastnost V, pak má také vlastnost W; (2) některé x má vlastnost V; tedy (3) některé x má vlastnost W.

Zde má úsudek následující schema:

$$\left.\begin{array}{l}\text{pro každé } x \text{ platí: když } P(x)\text{, pak } Q(x)\\ \text{pro některé } x \text{ platí } P(x)\ \ .\ .\ .\ .\ .\end{array}\right\}\text{premisy}$$

$$\text{tedy pro některé } x \text{ platí } Q(x)\ \ .\ .\ .\ .\ .\ \ \text{závěr}$$

Uvedená tři schemata representují tři druhy úsudku, kterému budeme říkat **úsudek implikační.** V prvním jsou závěr a premisy individuální výroky, v druhém jsou to obecné výroky, v třetím je závěr existenční výrok, jedna premisa je existenčním, druhá obecným výrokem. Z těchto tří typů je základním typ první.

Druhý typ shrnuje v jistém smyslu neomezeně mnoho úsudků prvního typu, obdobně jako obecný výrok shrnuje všechny individuální výroky, které lze vytvořit z daného výrokového vzorce. Třetí typ nemá základního významu, neboť se dá nahradit — použijeme-li ještě zásady nepřímého důkazu (a ovšem také tautologicky správných vět) — implikačními úsudky druhého typu.

Provedeme tímto způsobem jako příklad odvození výroku „existuje *x*, které má vlastnost *Q*" z premis „každé *x*, které má vlastnost *P*, má vlastnost *Q*" a „existuje *x*, které má vlastnost *P*". Podle zásady nepřímého důkazu stačí k tomu odvodit z jedné premisy a negace závěru druhou premisu. To právě provedeme: odvodíme z výroků (1) „neexistuje žádné *x*, které by mělo vlastnost *Q*", (2) „každé *x*, které má vlastnost *P*, má také vlastnost *Q*" výrok (3) „neexistuje žádné *x*, které by mělo vlastnost *P*". Výrok (1) je tautologicky ekvivalentní s výrokem (4) „pro každé *x* platí: *x* nemá vlastnost *Q*"; výrok (2) je tautologicky ekvivalentní s výrokem (5) „pro každé *x* platí: když *x* nemá vlastnost *Q*, pak také nemá vlastnost *P*". Z výroků (4) a (5) plyne implikačním úsudkem 2. typu výrok (6) „pro každé *x* platí: *x* nemá vlastnost *P*". Tento výrok je však tautologicky ekvivalentní s výrokem (3). Tím jsme provedli žádaný důkaz. Kromě zásady nepřímého důkazu použili jsme při tom pouze implikačního úsudku 2. typu a tautologických úprav — to znamená zase implikačního úsudku 2. nebo 1. typu a tautologicky správných ekvivalencí.

4'3. Sylogismus. Sylogismy, o nichž se mluví v tradiční logice, lze pokládat za zvláštní typ úsudku, příbuzný úsudku implikačnímu. Uvedeme zase nejdříve příklady takového úsudku.

Příklad 1. Premisy: (1) každá látka, jejíž roztok barví reakční papír modře, je zásaditá; (2) každá látka, která je zásaditá, slučuje se s některou kyselinou; závěr: každá látka, jejíž roztok barví reakční papír modře, slučuje se s některou kyselinou.

Příklad 2. Premisy: (1) rostliny, k nimž nemá světlo přístup, nevytvářejí chlorofyl; (2) rostliny, které nevytvářejí chlorofyl, nejsou zelené; závěr: rostliny, k nimž nemá světlo přístup, nejsou zelené. — Tytéž premisy a závěr lze vyslovit v jiném slovním tvaru takto: (1) nemá-li k rostlině světlo přístup, pak rostlina nevytváří chlorofyl; (2) nevytváří-li rostlina chlorofyl, pak není zelená; závěr: nemá-li k rostlině přístup světlo, pak není zelená.

Úsudek, který máme v těchto příkladech, můžeme schematisovat takto: premisy: (1) každé x, které má vlastnost P, má také vlastnost Q; (2) každé x, které má vlastnost Q, má také vlastnost R; závěr: každé x, které má vlastnost P, má také vlastnost R. Schematisujeme-li jej ještě více, dostáváme následující schema sylogismu:

$$\left.\begin{array}{l}\text{když } P(x)\text{, pak vždy také } Q(x)\\ \text{když } Q(x)\text{, pak vždy také } R(x)\end{array}\right\}\text{premisy}$$

$$\text{tedy když } P(x)\text{, pak vždy také } R(x) \qquad \text{závěr}$$

To je schema základního typu sylogismu. Premisy i závěr jsou zde obecné výroky; obdobný úsudek je možný ovšem také pro individuální výroky.

Kromě toho existuje celá řada jiných úsudkových schemat, která se dají redukovat na sylogismus právě popsaného základního typu, používáme-li ještě zásady nepřímého důkazu (viz odst. 4·6) a tautologicky správných vět. Takové úsudky rovněž nazýváme sylogismy. Uvedeme jeden p ř í k l a d: (1) někteří živočichové, žijící ve vodě, jsou ssavci; (2) všichni ssavci dýchají plicemi; tedy (3) někteří živočichové, žijící ve vodě, dýchají plicemi. Řadu dalších příkladů může čtenář najít v každé učebnici tradiční logiky.

Uvedeme ještě příklad zmíněné redukce sylogistického úsudku na sylogismus základního typu. Mějme sylogismus (v schematickém tvaru): (1) „některé x je P a také Q"; (2) „každé x, které je Q, je také R"; tedy (3) „některé x je P a také R". Máme nyní odvodit tento závěr z premis (1) a (2) takovým způsobem, že použijeme pouze sylogismu základního typu, zásady nepřímého důkazu a tautologicky platných vět.

Podle zásady nepřímého důkazu stačí k tomu odvodit z jedné premisy a negace závěru negaci druhé premisy, tedy z premis (4) „není pravda, že existuje x, které je P a současně také R"; (2) „každé x, které je Q, je také R" odvodit negaci výroku (1). Z výroku (4) dostaneme tautologickou úpravou (to znamená: implikačním úsudkem za pomoci tautologicky platných ekvivalencí) výrok (5) „pro každé x platí: když x je R, pak není P". Z výroků (5) a (2) vyplývá sylogistickým úsudkem základního typu výrok (6) „pro každé x platí: když x je Q, pak není P"; tautologickou úpravou vyplyne z toho výrok (7) „není pravda, že existuje x, které je P a také Q". To však je právě negace premisy (1).

Obdobným způsobem jako v tomto příkladě lze převést každý sylogismus na základní typ. Neznamená to samozřejmě, že bychom to snad měli skutečně provádět na příklad v našich matematických a jiných důkazech; znamená to pouze, že rozmanité tvary bezprostředního odvození dají se vyvodit z několika málo základních typů úsudku.

Charakterisovali jsme sylogistické úsudky tím, že se dají pomocí tautologických úprav, případně za použití zásady nepřímého důkazu, redukovat na sylogismus základního typu, jehož schema jsme uvedli. Lze je charakterisovat ještě takto: v sylogismu jsou premisy a závěr vybudovány ze tří členů — výrokových vzorců *I*, *II*, *III*. Premisy spojují *I* a *II*, *II* a *III*; závěr pak spojuje *I* a *III*. Je to zřejmé z následujícího schematu: „když $(I)x$ je *P*, pak $(II)x$ je *Q*"; „když $(II)x$ je *Q*, pak $(III)x$ je *R*"; tedy „když $(I)x$ je *P*, pak $(III)x$ je *R*". Výrokovému vzorci, který je obsažen jako část v obou premisách (zde je to výrokový vzorec „x je *Q*"), se někdy říká **střední člen.**

Sylogistický a implikační úsudek jsou si velmi podobné a jeden se dá snadno převést na druhý; tím se však zde nebudeme zabývat. Sylogismus bývá často považován za základní typ úsudku vůbec. Otázka, jaké úsudky budeme považovat za základní, je ovšem především věcí konvence, je však vhodnější považovat implikační úsudek za fundamentální. Je totiž jednak formálně jednodušší než sylogismus, jednak lépe odpovídá způsobu usuzování, který se nejčastěji vyskytuje ve vědeckých úvahách i v praktickém životě: zjistíme, že za určité podmínky nastává určitá okolnost; pak zjistíme, že tato podmínka vskutku nastává, a z toho usoudíme, že nastává uvažovaná okolnost — toto je právě implikační úsudek.

4·4. **Substituční úsudek.** Začneme zase příklady.

Příklad 1. Premisa: „pro libovolná x a y je $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$"; závěr: „$(10+1)(10-1) = 10^2 - 1^2$". Tento úsudek je tak samozřejmý, že si jej zpravidla ani neuvědomujeme.

Příklad 2. Premisa: „pro libovolná x a y je $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$"; závěr: „pro každé α je $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$".

Úsudkům tohoto druhu, kde dosazujeme (substituujeme) za neurčitou (nebo několik neurčitých) buď označení nebo označovací vzorec, říkáme **substituční úsudky**. Liší se navzájem podle toho, zda dosazujeme za neurčitou označení nebo označovací vzorec. V prvním případě je závěr individuální výrok, v druhém případě výrok obecný; premisou je však při substitučním úsudku vždy obecný výrok. Uvádíme nyní schema tohoto úsudku (pro případ, že dosazujeme individuální označení).

Schema substitučního úsudku:

každé x má vlastnost V	premisa
tedy a má vlastnost V	závěr

Substituční úsudek se liší, jak vidíme, od implikačního úsudku a sylogismu mimo jiné tím, že má jen jednu premisu, nikoliv dvě. Zde je nutná jedna poznámka: mohlo by se snad namítat, že druhou — nevyslovenou — premisou je konstatování, že za x smíme dosadit a. To však není správné: kdykoli „každé x má vlastnost V" a „a má vlastnost V" jsou skutečně správně utvořené výroky, vyplývá vždy z prvního druhý. Kdybychom chtěli pokládat za druhou premisu konstatování, že za x smíme dosadit a, pak bychom museli důsledně na př. při implikačním úsudku považovat za třetí premisu konstatování, že jedna z premis má tvar implikace.

Uvedeme nyní příklad úsudku, který je obrácením úsudku substitučního. Premisa: „číslo π není řešením žádné algebraické rovnice"; závěr: „existuje číslo, které není řešením žádné algebraické rovnice". Tento úsudek má následující schema:

a má vlastnost V	premisa
tedy existuje x, které má vlastnost V	závěr

Tento úsudek je zase tak samozřejmý, že si jej ani neuvědomujeme. Spočívá však na něm existenční důkaz pomocí konstrukce, t. j. důkaz existence prvku s určitou vlastností přímým udáním určitého takového prvku.

Úsudek tohoto typu se dá převést za použití zásady nepřímého důkazu pomocí tautologické úpravy na substituční úsudek. Provedeme to jako příklad. Z premisy „a má vlastnost V" máme odvodit závěr „existuje x, které má vlastnost V". Stačí k tomu odvodit z negace závěru negaci premisy. Z negace závěru vyplývá tautologickou úpravou výrok „žádné x nemá vlastnost V". Z toho plyne substitučním úsudkem: „a nemá vlastnost V"; to je právě negace premisy.

4·5. **Identifikační úsudek.** Substitučnímu úsudku se podobá úsudek, jehož příklady nyní uvedeme.

Příklad 1. Premisy: „bezprostřední představený pana A. B. bydlí v Dejvicích"; „bezprostřední představený pan A. B. je pan C. D."; závěr: „pan C. D. bydlí v Dejvicích".

Příklad 2. Premisy: „pro každé x je $(x-1)^2 \geqq 0$"; „pro každé x je $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$"; závěr: „pro každé x je $x^2 - 2x + 1 \geqq 0$.

Úsudek tohoto typu budeme nazývat úsudkem podle zásady identity nebo krátce **identifikačním úsudkem.** Je charakterisován tím, že jednou z premis je logická identita (individuální nebo obecná), t. j. výrok tvaru „a je totožné s b" nebo „pro každé x je $f(x)$ totožné s $g(x)$".

S c h e m a   i d e n t i f i k a č n í h o   ú s u d k u:

a) pro případ individální identity

a má vlastnost V . . . . a je totožné s b	premisy
tedy b má vlastnost V	závěr

b) pro případ obecné identity

pro libovolné x má $f(x)$ vlastnost V pro libovolné x je $f(x)$ totožné s $g(x)$	premisy
tedy pro libovolné x má $g(x)$ vlastnost V	závěr

Identifikační úsudek je velmi podobný úsudku substitučnímu, neboť v obou případech jde o dosazení. Rozdíl mezi těmito dvěma typy úsudku je mimo jiné v tom, že úsudek podle zásady identity lze obrátit, t. j., že ze závěru a jedné premisy (totiž identity) vyplývá druhá premisa, kdežto při substitučním úsudku premisa zpravidla není důsledkem závěru.

4˙6. Nepřímý úsudek. Přímý důkaz je ten, v němž vycházíme z premis a od nich postupujeme k závěru. Při nepřímém důkaze vycházíme naopak z výroku, který chceme dokázat, odvodíme z jeho negace výrok, který odporuje premisám nebo je vůbec nesprávný (čili, jak se říká, o d v o d í m e   s p o r), a na základě toho pokládáme náš výrok za odvozený z daných premis. **Nepřímým úsudkem** (nebo z á s a d o u   n e p ř í m é h o   d ů k a z u) nazýváme právě tuto „inversi" (obrácení): z non **B** vyplývá non **A** — tedy z **A** vyplývá **B**.

V příkladech, které jsme uváděli, vyskytl se již několikrát nepřímý úsudek. Uvedeme ještě jeden příklad. — Chceme dokázat výrok **A** „počet prvočísel je nekonečný". Odvodíme tedy důsledky z jeho negace „počet prvočísel je konečný". Označme a součin všech prvočísel (podle našeho předpokladu to má smysl).

Pak číslo a je dělitelné každým prvočíslem. Z toho a z věty (1) „pro libovolná celá čísla x a y platí: když x je dělitelné y a y se nerovná 1 nebo —1, pak $x+1$ není dělitelné y" vyplývá výrok „číslo $a+1$ není dělitelné žádným prvočíslem", z něhož ihned plyne negace správného výroku (2) „každé celé číslo, které se nerovná 1 nebo —1, je dělitelné některým prvočíslem". Odvodili jsme tedy z věty (1) a negace výroku **A** negaci věty (2). Z toho usoudíme (toto je právě nepřímý úsudek), že výrok **A** je správný.

Jak jsme již řekli, zní nepřímý úsudek ve svém nejjednodušším tvaru takto: z non **B** lze odvodit non **A**; tedy naopak **B** je důsledkem **A**. Jiná, užší formulace je tato: z non **B** vyplývá nesprávný výrok; tedy výrok **B** je správný. V obecnějším případě, kdy máme několik premis (tak v právě uvedeném příkladě) má nepřímý úsudek tento tvar: z non **B**, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . ., $\mathbf{A}_n$ lze odvodit non **A**; tedy naopak **B** je důsledkem **A**, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . ., $\mathbf{A}_n$.

Je zřejmé, že nepřímý úsudek má komplikovanější ráz než úsudky přímé; jsou proti němu také jiné námitky, jimiž se budeme ihned zabývat, takže vzniká otázka, můžeme-li se tomuto úsudku vyhnout. Lze ukázat, že to je možné. Každé odvození je totiž řetězem úsudků; nepřímý úsudek je pak inversí (obrácením) přímého odvození. Můžeme tedy zřejmě vždy nahradit nepřímý úsudek řetězem inversí přímých úsudků. To znamená, že stačí přibrat k základním typům přímých úsudků, které jsme uvedli (implikační úsudek, sylogismus, substituční a identifikační úsudek), jejich inverse — na příklad přímý existenční úsudek („a je P", tedy „existuje x, které je P"), který je inversí substitučního úsudku — abychom nemuseli používati nepřímého úsudku.

Obraťme se nyní k jednotlivým námitkám proti nepřímému důkazu.

Jedna námitka proti němu je tato: nepřímý důkaz (odvození) se nezdá tak přesvědčivým, jako odvození přímé, na příklad odvození skládající se z implikačních úsudků. Nepřímé odvození vzbuzuje totiž dojem, že, drasticky řečeno, jsme byli nuceni po ztroskotání jedné možnosti uchýlit se k druhé („buď **A** nebo non **A**; non **A** je nesprávné; tedy **A**"). Tato námitka má zřejmě psychologický, skoro „citový" ráz a postrádá logického významu.

Druhá námitka popírá platnost nepřímého úsudku v některých případech, na příklad popírá, že z nesprávnosti výroku „každé x je V" můžeme usoudit na výrok „některé x není V". Nesměřuje tedy vlastně proti nepřímému úsudku, nýbrž jen proti některým tautologicky platným ekvivalencím, — přesněji řečeno, proti ekvivalenci existenčního výroku a negace výroku obecného. Touto námitkou jsme se tedy již zabývali (viz str. 25).

Konečně, třetí námitka má metodologický ráz. Praví totiž, že při přímém odvození výroku z určitých premis víme, při kterém kroku musíme přibrat kterou premisu, a tak poznáváme jejich roli v důkazu a jejich vztah k závěru. Tím získáváme hlubší poznatky než při nepřímém důkazu, kdy odvozujeme negaci některé premisy z ostatních premis a negace závěru, a vůbec nepoznáváme přímo, jaký je význam jednotlivých premis pro závěr.

Tato námitka je nejzávažnější a je v podstatě správná. Naprosto se však netýká logické platnosti nepřímého odvození; říká pouze, že v některých případech nám poskytuje přímý důkaz více znalostí a spíše ulehčuje objevování a chápání nových důkazů a vět než důkaz nepřímý. Proto je dosti často s metodického hlediska výhodné nahradit nepřímý důkaz přímým. Nemělo by však žádný účel, abychom se vždy snažili vyhnout se nepřímému úsudku (ač v zásadě je to vždy možné); bylo by to prakticky nesnadné a mimo to nepřímé důkazy jsou většinou zcela přirozené a „názorné".

4·7. Formální a obsahová správnost výroků. V euklidovské geometrii roviny, t. j. obyčejné planimetrii, které se vyučuje ve škole, platí, jak známo, věta „součet úhlů libovolného trojúhelníka se rovná 180°". Existují však také, jak čtenář asi ví, různé neeuklidovské geometrie, tak na příklad tak zvaná hyperbolická geometrie roviny. Tato geometrie je založena na stejných axiomech jako euklidovská geometrie s tím jediným rozdílem, že tak zvaný euklidovský postulát (axiom) o rovnoběžkách „k dané přímce lze daným bodem vésti jedinou rovnoběžku" je nahrazen jiným axiomem, totiž „k dané přímce lze daným neležícím na ní bodem vésti aspoň dvě různé rovnoběžky". V této hyperbolické geometrii je výrok „součet úhlů libovolného trojúhelníka se rovná 180°" nesprávný (ba dokonce platí v této geometrii věta „součet úhlů každého trojúhleníka je menší 180°"). Zdá se tedy, že tentýž výrok může být správný (pravdivý) nebo nesprávný (nepravdivý) podle toho, jaké jsme zavedli axiomy a definice.

Ve skutečnosti se má věc takto: je jasné, že správnost nebo nesprávnost výroku závisí na definici termínů, které se v něm vyskytují, neboť jsou-li tyto definice různé, pak musíme považovat také výroky za různé a jen zdánlivě shodné. To však platí nejen o definicích, nýbrž také o axiomech, neboť je můžeme považovat za jakési nepřímé (implicitní) definice termínů, které se v nich vyskytují. V našem příkladě jde tedy v podstatě o dva různé výroky, čili jak se říká, jde o výroky ve dvou různých „řečech". — Abychom si lépe ujasnili tyto otázky, musíme nyní rozlišit mezi t. zv. „formální správností" výroků a jejich pravdivostí čili „obsahovou správností".

Správné výroky, které se vyskytují v nějakém matematickém oboru (na příklad v planimetrii) lze roztřídit na tyto skupiny: matematické *věty* v užším slova smyslu (na příklad „součet úhlů rovnoběžníka rovná se 360°"), *definice* (na příklad „dvě přímky jsou rovnoběžné, když se neprotínají") a *axiomy* (na příklad „dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod") ; k tomu přistupují ještě tautologicky platné věty, na příklad „libovolné dvě přímky buď se protínají nebo se neprotínají". Věty (teorémy) považujeme za správné proto, že jsou logicky dedukovány z výroků, které již byly uznány za správné. Naproti tomu správnost axiomů a definicí nespočívá na logické dedukci; tyto výroky jsou pro určitý matematický obor již *dány* jako správné. Totéž platí o základních tautologicky správných větách, jako na př. „$p \vee \sim p$", z nichž se pak logicky dedukují ostatní tautologicky správné věty. Takové výroky, jež jsou pro uvažovaný obor *dány* jako správné (tedy axiomy, definice a základní tautologicky správné věty) budeme souhrnně nazývat **základními větami.** — Poznamenáme ještě, že ve fysice počítáme mezi základní věty především t. zv. *protokolární věty*, t. j. výroky, které jsou bezprostředně založeny na zkušenosti, na příklad „tento list papíru je bílý", „ručička na ciferníku ukazuje teď nulu".

Za správné považujeme tedy jednak základní věty, jednak ty výroky, které se z nich dají *logicky dedukovat*. Smluvíme se nyní, že nadále budeme používat termínu „správný" jen v tomto smyslu. **Správným** („formálně správným") čili **platným** výrokem *určitého matematického oboru* nebo určité fysikální theorie a pod., budeme tedy nazývat výrok, který lze *logicky dedukovat ze základních vět tohoto oboru*; **nesprávným** nazýváme výrok, jehož negace je správná. Naproti tomu **pravdivým** („obsahově správným") budeme nazývat výrok, jehož obsah odpovídá skutečnosti; pravdivé jsou tedy na příklad protokolární věty. — Mluvit o správnosti výroku můžeme tedy vždy pouze vzhledem k určitému systému základních vět.

Je zřejmé, že správný („formálně správný") výrok může být nepravdivý a naopak; tak může být nepravdivým správný výrok nějaké fysikální theorie, t. j. výrok, který můžeme logicky odvodit z jejích základních předpokladů; v takovém případě ovšem zavrhneme celou theorii jako odporující zkušenosti. Podrobněji se tím zabývat nemusíme, neboť matematika si všímá pouze správnosti výroků, t. j. otázky, zda lze určitý výrok odvodit z daného systému axiomů. Vztah axiomů ke skutečnosti, jakož i ten fakt, že axiomy vznikají abstrakcí ze zkušenosti, mají ovšem nesmírný význam, avšak netýkají se vlastní logické výstavby matematiky.

4·8. Logické zásady. Učebnice tradiční logiky uvádějí čtyři logické zásady: zásadu dostatečného důvodu, zásadu totožnosti, zásadu sporu a zásadu o vyloučeném třetím. Pro logickou dedukci mají význam dvě z těchto zásad, totiž zásada sporu, která říká, že nemůže být pravdivý výrok i jeho negace a zásada o vyloučeném třetím, která říká, že musí být pravdivý buď výrok nebo jeho negace. Takto formulovány, mluví tyto zásady o pravdivosti čili obsahové správnosti. Nás však v této knížce zajímá hlavně formální správnost výroků; ptáme se proto, platí-li též pro ni obdobné zásady.

Aplikujeme-li zásadu sporu na formální správnost výroků, pak tato zásada praví: není možné, aby dva odporující si výroky byly správné, t. j. daly se odvodit z téhož systému základních vět. To však je v podstatě jistý požadavek, který klademe na základní věty. Zásadu sporu musíme tedy interpretovat jako požadavek bezespornosti, kterému musí vyhovovat axiomy (viz odst. 8'6). Obdobně když aplikujeme na správnost výroků zásadu o vyloučeném třetím, pak tato zásada praví: buď výrok nebo jeho negace musí být správná; to znamená: ať je předložen jakýkoli výrok **A** (rozumí se, skládající se pouze z výrazů, které se vyskytují v axiomech a definicích uvažovaného oboru), lze vždy logicky dedukovat ze základních vět buď výrok **A** nebo jeho negaci. Zde máme zase jistý požadavek, totiž t. zv. požadavek úplnosti, který klademe na základní věty. Tento požadavek nemusí býti vždy splněn (tak nesplňuje jej systém axiomů, který dostaneme, když z axiomů euklidovské geometrie vypustíme postulát o rovnoběžkách; vrátíme se k tomu v 8. kapitole). Když pro určitý systém základních vět splněn není, pak ovšem některé výroky uvažovaného oboru nejsou ani správné ani nesprávné — jsou (vzhledem k danému systému základních vět) **nerozhodnutelné.**

Ani zásadu sporu ani zásadu o vyloučeném třetím nelze tedy přímo aplikovat na formální správnost výroků. Všimněme si nyní toho, jakou úlohu mají tyto zásady při dokazování výroků. Používáme jich v těchto dvou případech: (1) Zjistíme, že výrok **A** je správný a na základě toho usoudíme, že výrok non **A** je nesprávný; (2) zjistíme, že výrok non **A** je nesprávný a na základě toho usoudíme, že výrok **A** je správný. Pro účely logické dedukce úplně stačí, když se řídíme těmito pravidly; nemusíme se pak starat o zásadu sporu nebo zásadu vyloučeného třetího. — Shrneme nyní tato pravidla a pravidlo nepřímého úsudku (odst. **4'6**), jakož i uvedenou v odstavci **4'7** definici formální správnosti jako následující zásady logické dedukce: (1) výrok, který lze odvodit ze správných výroků, je správný; (2) výrok, jehož negace je správná, je nesprávný; (3) výrok, jehož negace je nesprávná, je správný; (4) výrok, z něhož lze odvodit nesprávný výrok, je nesprávný. Tyto zásady (první a druhou z nich lze považovat za definice správnosti a nesprávnosti, třetí a čtvrtá vyjadřují postup při nepřímém úsudku) spolu s úsudkovými schematy, které jsme uvedli v odstavcích 4·2 až 4·5, shrnují celý postup při logickém odvozování (důkaze) výroků.

5. DRUHY DŮKAZŮ

Nyní přistoupíme k otázkám, týkajícím se celkové stavby důkazů. Není ovšem možné probrat všechny druhy důkazů a všechny obraty, které se v nich mohou vyskytovat. Uvedeme však některé základní typy důkazů, které jsou důležité pro matematiku.

Důkazy se liší především podle druhu dokazovaného výroku, totiž podle toho, jde-li o výrok individuální, na příklad „$[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})]^3 = 1$", obecný, na příklad „libovolný trojúhelník má součet úhlů 180°", nebo existenční, na příklad „existuje funkce, která je všude spojitá, ale nemá nikde derivaci". Matematické věty mají zpravidla povahu obecných nebo existenčních výroků. Individuální věty vystupují v matematice většinou buď jako speciální případ obecné věty nebo jako jakási zkratka za obecný nebo existenční výrok. Tak výrok „číslo π je algebraické" je ekvivalentní s existenčním výrokem „existuje polynom, který má racionální koeficienty a jehož kořenem je číslo π".*) Při důkaze takové individuální věty jde pak vlastně o důkaz ekvivalentní obecné nebo existenční věty.

5'1. Individuální věty. Pokud jde o vlastní individuální věty, patří jejich důkazy mezi logicky nejjednodušší. Většinou spočívá celý důkaz v substitučním úsudku, jimž odvodíme individuální větu z věty obecné — tak na příklad větu „$3^2 - 1 = (3+1)(3-1)$" z věty „pro libovolné x je $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$". Speciálním případem individuálních vět jsou i n d i v i d u á l n í i d e n t i t y (slovem identita míníme zde výrok tvaru „. . . je totožné s . . ."), t. j. identity, které

*) Lze dokázat, že tento výrok je nesprávný. Číslo π algebraické n e n í.

neobsahují neurčité, na příklad $[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})]^3 = 1$. Důkazy takových identit se zpravidla skládají z identifikačních úsudků podle schematu „$A = B$, $B = C$; tedy $A = C$" a úsudků substitučních, t. j. dosazování do obecných identit. Jako příklad si může čtenář sám provést a rozebrat důkaz zmíněné identity. — Zcela obdobné jsou ostatně důkazy obecných identit, na příklad „$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$". Rozdíl je pouze v tom, že místo individuálních máme obecné výroky, takže identifikační úsudky mají zde tvar „pro každé x je $A(x) = B(x)$ a $B(x) = C(x)$; tedy pro každé x je $A(x) = C(x)$".

Obecný výrok lze dokazovat buď přímo nebo nepřímo; zvláštním typem přímého obecného důkazu je důkaz úplnou indukcí. Probereme tedy tři typy obecného důkazu: 1. přímý obecný důkaz, 2. obecný důkaz úplnou indukcí, 3. nepřímý obecný důkaz.

5·2. **Přímý obecný důkaz.** Začneme jednoduchým příkladem prvního typu důkazu. Dokazujeme větu „když (celé) číslo x není dělitelné 3, pak $x^2 - 1$ je dělitelné 3". Důkaz probíhá takto: „Nechť x není dělitelné 3; pctom buď $x - 1$ nebo $x + 1$ je dělitelné 3; tedy $x^2 - 1$ je dělitelné 3". Jiným příkladem může být zmíněný důkaz identity $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ nebo většina důkazů elementární geometrie.

Charakteristické pro tento typ obecného důkazu je to, že provádíme důkaz tak, jako by šlo o příklad důkazu individuálního výroku. Zvlášť zřetelné je to u důkazů z elementární geometrie. Tam vedeme zpravidla důkaz následujícím způsobem: Představujeme si zcela určitý individuální případ, znázorněný výkresem (tak při důkazu nějaké obecné věty o trojúhelníku si představujeme trojúhelník s určitými vlastnostmi, na příklad ostroúhlý) a provádíme důkaz pro tento případ, avšak tak, aby měl obecnou platnost. Takovému postupu se někdy říká **paradigmatický.** Po formální logické stránce je tento typ důkazu charakterisován tím, že generální důkaz je vlastně s c h e m a t e m; vhodným dosazením lze z něho dostat důkaz každého individuálního výroku, který je obsažen v dokazované obecné větě.

Tento typ důkazu, totiž **paradigmatický obecný důkaz,** lze považovat za základní druh obecného důkazu. Pro matematiku má však snad ještě větší význam obecný důkaz úplnou indukcí. Budeme se jím zabývat podrobněji.

5·3. Důkaz úplnou indukcí. Začneme jednoduchým příkladem. Dokazujeme větu: pro každé celé kladné n je číslo $n^5 - n$ dělitelné 5. Dokážeme nejdříve toto: když $m^5 - m$ je dělitelné 5, pak též $(m+1)^5 - (m+1)$ je dělitelné 5. Skutečně, číslo $(m+1)^5 - (m+1) = (m^5 + 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m + 1) - (m+1) = 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m + m^5 - m$ je dělitelné 5, kdykoli číslo $m^5 - m$ je dělitelné 5. Protože číslo $1^5 - 1 = 0$ je dělitelné 5, plyne z toho již naše věta.

Rozebereme nyní a schematisujeme tento důkaz. Za výrokový vzorec „$n^5 - n$ je dělitelné 5" zavedeme pro stručnost zkratku „n je P" a smluvíme se, že písmeno n bude v tomto odstavci nadále označovat p o u z e p ř i r o z e n á, t. j. c e l á k l a d n á č í s l a (řečeno logicky korektně: za neurčitou n smíme dosazovat pouze přirozená čísla). — Důkaz, který jsme uvedli, spočívá zřejmě v tom, že dokážeme výroky „pro každé n platí: když n je P, pak také $n+1$ je P" a „1 je P" a z nich pak ihned odvodíme — a v tomto úsudku právě spočívá jádro důkazu — výrok „každé n je P". Takový důkaz nazýváme právě d ů k a z e m ú p l n o u i n d u k c í. Jeho jádro — ú s u d e k podle p r i n c i p u ú p l n é i n d u k c e má toto schema:

pro každé n platí: když n je P, pak $n+1$ je P		premisy
1 je P		
tedy každé n je P		závěr

Zopakujeme si teď ještě jednou, v čem spočívá důkaz úplnou indukcí. Máme dokázat výrok „pro každé (přirozené) n platí $P(n)$" (zde je „$P(n)$" zkratka za jakýsi určitý výrokový vzorec). Neprovedeme to však bezprostředně, nýbrž dokážeme nejdříve výroky (**A**) „$P(1)$" a (**B**) „když $P(n)$, pak $P(n+1)$". Můžeme nyní odvodit z **A** a **B** řetezem implikačních a substitučních úsudků libovolný jednotlivý výrok $P(a)$ (s určitým celým kladným a), a sice takto:

	$P(1)$	
	když $P(1)$, pak $P(2)$	substitučním úsudkem z **B**
tedy	$P(2)$	implikačním úsudkem
	když $P(2)$, pak $P(3)$	substitučním úsudkem z **B**
tedy	$P(3)$	implikační úsudek
	atd.	

Můžeme jíti takto libovolně daleko, nedospějeme však tímto způsobem nikdy k obecné větě „pro každé n platí $P(n)$". To znamená, že princip úplné indukce se nedá redukovat na jiné obvyklé druhy úsudků, nýbrž v jistém smyslu shrnuje neomezený řetěz implikačních a substitučních úsudků.

Zde musíme vsunout jednu spíše terminologickou poznámku. Úplná indukce, o níž nyní mluvíme, nemá kromě názvu nic společného s indukcí, s níž se setkáváme v přírodních vědách.*) Abychom ukázali jejich rozdíl, stačí říci, že při „přírodovědecké" indukci vycházíme z řady jednotlivých individuálních výroků

*) To se zdá samozřejmé, avšak bohužel také některé učebnice logiky zaměňují tyto dva naprosto rozdílné pojmy.

(z jednotlivých pozorování) a dospíváme k obecné větě (hypothese), která však nemá povahu logického důsledku těchto výroků. Při matematické úplné indukci naproti tomu vycházíme ze dvou výroků: jednoho individuálního a jednoho obecného („když n je P, pak také $n+1$ je P) a docházíme k obecné větě, která je logickým důsledkem daných dvou výroků.

Vraťme se k našemu thematu. Proč jsme neuvedli úsudek podle principu úplné indukce současně se základními úsudky — implikačním, substitučním atd.? Proto, že zmíněné základní úsudky mají zcela obecný ráz a vyskytují se v jakémkoli oboru úvah. Naproti tomu úplná indukce je specifická pro matematiku — přesněji řečeno, pro přirozená čísla, která jsou základem matematiky.

Další otázka je tato: Lze princip úplné indukce dokázati, t. j. lze úsudek podle tohoto principu nahradit řetězem jiných úsudků? Jak jsme již řekli, nikoli, — pokud ovšem nezavedeme nějaký axiom rovnocenný s tímto principem. Princip úplné indukce vyjadřuje totiž určitou základní specifickou vlastnost přirozených čísel, takže se nedá rozložit v řetěz úsudků obecné povahy. Zavedeme-li však vhodný axiom, rovnocenný s tímto principem, na příklad „když (1) 1 má vlastnost P, (2) má-li n vlastnost P, pak ji má též $n+1$, potom každé n má vlastnost P", pak ovšem vystačíme za použití tohoto axiomu s implikačním a substitučním úsudkem. Je však jasné, že zde jde jen o ryze formální a v podstatě bezvýznamný rozdíl mezi zavedením nového axiomu a nového úsudkového schematu.

Princip úplné indukce můžeme také obejít a nahradit nepřímým důkazem. Ukáže se ovšem, že při tom zase používáme jisté zásady (axiomu), která je rovnocenná s principem úplné indukce.

Máme z výroků (**A**) „1 je P", (**B**) „když n je P, pak též $n+1$ je P" odvodit výrok (**C**) „každé n je P" (n je při tom ovšem podle naší úmluvy přirozené číslo). Provedeme to, jak jsme řekli, nepřímým způsobem: z **A**, **B** a negace **C** odvodíme spor. Negaci **C** můžeme nahradit ekvivalentním výrokem „některé n není P". Z toho pak plyne: existuje n e j m e n š í n, které není P. Potom však buď toto nejmenší n se rovná 1, nebo číslo $n - 1$ má vlastnost P. První možnost je však ve sporu s výrokem **A**, a druhá zase vede ke sporu s výrokem **B**. Tím je podle zásady nepřímého důkazu dokázán výrok **C**. Rozebereme-li tuto úvahu podrobně, pak vidíme, že spočívá na dvou principech (axiomech), které jsou oba dohromady rovnocenné s principem úplné indukce. Jsou to tyto axiomy: 1. Když některé přirozené číslo n má vlastnost P, pak existuje n e j m e n š í přirozené číslo, které má tuto vlastnost. 2. Když není $n = 1$, pak existuje m tak, že $n = m+1$ (t. j. že n bezprostředně následuje po m). Axiomatickou výstavbu theorie přirozených čísel můžeme založit také na těchto axiomech, které rovněž úplně charakterisují způsob, jakým jsou uspořádána přirozená čísla.

5·4. **Nepřímý obecný důkaz.** Při nepřímém důkazu obecné věty vycházíme z její negace, odvodíme z ní spor a na základě toho pak usoudíme, že věta je správná. Uveďme p ř í k l a d. Máme dokázat, že číslo $\sqrt{2}$ není racionální. Tento individuální výrok je podle definice racionálního čísla ekvivalentní s výrokem „neexistují celá čísla m, n taková, aby $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$", jenž je zase ekvivalentní s obecným výrokem „pro žádná celá čísla m a n neplatí $m^2 = 2n^2$ a současně $n \neq 0$". Chceme nyní dokázat tento výrok. Nepřímý důkaz provádíme takto: Předpokládáme naopak, že existují celá čísla m a n taková, že $n \neq 0$ a $m^2 = 2n^2$. Z toho se ihned odvodí, že existují celá čísla m, n taková, že $n \neq 0$, $m^2 = 2n^2$ a čísla m a n jsou navzájem nesoudělná. Avšak pro libovolná celá m, n platí: když $m^2 = 2n^2$, pak číslo m i číslo n je dělitelné 2, tedy čísla m a n nejsou nesoudělná (to je zřejmé, neboť m^2 a tedy též m je sudé, takže m^2 je dělitelné 4, tedy n^2 je sudé atd.). Tím jsme skutečně dospěli ke sporu, tedy podle zásady nepřímého důkazu je naše věta dokázána.

Schematisujeme nyní tento příklad. Jde v podstatě o důkaz výroku tvaru „žádné x nemá vlastnost V", kde x značí dvojice celých čísel m, n a V značí jejich vlastnost „n je různé od nuly a $m^2 = 2n^2$". Z negace tohoto výroku vyplývá tautologickou úpravou výrok „existuje x, které má vlastnost V". Z něho odvodíme výrok „existuje x, které má vlastnosti V a V_1" (kde V_1 značí vlastnost dvojice m, n: „m a n jsou nesoudělná čísla"). Tento výrok je však ve sporu s větou „žádné x, které má vlastnost V, nemá vlastnost V_1".

Nebudeme nyní rozebírat tento důkaz krok za krokem, nýbrž pouze vytkneme některé okolnosti, typické pro celkovou stavbu podobných důkazů. Abychom provedli nepřímý důkaz, t. j. vyvrátili výrok „některé x má vlastnost V", musíme zpravidla vyhledat nějakou vlastnost W, kterou má každé x a která je v rozporu s vlastností V. Někdy však musíme (jako v našem příkladě) postupovat jinak, totiž nejprve odvodit z výroku „některé x má vlastnost V" důsledek tvaru „některé x má vlastnosti V a V_1" (jde pak vlastně o e x i s t e n č n í důkaz, který vystupuje jako část nepřímého obecného důkazu) a pak ukázat, že vlastnosti V *a* V_1 jsou neslučitelné. — Zde vidíme, jak jsou navzájem spojeny různé typy důkazů a jak složité jsou s logického hlediska matematické důkazy, i když se zdají velmi jednoduché.

5'5. Existenční důkazy. Rozeznáváme tři druhy existenčních důkazů: konstruktivní důkaz, vlastní existenční důkaz a nepřímý existenční důkaz. Kromě toho zaujímá zvláštní postavení tak zvaný existenční důkaz úplnou indukcí, který je sice názorně dosti jednoduchý, ale po logické stránce značně komplikovaný.

Konstruktivní existenční důkaz spočívá v tom, že přímo **udáme** (sestrojíme) prvek, který má vlastnost, o níž nám jde. Tak na příklad provedeme důkaz věty „existuje číslo, které není racionální" tak, že dokážeme „číslo $\sqrt{2}$ není racionální".*) Obecně dokážeme větu „některé x je P" tak, že udáme (sestrojíme, konstruujeme) prvek a takový, že výrok „a je P" je pravdivý. Tento druh existenčního důkazu je považován za nejdokonalejší, a to jednak proto, že zřejmě dává více, než pouhý důkaz existence, jednak proto, že je současně důkazem existence v užším smyslu, totiž existence ve smyslu sestrojitelnosti (viz str. 26).

Dalším druhem existenčního důkazu je existenční důkaz v užším slova smyslu; odvozujeme existenční výrok z jiných existenčních vět, aniž bychom skutečně udali prvek, který má žádanou vlastnost. Tak můžeme na příklad odvodit existenční větu z jiné obecnější existenční věty; triviální příklad: odvodíme větu „existuje číslo, které není racionální" z věty „existuje číslo, které není algebraické". Existenční věty, které jsou při takovém důkazu premisami, mohou mít různou povahu: mohou to být existenční věty, které byly dokázány dříve, mohou to být také základní věty — definice, tautologické věty, axiomy. Seznámíme se později s jednou takovou velmi obecnou základní existenční větou, která má zásadní důležitost pro vyšší partie matematiky, totiž s axiomem výběru.

Konečně lze vést existenční důkaz také nepřímo, totiž tak, že odvodíme nesprávný výrok z negace exi-

*) Tento důkaz jsme provedli jako příklad v předešlém odstavci. Důkaz individuální věty „číslo $\sqrt{2}$ není racionální" je ovšem sám v podstatě nepřímým obecným důkazem. Zde vidíme zase předivo různých typů důkazů.

stenčního výroku, který chceme dokázat. Tak na příklad můžeme dokazovat výrok „existuje číslo, které není algebraické" také tak, že odvodíme spor z jeho negace, tedy z výroku „každé číslo je algebraické".

5·6. Existenční důkaz úplnou indukcí. Nechť máme sestrojit posloupnost čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takovou, aby (1) $a_1 = 1$; (2) $a_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n$ pro libovolné přirozené n. Můžeme ovšem v tomto případě takovou posloupnost ihned udat: je to posloupnost 1, 1, 2, 4, 8, ...; nás však zde zajímá s logického hlediska postup, při němž konstruujeme posloupnost člen po členu, neboť v složitějších případech můžeme použít pouze tohoto postupu.

Položíme $a_1 = 1$, dále položíme $a_2 = a_1 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2 = 2$, atd. Když jsme již stanovili čísla a_1, $a_2, \ldots, a_n$, položíme podle podmínky (2) $a_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n$. Když takto neomezeně pokračujeme dále, sestrojíme celou posloupnost. — Tak vyhlíží tento postup, když jej popíšeme „názorným" způsobem. Nyní jej musíme rozebrat a podepřít logicky korektním způsobem. Především je jasné, že jde v podstatě o důkaz existence posloupnosti s určitou vlastností. Podstatná je dále okolnost, že jde vždy o vlastnost určitého konečného úseku posloupnosti (v našem případě o splnění vztahu $a_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n$, resp. $a_1 = 1$) a že k úseku $a_1, \ldots, a_n$, který má tuto vlastnost, můžeme vždy připojit takový prvek a_{n+1}, že také úsek $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ má požadovanou vlastnost. Jsou-li tyto podmínky splněny, můžeme vždy konstruovat posloupnost, jejíž každý úsek má požadovanou vlastnost. — To, co jsme teď řekli, vyslovíme precisní formou jako princip existenčního důkazu (konstrukce) úplnou indukcí.

Nechť (1) pro každé (celé kladné) n platí: má-li konečná posloupnost o n členech $a_1, \ldots, a_n$

vlastnost V, pak existuje právě jeden prvek a_{n+1} takový, že také konečná posloupnost o $n+1$ členech $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ má vlastnost V; (2) existuje právě jeden prvek a_1 takový, že jednočlenná posloupnost a_1 má vlastnost V.

Potom existuje právě jedna nekonečná posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$, taková, že každý její úsek $a_1, \ldots, a_n$ má vlastnost V.

Na tomto principu je založena t. zv. konstrukce posloupnosti úplnou indukcí, jejíž příklad jsme uvedli. Nejde při tom o nový princip, který by stál vedle principu úplné indukce, nýbrž o jeho důsledek, tedy o větu theorie přirozených čísel. K tomu se však ještě vrátíme.

Místo principu, který jsme právě uvedli, se někdy užívá velmi podobného, avšak ve skutečnosti značně širšího principu, který již není důsledkem principu úplné indukce, nýbrž spočívá též na axiomu výběru (viz odst. 6·4). Tento rozšířený princip můžeme vyslovit takto:

Nechť (1) pro každé (celé kladné) n platí: má-li konečná posloupnost o n členech $a_1, \ldots, a_n$ vlastnost V, pak existuje prvek a_{n+1} takový, že také konečná posloupnost o $n+1$ členech $a_1, \ldots, a_{n+1}$ má vlastnost V; (2) existuje prvek a_1 takový, že jednočlenná posloupnost a_1 má vlastnost V.

Potom existuje nekonečná posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$, taková, že každý její úsek $a_1, \ldots, a_n$ má vlastnost V.

V tomto rozšířeném principu nepožadujeme již existenci právě jednoho prvku a_{n+1} k úseku $a_1, \ldots, a_n$ ani existenci právě jednoho prvku a_1, takže nedospíváme k jednoznačně určené posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$

V matematice (hlavně ovšem ve vyšších partiích) se běžně používá obou těchto principů. O skutečnou t. zv. logickou konstrukci (viz odst. 5·8) jde ovšem pouze při použití vlastního (užšího) principu existenčního důkazu úplnou indukcí.

Abychom ho mohli použít, musíme ovšem udat zcela určitý předpis pro konstrukci u r č i t é posloupnosti s požadovanou vlastností V (což znamená, že musíme najít nějakou vlastnost W, z níž vyplývá vlastnost V a na níž lze použít zmíněného užšího principu).

Vrátíme se nyní k odvození principu konstrukce úplnou indukcí; omezíme se však na pouhou skizzu odvození a nebudeme dbát některých logických fines.

Buď $P(n)$ zkratka za výrokový vzorec „existuje právě jedna posloupnost o n členech, jejíž každý úsek má vlastnost V". Předpoklad (2) principu konstrukce úplnou indukcí znamená pak, že platí $P(1)$; z předpokladu (1) tohoto principu vyplývá: když platí $P(n)$, pak platí též $P(n+1)$. Z toho pak plyne podle principu úplné indukce, že $P(n)$ platí pro každé (rozumí se, celé kladné) n, t. j. že pro každé n existuje právě jedna posloupnost o n členech, jejíž každý úsek má vlastnost V. Nyní dokážeme toto: máme-li dvě takové posloupnosti, jednu o m, druhou o n členech, pak jedna z nich je úsekem druhé. To je názorně samozřejmé, neboť jedna vzniká z druhé připojením nových prvků, k logicky korektnímu důkazu potřebujeme však znovu princip úplné indukce. Víme teď, že na n-tém místě ve všech těchto posloupnostech (pokud ovšem mají aspoň n členů) stojí tentýž prvek. Můžeme tedy říci: tento prvek nechť stojí na n-tém místě v nekonečné posloupnosti, kterou máme konstruovat. Tím je tato posloupnost „konstruována" (t. j. je dokázáno, že existuje taková posloupnost a to jen jedna).

5·7. Jádro důkazu. Položme si nyní otázku, v čem spočívá „jádro" („vtip", „pointa") matematických důkazů. Co tím míníme, je jasné; kdo studoval poněkud složitější matematické důkazy, ten ví, že v nich bývá jeden nebo několik obratů, na nichž spočívá celý důkaz, jež jsou k němu „klíčem"; jakmile je známe, máme již celý důkaz v rukou.

Všimněme si nyní jako příkladu důkazu věty „počet prvočísel je nekonečný", s nímž jsme se již setkali. Důkaz probíhá takto: „Předpokládejme naopak, že počet prvočísel je konečný. Budiž pak P součin všech prvočísel. Potom číslo $P + 1$ není dělitelné žádným prvočíslem. To však je spor." Zde jsou podstatné tyto body: důkaz se provádí nepřímo; sestrojujeme číslo, které — za učiněných předpokladů — není dělitelné žádným prvočíslem. Při sestrojení takového čísla jde, jak vidíme při hlubším logickém rozboru, jednak o udání vlastnosti, kterou má mít sestrojované číslo, jednak o vlastní logickou konstrukci, t. j. určení (udání) — v obecném případě pak důkaz existence — čísla s touto vlastností. Když známe tyto tři body: důkaz se provádí nepřímo; má se sestrojit číslo, které není dělitelné žádným prvočíslem; takové číslo se sestrojí tak a tak, — pak známe již celý důkaz.

Připomeňme si dále důkazy z planimetrie. V těchto důkazech stačí zpravidla vědět, jaké pomocné prvky — body, přímky atd. máme sestrojit, aby důkaz již vyplynul skoro sám sebou.

Všimněme si zase jiné stránky věci. Dejme tomu, že studujeme nějakou složitou křivku, odvodili jsme si již řadu jejích vlastností a nyní chceme dokázat, že má jistou další vlastnost P. Zde bude velmi důležitá volba premis, t. j. bude důležité to, z jakých vlastností křivky budeme vycházet, abychom dokázali, že má vlastnost P. Víme-li, o jaké vlastnosti se může opírat vlastnost P, a jaké s ní zase nesouvisí, pak máme již v rukou aspoň zčásti klíč k důkazu.

Jak vidíme z těchto příkladů, bývá často jádrem a klíčem matematického důkazu jednak volba premis, z nichž při důkaze vycházíme, jednak volba metody důkazu (přímý důkaz nebo nepřímý atd.), především však logická konstrukce (udání nebo důkaz existence) vhodných nových prvků (matematických objektů). Je-li důkaz značně složitý, pak může také především záležet na volbě „etap" důkazu, t. j. volbě pomocných vět, které postupně dokazujeme.

Je však jasné, že volba premis a postupu důkazu není logickou součástí důkazu, nýbrž je zde jaksi před důkazem. Po ryze logické stránce spočívá tedy většinou jádro důkazu v logické konstrukci.

5·8. **Logická konstrukce.** Logickou konstrukcí rozumíme zavedení (udání nebo důkaz existence) určitého nového prvku s jistou předem danou vlastností. Musíme poznamenat, že konstrukcí v obvyklém názorném smyslu (geometrickou konstrukcí) se rozumí něco zcela odlišného od logické konstrukce. Při geometrické konstrukci jde totiž buď o skutečné „hmotné" sestrojení určitého geometrického prvku (bodu, přímky, křivky atd.) předepsaným způsobem — na příklad pomocí pravítka a kružítka — nebo o udání předpisu pro takové sestrojení.

Jak jsme již řekli, jde při logické konstrukci vždy o konstrukci prvku s určitou danou vlastností; jinak řečeno, konstrukcí odpovídáme na otázku „existuje prvek, který má vlastnost P, a když ano, který je to prvek?" Logická konstrukce spočívá tedy (1) v udání vlastnosti, kterou má mít konstruovaný prvek; (2) ve vlastní konstrukci. Vlastní konstrukce pak spočívá buď přímo v udání určitého prvku a důkazu, že má předepsanou vlastnost (je to pak vlastně t. zv. konstruktivní existenční důkaz) anebo v důkaze existence určitého prvku, který má tuto vlastnost.

Jak vidíme, je logická konstrukce vlastně důkazem existence. Rozdíl mezi oběma je v tom, že při vlastní logické konstrukci jde o důkaz existence jednoho a jen jednoho prvku, a že tento prvek pak vstupuje do úvah jako nový „objekt".

Probereme nyní jednotlivé typy konstrukce.

Přímá konstrukce spočívá v tom, že skutečně udáme prvek, který má žádanou vlastnost, t. j. — obrazně řečeno — na otázku „existuje prvek, který má vlastnost P, a který je to prvek?" odpovíme „a má vlastnost P". Provádíme tedy vlastně, jak jsme již řekli, konstruktivní existenční důkaz.

Příklad: Máme konstruovat číslo, které hoví rovnici $x^4 = -1$. Toto číslo přímo udáme: je to číslo

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Konstrukce existenčním důkazem. Když máme konstruovat prvek, který má vlastnost P, pak konstrukce spočívá v tom, že dokážeme: 1. existuje jeden a jen jeden prvek, který má vlastnost Q; 2. každý prvek, který má vlastnost Q, má také vlastnost P.

Příklad: Mohli bychom konstruovat číslo, které není algebraické také tímto způsobem: dokážeme, že číslo, které hoví určité rovnici $f(x) = 0$, nemůže být algebraické; pak dokážeme, že existuje jedno a jen jedno číslo, které je řešením této rovnice.

Logický rozdíl mezi tímto typem konstrukce a konstrukcí přímou je mimo jiné v tom, že zde konstruujeme skutečně „nový" prvek, který je charakterisován jen nepřímo jako jediný prvek, který má vlastnost Q; v jistém smyslu se tedy dá říci, že tento prvek je „vytvořen" teprve existenčním důkazem. Naproti tomu při přímé konstrukci dostane se konstruovaný prvek — řečeno poněkud obrazně — ze známých prvků známými operacemi.

Konstrukce existenčním důkazem má proto pro výstavbu matematiky velmi značný význam. Tak na příklad implicitně stanovená funkce nebo primitivní funkce k dané funkci jsou po logické stránce výsledky konstrukce tohoto typu. Zvlášť velký význam pak má konstrukce založená na existenčním důkaze úplnou indukcí, kterou konstruujeme posloupnosti.

Nevlastní konstrukce. Někdy se mluví o konstrukci také tehdy, když pouze dokazujeme „existuje x, které má vlastnost P". O skutečnou konstrukci zde nejde, protože nestanovíme žádný určitý, dokonale charakteriscvaný prvek, který by měl tuto vlastnost. S případy, kdy dovedeme provést jen takovou „nevlastní konstrukci", nikoli však konstrukci skutečnou, se často setkáváme ve vyšších partiích matematiky.

6. MNOŽINY A ZOBRAZENÍ

6·1. Pojem množiny. M n o ž i n a je souhrn určitých objektů, myšlený jako celek. Tyto objekty nazýváme **prvky** množiny. Příklady množin: (1) Množina všech tužek, které teď leží na mém stole; (2) množina všech obyvatel Velké Prahy (určitého dne); (3) množina všech prvočísel; (4) množina všech bodů určité paraboly; (5) množina všech spojitých funkcí jedné reálné proměnné.

Všimneme si nyní těchto příkladů podrobněji.

1. Množina všech tužek, které leží v daném okamžiku na mém stole, t. j. souhrn všech těchto tužek, myšlený jako celek, tedy jako jakýsi jediný nový objekt.

Prvky této množiny jsou jednotlivé tužky. Je jich ovšem konečný počet — dejme tomu, šest; řekneme pak, že množina tužek má šest prvků. Některé z těchto tužek jsou ořezané, — dejme tomu čtyři. Množina ořezaných tužek, ležících na mém stole, má tedy čtyři prvky. Je **částí** množiny všech tužek, ležících na mém stole. Říkáme totiž, že množina *A* je částí množiny *B*, když každý prvek množiny *A* je také prvkem množiny *B*.

Dejme však tomu, že by všechny tužky na mém stole byly ořezané. Mělo by pak smysl mluvit o množině neořezaných tužek, ležících na mém stole? Řekli jsme, že „množina je souhrn určitých objektů. . ." Zde však není žádný objekt uvažovaného druhu, takže by se vlastně nedalo mluvit o jejich souhrnu čili množině. Se zřetelem k takovým případům zavádíme ještě množinu **prázdnou,** která nemá žádný prvek. To, že na mém stole neleží žádná neořezaná tužka, dá se tedy říci také takto: množina neořezaných tužek, ležících na mém stole, je prázdná.

2. Množina všech obyvatel Velké Prahy (určitého dne) má rovněž konečný počet prvků, čili je **konečná.** Tím chceme říci, že její prvky (t. j. obyvatelé Prahy) se dají očíslovat celými kladnými čísly od 1 do určitého n.

3. Množina všech prvočísel je **nekonečná**, t. j. není možné očíslovat její prvky přirozenými čísly od 1 do určitého n. Je však **spočetná**, t. j. můžeme její prvky očíslovat pomocí všech přirozených čísel; můžeme to provést třeba tak, že seřadíme prvočísla podle velikosti a pak je po řadě očíslujeme.

4. Množina všech bodů určité paraboly. Je-li A ohnisko a p řídicí přímka této paraboly, pak je tato množina totožná s množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu A a přímky p. Tatáž množina může tedy být dána různým způsobem; považujeme však množiny za různé pouze tehdy, když se liší svými prvky. Jinak řečeno, množina je úplně určena svými prvky.

5. Množina všech spojitých funkcí jedné reálné proměnné. Jejími prvky jsou na příklad goniometrické funkce (sin, cos atd.). Je zřejmé, že tato množina je nekonečná; na rozdíl od množiny v příkladě 3. není však ani spočetná. Dá se totiž dokázat, že nelze očíslovat všechny její prvky pomocí přirozených čísel: ať předepíšeme jakýkoli způsob číslování, zbude nám na konec množství prvků, na které se nedostalo, třebaže jsme spotřebovali všechna přirozená čísla.

Setkali jsme se v uvedených příkladech s řadou nových termínů. Objasníme nyní přesněji jejich význam a pokud možno je definujeme.

Čemu říkáme množina je jasné z našeho vysvětlení (jež však nelze považovat za skutečnou definici): množina je souhrn určitých objektů (jež nazýváme jejími prvky), myšlený jako celek. Mezi množiny počítáme také prázdnou množinu, která nemá žádný prvek. Ježto množina je zcela určena svými prvky, je jen jediná prázdná množina; označíme $\emptyset$.

Z příkladů je též jasný smysl výroku „a je prvkem množiny A" (nebo — což je totéž — „a patří do A", „a leží v množině A"), za nějž si zavedeme zkratku $a \varepsilon A$. Musíme si jen dobře uvědomit, že zde nejde o nějaký „organický" vztah prvků k celku, nýbrž pouze o vztah prvku k libovolně vytvořenému souhrnu. Prvky množiny mohou být zcela různorodé. Drastický příklad: Množina, která má 3 prvky: (1) číslo 5; (2) král Václav IV.; (3) spojitá funkce $\sin^2 x$.

Vraťme se ještě k „definici" množiny: „Množina je souhrn určitých objektů..." Míníme tím toto: množina je dána tehdy, když je pro každý objekt určeno, zda je jejím prvkem či nikoliv. To neznamená, že bychom museli dovést skutečně rozhodnout o každém daném objektu, zda do množiny patří. (Příklad: Množina transcendentních čísel; nevíme, zda π^π je transcendentní nebo algebraické číslo.) Znamená to pouze, že množina je určena teprve tehdy, když se stanoví: patří k ní objekty, které mají tu a tu vlastnost, a žádné jiné objekty. Na druhé straně, množina je úplně určena svými prvky; to znamená: když každý prvek množiny A patří do množiny B, a také naopak každý prvek množiny B patří do množiny A, když tedy množiny A a B mají tytéž prvky — pak jsou totožné — je to tatáž množina, rozdíl je jenom v označení, případně v definici. Příklad: Množina všech řešení rovnice $\sin \frac{1}{2}\pi\,(x + 1) = 1$ a množina všech celých čísel dělitelných 4, jsou totožné.

Podle toho, co jsme řekli, stačí k určení (definici) nějaké množiny A říci: x patří do A, když a jen když má vlastnost P (na příklad: x patří do A, když a jen když x je celé číslo, dělitelné 4). Množinu, kterou takto určujeme, označíme

$$\underset{x}{E}\,[x \text{ má vlastnost } P].$$

P ř í k l a d y: (1) $\underset{x}{E}\,[x^2 + x - 2 = 0]$ je množina všech řešení rovnice $x^2 + x - 2 = 0$; má tedy dva prvky: 1 a -2; (2) $\underset{x}{E}\,[0 \leqq x \leqq 1]$ je množina všech bodů uzavřeného intervalu $<0, 1>$; (3) $\underset{x}{E}\,[2 < x < 1] = \emptyset$, neboť žádné číslo není větší než 2 a při tom menší než 1; (4) $\underset{n}{E}\,[n$ celé, $n > 4$, $2^{2^n} + 1$ je prvočíslo$]$; o této množině nevíme, zda je prázdná či nikoli.

Když každý prvek množiny A je také prvkem množiny B (jinak řečeno, když neexistuje žádný objekt, který by byl prvkem množiny A, ale nebyl při tom prvkem množiny B), říkáme, že množina A je **částí** čili **podmnožinou** množiny B a píšeme $A \subset B$ nebo $B \supset A$.

P ř í k l a d y: (1) Množina všech čísel, dělitelných 6, je částí množiny všech čísel dělitelných 3; (2) $\underset{x}{E}\,[0 \leqq x \leqq 1] \subset \underset{x}{E}\,[0 \leqq x^2 \leqq 1]$. Podle naší definice je prázdná množina částí každé množiny, a každá množina je částí sama sebe, t. j. pro každou množinu A je

$$\emptyset \subset A,$$

$$A \subset A.$$

Opakujeme ještě, jaké množiny nazýváme konečnými a jaké spočetnými. Říkáme, že množina je **konečná**, když má konečný počet prvků, t. j. když lze očíslovati její prvky přirozenými čísly od 1 do určitého n. Konečnou množinu, jež má prvky $a, b, \ldots, p$, budeme značit $\{a, b, \ldots, p\}$. Na příklad $\{1, 2, 3, 4\}$ je množina jež má za prvky čísla 1, 2, 3, 4 a žádná jiná. Prázdnou množinu počítáme rovněž mezi množiny konečné. Všechny ostatní množiny nazýváme **nekonečnými**.

Z nekonečných množin jsou „nejméně obsažné" spočetné množiny. Nazýváme množinu **spočetnou,** když je možno očíslovat všechny její prvky beze zbytku pomocí přirozených čísel — přesněji řečeno, když je možné udat předpis, podle kterého je každému přirozenému číslu přiřazen určitý prvek uvažované množiny, a sice tak, že jsou tím vyčerpány všechny její prvky (t. j. každý je přiřazen některému číslu). Uvedeme příklad: Uspořádáme všechna kladná racionální čísla následujícím způsobem: vyjádříme každé kladné racionální číslo jako podíl dvou nesoudělných kladných celých čísel (to je možné a při tom jediným způsobem), a potom je uspořádáme především podle velikosti součtu čitatele a jmenovatele a pak uvnitř takto vzniklých skupin (každá obsahuje konečný počet čísel) podle velikosti racionálního čísla samého. Vznikne následující uspořádání:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$$

Přiřadíme nyní každému přirozenému číslu n to racionální číslo, které stojí na n-tém místě. Každé racionální číslo je pak na základě tohoto předpisu přiřazeno některému přirozenému číslu. Tedy podle naší definice množina všech racionálních čísel je spočetná.

Množina je souhrn určitých prvků. Tyto prvky mohou být zase samy množinami. Zde jsou dva takové příklady: (1) Množina všech intervalů; (2) množina všech částí množiny $\{a, b\}$; jejími prvky jsou tyto množiny: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$. Takovým množinám, jejichž prvky jsou zase množiny, budeme říkat **systémy,** abychom se vyhnuli nejasným výrazům jako množina množin a pod. Tak místo o množině všech částí dané množiny mluvíme o systému všech částí množiny.

6'2. Množinové operace: spojení, průnik, rozdíl. Když vyjdeme ze dvou daných množin A a B, můžeme vytvořit různým způsobem nové množiny: 1. **Spojení**

množin A a B, jež značíme $A + B$; to je množina všech prvků, které patří buď do A nebo do B, případně také do obou; 2. **průnik** množin A a B, který značíme $A \cdot B$ nebo AB; to je množina všech prvků, které patří jak do A, tak do B; 3. **rozdíl** množin A a B, který značíme $A - B$; je to množina všech prvků, které patří do A, ale nepatří do B; obdobně označíme $B - A$ rozdíl množin B a A, t. j. množinu všech prvků, které patří do B, ale nepatří do A (množina $B - A$ je tedy zpravidla různá od $A - B$ a dokonce nemá s ní ani jeden společný prvek).

Uvedeme nyní příklady: 1. Budiž A množina všech obdélníků, B množina všech kosočtverců. Potom průnik $A \cdot B$ je množina všech čtverců, rozdíl $A - B$ je množina všech obdélníků, které nejsou současně čtverci, $B - A$ je množina všech kosočtverců, které nejsou současně čtverci. 2. Mám dva protínající se kruhy; množinu všech bodů prvního kruhu označíme A, množinu všech bodů druhého kruhu označíme B. Společná část obou kruhů představuje pak jejich průnik, zbytky kruhů představují rozdíly $A - B$ a $B - A$; spojení množin A a B je representováno plochou obou kruhů dohromady.

Může se stát, že průnik dvou množin je prázdný. Říkáme pak, že tyto množiny jsou **disjunktní.**

Příklad: Množina všech řešení rovnice $\cos x = 0$ a množina všech řešení rovnice $\sin x = 0$ mají prázdný průnik, čili jsou disjunktní, neboť žádné x není současně řešením obou rovnic.

Je zřejmé, co nazýváme spojení nebo průnikem jakéhokoliv konečného počtu množin. Tak spojení $A + B + C$ množin A, B, C je množina všech prvků, které patří aspoň do jedné z těchto množin. Lze však také definovat spojení a průnik nekonečného počtu množin.

Nechť je dán nějaký systém množin $\mathfrak{A}$ (předpokládáme, že není prázdný). Množinu všech prvků, které patří aspoň do jedné množiny systému $\mathfrak{A}$, nazveme **spojením**, množinu všech prvků, které patří do každé množiny tohoto systému, nazveme **průnikem** tohoto systému. Je zřejmé, že tato definice souhlasí s definicí spojení a průniku konečného počtu množin. Uvedeme nyní příklady: 1. Nechť A_n je množina všech spojitých funkcí f takových, že je stále $|f(x)| \leq n$, spojení těchto množin je pak množina všech omezených spojitých funkcí. 2. Nechť B_x, kde x probíhá všechna reálná čísla, je množina všech funkcí, definovaných na celé ose číselné a spojitých v bodě x. Potom průnik všech B_x je množina všech funkcí, které jsou všude spojité.

6·3. Množina a výrokový vzorec. Jak víme, stačí k definici množiny A říci: x patří do A, když a jen když x má vlastnost P. Podle toho odpovídá každé vlastnosti určitá množina (totiž množina všech objektů s touto vlastností). Podle odst. 2·1 (str. 16) můžeme však místo o vlastnosti mluvit o výrokovém vzorci; každému výrokovému vzorci odpovídá tedy určitá množina, totiž množina všech prvků, které **splňují** tento výrokový vzorec, t. j. prvků, jejichž dosazením*) za neurčitou vznikne správný výrok. Každému výrokovému vzorci odpovídá tedy určitá množina; ovšem tatáž množina může odpovídat různým výrokovým vzorcům. Tak výrokovým vzorcům (1) číslo x je celé; (1) $\sin \pi x = 0$ odpovídá tatáž množina, neboť každé x, které splňuje první vzorec, splňuje také druhý vzorec a naopak. Nastává to zřejmě v tom a jen v tom případě, že uvažované výrokové vzorce jsou ekvivalentní.

*) Chceme-li se vyjadřovat logicky správně, musíme ovšem mluvit o dosazení označení prvku, neboť na př. do výrokového vzorce „x leží na mém stole" dosazujeme za x slovo „tužka" a nikoli tužku.

Ekvivalenci výrokových vzorců odpovídá tedy totožnost příslušných množin. Obdobně si odpovídají také jiné vlastnosti výrokových vzorců a logické operace na jedné, a vlastnosti množin a množinové operace na druhé straně. Tak výrokový vzorec je splnitelný tehdy a jen tehdy, když příslušná množina je neprázdná. Konjunkci dvou výrokových vzorců odpovídá průnik příslušných množin; jejich disjunkci odpovídá spojení.

Vůbec, pokud jde o úvahy, v nichž je dovoleno nahradit každý výrokový vzorec kterýmkoliv vzorcem, který je s ním ekvivalentní, je lhostejné, zda budeme mluvit o výrokových vzorcích nebo o množinách. Každé vlastnosti výrokových vzorců odpovídá pak určitá vlastnost množin a naopak.

6'4. Princip výběru. Začneme zase příkladem. Položíme si otázku, zda existuje množina reálných čísel, která by měla tyto dvě vlastnosti: 1. Rozdíl libovolných dvou různých čísel, které do ní patří, je iracionální; 2. k libovolnému reálnému číslu x, které do ní nepatří, existuje číslo y z této množiny takové, že rozdíl $x - y$ je racionální číslo.

Tyto vlastnosti vypadají sice dosti podivně a komplikovaně, avšak takovou množinu skutečně potřebujeme v jednom oboru matematiky (v theorii míry).

Dokážeme nyní, že taková množina existuje. Pro každé reálné číslo z budiž A_z množina všech čísel $z + r$, kde r je racionální. Potom dvě množiny A_z a $A_{z'}$, jsou buď totožné (když $z - z'$ je racionální číslo) nebo disjunktní (když $z - z'$ je iracionální číslo). Zřejmě můžeme vybrat po jednom prvku z každé množiny A_z; přesněji řečeno, existuje množina, která má právě jeden společný prvek s každou množinou A_z. Nechť B je taková „výběrová" množina. Dokážeme, že množina B má požadované vlastnosti. Když $x \varepsilon B$, $y \varepsilon B$, $x \neq y$, pak číslo $x - y$ je iracionální, neboť jinak by bylo $x = y + (x - y) \varepsilon A_y$ a současně $y \varepsilon A_y$, tedy množina B by měla s A aspoň dva společné prvky. To však je spor. Dále, když z je nějaké reálné číslo, pak nechť x je jediný společný prvek množin B a A_y. Potom $x \varepsilon A_z$, tedy $x - z$ je racionální. Tím je důkaz proveden.

Všimněme si nyní jádra tohoto důkazu, které zřejmě spočívá v zavedení množiny B. Toto zavedení je zase založeno na předpokladu existence „výběrové množiny", t. j. množiny, která má právě jeden společný prvek s každou danou množinou A_z. Existenci takové množiny jsme nedokazovali, nýbrž prostě řekli, že je zřejmá, neboť se zdá vskutku naprosto samozřejmé, že si můžeme zvolit po jednom prvku v každé množině A_z.

O existenci podobné „výběrové množiny" se opírá řada důkazů, především ovšem v theorii množin, ale také v jiných oborech matematiky. Zásady existence takové množiny se dlouho užívalo, aniž by byla výslovně formulována; vlastně se ani neuvědomovalo, že zde jde o nějaký zvláštní princip — tak samozřejmou se zdá existence „výběrové množiny". Teprve později byla tato zásada formulována jako **princip (axiom) výběru:**

Ke každému (neprázdnému) systému navzájem disjunktních neprázdných množin existuje množina, která má právě jeden společný prvek s každou z těchto daných množin.

Všimněme si nyní některých otázek týkajících se principu výběru. Především je nutné říci, že princip výběru netvrdí, že se výběrová množina dá sestrojit, nýbrž pouze tvrdí, že existuje. Říká tedy jen toto: Není pravda, že by každá množina, která má aspoň jeden společný prvek s každou množinou daného systému (předpokládáme ovšem, že tyto množiny jsou navzájem disjunktní), musela nutně mít s některou z nich několik společných prvků. S intuicionistického hlediska (viz odst. 3·4) nemá tedy princip výběru vůbec smysl.

Další otázka je tato: proč se zdá princip výběru tak samozřejmý (aspoň na prvý pohled; uvažujeme-li o něm hlouběji, nemusí se vůbec zdát evidentní). Pokud jde o konečný systém množin, je princip výběru skutečně samozřejmý. Jde-li o konečný systém konečných množin, můžeme výběr skutečně provést, tedy sestrojit výběrovou množinu; jde-li o konečný systém nekonečných množin, pak můžeme aspoň bezvadně logicky dokázat existenci takové množiny. Když pak jde o nekonečný systém množin, považujeme princip výběru za samozřejmý prostě proto, že si myslíme neomezené pokračování výběru nebo existenčního důkazu, který se dá skutečně provést pro konečný systém; nedovedeme si představit žádný důvod, pro který by se toto pokračování muselo někde zastavit. Jinak řečeno, princip výběru se nám zdá evidentní proto, že je nám vlastní — třeba že si to neuvědomujeme — přesvědčení o možnosti takových aktů jako je současný výběr (volba) „representanta" v nekonečně mnoha množinách. Celá theorie množin — aspoň jak byla původně vybudována — spočívá vlastně na takovém přesvědčení. — Zabíháme zde však již do filosofických a psychologických otázek. Vraťme se nyní zase k theorii množin.

Naše úvahy o důvodech samozřejmosti principu výběru nebyly ovšem zdaleka ani nástinem důkazu. Klademe si nyní otázku: Dá se princip výběru vůbec dokázat, nebo jej máme považovat za nedokazatelný axiom theorie množin. Kdyby se dal dokázat, pak by byl obyčejnou větou, a naše úvahy o jeho samozřejmosti by byly zbytečné. Ukazuje se však, že skutečně musíme považovat tento princip za zvláštní axiom. Je sice možné dokázat princip výběru pro některé velmi speciální případy (na příklad když jde o systém množin přirozených čísel), selhávají však všechny pokusy dokázat jej obecně. Kdykoli byl takový důkaz zdánlivě proveden, ukázalo se, že spočívá na předpokladu, který již obsahoval tento princip. Na druhé straně, princip výběru vede sice často k důsledkům paradoxního rázu, nevedl však dosud nikdy ke sporu. Je proto, jak jsme řekli, považován za nezávislý axiom theorie množin. Má však při tom poněkud zvláštní postavení; tak je zvykem udávat, zda se v určitém důkaze použilo tohoto axiomu a kde, a podle možností se jemu vyhýbat.

Do podrobnějšího rozboru všech těchto otázek se zde nemůžeme pouštět. Spokojíme se s tím, co jsme řekli a poznamenáme ještě, že principu výběru se zřídka kdy užívá v obvyklých partiích matematiky, které jsou nutné pro aplikace, naproti tomu však je nezbytný pro vybudování theorie množin a založených na ní abstraktnějších oborů matematiky.

6·5. Antinomie theorie množin. Nedefinovali jsme vlastně vůbec, co nazýváme množinou, a naše tak zvaná definice „množina je souhrn určitých věcí . . ." je velmi neurčitá. Dá se proto očekávat, že se vyskytnou množiny s překvapujícími a paradoxními vlastnostmi. Ukazuje se dokonce, že neomezená volnost v tvoření množin podle naší „definice" vede nakonec ke sporům.

Uvedeme nyní dva příklady:

1. Všimněme si množiny (označíme ji třeba A) všech přirozených čísel, která se dají definovat tak, že užíváme pouze známých českých slov a při tom použijeme nejvýše 1000 písmen. Do této množiny patří na příklad čísla 1, 2, 3, 1 000 000, 9^9, $(9^9)!$, neboť se dají zřejmě definovat tímto způsobem (na příklad „součin všech celých čísel od jedné do devíti na devátou").

Je zřejmé, že naše množina A obsahuje pouze konečný počet čísel, neboť s použitím nejvýše 1000 písmen můžeme vytvořit vůbec pouze konečný počet definicí. Ježto je konečná, existuje nejmenší přirozené číslo (označíme je třeba m), které do ni nepatří. Toto číslo lze však zřejmě definovat také takto: „nejmenší číslo, které se nedá definovat tak, že užíváme pouze známých českých slov a při tom použijeme nejvýše tisíce písmen". Zde již máme spor. Podařilo se nám totiž právě definovat číslo m tak, že jsme užívali pouze známých českých slov a při tom použili méně než 1000 písmen. To právě znamená, že číslo m patří do množiny A; je však definováno jako nejmenší číslo, které tam nepatří.

2. Může být množina prvkem sama sebe, může tedy někdy platit $A \varepsilon A$? Se žádnou takovou množinou jsme se dosud nesetkali, nemůžeme však tuto možnost předem vyloučit.

Budiž nyní N množina všech „normálních" množin, t. j. všech množin, které nejsou prvky sama sebe. Do N patří všechny množiny, s nimiž jsme se dosud setkali: zda jsou nějaké množiny, které by nepatřily do N, ještě nevíme.

Ptáme se nyní: Je množina N sama „normální", — jinak řečeno, je N non εN nebo $N \varepsilon N$? Uvidíme teď, že obě možnosti vedou ke sporu. Když totiž předpokládáme, že N non εN, pak to znamená, že N je „normální", tedy podle definice množiny N (A patří do N, když A non εA) je $N \varepsilon N$, což je spor s předokladem. Když naopak předpokládáme, že $N \varepsilon N$, pak to znamená, že N není „normální", tedy podle definice množiny N platí N non εN, což je zase spor.

Máme zde dva příklady množin, jejichž zavedením dospíváme nutně k logickému sporu, a mohli bychom uvést celou řadu podobných příkladů. Skutečnost, že při neomezené volnosti v tvoření množin se mohou vyskytnout takové případy, vede k revisi theorie množin a v důsledku toho také k revisi tradiční „naivní" logiky. Je totiž nutné korigovat pojem množiny tak, aby se vyloučily všechny „sporné" množiny; ježto však ke zcela obdobným sporům mohou vést — jak uvidíme dále — také obvyklé logické pojmy (pojem vlastnosti a pod.), je nutná také revise logiky. — Tímto okruhem problémů se zde nemůžeme zabývat; odpovíme jenom na některé otázky, které se asi samy vnucují čtenáři.

1. Jaká je „příčina" zmíněných sporů — řečeno poněkud přesněji, čím se vyznačují podobné „sporné" množiny?

Ve dvou příkladech, které jsme uvedli, a také v jiných podobných případech obsahuje „definice" uvažované množiny jakýsi logický kruh; to je právě charakteristické pro takové „sporné" množiny.

Tento kruh spočívá, jak se čtenář může přesvědčit na našich příkladech, zhruba řečeno v tomto: Abychom zjistili, zda určitý prvek a patří do takové „sporné" množiny, musíme nejdříve vědět, jaké prvky tato množina obsahuje, tedy mimo jiné, zda obsahuje tento prvek a.

2. Je theorie množin „odpovědná" za tyto spory, t. j. vyskytují se podobné spory pouze v theorii množin anebo také tehdy, když užíváme pouze tradičních pojmů, jako vlastnost a pod.?

Odpověď je vlastně jasná a vyplývá již z toho, že můžeme (viz odstavec 6·1) vždy mluvit o vlastnosti místo o množině a naopak.

Uvedeme příklad vlastnosti, která odpovídá „sporné" množině „normálních" množin. Budeme říkat, že nějaká vlastnost je i m p r e d i k a b i l n í, když se nevztahuje sama na sebe. Tak na příklad vlastnost „abstraktní" není impredikabilní, neboť je sama abstraktní, kdežto vlastnost „červený" je impredikabilní, protože sama není červená. Ptáme se nyní, je-li vlastnost „impredikabilní" sama impredikabilní. Předpokládejme, že jest; pak se vztahuje sama na sebe, tedy není impredikabilní. Předpokládejme tedy, že impredikabilní není; pak se nevztahuje sama na sebe, tedy jest impredikabilní. Tak nebo tak, dospíváme vždy nutně ke sporu.

3. Jakým způsobem se dají vyloučit „sporné" množiny a jaké důsledky to má?

Nejdříve musíme odpovědět na případnou námitku: jak můžeme vylučovat nějaké množiny jen proto, že se nám nehodí? — Ve skutečnosti vylučujeme pouze n e k o r e k t n í d e f i n i c e, lépe řečeno „pseudo-definice", které nic nedefinují, neboť samy obsahují spor. Takové pseudo-definice jsou definice množin v obou našich příkladech z tohoto odstavce, jakož i definice vlastnosti „impredikabilní".

Jak tedy můžeme vyloučit takové pseudo-definice? Jsou zde dvě cesty. Především lze vybudovat theorii množin axiomaticky, právě tak, jako kterýkoliv matematický obor, na příklad elementární geometrii. Vyloučíme tím „sporné" množiny, avšak — jak se ukázalo, když taková axiomatická výstavba byla skutečně provedena — spolu s nimi musíme vyloučit také některé nezávadné množiny. Mimo to nejsou tímto postupem dotčeny „sporné" vlastnosti jako „impredikabilní" a pod.

Zásadně se odstraní podobné spory teprve revisí tradiční logiky. Tato revise spočívá mimo jiné v tom, že se některé zdánlivě korektní výroky prohlásí za nepřípustné, t. j. nemající smysl; spadají mezi ně na příklad výroky, ve kterých je nějaká vlastnost vztahována na sebe samu. „Definice" impredikability nemá potom vůbec smyslu a všechny analogické spory a paradoxy odpadnou.

Obrátíme se nyní k pojmům r e l a c e (vztahu), f u n k c e (obecněji zobrazení) a p r o m ě n n é. Nejdříve si zavedeme jeden velmi důležitý pomocný pojem.

6'6. Kartézský součin. Nechť jsou dány množiny A a B. Množinu všech dvojic (a, b), kde a je prvek množiny A, b je prvek množiny B, nazveme **kartézským součinem** množin A a B a označíme $A \times B$. Při tom u dvojic záleží na pořadí, takže (a, b) a (b, a) jsou různé dvojice, oba členy dvojice mohou však být totožné, t. j. (a, a) považujeme rovněž za dvojici, při čemž ovšem (a, a) leží v $A \times B$ tehdy a jen tehdy, když $a \varepsilon A$, a $a \varepsilon B$.

Příklady kartézského součinu: 1. Nechť A má dva prvky: a_1, a_2, B má rovněž 2 prvky: b_1, b_2. Potom $A \times B$ má čtyři prvky: (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2). Kartézský součin $A \times A$ má rovněž čtyři prvky: (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2).

2. Budiž E množina všech reálných čísel. Pak $E \times E$ je množina všech dvojic reálných čísel. Ježto každý bod roviny je určen dvojicí reálných čísel (totiž svými kartézskými souřadnicemi) a obráceně každá dvojice reálných čísel určuje bod roviny, můžeme interpretovat $E \times E$ jako rovinu a považovat rovinu za kartézský součin přímka $\times$ přímka.

Podobně jako kartézský součin dvou množin, lze definovat také kartézský součin libovolného konečného počtu množin. Tak $A \times B \times C$ je kartézský součin množin A, B, C, t. j. množina všech trojic (a, b, c), kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, $c \varepsilon C$. Obdobně jako jsme interpretovali rovinu, můžeme také interpretovat obvyklý trojrozměrný prostor jako kartézský součin — přímka $\times$ $\times$ přímka $\times$ přímka.

6'7. Relace. Nechť je dán určitý vztah mezi prvky množin A a B. (Příklad: $A = B$ je množina reálných čísel; jde o vztah „... větší, než ...", t. j. vztah $x > y$.) To znamená: je dán určitý vztah, který má smysl (je definován) pro libovolné prvky $x \varepsilon A$, $y \varepsilon B$; splněn může být pro všechny, pro některé nebo pro žádnou dvojici x, y. Potom množina všech dvojic (a, b), kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, takových, že a a b jsou v uvažovaném vztahu, je částí kartézského součinu $A \times B$. Naopak, je-li dána množina $M \subset A \times B$, je tím dán vztah mezi prvky množin A a B; totiž vztah $(x, y) \varepsilon M$. Každému vztahu mezi prvky dvou množin je tedy přiřazena část jejich kartézského součinu a naopak.

P ř í k l a d y: 1. Vztah $x^2 < y$ (za x a y se dosazují reálná čísla). Odpovídá mu, interpretujeme-li čísla jako body roviny, vnitřek jisté paraboly. 2. Vztah $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Tento vztah je splněn pro libovolná reálná čísla x, y. Příslušná množina je tedy totožná s celou rovinou. 3. Vztah $x^2 + y^2 < 2xy$ (za x a y se dosazují reálná čísla). Příslušná množina je zřejmě prázdná.

V odstavci 2'1 (str. 16) jsme řekli, že každý vztah je vyjádřen výrokovým vzorcem (s několika neurčitými), na příklad vztah „>" je vyjádřen výrokovým vzorcem „x je větší než y". Je však zřejmé, že tentýž vztah může být vyjádřen různými výrokovými vzorci. Tak vztah „větší" je vyjádřen také výrokovými vzorci „$x - y > 0$", „$2^x > 2^y$" atd., jež jsou ovšem všechny navzájem ekvivalentní. Ovšem, nebylo dosud řečeno, čemu vlastně říkáme „vztah", takže není ani jasné, co znamená „tentýž vztah". Nyní však již můžeme definovat termín „vztah" na základě pojmu množiny a kartézského součinu, a to tak, že nebude záležet na tom, jakým výrokovým vzorcem je vyjádřen, nýbrž jen na tom, které prvky jsou v daném vztahu.

Řekli jsme totiž, že každému vztahu mezi prvky množin A a B odpovídá vzájemně jednoznačně určitá množina dvojic (a, b), kde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$. Nyní však přímo definujeme: V z t a h (relace) m e z i p r v k y m n o ž i n A a B je u r č i t á m n o ž i n a d v o j i c (a, b), k d e $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$. Dva vztahy považujeme podle toho za totožné, když jsou totožné jako množiny. Touto definicí nezavádíme ovšem nic podstatně nového, redukujeme však pojem vztahu na jednodušší pojem množiny.

6·8. Zobrazení a funkce. Když každé hodnotě veličiny x odpovídá určitá hodnota veličiny y, pak říkáme, že y je funkcí x. Touto „definicí" je dobře vystižena podstata funkce (obecněji zobrazení) — totiž to, že přiřazujeme každému prvku jedné množiny určitý prvek druhé množiny. Při tom jde o čistě logické přiřazení podle předem daného pevného, jinak však libovolného předpisu; není vůbec nutné, aby se zobrazení dalo vyjádřit nějak „přirozeně". Tak není nutné, aby se funkce dala vyjádřit pomocí základních aritmetických operací a případně limitního přechodu; stačí, aby byl dán předpis, podle kterého je každému číslu přiřazeno určité číslo. Můžeme tedy říci: jsou-li dány množiny A a B a předpis, podle kterého je každému prvku množiny A přiřazen j e d e n u r č i t ý p r v e k množiny B, pak je tím dáno **zobrazení množiny A do množiny B.** Prvek množiny B, který je při tom přiřazen prvku $x \varepsilon A$, nazýváme **obrazem** prvku x. Ve speciálním případě, když B se skládá z reálných, resp. komplexních čísel, mluvíme místo o zobrazení o **funkci** (reálné případně komplexní).

Zobrazení můžeme zřejmě považovat za zvláštní případ vztahu. Je-li totiž dáno určité zobrazení, pak je tím dán také vztah „y je obrazem x". Je-li naopak dán vztah R takový, že ke každému $x \varepsilon A$ existuje p r á v ě j e d n o $y \varepsilon B$, které je k němu v relaci R, pak je tím dáno určité zobrazení — totiž zobrazení, které přiřazuje každému x právě toto jediné y.

Tato okolnost vede přímo k definici zobrazení jako určité podmnožiny kartézského součinu. Definujeme totiž: **zobrazení** množiny A do množiny B je část F kartézského součinu $A \times B$ taková, že ke každému $x \varepsilon A$ existuje p r á v ě j e d n o $y \varepsilon B$, pro něž $(x, y) \varepsilon F$. Podle této definice budeme tedy nazývat zobrazením (příp. funkcí) právě to, čemu se v případě reálné funkce říká g r a f f u n k c e.

Uveďme dva příklady: 1. Nechť A je množina reálných čísel, F je zobrazení A do A (t. j. reálná funkce) a obrazem $F(x)$ čísla x je jeho čtverec x^2. Pak podle nové definice F je množina bodů se souřadnicemi x, x^2. 2. F je zobrazení množiny $\{a, b\}$ do množiny $\{c, d\}$; obrazem prvku a je c, obrazem prvku b je d. Pak F je množina $\{(a, c), (b, d)\}$.

Opakujeme ještě stručně: funkce je speciální případ zobrazení. Zobrazení je — řečeno nepřesně — předpis, kterým je každému prvku z množiny A přiřazen prvek z množiny B. Řečeno přesněji, zobrazení je množina dvojic (prvek; přiřažený jemu prvek).

6.9. Proměnné veličiny. V matematice a fysice mluvíme často o proměnných veličinách. Příklad: Teplota je v uvažovaném tělese proměnnou veličinou. Znamená to zde toto: v každém bodě tělesa je v každém okamžiku zcela určitá teplota (jež však je obecně různá pro různé body a okamžiky). Když mluvíme o **proměnné veličině**, myslíme tím právě souhrn uvažovaných bodů a okamžiků s příslušnými k nim hodnotami. Podle toho je tedy proměnná veličina speciálním případem zobrazení: každému prvku určité základní množiny (v našem příkladě bodům v prostoru a čase) je přiřazeno číslo (v našem příkladě teplota v tomto bodě), případně skupina čísel, vektor a pod. Další dva příklady: 1. Potenciál (v dané oblasti) je proměnnou veličinou. To znamená: v každém bodě má potenciál určitou hodnotu (obecně od bodu k bodu různou). 2. Obsah průmětu trojúhelníku o dané délce stran na danou rovinu je proměnný. To znamená: pro každou polohu trojúhelníka má průmět určitý obsah. Totéž můžeme říci jinými slovy ještě takto: obsah průmětu trojúhelníku s danými stranami je funkcí jeho polohy.

Speciálním mezním případem proměnné veličiny je konstanta, tedy proměnná veličina, jež má všude stejnou hodnotu. Na příklad podíl obvodu a poloměru kruhu je konstanta, t. j. má určitou hodnotu pro každý kruh a při tom je to hodnota pro všechny kruhy tatáž.

V matematice se o proměnných mluví v různém smyslu. Tak na příklad, když mluvíme o „funkci dvou proměnných" nebo o „funkci komplexní proměnné", pak jde jednoduše o funkci, která přiřazuje určité číslo každé dvojici čísel (z určité množiny), resp. každému komplexnímu číslu (z určité množiny). V tomto případě nejde o žádné proměnné v tom smyslu, jak jsme si je právě charakterisovali. Jiný případ máme, když říkáme „na ploše P je proměnná z funkcí proměnných x a y". Zde jsou x, y, z souřadnice bodu v prostoru (v určitém souřadnicovém systému). Jsou to tedy skutečně proměnné, t. j. funkce, které přiřazují určité číslo (zde souřadnici), každému prvku základní množiny — zde každému bodu prostoru. Když říkáme „na ploše P je proměnná z funkcí proměnných x a y", pak to znamená toto: existuje „funkce dvou proměnných", t. j. funkce, definovaná pro dvojice čísel — označíme ji f — tak, že pro libovolný bod A plochy P je $z(A) = f[x(A), y(A)]$; $x(A)$, $y(A)$, $z(A)$ značí zde souřadnice bodu A — jinak řečeno, hodnoty proměnných x, y, z v bodě A.

Připomínáme ještě, že mezi **proměnnou a neurčitou,** tak jak jsme si je zavedli (sr. odst. 2·1), je zásadní logický rozdíl.

„Proměnnou" jsme si zavedli jako zvláštní případ zobrazení; je to tedy čistě matematický pojem. Naproti tomu „neurčitá" je pojem z logiky, totiž z t. zv. theorie řeči (logické) a znamená značku, za níž se mohou podle určitých pravidel dosazovat jiné značky (v. odst. 2·2). Rozlišování těchto termínů se sice nedodržuje (v logice i v matematice se mluví o proměnné), pojmy jsou však podstatně různé.

7. DEFINICE

7·1. Co je to definice. Termín (výraz, pojem) je definován, když je stanoven jeho význam. To je sice jasné, musíme však říci přesně, co to znamená „stanovit význam".

Můžeme říci, že známe význam nějakého výrazu, když známe význam každého výroku, ve kterém se tento výraz vyskytuje, t. j. když dovedeme každý takový výrok převést na ekvivalentní výrok, ve kterém již není uvažovaný výraz obsažen. Tak význam výrazu „rovnoběžný" je v geometrii roviny určen definicí „přímky, které nemají žádný společný bod, nazýváme rovnoběžnými", neboť na základě této definice můžeme všude nahradit výraz „rovnoběžný", výrazem „... které nemají žádný společný bod". Můžeme tedy říci krátce: definice je výrok, kterým je úplně určen význam definovaného výrazu. Řečeno podrobněji a přesněji, definice výrazu je výrok, na jehož základě můžeme převést libovolný předložený výrok, který obsahuje tento výraz, na ekvivalentní výrok, který jej již neobsahuje.

Definice je tedy charakterisována pouze svou logickou funkcí (úkolem) — totiž tím, že umožňuje eliminaci definovaného výrazu. Není však vůbec předepsáno, jaký logický tvar má definice mít. Tak není naprosto nutné, aby definice byla utvořena podle známého pravidla „definitio fit per genus proximum et differentiam specificam", t. j. pomocí pojmu nejblíže nadřaděného a druhového rozdílu. Ostatně často není vůbec možné uvést definici na tento tvar.

Tentýž termín lze definovat různým způsobem, neboť smíme považovat za definici termínu každý výrok, který umožňuje jeho eliminaci. Tak na příklad každý z následujících výroků můžeme zvolit (v planimetrii) za definici výrazu „přímky jsou rovnoběžné": 1. dvě přímky jsou rovnoběžné tehdy a jen tehdy, když nemají žádný společný bod; 2. dvě přímky nazýváme rovnoběžnými, když mají společnou kolmici; 3. dvě přímky jsou rovnoběžné tehdy a jen tehdy, když se dotýkají aspoň tří kružnic o stejném poloměru. Tyto výroky jsou navzájem ekvivalentní; jakmile zvolíme jeden z nich za definici, stanou se ostatní dva dokazatelnými větami. O tom, který z nich skutečně zvolíme za definici, rozhodují pouze metodická hlediska — jednoduchost, názornost atd. Zde bychom na příklad zvolili za definici první výrok, možná také druhý, ale jistě nikoliv třetí.

Než půjdeme dále, je nutná jedna poznámka, týkající se slovního tvaru definice.

Definice se vyslovuje obvykle asi tímto způsobem: „Nazveme funkci spojitou, když... (má ty a ty vlastnosti)". Kdybychom chtěli vyslovit tuto definici zcela korektním způsobem, museli bychom říci „funkce je spojitá, když a jen když..." Je však zvykem říkat v definici místo „když a jen když" pouze „když"; zmíněné definici máme tedy — což je ostatně samozřejmé — rozumět tak, že funkce je spojitá, když má určité vlastnosti, ale také naopak, když tyto vlastnosti nemá, pak spojitá není. Kromě toho, v obvyklém tvaru definice se vyskytuje slovo „nazýváme" a pod. Tento výraz není ovšem logickou součástí definice, nýbrž má naznačovat, že nejde o dokázanou větu, nýbrž o zavedení a definici nového termínu.

Uvedeme nyní dva příklady definice: 1. Přímky, které nemají žádný společný bod, nazýváme rovnoběžnými; 2. existuje součet řady $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$; tento součet označíme e. Tyto příklady representují dva typy definic. V prvním příkladě zavádíme výraz „rovnoběžné" jako zkratku za výraz „... nemají žádný společný bod". V druhém případě předchází definici logická konstrukce, která zde spočívá v důkaze, že existuje právě jedno číslo, které je součtem řady $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$; vlastní definice pak spočívá v pojmenování tohoto čísla. Pro první typ definice je tedy charakteristické to, že definovaný výraz má ráz zkratky za určitý jiný výraz. Definici tohoto druhu můžeme nazvat **nominální.** Pro druhý typ definice je pak charakteristické to, že je těsně spojena s logickou konstrukcí; můžeme ji nazvat **konstruktivní.**

7'2. Úloha definicí v matematice. Když se ptáme, jaká je úloha definicí v matematice, pak si musíme všimnout dvou důležitých okolností: Za prvé, v zásadě by se dal každý matematický obor vybudovati bez definicí, tedy tak, že bychom užívali pouze základních termínů, které se vyskytují v axiomech. Můžeme totiž postupně eliminovat všechny definované termíny, až bychom nakonec převedli všechny matematické věty na věty, které obsahují pouze základní nedefinované pojmy (na příklad v geometrii výrazy „bod", „přímka", „leží na..." a pod.). Mohli bychom tímto způsobem třeba převést integrální a diferenciální počet na výroky o celých číslech a jejich vlastnostech. Dostali bychom ovšem takto nepředstavitelně složité výroky, s kterými bychom vůbec nedovedli operovat. — Za druhé, nové matematické objekty zavádíme logickou konstrukcí, t. j. buď přímým udáním, nebo důkazem existence; definice pak znamená vlastně jen pojmenování takového objektu.

Nyní již můžeme říci, jaký význam má v matematice definování nových termínů. Za prvé, definice nového termínu je nerozlučně spojena s logickou konstrukcí a doplňuje ji; když jsme totiž dokázali, že existuje jediný prvek s určitou vlastností (na příklad jediné číslo, které je součtem řady $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$), pak musíme mít pro tento prvek určité označení, chceme-li jej učinit samostatným předmětem zkoumání. To, že zavedeme a definujeme termín (název) pro nějaký matematický objekt, znamená zpravidla právě to, že se stává předmětem systematického studia. Z tohoto hlediska znamená definice v matematice často důležitý krok kupředu.

Za druhé, definice má často význam jako zkratka za složitý výraz. To se týká především pomocných definic, které zavádíme během důkazu.

7'3. **Nominální definice.** Přejdeme nyní k jednotlivým typům definice podle jejího logického tvaru. Probereme nejdříve definice, které mají nominální ráz, tedy definice takové, že definovaný termín je zkratkou za jiný složitější výraz.

1. Nejdříve příklad: „Označíme a spojnici bodů B a C". Zde definujeme označení „a" pomocí logické identity „$a = \ldots$", kde na pravé straně stojí složitější označení (v našem příkladě „spojnice bodů B a C"). Definice má zde zřejmě ráz pouhé zkratky. Definice tohoto druhu se vyskytují hlavně v průběhu důkazů, když potřebujeme mít jednoduché označení pro nějaký prvek.

Další příklady tohoto typu definice: „Označme c součin všech prvočísel, menších než 100"; „poloměr kruhu k označíme r".

2. Zcela obdobná definici právě uvedeného typu je definice označovacího vzorce pomocí identity, na příklad při zavedení zkratky za složitou funkci: „Položme $f(x) = \log \sin x$". Zde má definice tvar obecné identity „pro každé x je $f(x) = \ldots$", kde na pravé straně stojí označovací vzorec, za který je $f(x)$ zkratkou.

3. Příklady: „Nazveme přirozené číslo n prvočíslem, když neexistují žádná přirozená čísla a a b, různá od 1 a n tak, aby $ab = n$"; „říkáme, že přirozené

číslo m je dělitelem přirozeného čísla n, když číslo $\frac{n}{m}$ je celé". Definice má zde tvar obecné ekvivalence „pro každé x platí: x má vlastnost P, když a jen když..." nebo „pro libovolná x a y platí: x a y jsou ve vztahu R, když a jen když..."; na pravé straně ekvivalence stojí složitější výrokový vzorec, za který právě zavádíme zkratku.

Pro všechny tři uvedené typy definice je charakteristické to, že mají tvar identity nebo ekvivalence, takže za definovaný výraz, čili **definiendum**, můžeme všude dosazovat rovnocenný s ním výraz, pomocí kterého je definován, t. j. t. zv. **definiens.** Tak místo výrazu „přímky p a q jsou rovnoběžné" (definiendum), můžeme všude dosadit výraz „přímky p a q nemají žádný společný bod" (definiens).

7'4. Konstruktivní definice. Příklad definice označení: „Existuje jedno jediné číslo, které je řešením rovnice $f(x) = 0$; toto číslo označíme a". Zde musí předcházet vlastní definici konstrukce, t. j. důkaz existence jediného čísla s uvažovanou vlastností, po případě přímo jeho sestrojení; definice pak spočívá v „pojmenování" tohoto čísla. Měli bychom tedy logicky korektně vyslovit celou definici asi tímto — dosti komplikovaným — způsobem: „(1) pro libovolná x a y platí: když x má vlastnost P a také y má vlastnost P, pak $x = y$; existuje x, které má vlastnost P; (2) $x = a$, když a jen když x má vlastnost P". Zde je (1) konstrukce, (2) vlastní definice.

Definice tohoto typu se dá vyslovit také ve stejném tvaru jako nominální definice, totiž „označíme a to jediné x, které má vlastnost P". Zde je „a" definiendum, „to jediné x, které má vlastnost P" je definiens. Této definici musí ovšem stejně předcházet důkaz, že takové x existuje a je jediné, takže rozdíl je jen zdánlivý.

Další p ř í k l a d y: „Označíme e číslo x takové, že $\int_1^x \frac{dt}{t} = 1$"; „označíme e limitu výrazu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro n rostoucí nade všechny meze".

K o n s t r u k t i v n í   d e f i n i c e   o z n a č o v a c í h o   v z o r c e. P ř í k l a d: „Pro každé kladné x existuje jedno jediné reálné číslo y tak, že $e^y = x$; toto číslo nazveme přirozeným logaritmem x". Definice tohoto typu je zcela obdobná konstruktivní definici označení. Formulujeme-li takovou definici přesněji, zní takto: „(1) ke každému x existuje právě jedno y tak, že x a y jsou ve vztahu R; (2) $y = f(x)$, když a jen když x a y jsou ve vztahu R". Zde je (1) konstrukce, (2) je vlastní definice.

Velmi důležitým zvláštním případem takové konstruktivní definice je definice **rekurentní.** Jednoduchým příkladem takové definice je definice násobení při axiomatickém vybudování aritmetiky přirozených čísel, která zní takto: „položíme (1) $a \,.\, 1 = a$, (2) pro každé n je $a \,.\, (n + 1) = a \,.\, n + a$". Tato na pohled jednoduchá definice je logicky poměrně velmi komplikovaná. Skládá se zase z konstrukce a vlastní definice (pojmenování). Při konstrukci jde zde vlastně o existenční důkaz úplnou indukcí, totiž o důkaz toho, že při každém daném a lze přiřadit — a to jediným způsobem — každému n číslo $a \,.\, n$ tak, že jsou splněny podmínky (1) $a \,.\, 1 = a$, (2) $a \,.\, (n + 1) = a \,.\, n + a$. O tomto druhu existenčního důkazu jsme již mluvili v kap. 6.

Další p ř í k l a d y: Rekurentní definice mocniny „položme $a^1 = a$ a pro $n = 1, 2, \ldots, a^{n+1} = a^n \,.\, a$"; rekurentní definice derivace n-tého řádu (pro polynomy) „pro libovolný polynom $P(x) = a_0 \,.\, x^n + \ldots + a_n$ budiž

(1) $P'(x) = n \,.\, a_0 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}$, (2) $P^{(n+1)}(x) = [P^{(n)}(x)]'$".

8. AXIOMY

8·1. Co jsou to axiomy. Zpravidla se říká, že axiom je výrok, který není třeba dokazovat. Tak na příklad v elementární geometrii je axiomem výrok „libovolné dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod". V geometrii tento výrok nedokazujeme, nýbrž naopak z tohoto výroku a ostatních axiomů můžeme logicky odvodit celý obsah geometrie, t. j. všechny geometrické věty, aniž bychom se opírali o názorné představy nebo o zkušenost.

Představujeme si při tom sice názorné geometrické objekty, jako přímky, kružnice atd. (případně je znázorňujeme také nákresem), potřebujeme to však spíše z psychologických důvodů — jako oporu paměti, představivosti atd. K vybudování geometrie, t. j. k odvození geometrických vět, nejsou však již tyto představy nutné, jakmile jsou nám dány axiomy. Nepotřebujeme pak dokonce ani vědět, co je to bod, přímka atd., neboť můžeme *ryze formálně*, t. j. aniž bychom dbali významu jednotlivých termínů, které se vyskytují v axiomech, odvodit z nich logicky celý obsah určitého oboru, v našem případě elementární geometrie.

Najdeme-li v určitém oboru skupinu vět, z níž můžeme logicky odvodit všechny ostatní věty tohoto oboru, aniž bychom při tom užili nějakých jiných prostředků, jako třeba odvolání na zkušenost nebo názor, pak můžeme tyto věty prohlásit za *axiomy* uvažovaného oboru. Říkáme potom, že jsme tento obor vybudovali **axiomaticky (deduktivně).** Ve volbě axiomů, t. j. skupiny vět, z nichž odvozujeme ostatní věty, je ovšem značná libovůle. — Axiomaticky můžeme vybudovat na příklad mechaniku. Některé věty mechaniky, založené na zkušenosti, na příklad „zrychlení tělesa je přímo úměrné síle, která na něj působí, a nepřímo úměrné jeho hmotě", si zvolíme za axiomy a z nich odvozujeme ostatní věty mechaniky, aniž se dále odvoláváme na zkušenost.

Charakterisujeme nyní axiomy přesněji. Především je jasné, že nelze mluvit o axiomu vůbec, nýbrž jen o axiomu určitého oboru, neboť, jak uvidíme, axiom jednoho oboru může být dokazatelnou větou oboru jiného. **Axiomy** určitého oboru (jak se někdy říká, určité „řeči" — třeba „geometrické řeči") jsou tedy věty, které se v tomto oboru neodvozují z jiných vět. To ovšem platí také o definicích a tautologických větách (a také o větách protokolárních), takže musíme ještě říci, čím se axiomy od nich liší.

Tautologické věty se liší od axiomů tím, že jejich správnost je dána již jejich tvarem, t. j. nezávisle na tom, z jakých výrazů se skládají, což ovšem o axiomech neplatí. Přesněji řečeno, tautologické věty se vyznačují na rozdíl od axiomů vlastností, kterou teď popíši. Utvoříme-li z tautologické věty nový výrok tak, že každý výraz (výrokovou funkci a pod.), který se v ní vyskytuje, s výjimkou logických spojek a logických operátorů (jež právě určují „tvar" výroku ve smyslu, který je zde míněn), nahradíme libovolným jiným přípustným výrazem, pak takto vzniklý výrok je nutně správný.

Logický rozdíl mezi axiomem a definicí je někdy nezřetelný, protože v některých případech je věcí konvence, zda považujeme danou větu za axiom nebo za definici. Zpravidla je však rozdíl zřejmý. Spočívá v tom, že každá definice stanoví význam jednoho určitého výrazu a umožňuje jeho eliminaci; naproti tomu nedá se mluvit o tom, že by axiom umožňoval eliminaci výrazů, které se v něm vyskytují (t. zv. **základních výrazů**). Význam těchto výrazů je určován — ovšem jen nepřímo — zpravidla pouze celým souborem axiomů, nikoli axiomem jednotlivým.

Tak jako jsou možné různé, ale navzájem rovnocenné definice téhož výrazu, stejně tak lze do značné míry libovolně zvolit axiomy určitého oboru; tak v elementární geometrii lze nahradit euklidovský axiom „daným bodem k dané přímce lze vést jednu jedinou rovnoběžku" axiomem „součet úhlů libovolného trojúhelníka se rovná 180°"; tím se na obsahu geometrie nic nezmění. Máme-li se rozhodnout pro některý z možných, navzájem rovnocenných, systémů axiomů, pak se řídíme metodologickými hledisky: jednoduchostí, přehledností, názorností atd. zvoleného systému. Při tom ovšem musí systém axiomů splňovati jisté podmínky; především musí být bezesporný (viz odst. 8·5). Význam základních výrazů a tedy také význam axiomů nemůže ovšem být určen logickou definicí uvnitř oboru, který na těchto axiomech budujeme, neboť jinak by to právě nebyly základní výrazy. Může však být dán názorně, jak to vidíme v elementární geometrii, nebo na základě zkušeností anebo pomocí pojmů (výrazů) z jiného matematického oboru. Můžeme však také postupovat ryze formálně a nepřisuzovat základním výrazům předem žádný určitý význam. V tom je rozdíl dvou možných pojetí axiomatiky, obsahového a formálního.

8·2. Obsahové pojetí axiomů. Když budujeme axiomaticky na příklad mechaniku, jak jsme se o tom zmínili v předešlém odstavci, pak jako axiomy vystupují pravdivé čili obsahově správné věty (srov. odst. 4·7) a formálně správné věty, odvozené z těchto axiomů, jsou zároveň pravdivé, t. j. ve shodě se zkušeností. To je jeden druh obsahového pojetí axiomů, který však pro matematiku celkem nemá význam.

Jiný typ obsahového pojetí axiomů vidíme v geometrii.

V elementární geometrii, jak ji známe ze střední školy, mají základní výrazy, jako „bod", „přímka", „... leží na ...", označovat určité objekty, které si názorně představujeme a které jsme získali abstrakcí ze zkušenosti, t. j. „ideální bod", „ideální přímka" a různé jejich vztahy. Axiomy pak vyjadřují ty vlastnosti těchto představovaných objektů, které jsou názorně evidentní; jsou tedy jakýmsi jejich popisem. Mluvíme zde o názorně evidentních vlastnostech: když říkáme, že nějaká vlastnost nebo — lépe řečeno — nějaký výrok je názorně evidentní, pak tím míníme toto: nedovedeme si názorně představit (nikoliv snad jen nenázorně, abstraktně myslet), že by platil jejich opak. Tak si nedovedeme názorně představit dvě různé přímky, které by se protínaly ve dvou bodech; to právě znamená: je názorně evidentní, že dvě přímky mají nejvýše jeden společný bod.

Elementární geometrie je příkladem **názorného pojetí** axiomatiky (je to speciální případ pojetí obsahového). Toto pojetí spočívá, jak vidíme v tom, že 1. pojímáme základní výrazy jako označení jistých názorných objektů, vlastností a vztahů, získaných abstrakcí ze zkušeností; 2. jako axiomy vystupují názorně evidentní výroky.

Poznamenáme ještě, že termín „názorně evidentní" je dosti nejasný a zřejmě nepatří přímo do logiky, aspoň ne do logiky formální. Je samozřejmé, že také při názorovém pojetí musí axiomy vyhovovat všem logickým požadavkům. T. zv. „názorná evidence" není žádnou zárukou „správnosti" axiomů nebo jejich bezespornosti a slouží jen jako vodítko při zavedení axiomů.

Tytéž axiomy, které známe z obvyklé elementární geometrie, platí však také tehdy, když dáme základním výrazům zcela jiný význam, čili když zvolíme, jak se říká, jinou jejich interpretaci. To nyní ukážeme.

Zaveďme si následující definice. Každou dvojici reálných čísel nazveme **b o d e m**. Každou lineární rovnici tvaru $ax + by + c = 0$, v níž není současně $a = 0$ a $b = 0$ (tedy na příklad $3x + 2y - 4 = 0$ nebo $x + 2y = 0$, nebo $5x - 6 = 0$), nazveme **p ř í m k o u**; při tom však považujeme rovnice, které se navzájem liší pouze tak, že se jedna dostane z druhé vynásobením vhodným pevným číslem (na příklad rovnice $2x + 3y - 1 = 0$ a $4x + 6y - 2 = 0$), za tutéž přímku. Je-li A určitý bod, t. j. dvojice čísel (x_1, y_1), a p určitá přímka, t. j. rovnice $ax + by + c = 0$, pak říkáme, že **b o d A l e ž í n a p ř í m c e p**, když čísla x, y, jsou řešením rovnice $ax + by + c = 0$, t. j. když $ax_1 + by_1 + c = 0$; tak na příklad bod (2,3) leží na přímce $x - 2y + 4 = 0$. Podobným způsobem si zavedeme také všechny ostatní základní výrazy geometrie. Všechny tyto výrazy jsou pak logicky definovány, a to pomocí algebraických termínů. Platí pro ně, jak se snadno zjistí, všechny axiomy elementární geometrie. Tak na příklad výrok „dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod" znamená pak „jestliže koeficienty rovnic $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ nejsou si navzájem úměrné, pak tyto rovnice mají nejvýše jedno společné řešení". To však je správná věta algebry, jak se čtenář sám může snadno přesvědčit.

Z těchto axiomů můžeme pak odvodit všechny věty elementární geometrie. Dostaneme tak elementární geometrii, v níž však termín „bod" nebo „přímka" nebude již označovat názorný bod nebo přímku, nýbrž dvojici čísel nebo lineární rovnici.

Na tomto příkladě vidíme jiný typ **obsahového pojetí** axiomatiky. Základní výrazy označují při tomto pojetí určité matematické objekty (v našem případě objekty algebraické: dvojice čísel, rovnice a pod.). Axiomy jsou pak dokazatelnými větami o těchto objektech. Při tomto pojetí se tedy dají základní výrazy definovat a axiomy dokázat, jenže ovšem nikoli v oboru, který má teprve být axiomaticky vybudován, nýbrž v jistém oboru, který byl vybudován již dříve (v našem příkladě je to algebra).

Jak vidíme z těchto příkladů, můžeme tentýž systém základních výrazů a axiomů interpretovat zcela různým způsobem: v našem případě se vztahuje jednou na názorné body a přímky, po druhé na dvojice čísel a rovnice. Při vlastní logické výstavbě oboru, daného těmito axiomy, nehraje však volba jejich významu, čili jejich **interpretace**, žádnou roli. Tato okolnost vede k formálnímu pojetí axiomatiky, které nyní vyložíme.

8'3. Formální pojetí axiomů. Při tomto pojetí jsou dány především základní výrazy, z nichž se tvoří výroky. Tyto základní výrazy nejsou logicky definovány, ani není jejich význam nějak jinak předem vysvětlen. Dále je dána řada výroků, utvořených z těchto výrazů, které prohlásíme za správné, t. j. za axiomy. Všechny další výrazy potom již definujeme; výroky považujeme za správné jen tehdy, když se dají logicky odvodit z axiomů (a definicí a tautologických vět).

Jako příklad uvedeme nyní jeden takový axiomatický systém*), jenž slouží k axiomatickému vybudování aritmetiky.

Základní výrazy jsou dva (nepočítáme-li značku identity „=“): označovací vzorec „následovník x“ (krátce „x'“) a označení „nula“ (krátce „0“). Za axiomy prohlásíme tyto výroky: (1) „pro žádné x není $x' = 0$“; (2) „když $x' = y'$, pak $x = y$“ a kromě toho (3) každý výrok následujícího tvaru: „když 1. 0 má

*) Uvádím zde systém axiomů, který se liší od obvyklého Peanova systému tím, že vynechávám axiomy „0 je číslo“, „když x je číslo, pak x' je číslo“, které není nutné explicitně vyslovovat. Viz na př. Hilbert-Bernays: Grundlagen der Mathematik, I. sv., str. 220.

vlastnost P a 2. když x má vlastnost P, pak ji má také x', potom každé x má vlastnost P".

Zde není vůbec řečeno, co znamenají termíny „následovník", „nula". Zacházíme s nimi čistě formálně jako s pouhými značkami, u nichž nezáleží na tom, zda mají nějaký smysl. Můžeme tak logicky odvodit z axiomů celý systém vět a pak interpretovat — ať již názorně nebo jinak — základní výrazy a axiomy, a tím i všechny odvozené věty.

Ač význam základních výrazů není při formálním pojetí předem určen, lze tyto výrazy v jistém smyslu považovat za nepřímo definované dodatečně pomocí axiomů. Tím se míní někdy prostě to, že teprve po zavedení axiomů má smysl říkat o výrocích, které jsou utvořeny z daných základních výrazů, že jsou správné nebo nesprávné. Lze to však pojímat také hlubším způsobem. Axiomy nedefinují sice přímo základní výrazy, avšak axiomy je charakterisována určitá logická struktura (systém vztahů), v níž ovšem záleží jen na vzájemných vztazích prvků, nikoli však na těchto prvcích samotných. Axiomy popisují „roli" základních výrazů v této logické struktuře a tak stanoví jejich význam. Můžeme to říci poněkud obrazně takto: Otázka „co je to přirozené číslo?" nemá smysl, neboť pro přirozené číslo je charakteristická pouze jeho „role" v určité logické struktuře. Smysl má jen otázka „co jsou to přirozená čísla?"; odpoví se na ní popisem určité logické struktury, tedy udáním určitého systému axiomů. (Je to ostatně právě ten systém axiomů, který jsme uvedli jako příklad v tomto odstavci.)

8'4. Interpretace axiomů. Najdeme-li určité objekty, pro něž platí (zavedeme-li vhodné definice) daný systém axiomů, pak říkáme, že jsme tento systém **interpretovali,** a že tyto objekty tvoří **model** čili **interpretaci** daného systému axiomů. Interpretovali jsme již axiomy geometrie a to dvojím způsobem: jednak pomocí algebraických objektů — dvojic čísel, rovnic atd., jednak pomocí názorných bodů, přímek atd. Systém axiomů, který jsme uvedli v předešlém odstavci, je základem pro vybudování aritmetiky; kdybychom však aritmetiku již vybudovali dříve jiným způsobem, mohli bychom interpretovat tento systém pomocí celých nezáporných čísel tímto způsobem: „nulou" nazveme číslo 0, „následovníkem" čísla x nazveme číslo $x + 1$, načež jsou, jak se snadno zjistí, splněny všechny axiomy.

Jak jsme viděli, může tentýž systém axiomů připouštět řadu interpretací ve zcela různých oborech. Metodologický význam formálního pojetí axiomů spočívá právě v tom, že se neomezujeme předem na určitý pevný model. Věty, které byly logicky odvozeny z formálně pojímaných axiomů, zůstávají totiž v platnosti pro libovolnou interpretaci, a tak získáváme dík formálnímu postupu současně věty z nejrůznějších oborů podle toho, který model si zvolíme. (Tak na příklad vedle názorných geometrických vět získáme věty z theorie rovnic.) Důležité je při tom také to, že při vlastní logické výstavbě se soustřeďujeme na to, co je podstatné — totiž na logickou strukturu vztahů, danou axiomy, a ponecháváme stranou to, co je vedlejší — totiž případný „konkretní" význam základních výrazů a axiomů.

Na druhé straně je však nutno říci, že je velmi obtížné provádět úvahy, a zvlášť hledat nové důkazy a věty, když zůstáváme v rámci formální axiomatiky a nezvolíme si žádnou interpretaci. Proto zpravidla stále myslíme, třeba že často dosti neurčitě, na nějaký model uvažovaného systému axiomů.

8'5. Bezespornost. Systém axiomů musí být především bezesporný. To znamená, že z axiomů se nesmějí dát odvodit odporující si výroky. Je zřejmé, že tento požadavek má naprosto základní význam.

Prokázat bezespornost daného axiomatického systému lze dvěma způsoby: 1. můžeme přímo prokázat, že když vycházíme z tohoto systému axiomů, nedostaneme se nikdy logickým odvozováním k odporujícím si výrokům. To znamená, že si musíme nejdříve „pořídit katalog" všech možných logických úsudků a tím i všech výroků, které se dají odvodit z daného systému axiomů, a pak prokázat, že se mezi těmito výroky nevyskytuje současně s nějakým výrokem také jeho negace.

2. Můžeme však také prokázat bezespornost tak, že udáme interpretaci daného systému v některém oboru, který považujeme za bezesporný. Říkáme pak, že uvažovaný axiomatický systém je **splnitelný**. Tak bezespornost axiomů elementární (euklidovské) geometrie můžeme považovat za prokázanou tím, že jsme pro ně udali algebraický model. Kdyby se totiž z těchto axiomů dal odvodit spor, pak by se při této interpretaci objevil spor také v algebře, to však p o k l á d á m e za vyloučené. Zde pozorujeme také jednu okolnost, která se zpravidla objevuje při důkaze bezespornosti druhou metodou (na základě splnitelnosti). Volíme si totiž pro důkaz bezespornosti jiný, v nějakém ohledu pohodlnější, model než jakého jinak skutečně užíváme. Tak zde užijeme algebraické interpretace, jinak však interpretujeme daný systém axiomů názorně — geometricky.

Je zřejmé, že touto druhou metodou nerozřešíme, nýbrž pouze odsuneme problém důkazu bezespornosti, neboť musíme vždy předpokládat bezespornost oboru, v němž jsme si sestrojili model (tak v našem příkladě jsme předpokládali bezespornost algebry). Zpravidla se při tom postupuje tak, že touto metodou sestoupíme od analysy, algebry atd. až k aritmetice přirozených čísel. Teprve pro ni musí být proveden vlastní důkaz bezespornosti, který pak znamená zabezpečení základů celé matematiky. Tím se však budeme zabývat až v další kapitole.

O další vlastnosti axiomatických systémů, totiž **splnitelnosti**, jsme se již stručně zmínili. Poznamenáme jen, že může jít buď o splnitelnost vůbec, t. j. jakýmkoli modelem, nebo o splnitelnost modelem určitého druhu, na příklad algebraickým modelem nebo názorným modelem, v němž se vyskytuje jen konečný počet objektů. Tak systém axiomů, který jsme uvedli na str. 90, je splnitelný, ale není splnitelný konečným modelem.

8'6. Úplnost. Když mluvíme o úplnosti systému axiomů, musíme rozlišovat dva významy tohoto slova. První význam je tento: systém axiomů určitého oboru nazýváme úplným, když se z něho dá odvodit každý správný (pravdivý) výrok tohoto oboru. Řekneme-li v tomto smyslu na příklad, že daný systém axiomů mechaniky je úplný, pak to znamená, že se z něho dají logicky odvodit bez použití názoru nebo zkušenosti všechny věty mechaniky (získané původně ze zkušenosti). O úplnosti v tomto smyslu lze tedy mluvit pouze při obsahovém pojetí axiomů, a to především tam, kde jde o axiomatické podložení již vybudovaného oboru.

Jiný význam má úplnost při formálním pojetí axiomatiky. Systém axiomů nazýváme v tomto smyslu úplným, když k němu nelze přidat žádný nový axiom, aniž by vznikl spor. Řečeno jinak, nazýváme systém axiomů úplným, když každý výrok, utvořený ze základních výrazů, vyskytující se v těchto axiomech, buď se dá logicky odvodit z axiomů nebo je s nimi ve sporu. Řečeno ještě jinak, systém axiomů není úplný v tom případě, že se dá najít nějaký výrok **P** (složený z daných základních výrazů) takový, že k danému systému axiomů můžeme připojit buď **P** anebo non **P**, aniž by se tím porušila bezespornost. Tak na příklad vynecháme-li ze systému axiomů obyčejné rovinné geometrie euklidovský axiom „daným bodem k dané přímce prochází jedna jediná rovnoběžka", pak není vzniklý systém axiomů úplný, neboť můžeme k němu připojit buď znovu tento axiom, nebo jeho negaci (čímž vznikne jakási obecná neeuklidovská geometrie), aniž v jednom nebo v druhém případě vznikne spor. O tom, že spor skutečně nevzniká, můžeme se přesvědčit na algebraickém modelu.

8·7. Nezávislost. Na rozdíl od zmíněných vlastností axiomatických systémů má nezávislost především metodologický a nikoliv čistě logický význam.

Nazýváme systém axiomů **nezávislým**, když žádný z axiomů tohoto systému nelze logicky odvodit z ostatních. Tak na příklad systém axiomů uvedený na str. 90 je, jak můžeme snadno zjistit, nezávislý. Nezávislost systému axiomů je s metodického hlediska velmi významným požadavkem, neboť ty axiomy, které se dají odvodit z ostatních, jsou zřejmě zbytečné. Jejich odstraněním získá systém axiomů na přehlednosti a jednoduchosti; na obsahu daného oboru se tím ovšem nic nezmění.

Je-li systém axiomů nezávislý, pak zřejmě nelze žádný z nich ani dokázat, ani vyvrátit na základě ostatních axiomů. Nahradíme-li tedy některý axiom jeho negací, pak je vzniklý axiomatický systém bezesporný. Této okolnosti užíváme při důkazu nezávislosti systému axiomů, který provádíme následujícím způsobem: Nahradíme jeden z axiomů jeho negací a hledáme interpretaci takto vzniklého axiomatického systému v nějakém oboru, který považujeme za bezesporný. Podaří-li se nám takovou interpretaci najít, pak to znamená, že uvažovaný axiom je nezávislý na ostatních axiomech daného systému.

9. LOGICKÝ KALKUL

V předešlé kapitole jsme řekli, že jsou dvě metody důkazu bezespornosti: buď (1) přímo dokážeme, že mezi důsledky axiomů se nevyskytují odporující si výroky anebo (2) postupujeme nepřímo, totiž interpretujeme axiomy v nějakém oboru, který považujeme za bezesporný. První metodou, jež má pro základy matematiky nesmírný význam, se budeme stručně zabývat v této závěrečné kapitole.

Když chceme postupovat touto metodou, pak vznikají dvě otázky. Za prvé musíme, jak jsme již řekli v odst. 8·5, „pořídit katalog" všech možných důsledků axiomů; není jasné, jakým způsobem to můžeme provést. Za druhé, když dokážeme bezespornost, pak tím dokážeme zároveň, že logická dedukce nemůže vést ke sporu. Avšak při tomto důkazu samém používáme již jakéhosi druhu logické dedukce, takže je nebezpečí, že použijeme při důkazu bezespornosti toho, co teprve máme dokázat. Proto musíme stanovit předem, jakých vět a úsudkových schemat budeme používat při důkazu bezespornosti, a u těchto vět a úsudkových schemat musíme považovat bezespornost za evidentní.

Než promluvíme o těchto problémech, odpovíme ještě na jednu otázku, kterou by si zde mohl položit čtenář. Řekli jsme již, proč musíme dokazovat bezespornost axiomů. Na první pohled se však zdá docela samozřejmé, že logické odvozování samo o sobě nemůže vést ke sporu. Ve skutečnosti to vůbec není samozřejmé, jak ukazují na příklad antinomie theorie množin (viz odst. 6·5). Tam jsme se neopírali o žádné axiomy, nýbrž užívali jen obvyklých logických obratů. Ukázalo se však, že jistá — na první pohled zcela korektní — definice vedla nakonec ke sporu. Z toho jsou zřejmé dvě okolnosti: za prvé, některé logické obraty (především některé druhy definic) nejsou přípustné; za druhé, bezespornost logického odvozování není samozřejmá, jakmile, obrazně řečeno, se setkáváme s něčím nekonečným (s nekonečnými množinami atd.).

Obrátíme se nyní k první z našich otázek. Jde o následující úkol: podat vyčerpávající přehled všech možných typů výroků a všech druhů logického odvození. Je jasné, že jednou z největších překážek, které tomu stojí v cestě, je to, že formulujeme výroky v obvyklé slovní řeči. Řada výrazů obvyklé řeči může totiž mít podle okolností různý význam a kromě toho při logických úvahách, v nichž užíváme slov obvyklé řeči, nemáme nikdy úplnou jistotu, že jsme nepoužili nevědomky nějaké „samozřejmé" věty, kterou jsme však nezařadili mezi axiomy.

Tyto okolnosti vedou k tomu, že zavádíme místo obvyklé řeči „řeč" symbolickou čili t. zv. **logický kalkul.** S ukázkami takové symboliky se čtenář již setkal v prvních třech kapitolách. Toto zavedení symboliky je prvním krokem při vybudování logického kalkulu. Další krok spočívá v tom, že stanovíme ryze formálně, čemu budeme říkat výrok. Nebudeme totiž vůbec dbát významu našich symbolů, nýbrž řekneme: sled značek nazýváme výrokem, když se skládá ze značek toho a toho druhu v tom a tom pořadí. Konečně formalisujeme také úsudky (odvození). Řekneme totiž, že výrok (t. j. skupinu značek určitého tvaru) **A** nazýváme bezprostředním důsledkem výroků **B**, **C**, . . ., **K**, když výroky **A**, **B**, **C**, . . ., **K** se skládají ze značek toho a toho druhu v tom a tom pořadí.

Tím dostáváme t. zv. logický kalkul, čili logickou řeč. Opakujeme nyní ještě jednou, co je to vlastně logický kalkul. Máme zde především určité značky. V našem případě jsou to písmena a číslice; mohly by to však být jakékoli jiné značky, na příklad zvuky (mluvená řeč). Pro tyto značky jsou dána určitá „pravidla hry", je totiž řečeno: 1. jaké skupiny značek nazýváme „výroky", 2. kdy nazýváme „výrok", t. j. skupinu značek, „důsledkem" jiných „výroků", t. j. skupin značek, 3. které „výroky" prohlásíme předem za „správné". Případný význam značek je zde zcela vedlejší; logický kalkul studujeme tak, jako by šlo o jakousi hru se značkami.

Jaký význam má zavedení logického kalkulu pro studium základů matematiky? To jsme vlastně již řekli a nyní to pouze opakujeme. Zavedení logického kalkulu umožňuje snadný přehled všech možných druhů výroků a všech důsledků daných výroků. Tím, že pojímáme logický kalkul jako „hru" s pevnými pravidly, dosáhneme toho, že nám nemůže nepozorovaně vklouznout do důkazů žádný zamlčený předpoklad nebo nepřípustný typ odvození případně nekorektní definice; krátce řečeno, jsme zde — na rozdíl od obvyklé řeči — nuceni k naprosté jasnosti. Z těchto důvodů je teprve po zavedení logického kalkulu možný bezvadný důkaz bezespornosti a jiných podobných vlastností. Ovšem je vždy problémem, do jaké míry lze vyjádřit v takovém kalkulu obvyklý obsah matematiky.

Než budeme postupovat dále, musíme zase odpovědět na jednu otázku, kterou si asi položil čtenář sám. Je jen jeden logický kalkul, nebo jsou možné různé logické kalkuly? Odpověď je vlastně samozřejmá. Jsou možné nejrůznější logické kalkuly. Již volba symboliky je věcí konvence. To však je vedlejší; důležité je to, že můžeme různým způsobem stanovit „pravidla hry" a tím dostaneme různé logické kalkuly. Tak dejme tomu, že chceme vypracovat logický kalkul, odpovídající intuicionistickým tendencím (viz str. 25). Dostaneme jej z obvyklého logického kalkulu (srovn. odst. 3·5) tak, že pozměníme „pravidla hry" následujícím způsobem: Výrok tvaru „$\sim (x)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x) \sim P(x)$" neprohlásíme předem za správný. To odpovídá obsahově tomu, že nepovažujeme předem za ekvivalentní existenční výrok a negaci obecné platnosti opaku — a to je právě intuicionistické stanovisko. Můžeme však také zasáhnout do „pravidel hry", která určují tvar výroku a nepovažovat skupinu značek „$\sim (x) P (x)$" vůbec za výrok. To pak odpovídá extrémnímu intuicionistickému stanovisku, podle kterého nemá negace obecného výroku vůbec smysl, pokud nemůžeme skutečně udat prvek, který nemá uvažovanou vlastnost.

Máme zde příklady různých logických kalkulů. Lze sestrojit nejrůznější takové příklady, neboť každou „hru" se značkami lze považovat za kalkul. Skutečný význam má takový kalkul ovšem jen tehdy, jestliže při vhodné interpretaci je ve shodě se zkušeností (a s obvyklou logikou) aspoň pokud jde o výroky o názorných vlastnostech konečných skupin předmětů, t. j. o názornou elementární aritmetiku. Jinak, na příklad pokud jde o pojem existence (v matematickém smyslu), o úsudková schemata atd., mohou se logické kalkuly navzájem značně lišit, jak jsme ostatně již viděli na příkladech.

Vracíme se k našemu thematu. Důkaz bezespornosti daného systému axiomů (a tím současně důkaz bezespornosti logického odvozování) provádíme tak, že dokážeme bezespornost vhodně vybudovaného logického kalkulu, do něhož jsou zařazeny tyto axiomy. Při tomto důkaze se již vůbec nemusíme zabývat významem axiomů nebo logických termínů a operací. Dokazujeme vlastně jen toto: vycházíme-li z určitých seskupení značek a přecházíme-li k jiným podle určitých „pravidel hry", pak nedospějeme nikdy k seskupení značek (t. j. k „výroku") těch a těch vlastností — totiž k výroku tvaru „$\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{A}$". Bezespornost kalkulu a jiné podobné vlastnosti jsou pak názornými vlastnostmi skupin značek a tedy vlastně záležitostí kombinatoriky konečných skupin předmětů. Při studiu těchto vlastností užíváme pouze tak zvaných **finitních** vět a úsudků, totiž vět, které se týkají názorných vlastností konečných skupin předmětů, jež tedy můžeme v zásadě názorně verifikovat; v tomto postupu spočívá právě tak zvaná **finitní metoda.** Finitní věty při tom považujeme za základ matematiky i logiky a jejich bezespornost považujeme za zaručenou právě tím, že každá taková věta připouští názornou verifikaci na konečných skupinách předmětů.

Finitní jsou především individuální věty elementární aritmetiky jako „$1 + 1 = 2$", „$3 + 5 = 5 + 3$", „$2 . 3^2 \neq 5^2$". Obecné věty jako „$m + n = n + m$" a „pro libovolná přirozená m, n jest $2\, m^2 \neq n^2$" jsou rovněž finitní, neboť můžeme udat obecně platný názorný předpis, podle kterého lze tyto věty verifikovat pro libovolná m, n. — Nemůžeme však zdaleka považovat každou obecnou větu aritmetiky za finitní. Tak když je dán určitý předpis φ, podle kterého je každému přirozenému číslu n přiřazeno určité přirozené číslo $\varphi(n)$, pak nemůžeme ihned názorně verifikovat anebo vyvrátit na příklad tvrzení „pro libovolné n je $\varphi(n) \neq 3$". Toto tvrzení má ráz matematického problému, který může, ale nemusí býti rozhodnut názorným způsobem — totiž buď tak, že udáme obecně platný názorný předpis, podle kterého lze toto tvrzení verifikovat pro libovolné n, anebo tak, že udáme předpis, podle kterého lze najít určité n, pro něž je $\varphi(n) = 3$. Pouze tehdy, když je takové rozhodnutí možné, můžeme považovat tvrzení „pro libovolné n je $\varphi(n) \neq 3$" za finitní.

Pojem finitní věty není, jak si čtenář všiml, přesně stanoven, takže je možné pojímat jej různým způsobem. Při studiu základů matematiky a hlavně problému bezespornosti na základě finitní metody musíme tedy jednak zvolit vhodný logický kalkul, v němž by se dalo vyjádřit co nejvíce z obvyklého obsahu matematiky, jednak vhodně vymezit pojem finitní věty a finitního úsudku. Velmi jemnými a obtížnými otázkami, které s tím souvisí a jež nejsou ještě zdaleka definitivně rozřešeny, se zde ovšem nemůžeme zabývat. — Závěrem uvedeme jenom odpovědi na dvě takové otázky (jež ovšem zde formulujeme velmi nepřesně).

1. Lze provést pro některý dostatečně obsažný logický kalkul (v němž by se dala na příklad vyjádřit podstatná část obsahu obvyklé aritmetiky) důkaz bezespornosti finitní metodou?

Odpověď: A n o, když finitní metodu pojímáme dosti široce.

2. Lze v nějakém (rozumí se, bezesporném) logickém kalkulu vyjádřit celý obvyklý obsah aritmetiky?

Odpověď: Je dokázáno, že to n e n í m o ž n é. Ať je dán jakýkoli logický kalkul, v němž lze vyjadřovat aritmetické věty, vždy lze najít aritmetickou větu, která je obsahově správná, avšak v daném logickém kalkulu se nedá dokázat.

LITERATURA

Uvádím zde jen stručný a do značné míry náhodný výběr literatury. Pro usnadnění orientace jsem ji rozdělil do pěti skupin: (1) moderní formální čili t. zv. matematická logika a obecná t. zv. theorie řeči; (2) logické základy matematiky; (3) axiomatické vybudování jednotlivých matematických disciplin; (4) theorie množin; (5) problémy t. zv. filosofie matematiky.

1.

R. Carnap: Abriß der Logistik. Wien, 1929.

R. Carnap: Logical Syntax of Language. London and New York, 1937.

D. Hilbert und *W. Ackermann:* Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin, 1938.

C. W. Morris: Foundations of the Theory of Signs. Chicago, 1939.

A. Tarski: Einführung in die mathematische Logik. Wien, 1937.

2.

D. Hilbert und *P. Bernays:* Grundlagen der Mathematik I, II. Berlin, 1934, 1939.

A. N. Whitehead and *B. Russell:* Principia Mathematica I, II, III. Cambridge, 1925, 1927.

3.

D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1930.

E. Landau: Grundlagen der Analysis. Leipzig, 1930.

4.

E. Čech: Bodové množiny I. Praha, 1936.

V. Jarník: Úvod do theorie množství (dodatek ke knize *K. Petr,* Počet integrální, Praha, 1931).

A. Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre. Berlin, 1928.

5.

W. Dubislav: Die Philosophie der Matematik in der Gegenwart. Berlin, 1932.

A. Heyting: Mathematische Grundlagenforschung. Berlin, 1934.

OBSAH

Spisovatel	*Dr Miroslav Katětov*
Název díla	*Jaká je logická výstavba matematiky?*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1946*
V edici	*Cesta k vědění, svazek 31*
Za redakce	*Dra R. Brdičky, Dra M. A. Valoucha, Dra F. Vyčichla*
Stran	*104*
Vytiskla	*knihtiskárna Prometheus v Praze VIII*
Vydání	*první*
Cena	*46 Kčs*