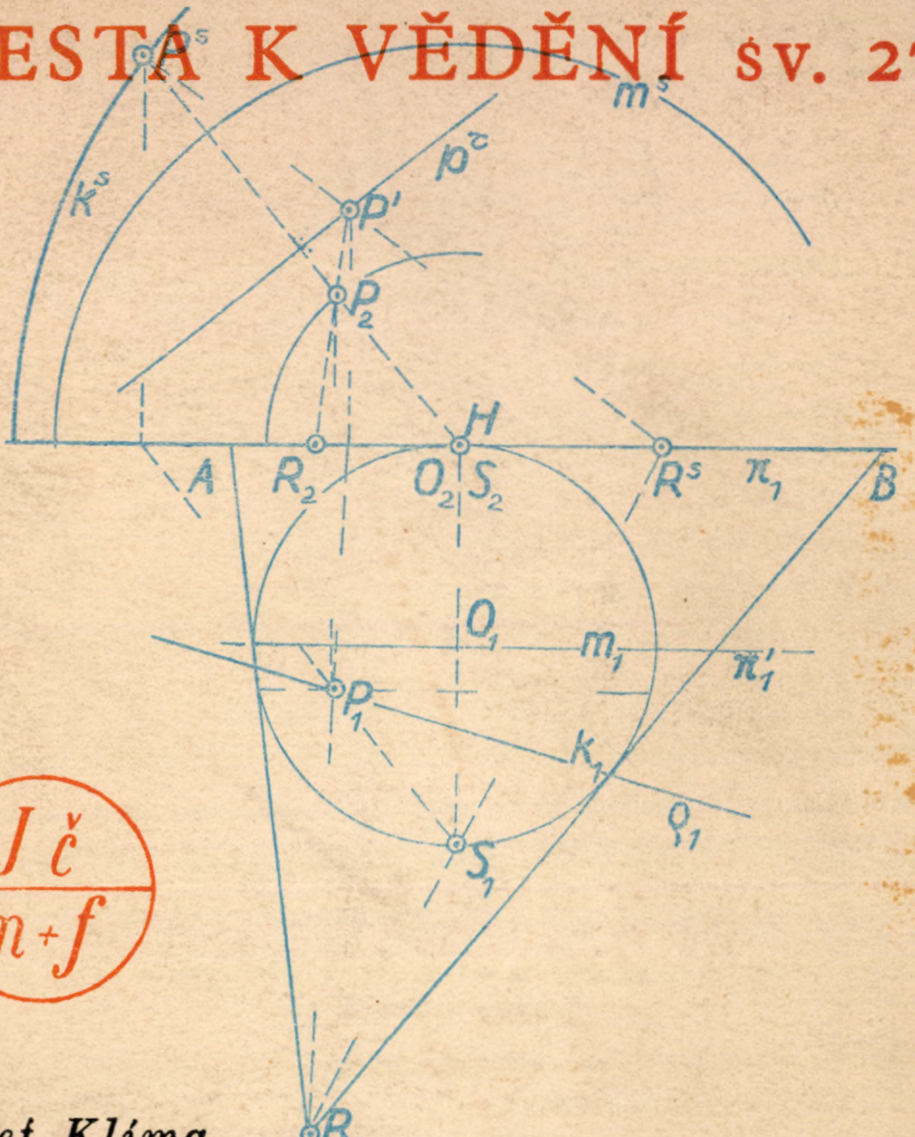
CESTA K VĚDĚNÍ SV. 27



Jč
m+f

Prof. Dr Josef Klíma

RŮZNÉ ZPŮSOBY ZOBRAZOVACÍ V DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII

CESTA K VĚDĚNÍ

Dr Josef Klíma:

Různé způsoby zobrazovací

V technické praxi, v kartografii a ve výtvarném umění se používá k znázornění předmětů různých zobrazovacích způsobů. Většinou se kreslí a rýsují různé druhy obrazů získaných s pomocí lineárního (přímkového) promítání. Všechna taková promítání jsou odvozena zjednodušováním složitého procesu zření lidským okem. Autor se postavil na toto stanovisko odvozování průmětů a obrazů a vycházeje od prvního zjednodušení našeho vidění, t. j. od středového promítání na jednu průmětnu a jeho praktického užití (lineární perspektivy, gnómonického a stereografického průmětu kulové plochy), probral všechny t. zv. *lineární methody zobrazovací*, jako kosoúhlé a pravoúhlé promítání, dvojstředové promítání a perspektivní relief. Vyložil vždy podstatu promítání a ukázal, jak se zobrazují základní prvky prostoru.

Na těchto druzích však nepřestal. Různé obory vědní

JČMF Brož. Kčs 26,—

JOSEF KLÍMA

RŮZNÉ ZPŮSOBY ZOBRAZOVACÍ V DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

PŘEDMLUVA

k prvnímu vydání.

Na našich středních školách se probírají z deskriptivní geometrie hlavně základy kolmého promítání na jednu až tři průmětny. Nejvíce procvičuje se Mongeovo promítání na dvě k sobě kolmé průmětny a to z důvodů praktických. Z jiných druhů promítání bývají to ještě počátky středového promítání případně perspektivního zobrazení. Tento spisek podává přehled různých způsobů zobrazení dvou až čtyrrozměrných prostorů na rovinu. Nevyčerpává všechny tyto způsoby, nýbrž jen ty nejznámější a též užívané způsoby. Při tom, vyjma středového promítání, nepodává se řešení úloh v těchto zobrazeních, k tomu by bylo třeba velkého spisu. Nejčastěji je tu podáno jen zobrazení bodů ze souřadnic, přímek a rovin jako základních prvků prostorových. Některá z těchto zobrazení mohou býti předmětem jiných spisků v této sbírce. Tato knížka má býti přehledným úvodem k těmto pracím z oboru deskriptivní geometrie, najde-li se pro ně dostatečný zájem.

Rád jsem přijal některé cenné rady při sepsání tohoto spisku od redaktora této sbírky p. doc. Dr *Fr. Vyčichlo*, začež mu zde srdečně děkuji. Obrazce zhotovil jsem úplně sám a proto jejich případné chyby připadají k mé tíži. Jednotě českých matematiků a fysiků děkuji, že nešetřila nákladu s vydáním tohoto dílka a tím přispěla k rozšíření znalosti zásad deskriptivní geometrie v našich širších kruzích zájemců.

V Jimramově koncem srpna 1941.

J. Klíma.

1. ÚVOD

Již od nepaměti lidé se snažili prostorové předměty, t. j. trojrozměrné, nějakým způsobem si znázorniti na rovině. Z počátku dělo se to způsobem primitivním, ale i tu jsou patrny již jisté zvyklosti, jež vyplývaly ze zkušenosti a pozorování. Postupem doby vnášely se jisté zákonitosti do těchto zobrazení. Až v poslední době dospělo se k nejširšímu pojmu zobrazení útvarů prostorových na útvary v rovině případně na jiné plochy dvojrozměrné. Takové zobrazení přiřazuje základním prvkům prostoru, t. j. bodu, přímce a rovině takové prvky roviny, t. zv. jejich obrazy, aby konstrukce, jež mají býti provedeny s prvky v prostoru, mohly se provésti v rovině s použitím jejich obrazů. Nejčastěji k těmto obrazům dospívá se tak zvaným *promítáním*, ale potřeby na př. kartografie, mechaniky atd. vedly k zobrazením, jež nelze obdržeti promítáním, nýbrž jen přiřazováním podle jistých pravidel prvků rovinných prvkům prostorovým. Každé promítání je zobrazením, ale neplatí věta obrácená.

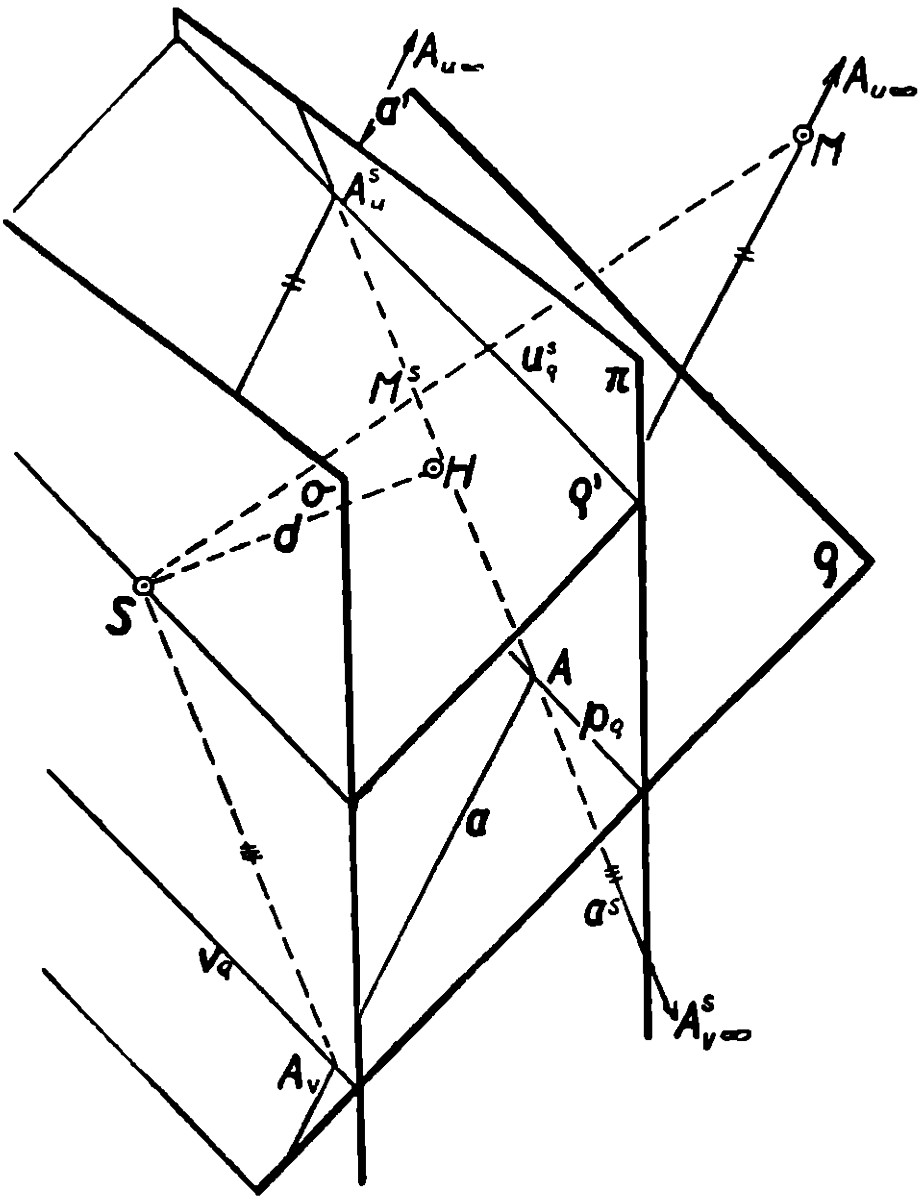
Deskriptivní geometrie zabývá se v první řadě promítáním, ale mnohdy podle potřeby i zobrazením, jež není průmětem, ale při němž lze, když ne úplně, tedy aspoň částečně, nalézti jisté geometrické souvislosti mezi originálem a jeho obrazem. Promítáním nerozumíme zde jen promítání z bodu (ležícím ať již v konečnu nebo v nekonečnu), ale můžeme zde promítati též z přímky, případně i z křivky. Na př. průmět bodu A z přímky s na průmětnu π je průsečnice A_1 průmětny π s rovinou (sA). Ovšem takovéto průměty mají více cenu theoretickou než praktickou. Slouží převážně k přenášení vlastností útvarů prostorových na vlastnosti útvarů rovinných, případně obráceně.

V tomto spisku jsou podány hlavní vlastnosti různých průmětů nejen útvarů prostoru trojrozměrného, ale též na konci v stručnosti i základních útvarů čtyrrozměrného prostoru, s nimiž se dnes setkáváme v deskriptivní geometrii. Mimo různá promítání jsou ukázány též hlavní vlastnosti některých zobrazení, jež nejsou průměty.

2. STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

Základním promítáním je promítání středové, které je v podstatě zjednodušeným viděním jedním okem. Promítací paprsky vycházejí z jednoho bodu S (obr. 1); mimo *střed* S volíme rovinu π, obvykle ve svislé poloze, na niž promítáme a kterou proto jmenujeme *průmětnou*.

2,1. Středový průmět bodu a přímky. Středový průmět libovolného bodu M je v průsečíku M^s *promítacího* paprsku MS s průmětnou π. Všechny body v prostoru až na střed S mají tak zcela určitý středový průmět. Střed S je zvláštním, nebo říkáme též singulárním bodem tohoto promítání, ježto jeho středovým průmětem je kterýkoliv bod průmětny π. V dalším vzhledem k zvláštní povaze bodu S nebudeme uvažovati o středovém průmětě bodu S. Každý bod pak má zcela určitý jediný středový průmět, ale neplatí to obráceně. K určitému středovému průmětu na př. M^s v průmětně π přísluší jako originál každý bod promítacího paprsku SM^s. Není tudíž bod svým středovým průmětem určen. Ukážeme, že mnohem výhodnější je zde bráti za základní útvar prostoru přímku. Mějme na př. obecně položenou přímku a, t. j. neprocházející středem promítání S. Promítací paprsky všech bodů této přímky vyplňují t. zv. promítací rovinu (S, a) přímky a a její průsečnice a^s s průmětnou π je středovým průmětem přímky a. Každý bod M přímky a má středový průmět M^s na jejím středovém průmětu a^s. Středovým průmětem přímky je obecně zase přímka. Kdyby přímka procházela středem promítání S, pak by průměty všech jejích bodů, až ovšem na S, byly v jejím průsečíku s průmětnou. Přímky jdoucí středem promítání mají za středové průměty body. Jestliže středovým průmětem přímky je opět přímka, není přímka svým středovým průmětem určena. Aby přímka při středovém promítání byla stanovena, sestrojujeme středové průměty dvou jejích význačných bodů a to průsečíků jejích s průmětnou π a s úběžnou rovinou ω_∞ prostoru. Tyto body na př. pro přímku a jmenujeme a označujeme: stopník $A \equiv (\pi, a)$ resp. úběžný bod $A_{u\infty} \equiv (a, \omega_\infty)$. Středový průmět (obr. 1) prvého je $A^s \equiv A$ a středový průmět $A_u{}^s$ druhého jmenujeme *úběžník přímky* a; dostane se promítacím paprskem $a' \parallel a$ jdoucím středem promítání S (a' nazývá se *paprskem směrovým*). Na středovém průmětu a^s dostáváme dva body a to stopník A a úběžník $A_u{}^s$ přímky a. Známe-li tyto body, je přímka a jednoznačně určena, ježto jde stopníkem A rovnoběžně s promítacím paprskem $SA_u{}^s \equiv a'$. Přímku v středovém průmětě lze tudíž určiti bodovým párem roviny π, z nichž jeden je stopníkem a druhý úběžníkem. Je patrno, že je tu určení přímky jednodušší než bodu. Množství přímek prostoru zobrazuje se tu v množství párů bodových v průmětně π; obě tato množství jsou čtyrrozměrná. Přímky kolmé k průmětně π mají úběžník v t. zv. *hlavním bodě* H průmětny, který je v patě kolmice spuštěné se středu S na průmětnu π. (Vzdálenost $\overline{SH} = d$ jmenuje se *distancí* středového promítání.) U promítacích přímek, jež tvoří trs o středu S, splývá stopník s úběžníkem. Tomuto určení přímek stopníkem a úběžníkem se vymykají přímky, jež jsou rovnoběžné s průmětnou, nebo, jak říkáme, které protínají úběžnou přímku p_∞ průmětny π. U těchto přímek stopník a úběžník splývají v úběžném bodě přímky, který je na přímce p_∞. Jestliže přímka je promítací, je určena svým stopníkem, je-li rovnoběžná s průmětnou a má-li vzdálenost od ní rovnou distanci, pak je určena jedním svým bodem a stopníkem; každá jiná přímka rovnoběžná s průmětnou se určuje jedním svým bodem a svým středovým průmětem, který je rovnoběžný s originálem. Přímky, které svírají s průmětnou π úhel α, mají své úběžníky na kružnici, opsané kol bodu H jako středu poloměrem $\varrho = d$.



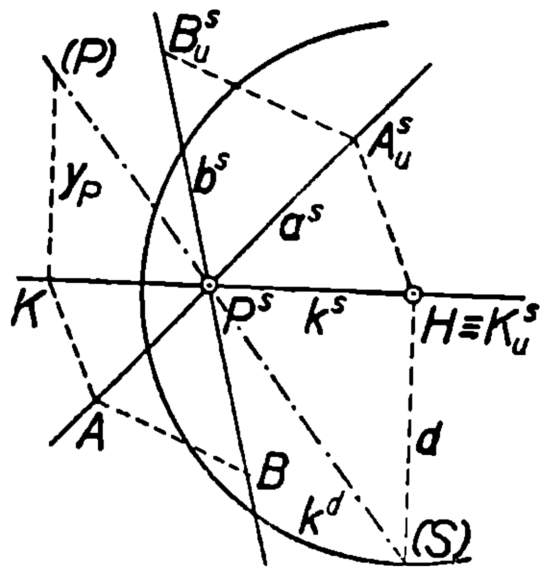
Obr. 1. Základní pojmy středového promítání.

. cotgα, protože paprsky směrové jsou povrchovými přímkami rotačního kužele o vrcholu S a ose SH.

2,2. Středový průmět roviny. Promítací paprsky bodů roviny ϱ (obr. 1), která neprochází středem promítání, tvoří trs paprsků a jejich průsečíky s průmětnou π vyplňují celou průmětnu. Průmětem roviny je tu obecně celá průmětna. Abychom rovinu určili v středovém promítání, promítáme dvě její význačné přímky a to její stopu $p_\varrho \equiv (\varrho, \pi)$ a její úběžnou přímku $u_\varrho \equiv (\omega_\infty, \varrho)$. Středový průmět stopy p_ϱ splývá s touto stopou a středový průmět u_ϱ^s dostaneme v průsečnici průmětny s rovinou $\varrho' \parallel \varrho$ jdoucí středem promítání S (ϱ' nazývá se *rovinou směrovou*). Průmět u_ϱ^s jmenuje se *úběžnice* roviny ϱ. Vždy je $u_\varrho^s \parallel p_\varrho$. Naopak, dány-li rovnoběžné přímky u_ϱ^s, p_ϱ v průmětně π, je tím rovina ϱ v prostoru jednoznačně určena, jde totiž stopou p_ϱ rovnoběžně s rovinou $\varrho' \equiv (S, u_\varrho^s)$. Prochází-li rovina středem promítání S, tu promítací paprsky jejích bodů tvoří svazek a průmětem této t. zv. *promítací* roviny je přímka. Stopa a úběžnice tu splývají. Tomuto určení roviny stopou a úběžnicí vymykají se roviny rovnoběžné s průmětnou π; takovou nutno určiti jedním bodem. Úběžnice rovin kolmých k průmětně procházejí hlavním bodem H. Roviny svírající s průmětnou π úhel α mají úběžnice tečnami kružnice o středu H a poloměru $\varrho = d \cot\!g \alpha$, ježto příslušné roviny směrové jdoucí S (v obr. 1 rovina ϱ') obalují rotační kuželovou plochu o středu S a ose SH, jejíž tvořící přímky svírají s rovinou π úhel α.

2,3. Středová rovina. Zvláštní postavení mezi rovinami rovnoběžnými s průmětnou π má rovina σ jdoucí středem promítání S (obr. 1). Vše co je v této t. zv. *středové rovině* má svůj středový průmět v úběžné přímce p_∞ průmětny π. Tak na př. přímka a protíná rovinu σ v bodě A_v, jejž jmenujeme též protiúběžník přímky a, jeho středový průmět je v úběžném bodě spojnice SA_v a proto středový průmět $a^s \parallel SA_v$. Obecná rovina ϱ protíná rovinu středovou σ v protiúběžnici v_ϱ a je $v_\varrho{}^s{}_\infty \equiv p_\infty$.

2,4. Incidence základních prvků. Dva ze základních prvků bod, přímka a rovina jsou incidentní, když jeden leží v druhém, nebo prochází druhým. Je-li přímka a v rovině ϱ (obr. 1), tu její stopník je na stopě a úběžník na úběžnici roviny ϱ; tento vztah platí též obráceně. Bod P není určen svým středovým průmětem P^s (2,1); proto jej určujeme ještě průmětem přímky, která jím jde; každou takovou přímku jmenujeme *nositelkou* bodu P. Toto určení bodu je provedeno v obr. 2, kde průmětna π splývá s nákresnou. Hlavní bod je H, kružnice k^d, zvaná *distanční kružnicí*, je opsaná kolem hlavního bodu jako středu poloměrem d. Bod P je zde určen svým středovým průmětem P^s a nositelkou a, jejíž středový průmět a^s jde bodem P^s; přímka a určena stopníkem A a úběžníkem A_u^s. Bod P má ovšem celý trs nositelek. Tak v obr. 2 zvolena další nositelka b, jejíž průmět b^s jde bodem P^s; zvolíme-li stopník B, dostaneme již úběžník B_u^s ze vztahu $A_u^sB_u^s \parallel AB$, ježto přímky a, b určují rovinu o stopě AB a úběžnici $A_u^sB_u^s$. V obr. 2 zvolena ještě nositelka $k \perp \pi$ bodu P, jejíž úběžník $K_u^s \equiv H$. Z konstrukce patrno, že pole $A_u^s, B_u^s, K_u^s, \ldots$ úběžníků a pole $A, B, K, \ldots$ příslušných stopníků nositelek bodu P jsou homothetická pro střed P^s a poměr $\overline{P^sA_u^s} : \overline{P^sA}$.



Obr. 2. Bod P a jeho nositelky ve středovém průmětu. Homothetie o středu P^s.

Sklopíme-li nositelku k kolem stopy k^s její středově promítací roviny do průmětny a označíme-li vzdálenost bodu P od průmětny π písmenem y, jež je kladná, je-li bod P se středem S na téže straně od průmětny π, tu je poměr podobnosti $\overline{P^sA_u^s} : \overline{P^sA} = \overline{P^sK_u^s} : \overline{P^sK} = d : y_p$.

Body v prostoru uvažované jako středy trsů přímek zobrazují se v středovém promítání jako homothetičnosti.

Střed promítání S zobrazuje se takto v identitu. Body na př. t. zv. protější roviny, jež je rovnoběžná s průmětnou π

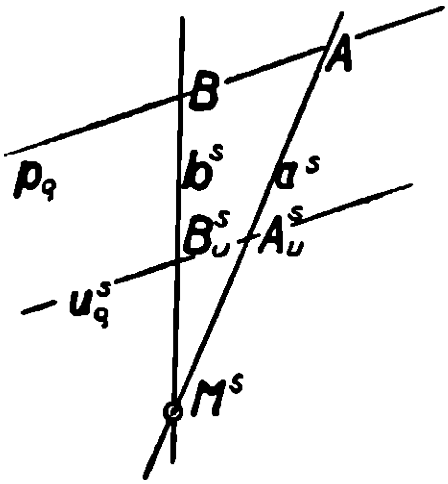
a má od této vzdálenost $-d$, zobrazují se v středové souměrnosti.

[Uvažujte o jiných vzláštních polohách bodu P a jeho obrazech; na př. leží-li v π nebo v rovině ω_∞ ale nikoliv na p_∞ atd.]

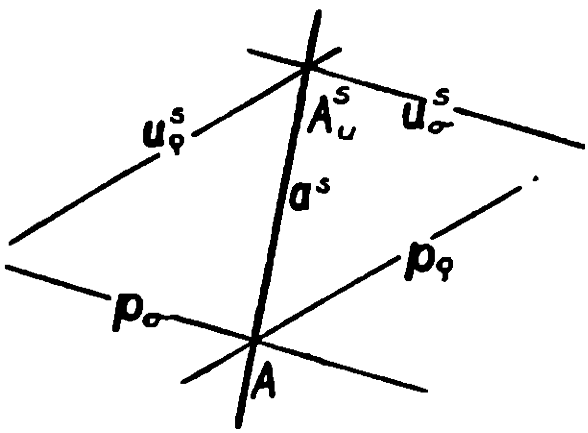
Přímky odpovídající si v homothetičnosti, již určuje podle předchozího bod P v průmětně, jsou úběžnicemi a stopami rovin, jež jdou bodem P. Bod P může býti určen nejen přímkou, jež jím jde, ale též rovinou jím procházející. Jsou-li přímky různoběžné, musí spojnice jejich stopníků býti rovnoběžná se spojnicí jich úběžníků. Přímky, jež jsou incidentní s bodem M a rovinou ϱ, jež jde bodem M, vyplňují svazek přímek o středu M v rovině ϱ a středový jejich průmět (obr. 3) tvoří paprskový svazek a^s, b^s, ... o středu M^s a řada úběžníků u_ϱ^s (A_u^s, B_u^s, ...) je homothetická s řadou stopníků $p_\varrho(A, B, \ldots)$ pro poměr homothetičnosti $\overline{M^sA_u^s} : \overline{M^sA} = d : y_M$.

[Uvažujte o zvláštních případech, na př. M_∞^s, $\varrho \parallel \pi$ atp.]

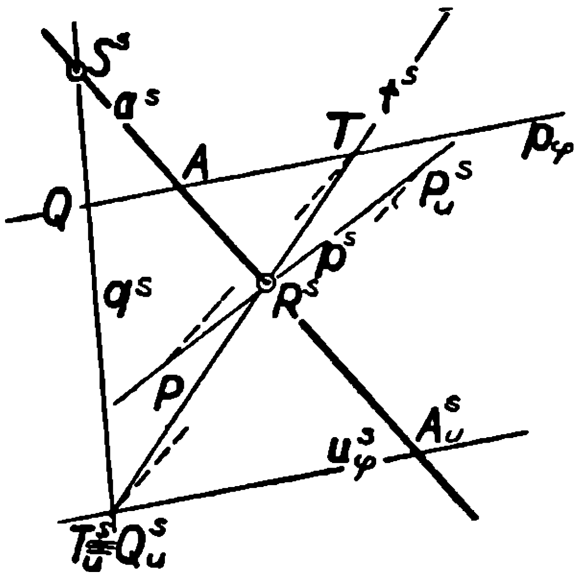
2,5. Úlohy polohy jsou takové úlohy, při nichž se vyskytuje jen incidence základních prvků. Při těchto úlohách nepřicházejí délky ani úhly. Při řešení těchto úloh netřeba znáti hlavní bod ani distanci středového promítání.



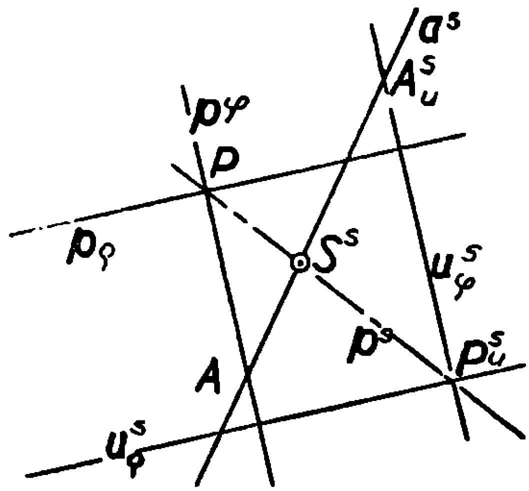
Obr. 3. Bod M na přímce a v rovině ϱ.



Obr. 4. Průsečnice dvou rovin.



Obr. 5. Spojnice a bodů RS.



Obr. 6. Průsečík S přímky a s rovinou ϱ.

Jako první příklad proveďme dvě vzájemně duální úlohy:

a) Sestrojiti *průsečnici a dvou rovin* ϱ, σ (obr. 4), *daných stopami a úběžnicemi.* Stopník A přímky a je bod $A \equiv (p_\varrho, p_\sigma)$ a úběžník $A_u{}^s \equiv$ $\equiv (u_\varrho{}^s, u_\sigma{}^s)$.

a′) Určiti *spojnici a dvou bodů* R, S (obr. 5), dány-li tyto středovými svými průměty R^s, S^s a nositelkami p, q. Nositelku p nahradíme nositelkou t rovnoběžnou s nositelkou q bodu S, takže $T_u{}^s \equiv Q_u{}^s$. (Stopník T obdržíme ze vztahu $P_u{}^sT_u{}^s \parallel PT$ na t^s.) Pak rovina $\varphi \equiv (t, q)$ obsahuje přímku $a \equiv RS$ a tedy na stopě $p^\varphi \equiv TQ$ je stopník A a na úběžnici $u_\varphi{}^s \parallel p_\varphi$ je úběžník $A_u{}^s$ spojnice $a \equiv RS$. Body $A_u{}^s$, A jsou též společným párem homothetičnosti, v něž se zobrazují body R, S.

Druhým příkladem buďte opět dvě duální úlohy:

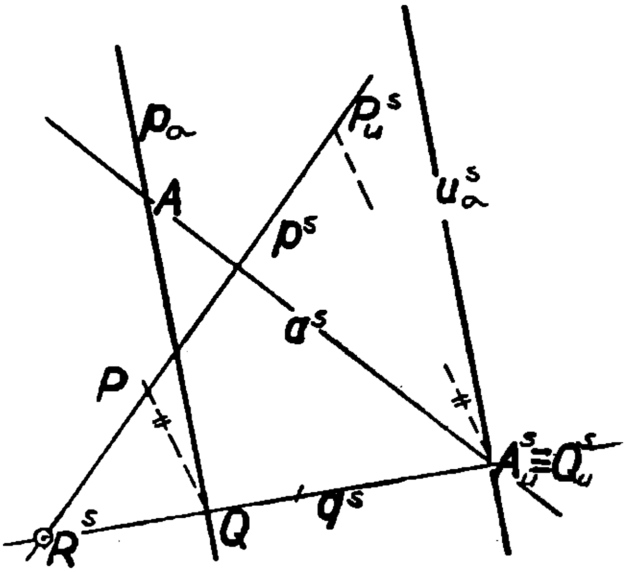
b) Sestrojiti *průsečík* S *roviny* ϱ *s přímkou* a (obr. 6). Přímkou a proložíme libovolnou rovinu φ, určíme její průsečnici p s rovinou ϱ a tu $S \equiv (a, p)$.

b′) Určiti *rovinu* σ *spojující bod* R o nositelce p *s přímkou* a (obr. 7). Nositelku p nahradíme nositelkou $q \parallel a$ $(Q_u{}^s \equiv A_u{}^s)$; potom rovina $\sigma \equiv (a, q)$.

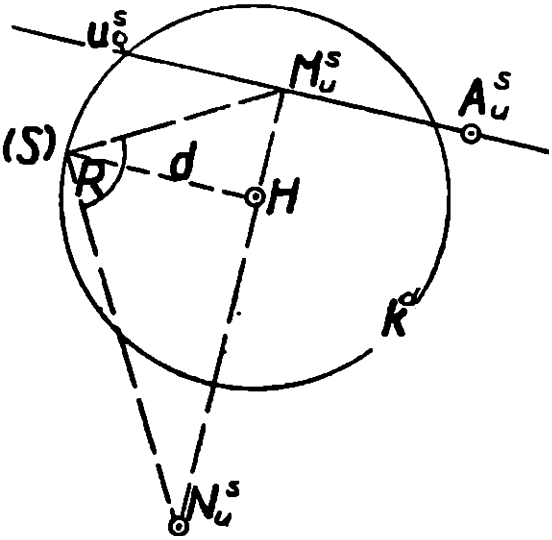
Připojíme-li k těmto úlohám podle dřívějšího snadno řešitelné duální úlohy, určiti průsečík dvou přímek téže roviny a stanovení roviny dvou různoběžek, dají se všechny jiné úlohy polohy pomocí těchto úloh řešiti. Jsou to na př. úlohy týkající se příček dvou, případně tří a čtyř mimoběžek. Dospíváme tak k řešení nejen prostorových úloh, ale i úloh týkajících se homothetičnosti v rovině.

2,6. Úlohy metrické jsou takové, při nichž se vyskytují velikosti úhlů a délek.

2,61. Předně sem patří *kolmost*. Všechny kulové plochy v prostoru protínají úběžnou, nebo říkáme též nevlastní rovinu ω_∞ v t. zv. abso-



Obr. 7. Rovina σ určená bodem R a přímkou a.



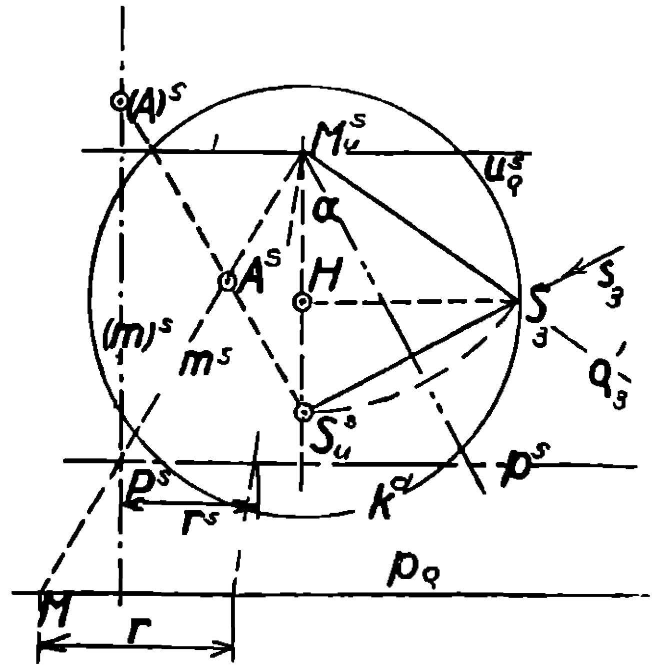
Obr. 8. Úběžník kolmic k rovině.

lutní kružnici i_∞, jež je ovšem imaginární.[1]) Přímky protínající absolutní kružnici i_∞ jmenují se minimální nebo isotropické. Bodem v prostoru, na př. středem promítání S, jde kuželová plocha minimálních přímek, která protíná libovolnou rovinu na př. průmětnu π v imaginární kružnici k^{di}, o středu v patě kolmice spuštěné z bodu S na průmětnu π (t. j. v hlavním bodě H) a jejíž poloměr je di, $(i^2 = -1)$, je-li d distance středového promítání. V úběžné rovině ω_∞ kuželosečka i_∞ definuje polární soustavu, která se promítá ze středu S na průmětnu π v polární soustavu imaginární kružnice k^{di} a tedy v antipolaritu distanční kružnice k^d.[2]) Odpovídající si prvky v polaritě definované kuželosečkou i_∞ promítají se ze středu S prvky vzájemně kolmými.

[1]) Viz v této sbírce sv. 10, Dr *L. Seifert*: „Imaginární elementy v geometrii", str. 59 a n.

[2]) *L. Seifert* l. c., str. 42.

Máme-li v obr. 8 dánu rovinu ϱ a hledáme k ní kolmou přímku n, pak úběžník N_u^s přímky n a úběžnice u_ϱ^s musí býti antipolární k distanční kružnici k^d. Konstrukce antipólu N_u^s k přímce u_ϱ^s je patrna z obrazce a lze ji vyložiti též snadno prostorově. Přímka $a \perp n$ má úběžník A_u^s na úběžnici u_ϱ^s.

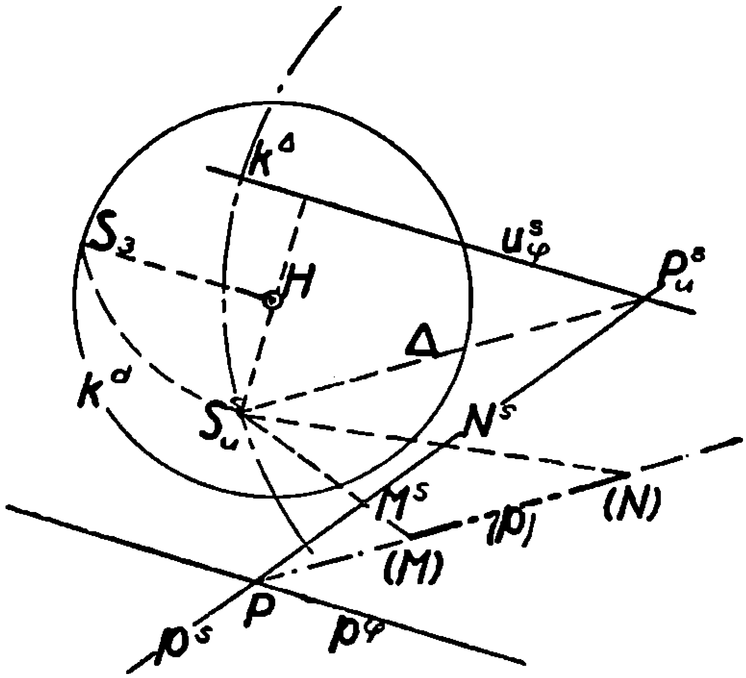


Obr. 9. Otočení roviny ϱ kolem p do polohy rovnoběžné s průmětnou.

2,62. Druhou základní metrickou úlohou je *otáčení roviny* (ϱ) *obecně položené k průmětně* (π) *do polohy rovnoběžné s průmětnou.* Buď v obr. 9 dána rovina ϱ stopou p_ϱ a úběžnicí u_ϱ^s! Toto otočení lze provésti jen kolem osy otáčení, která je rovnoběžná s průmětnou π, leží v rovině ϱ a je tudíž její hlavní přímkou p; její středový průmět je $p^s \parallel p_\varrho$. Přímka p je také v rovině $\pi' \parallel \pi$. Otočení roviny ϱ do roviny π' lze nahraditi kosoúhlým průmětem, pro směr promítání s, kolmý k jedné z rovin souměrnosti, jdoucích průsečnicí $p \equiv (\varrho, \pi')$ a půlících úhel těchto rovin. Úběžník S_u^s jednoho z těchto shodně promítacích směrů dostaneme otočením středu promítání S do průmětny π kolem úběžnice u_ϱ^s. V obr. 9 sklopena rovina otáčení bodu S do průmětny a sklopené útvary označeny indexem 3. Chceme-li otočiti bod A roviny ϱ do roviny π', vedeme bodem A přímku v rovině ϱ kolmou ke stopě; v obr. 9 je to přímka $m \perp p_\varrho$, jejíž úběžník M_u^s je na úběžnici u_ϱ^s ($HM_u^s \perp$ $\perp u_\varrho^s$). Otočená poloha (m) protíná se s přímkou m na ose otáčení p a je $(m) \perp p$. V středovém průmětě je $(m)^s \parallel {}_u{}^sSM_u^s$ a přímka $(m)^s$ protíná se s přímkou m^s v bodě P^s osy p^s. Podle konstrukce je patrno:

Středový průmět ϱ^s roviny ϱ a středový průmět její polohy otočené $(\varrho)^s$ kolem hlavní přímky její p do polohy rovnoběžné s průmětnou, jsou ve vztahu středové kolineace pro střed $S_u{}^s$ a osu p^s.

Zvolíme-li za osu otáčení stopu p_ϱ roviny ϱ, pak $(\varrho) \equiv (\varrho)^s$ je skutečná velikost rovinného útvaru ϱ. Jinak $(\varrho)^s$ je podobné s ϱ a sice, je-li přímka p před resp. za průmětnou je poměr podobnosti větší resp. menší než 1. Velikost poměru podobnosti dostaneme, když na přímku



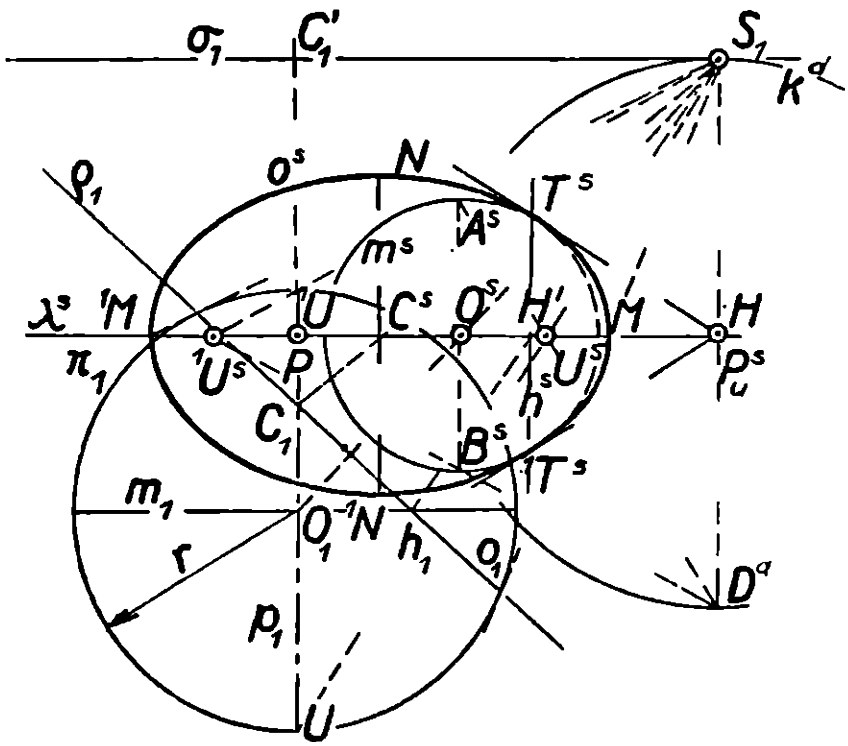
Obr. 10. Sestrojení skutečné velikosti úsečky MN.

p naneseme libovolnou délku r tím, že tuto přeneseme nejdříve na stopu p_ϱ a rovnoběžkami v rovině ϱ tuto přeneseme na přímku p. Je-li délka středového průmětu r^s, tu poměr podobnosti mezi $(\varrho)^s$ a ϱ je $r^s : r$.

Úloha tato slouží k tomu, abychom buď určili skutečnou velikost útvaru v rovině ϱ, známe-li jeho středový průmět, anebo sestrojili středový průmět útvaru v rovině ϱ, známe-li jeho tvar.

2,63. Řešení základních úloh metrických uvedených v předchozím se používá při řešení jiných metrických úloh. Tak v obr. 10 je určena *skutečná velikost úsečky MN*, jež je na přímce p, dané stopníkem P a úběžníkem $P_u{}^s$. Lze zde postupovati tak, že přímkou p proložíme libovolnou rovinu φ a tuto otočíme kolem stopy p_φ do průmětny π (říkáme též *sklopíme*), zde se nám objeví skutečná velikost $\overline{(M)(N)}$ úsečky MN. Stopa p_φ a úběžnice $u_\varphi{}^s$ byly zvoleny tak, že jsou spolu rovnoběžné; stopa prochází stopníkem P, úběžnice jde úběžníkem $P_u{}^s$

přímky p. Úběžník S_u^s shodně promítacích paprsků je sklopený střed promítání S kolem úběžnice u_ϱ^s do průmětny π. Sklopená poloha (p) přímky p jde stopníkem P rovnoběžně se spojnicí úběžníků $\overline{P_u^s S_u^s}$. Použitím kolineačních paprsků $S_u^s M^s$, $S_u^s N^s$ dostaneme $\overline{(M)(N)} = \overline{MN}$. Měníme-li rovinu φ, vyplňují úběžníky S_u^s kružnici k^Δ o středu v úběžníku P_u^s a poloměru $\Delta = \overline{P_u^s S_u^s} = \overline{P_u^s S}$ t. zv. *dělicí*



Obr. 11. Obrys koule v středovém promítání.

kružnici přímky p. Úběžník S_u^s můžeme pak zvoliti v kterémkoliv bodě kružnice k^Δ a pak stopníkem P vésti přímku $(p) \parallel S_u^s P_u^s$ atd. Body S_u^s na kružnici k^Δ jsou též úběžníky paprsků, jež promítají shodně bodovou řadu na přímce p do průmětny π.

2,7. Středový průmět koule. Budiž v obr. 11 dána koule svým středem O a poloměrem r. Střed O je určen středovým průmětem O^s a nositelkou p ($p^s \equiv PP_u^s$), která je zvolena v kolmici k průmětně, takže $P_u^s \equiv H$. Abychom obdrželi t. zv. obrys středového průmětu koule, opíšeme ze středu promítání S kulové ploše rotační kuželovou plochu, jejíž osa je ve spojnici SO a která se dotýká koule podél kružnice o v polární rovině ϱ středu promítání S. Kružnice o je reálná, když střed S je vně koule (jako v obr. 11). Rovinu λ kolmou k průmětně π a obsahující osu SO, a tudíž též nositelku p středu O koule, zvolme za pomocnou průmětnu kolmého promítání; poněvadž v obr. 11 je vodorovná, neboť předpokládáme, že průmětna π je svislá, jsou kolmé průměty označeny indexem 1. Průmět p_1 nositelky p jde stopníkem P kolmo k přímce λ^s a kolmý průmět středu koule je $O_1 \equiv \equiv (p_1, S_1O^s)$. Obrys prvního průmětu kuželové plochy opsané kouli ze středu S středového promítání je v tečnách sestrojených z S_1 k obrysu prvního průmětu koule, což je kružnice opsaná ze středu O_1 poloměrem r. Řez této kuželové plochy s průmětnou π je t. zv. *zdánlivým* obrysem o^s středového průmětu koule. Je tedy obrys kuželosečkou a to elipsou, parabolou nebo hyperbolou, podle toho, zda středová rovina σ reálně neprotíná, dotýká se, nebo reálně protíná dotykovou (obrysovou) kuželovou plochu. Ohniska zdánlivého obrysu o^s jsou podle věty Queteletovy-Dandelinovy v středových průmětech U^s, ${}^1U^s$ oněch bodů koule, v nichž tečné roviny jsou rovnoběžné s průmětnou π. Hlavní osa $\overline{M^1M}$ elipsy o^s je vyťata na průmětu π_1 obrysem 1. průmětu dotykové kuželové plochy; je tedy elipsa o^s určena.

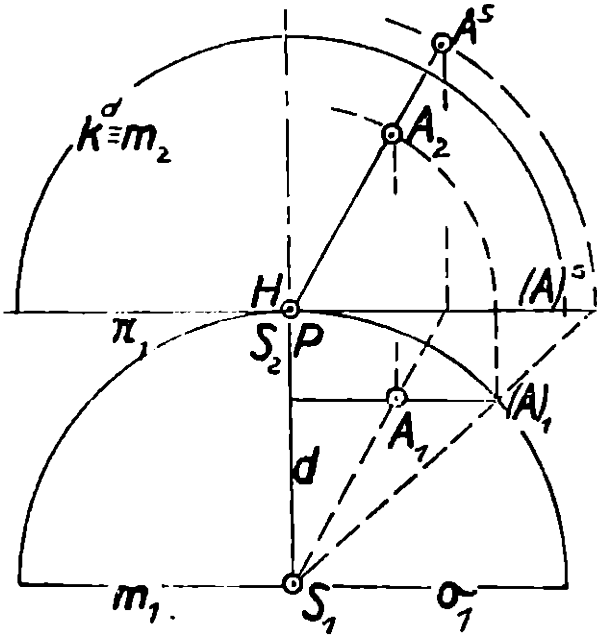
Kuželosečku o^s lze určiti, aniž používáme kolmého průmětu na rovinu λ; takové konstrukce je zvláště potřebí v *perspektivním promítání* (které je v podstatě promítáním středovým, vhodně upraveným). Zobrazíme nejprve středové průměty U^s, ${}^1U^s$ bodů kulové plochy, v nichž jsou tečné roviny koule rovnoběžné s průmětnou π, neboli krajních bodů průměru koule, který je kolmý k průmětně π, čímž dostaneme ohniska obrysu o^s. Půlící bod C^s úsečky $\overline{U^{s1}U^s}$ je středem kuželosečky o^s. Střed C^s je středovým průmětem pólu C roviny středové σ ke kulové ploše, který leží na průměru $p \equiv U^1U$ a je harmonicky sdružen k průsečíku $C' \equiv (p, \sigma)$ vzhledem k bodům U, ${}^1U$. Bod C je též v rovině ϱ skutečného obrysu o. K omezení hlavní osy obrysu o^s určeme středový průmět hlavní kružnice m kulové plochy, jejíž rovina je rovnoběžná s průmětnou π. Průmět m^s má střed O^s a její průměr A^sB^s omezí se na základě toho, že $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OU} = \overline{O^1U}$. Spojnice A^sU^s, $B^{s1}U^s$ procházejí tudíž úběžníkem D^d, jehož spojnice s hlavním bodem H je rovnoběžna s A^sB^s. V obrazci zvolen průměr $AB \perp \pi$ a proto příslušný úběžník je na distanční kružnici k^d; je to t. zv. dolní *distančník* D^d. Podél hlavní kružnice m se dotýká koule válcová rotační plocha kolmá k průmětně π a proto její tvořící přímky mají úběžník v hlavním bodě H. Obrysové přímky této válcové plochy mají tudíž středové průměty v tečnách ke kružnici m^s vedených z hlavního bodu H, jejichž dotykové body T^s, ${}^1T^s$ s kružnicí m^s jsou též na poláře h^s hlavního bodu H k této kružnici m^s. Tyto tečny HT^s, H^1T^s jsou též tečnami obrysu o^s a sice dotýkají se jej také v bodech T^s, ${}^1T^s$ jako kružnice m^s, ježto v bodech kružnice m má válcová plocha s kulovou plochou tytéž tečné roviny, jež v bodech T, ${}^1T$ jdou středem promítání S. Přímka h^s je též polárou hlavního bodu H k obrysu o^s a proto protíná hlavní osu ${}^1U^sU^sH$ v sdruženém bodě H' k bodu H a proto $\overline{C^sM} = \overline{C^{s1}M} = \sqrt{\overline{C^sH} \cdot \overline{C^sH'}}$. K omezení hlavní osy ${}^1MM$ obrysu o^s mohli bychom též užíti tečen HT^s, H^1T^s, ježto známe ohniska U^s, ${}^1U^s$, ale předchozí konstrukci třeba dáti přednost ježto lze jí užíti vždy, i když hlavní bod H padne dovnitř kružnice m^s.

3. GNÓMONICKÝ A STEREOGRAFICKÝ PRŮMĚT KULOVÉ PLOCHY

3,1. Poloha středu promítání a průmětny. Jestliže střed promítání S je uvnitř kulové plochy, pak průmětem plochy je celá průmětna π. Pro kartografii a mineralogii je důležitý t. zv. *gnómonický průmět* kulové plochy, což je její středový průmět pro střed promítání v jejím středu S na libovolnou průmětnu π, jež neprochází středem S. Význačná vlastnost tohoto průmětu je ta, že hlavní kružnice kulové plochy, t. j. ty, jichž roviny jdou středem kulové plochy, se promítají do přímek. Ježto pak nejkratší vzdálenost dvou míst A, B kulové plochy měřena na kulové ploše je v menším oblouku hlavní kružnice, jež jde těmito body,[3]) promítne se tato vzdálenost v gnómonickém průmětě do úsečky $\overline{A^sB^s}$; toho se po-

[3]) V případě, že body A, B jsou krajními body průměru kulové plochy, nebo říkáme též diametrálně protilehlé, je jejich sférická vzdálenost rovna polovině hlavní kružnice kulové plochy.

užívá v kartografii. V krystalografii stěny krystalů se zobrazují nejprve kolmicemi k nim ze středu zvolené kulové plochy do bodů kulové plochy a tyto pak gnómonickým průmětem do roviny π. Stěny krystalů, jež jsou rovnoběžny s určitým směrem a tvoří t. zv. zonu, zobrazují se nejprve do bodů hlavní kružnice kulové plochy a gnómonickým průmětem do bodů téže přímky. Této vlastnosti po prvé použil *Neumann* r. 1823 v díle „Beiträge zur Krystallonomie".

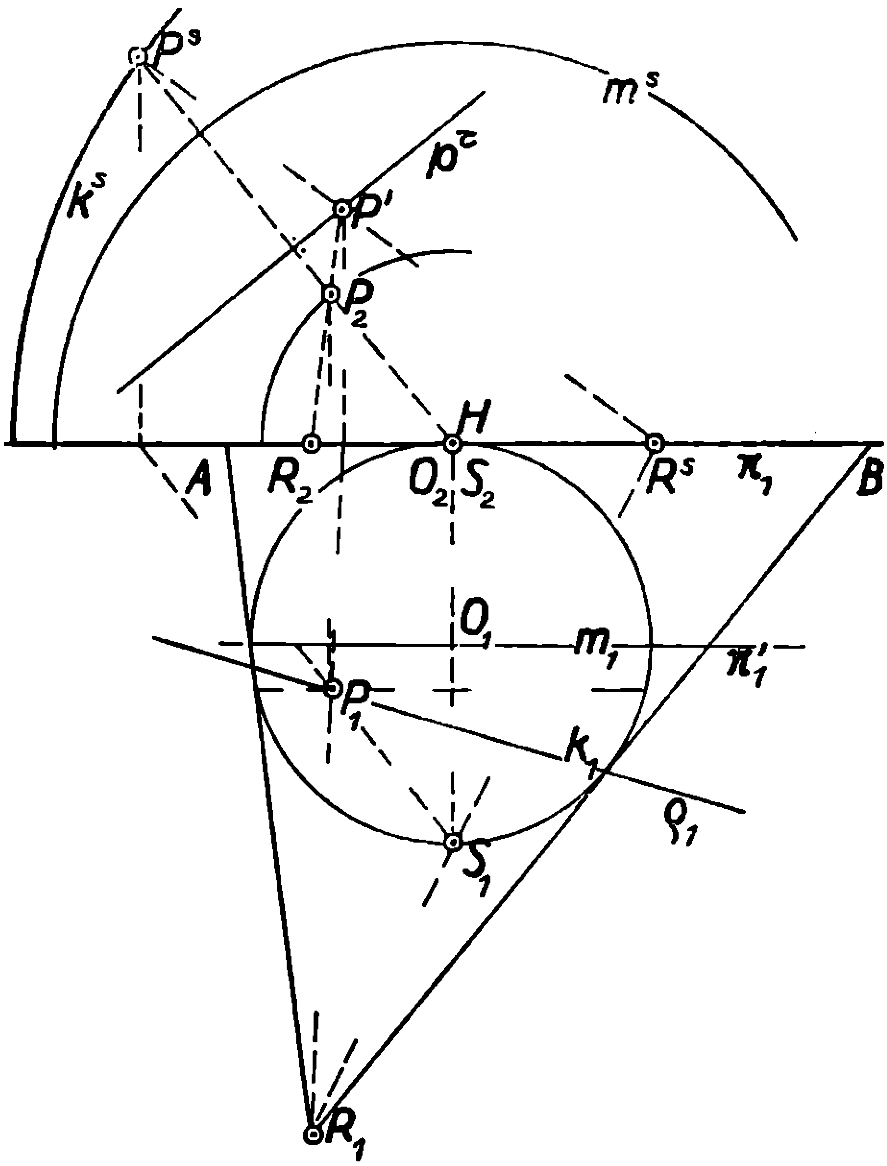


Obr. 12. Gnómonický průmět kulové plochy.

V obr. 12 ukázán gnómonický průmět v půdoryse a náryse. Průmětna π středového průmětu zvolena v druhé průmětně tak, že se dotýká kulové plochy o středu S a poloměru d v hlavním bodě H. Poloměr d je tu distancí. Jak se určí gnómonický průmět A^s bodu A kulové plochy je patrno z obrazce. Kdybychom promítali celou kulovou plochu, tu k středovému průmětu A^s příslušely by dva body kulové plochy jako originály a to diametrálně protilehlé. Abychom měli vzájemnou jednoznačnost, nutno uvažovati jen o polovině kulové plochy, jež je v obrazci omezena hlavní kružnicí m v rovině rovnoběžné s průmětnou π a jejíž nárys splývá s distanční kružnicí k^d. Chceme-li ke gnómonickému průmětu A^s určiti originál A, užijeme otočení promítacího paprsku SA^s kolem osy kolmé k průmětně π a jdoucí středem S.

3,2. Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání S ležící na kulové ploše a pro průmětnu π rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání S.

Stereografický průmět, který v podstatě znal již kolem roku 160 před Kr. Hipparchos, má dvě důležité vlastnosti. Předně *všechny kružnice kulové plochy se promítají do kružnic* a pak, *úhel dvou křivek kulové plochy je v průmětě zachován.*



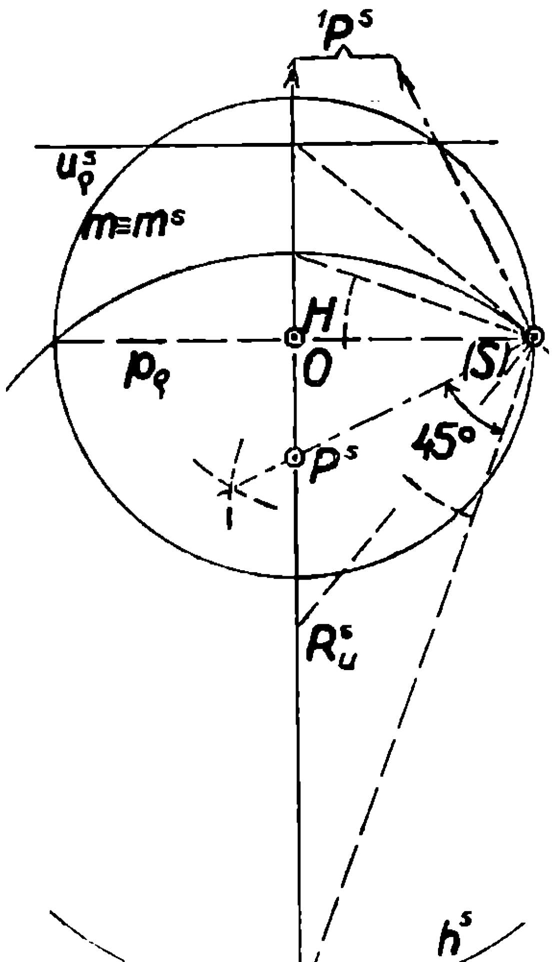
Obr. 13. Stereografický průmět kulové plochy.

Dokážeme tyto vlastnosti podle Pelze (X)[4]) (viz obr. 13), za použití kolmého promítání na dvě k sobě kolmé průmětny. Druhá průmětna nechť splývá s průmětnou π stereografického průmětu a kulová plocha nechť se dotýká této roviny v bodě H a střed promítání S nechť je diametrálně protilehlý k bodu H; leží tedy na průměru HOS, kde O je střed kulové plochy. Na kulové ploše buď kružnice k v rovině ϱ. Zvolme první průmětnu bodem O kolmo k průsečnici $(\varrho\pi)$, takže půdorysem roviny ϱ je přímka ϱ_1. Podél kružnice k se dotýká kulové plochy rotační plocha kuželová, jejíž vrchol R je v první průmětně; nárys R_2 je na přímce π_1. Osvětlíme-li kulovou plochu z bodu R, je jejím vrženým stínem na průmětnu π kuželosečka k' (v obr. 13 elipsa), jež má ohniska v hlavním bodě H a v stereografickém průmětu R^s vrcholu R a vrcholy má v průsečících A, B půdorysného obrysu kuželové plochy s půdorysem π_1. Zvolme libovolný bod P na kružnici k; jeho vržený stín ze středu R na průmětnu π je v bodě P' a stereografický průmět je v bodě P^s. Spojnice P^sP' prochází stopníkem R^s spojnice RS na průmětně π. Bod P' náleží kuželosečce k' a tečna k této sestrojená v bodě P' je stopou p^τ tečné roviny τ světelné plochy kuželové podél tvořící přímky RP na průmětně π. Ježto rovina τ je též tečnou rovinou kulové plochy v bodě P, musí $p^\tau \perp O_2P_2$ a tudíž bod P^s je bodem souměrně sdruženým k ohnisku H kuželosečky k' podle její tečny p^τ; tedy stereografický průmět k^s kružnice k je kružnice k^s o středu R^s a poloměru $\overline{AB}$. Tím je prvá vlastnost stereografického průmětu dokázána a určen střed kružnice k^s v středovém průmětu vrcholu R kužele opsaného kulové ploše podél kružnice k. Stereografický průmět P^s je též sklopenou polohou bodu P kolem stopy p^τ, ježto délky $\overline{P'P}$ a $\overline{P'H}$ jsou stejné jako délky tečen ke kulové ploše z bodu P' a dále $\overline{P'P^s} = \overline{P'H}$.

[4]) Značí spis označený X v literatuře uvedené na konci této knížky (str. 89).

Protínají-li se dvě křivky jdoucí na kulové ploše bodem P v jistém úhlu, který se měří úhlem jejich tečen v bodě P, svírají tečny jejich stereografických průmětů v bodě P^s týž úhel, ježto tyto tečny se dostanou z prvých sklopením roviny τ kolem stopy p^τ do průmětny π. Zachovává tudíž stereografický průmět kulové plochy úhly; říkáme též, že stereografický průmět je *konformní*.

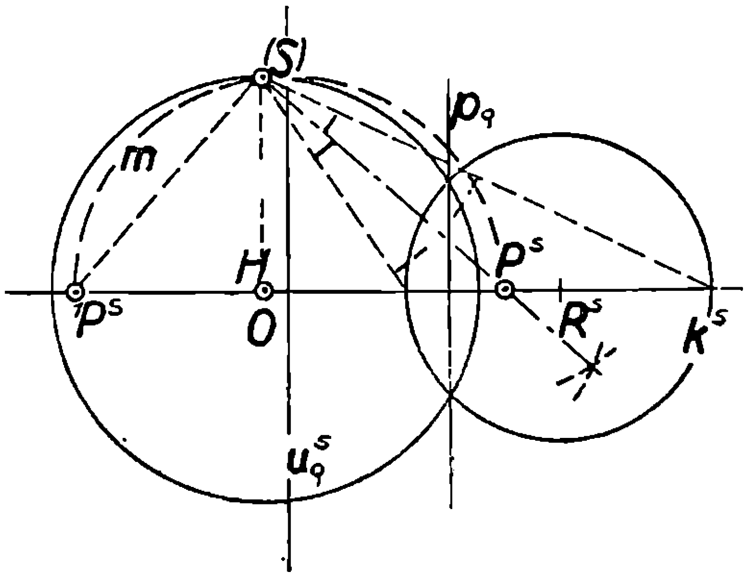
Průmětna π se volívá nejčastěji ve středu O kulové plochy kolmo k poloměru OS (v obr. 13 je to rovina π') a tak vzniklý stereografický průmět je podobný s tím, který jsme sestrojili a sice pro poměr 1 : 2 (jak zvoleno též v obr. 14 a 15). Označíme-li m hlavní kružnici kulové plochy v této nové průmětně (π'), tu je $m \equiv m^s$. Stereografické průměty hlavních kružnic jsou kružnice, jež půlí kružnici m, ježto průsečnice jejich rovin s rovinou π' jsou průměry kružnice m. Střed stereografického průmětu takové hlavní kružnice je na kolmici spuštěné ze středu promítání S na rovinu kružnice, ježto podél této kružnice kulové ploše opsaná dotyková plocha kuželová přejde v plochu válcovou.[5])



Obr. 14. Stereografický průmět hlavní kružnice kulové plochy.

[5]) Stereografického průmětu použil kolem r. 140 po Kr. Ptolemaios k sestrojení mapy hvězdné oblohy. Velice hojně je užíván stereografický průmět i

3,21. V obr. 14 resp. 15 jsou řešeny v stereografickém průmětě tyto úlohy: *Určiti průměty sférických středů P, ${}^1P$, hlavní kružnice h* resp. *vedlejší kružnice k*, jejichž stereografické průměty jsou dány. Hlavní kružnice, jež jdou sférickými středy P, ${}^1P$ protínají kolmo hlavní kružnici h a v druhém případě vedlejší kružnici k. Stereografické průměty těchto hlavních kružnic protínají kolmo v obr. 14 kružnici h^s



Obr. 15. Stereografický průmět kružnice k.

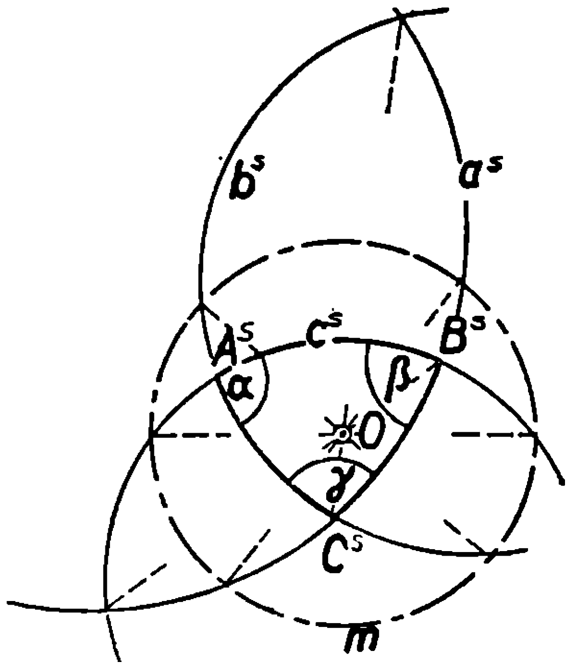
a v obr. 15 kružnici k^s a mimo to musí v obou případech půliti hlavní kružnici m ležící v průmětně. Má-li kružnice půliti kružnici m o poloměru r, tu protíná kolmo kružnici m^i, soustřednou o poloměru ri, $i^2 = -1$), ježto podmínka kolmosti dvou kružnic je, aby čtverec jejich středné se rovnal součtu čtverců jejich poloměrů. Kružnice pak, jež kolmo protínají dvě kružnice tvoří svazek kružnic, jehož základní body jsou na spojnici jejich středů a rozdělují harmonicky obě kružnice; jejich středy jsou na chordále obou kružnic. Průměty P^s, ${}^1P^s$ sférických středů kružnice h v obr. 14, a kružnice k v obr. 15, jsou základními body svazku kružnic kolmo protínajících kružnici h^s případně k^s a imaginární kružnici m^i a jsou tudíž na spojnici jejich středů $OR_u{}^s$ případně OR^s. Středy $R_u{}^s$, R^s jsou stereografickými průměty vrcholů kuželových ploch opsaných kulové ploše podél kružnice h případně k, z nichž prvý je úběžným bodem. Z bodu (S), kde $O(S) \perp OR^s$

---

v krystalografii. Zobrazíme-li podle odst. **3,1** stěny krystalu v body kulové plochy a tyto pak stereograficky promítneme, zobrazují se stěny téže zóny do bodů kružnice, jež půlí kružnici m^s.

a ležícím na kružnici m, promítají se průsečíky kružnice m^1 se střednou OR^s minimálními přímkami[6]) a proto body P^s, ${}^1P^s$ se promítají z bodu (S) přímkami kolmými a ježto rozdělují harmonicky též kružnici h^s, případně k^s, jsou na osách úhlů spojnic bodu (S) s průsečíky kružnice h^s příp. k^s se střednou OR^s. Středy stereografických průmětů hlavních kružnic kolmých ke kružnici h příp. k jsou na ose souměrnosti u_ϱ^s úsečky $\overline{P^{s1}P^s}$, jež je úběžnicí rovin kolmých k přímce OR, a mezi něž náleží též rovina ϱ kružnice h nebo k. V obr. 14 je u_ϱ^s antipolárou středu R_u^s vzhledem k distanční kružnici m.

3,22. Stereografického průmětu lze užíti též k *řešení sférických trojúhelníků.* Z toho, že sférický průmět hlavní kružnice půlí kružnici m, vyplývá pro rovinu bezprostředně, že součet úhlů v křivočarém trojúhelníku $A^sB^sC^s$ (obr. 16), omezeném oblouky tří kružnic a^s, b^s, c^s jejichž bod O stejných mocností (t. zv. potenční střed) je uvnitř všech tří, má součet úhlů $\alpha + \beta + \gamma > 180°$. Chordály těchto tří kružnic jdou bodem O, který má ke všem třem tutéž zápornou mocnost a tedy existuje kružnice m, jež je půlena všemi třemi kružnicemi a^s, b^s, c^s. Kružnice m je distanční kružnicí stereografického promítání, v němž jsou a^s, b^s, c^s průměty tří hlavních kružnic a, b, c, jež omezují celkem 8 sférických trojúhelníků, z nichž jeden je ABC a v něm je součet úhlů $\alpha + \beta + \gamma > 180°$.



Obr. 16. Stereografický průmět sférického trojúhelníka.

[Kdyby bod O byl vně nebo na kružnicích a^s, b^s, c^s, kolik by byl součet $\alpha + \beta + \gamma$?]

---

[6]) Viz *L. Seifert* l. c., str. 59 a n.

4. LINEÁRNÍ PERSPEKTIVA

Perspektiva lineární (přímočará) je středovým průmětem, při němž jsou splněny jisté podmínky, jež odpovídají dívání se jedním okem. Paprsky světelné vycházející z bodů objektu do našeho oka, procházejí oční čočkou a na sítnici vzbuzují jistý obraz. Týž obraz můžeme vytvořiti středovým průmětem na průmětně π položené mezi oko a objekt pro střed promítání přibližně ve středu zornice oka. Distance musí tu býti zřejmě větší než je nejmenší zraková vzdálenost, která je 21—24 cm, aby obraz průmětu mohl akomodací oka býti přiveden na sítnici. Dále objekt perspektivně zobrazovaný musí býti v zorném poli, t. j. uvnitř rotační kuželové plochy, jejíž osou je hlavní zorný paprsek oka splývající s kolmicí ze středu S promítání na průmětnu π a úhel při vrcholu S je 40°—50°, neboť klidné oko pojme jen paprsky, které jsou v této kuželové ploše. Konstrukce jsou tu stejné jako při středovém promítání; jen je často nutno vzhledem k větší distanci obcházeti nepřístupnost některých úběžníků a úběžnic. Při středové perspektivě se zobrazují přímky obecně zase v přímky, proto jí též říkáme lineární perspektiva; setkáváme se s ní při konstrukci názorných obrazů ve všech oborech lidské činnosti; architekti, malíři, sochaři atd. jí používají; a lze ji realisovati i mechanicky fotografickým přístrojem. Vznik a velký rozvoj perspektivy vděčí hlavně malířství, kde se jí potřebuje. V poslední době perspektivní obrazy docílené fotografováním napomáhají novému praktickému užití fotografií v oboru měření, v t. zv. *fotogrammetrii.*[7])

---

[7]) Dr *Josef Kounovský*: „Theoretické základy fotogrammetrie", Cesta 42, 1948. — Dr *Miroslav Menšík*: „Fotogrammetrie praktická", Cesta 43, 1948.

5. PERSPEKTIVA KŘIVOČARÁ

5,1. Podmínky na názorný obraz. V malířství lineární perspektiva našla již dávno silnou kritiku. Nejen to, že středový perspektivní obraz má býti pozorován jedním okem, nýbrž hlavně okolnost, že ve větších vzdálenostech od hlavního bodu jsou nepřirozená skreslení. Proto vidíme v mistrovských malířských dílech, že autor pracuje s dvěma i více horizonty (t. j. úběžnicemi vodorovných rovin), nebo na př. že koule se tam zobrazují vždy jako kruhy, ač podle zásad lineární perspektivy měly by to býti elipsy atd., čili že se tu mnohdy nedbá lineární perspektivy. To vše dalo vznik jiným perspektivám a byl to hlavně *Quido Hauck*, který prvý systematicky se tím zabýval.[8]) Takové perspektivy, při nichž přímky se obecně nezobrazují jako přímky, nýbrž jako křivky, se jmenují *křivočaré*,[9]) dokonce v poslední době též *patologické*.[10])

Podmínky, jež se kladou na názorný a věrný dvojrozměrný obraz prostorového předmětu, za předpokladu svislé průmětny, jsou tyto:

1. Podmínka *přímočarého horizontu*; to znamená, že obrazy bodů vodorovné roviny, jež jde okem, jsou na nákresně v téže (vodorovné) přímce zvané *horizont obrazu*.

2. Podmínka *svislosti*: Svislé přímky mají za obrazy zase svislé přímky.

3. Podmínka *kolinearity*: Všechny přímky mají za obrazy zase přímky.

---

[8]) *G. Hauck*: „Die subjektive Perspektive und die horizontalen Kurvaturen des dorischen Stils“, Stuttgart r. 1879. U nás těmto otázkám věnoval pozornost v prvých svých pojednáních r. 1940 zemřelý prof. Mil. Pelíšek.

[9]) Podle *Kellera*: „Kurwierte Perspektiven“, Sitzungsberichte der Akademie in Wien; roč. 1926.

[10]) *Graf*: „Pathologische Perspektiven“, Jahresbericht d. d. Math. Vereinigung, sv. 50 (1941).

4. Podmínka *horizontálního zakřivení*: Průčelné vodorovné přímky mají obrazy v křivkách, jež jsou vyduté (konkávní) k horizontu.

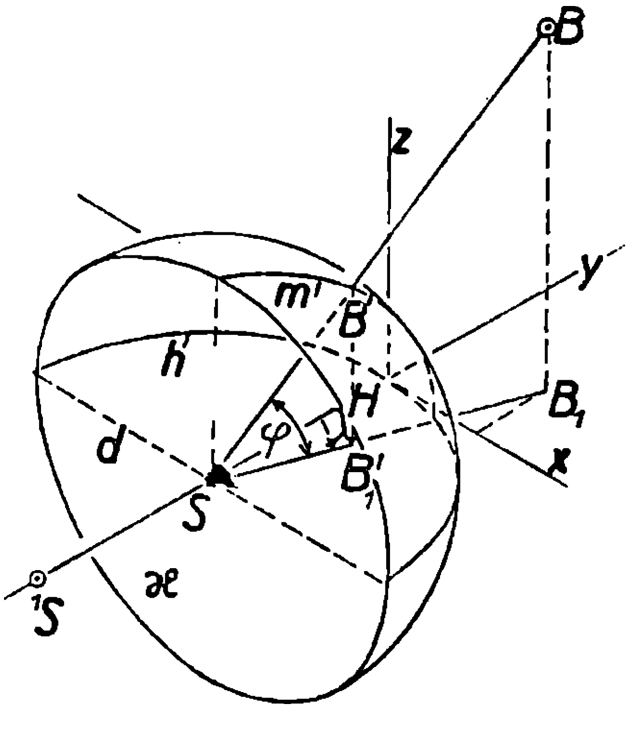
5. Podmínka *kruhového obrazu koule.*

6. Podmínka *věrnosti zorného úhlu.* Délka obrazu úsečky má býti úměrná zornému úhlu úsečky, t. j. úhlu paprsků vedených ze středu promítání ke koncům úsečky. Hauck označuje tuto podmínku jako zásadu konformity.

7. Podmínka *věrnosti úhlu protínání.* Úhel, pod kterým se dvě přímky v prostoru pro pozorovatele zdánlivě protínají, má se v obraze jeviti ve skutečné velikosti.

8. Podmínka *věrnosti zorného kužele.* Velikost perspektivního obrazu nějakého obrazce má býti úměrna obsahu plochy, jíž vytíná zorný kužel obrazce na kulové ploše o středu v středu promítání a o poloměru 1.

Je nemožné, aby perspektivní obraz splňoval všechny tyto podmínky, z nichž dokonce některé (na př. podmínky 3 a 4) si odporují. Při lineární perspektivě jsou ve všech místech splněny prvé tři podmínky. Všechny podmínky až na 4. jsou splněny v hlavním bodě. Aby tedy v průmětě byla splněna většina těchto podmínek (jako při lineární perspektivě v hlavním bodě), třeba promítati na plochu, jež je kolmá ke všem paprskům jdoucím středem promítání S a tudíž na kulovou plochu $\varkappa$ o středu S; její poloměr označ-

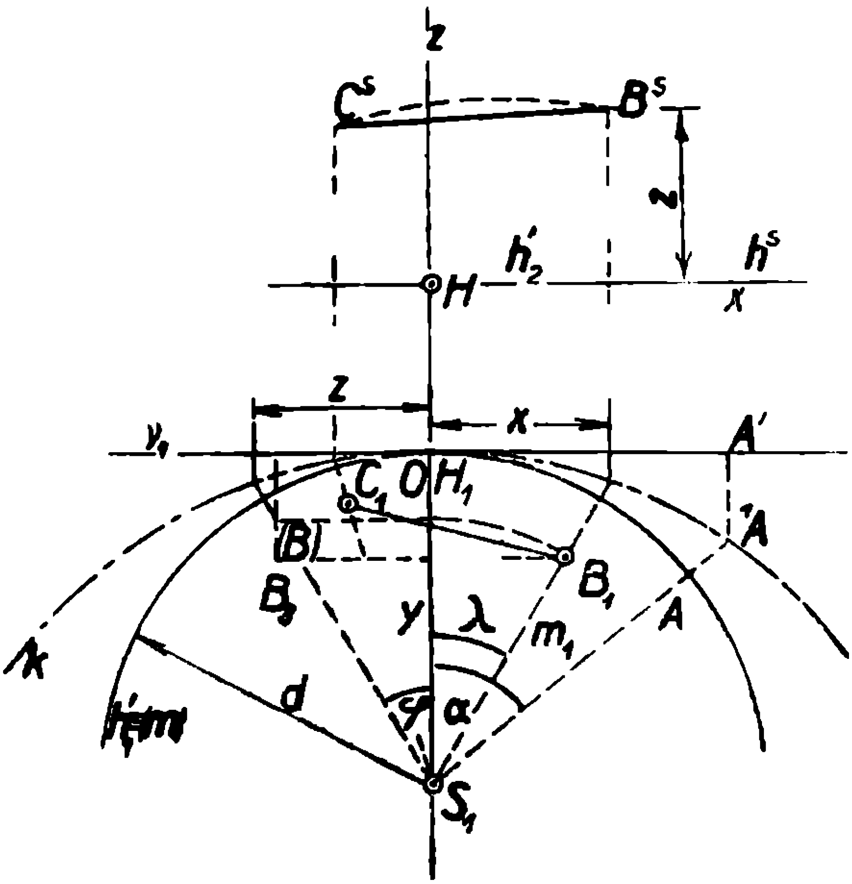


Obr. 17. Základy křivočaré perspektivy. (Stereosférická perspektiva.)

me d (jako distance) (viz obr. 17). Pro promítnutí prostorových útvarů na kulovou plochu $\varkappa$ je třeba průmět převésti do roviny (do nákresny). Ježto kulová plocha není rozvinutelnou plochou do roviny, je třeba ji zobraziti nějak na rovinu. Zobrazení kulové plochy na rovinu je známa celá řada; zabývá se jimi hlavně kartografie. V odst. **3** jsme poznali z nich gnómonickou a stereografickou projekci. Prvá vede k lineární perspektivě a druhá k t. zv. *stereosférické perspektivě.*[8]) V obr. 17 je znázorněna polovina kulové plochy $\varkappa$ o středu S, na niž promítáme body B prostoru do bodů B'. Bod B' kulové plochy je na ní určen souřadnicemi λ a φ (jako na zeměkouli zem. délkou a šířkou). Počátek zeměpisných souřadnic je ve sférickém středu H polokoule. Tečná rovina (xz) kulové plochy v bodě H budiž nákresnou. Při stereosférické perspektivě promítáme body B' z bodu ${}^1S$ ($\overline{{}^1SS} = \overline{SH} = d$) na rovinu (xz). Podle odst. **3,2** vyhovuje stereosférická perspektiva podmínkám 1, 4, 5 a 7. Podmínka 3 je splněna jen u přímek rovnoběžných s osou $y \equiv \equiv SH$, t. j. u t. zv. přímek hloubkových.

5,2. Upravené perspektivy. Z jiných takových zobrazení kulové plochy na rovinu (xz) povšimněme si toho, jež vede k *Hauckově perspektivě.* Bodu $B'(\lambda; \varphi)$ kulové plochy $\varkappa$ přiřazujeme bod B^s roviny (xz) o souřadnicích $\xi = d \,.\, \lambda$, $\eta = = d \,.\, \varphi$, je-li d poloměr kulové plochy a ξ, η souřadnice o osách x, y. Horizont h^s splyne tu s osou x a délky na něm, jakož i na obrazech svislých přímek, se zobrazují z kulové plochy věrně; podmínka 6 je tu splněna jen pro obrazy těchto přímek. Neexistuje totiž zobrazení kulové plochy, které by zachovávalo délky. Při této perspektivě jsou splněny podmínky 1, 2, 4, kdežto podmínka 6 je splněna jen pro svislé přímky a horizont. Obecné přímky v prostoru zobrazují se v transcendentní křivky.

Hauckovu perspektivu upravuje *Stark* (XI) ve své *sítnicové perspektivě* tak, že místo transcendentních obrazů přímek rýsuje přímky a kombinuje tak Hauckovu perspektivu s lineární perspektivou. Při tom k rektifikaci oblouků horizontu a poledníků m kulové plochy používá vhodné křivky k (je to t. zv. quadratrix Dinostratova).



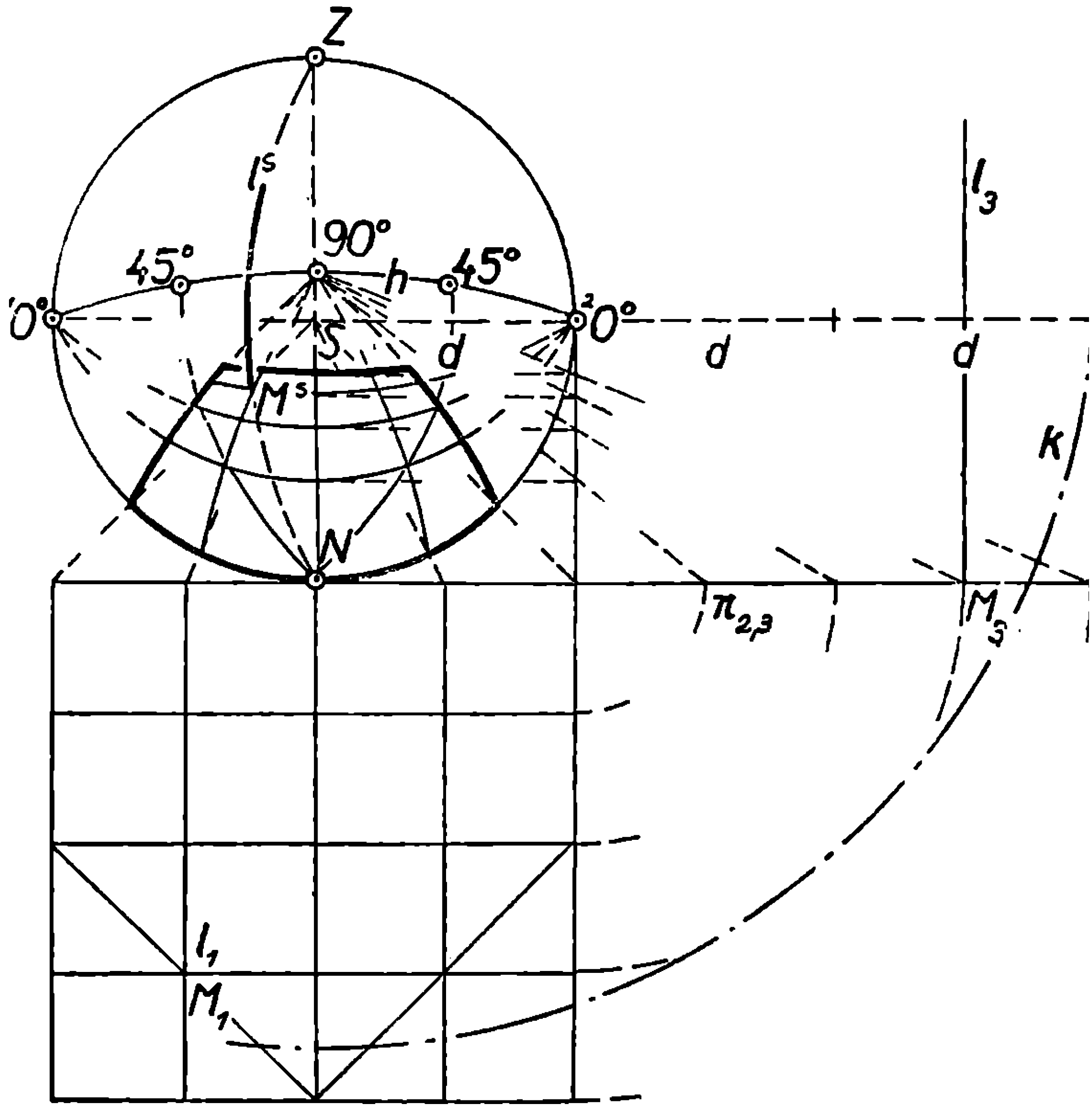
Obr. 18. Křivočará perspektiva úsečky.
(Hauckova a Starkova perspektiva.)

V obr. 18 je znázorněn postup Starkův. Horizont a tečná rovina $\nu \equiv (xz)$ v hlavním bodě H má půdorys v tečně ν_1 kružnice h_1' v bodě H. Body rektifikační křivky k, na př. bod ${}^1A$ patřící k bodu A kružnice h_1', dostáváme takto: přeneseme $\overline{H_1A'} = \widehat{H_1A}$ a tu prodloužený poloměr SA^1A protíná kolmici $A'^1A \perp \nu_1$ v bodě ${}^1A$ křivky k. Poloměr křivosti křivky k ve vrcholu H_1 je $1{,}5d$; proto Stark nahrazuje křivku k od vrcholu H_1 až k bodu ${}^1A$ a bodu souměrně sdruženému k ${}^1A$

podle osy y, pro něž $\sphericalangle H_1S_1A = 50°$, kružnicí o poloměru 1,55d. Máme-li křivku k narýsovánu, lze obraz B^s bodu B na rovině v, jež je v náryse ve skutečné velikosti, snadno sestrojiti. Budiž bod B dán půdorysem B_1 a bokorysem B_3. Paprsek $m_1 \equiv S_1B_1$ protíná křivku k v bodě, jímž sestrojená rovnoběžka s osou z dává přímku, na níž je B^s a současně souřadnici x bodu B^s pro souřadnicovou soustavu x, z. Abychom dostali souřadnici z bodu B^s, třeba totéž provésti v rovině meridiánu m kulové plochy $\varkappa$, jehož půdorys je v přímce m_1. Meridián m otočíme kolem svislé osy jdoucí středem S do třetí hlavní průmětny do polohy $(m) \equiv h_1'$. Bod B po otočení a sklopení přejde do polohy (B) a tu paprsek $S_1(B)$ protne křivku k v bodě, jehož vzdálenost od osy $y \equiv S_1H_1$ je hledanou souřadnicí z bodu B^s.

V obrazci je zobrazena ještě vodorovná úsečka BC. V Hauckově perspektivě se sestrojí obrazy několika bodů úsečky, zvláště pak bodů koncových a spojí se obloukem křivky (v obrazci je vyčárkován). Stark nahrazuje oblouk úsečkou a bere úběžník přímky BC na horizontu, který ovšem vyjde jinde než při Hauckově perspektivě. Samozřejmě, že při tomto postupu dostávají se nedůslednosti, jež se Stark snaží různě odstraňovati.

5,3. V předchozích případech bylo viděti vždy geometrický podklad řešení křivočaré perspektivy. Ale v *křivočaré perspektivě*, kterou vydal *Serrano* (XII), je těžko se dopátrati geometrického vztahu a možno tuto perspektivu nazvati skutečně jen zobrazením podle nějakých zásad více méně uměleckých. V obr. 19 ukázáno, jak se v jeho perspektivě zobrazí čtvercová síť daná půdorysem a bokorysem zleva ve vodorovné rovině π. Perspektiva rýsuje se tu do kruhu o středu S a poloměru d. Vodorovné průčelné přímky mají úběžníky v koncových bodech ${}^1O°$, ${}^2O°$ vodorovného průměru, svislé přímky v koncových bodech Z, N svislého průměru. Horizontem je tu kruhový oblouk h mezi úběžníky ${}^1O°$, ${}^2O°$ a poloměru 3d. Horizont protíná průměr NZ v úběž-



Obr. 19. Serranova křivočará perspektiva.

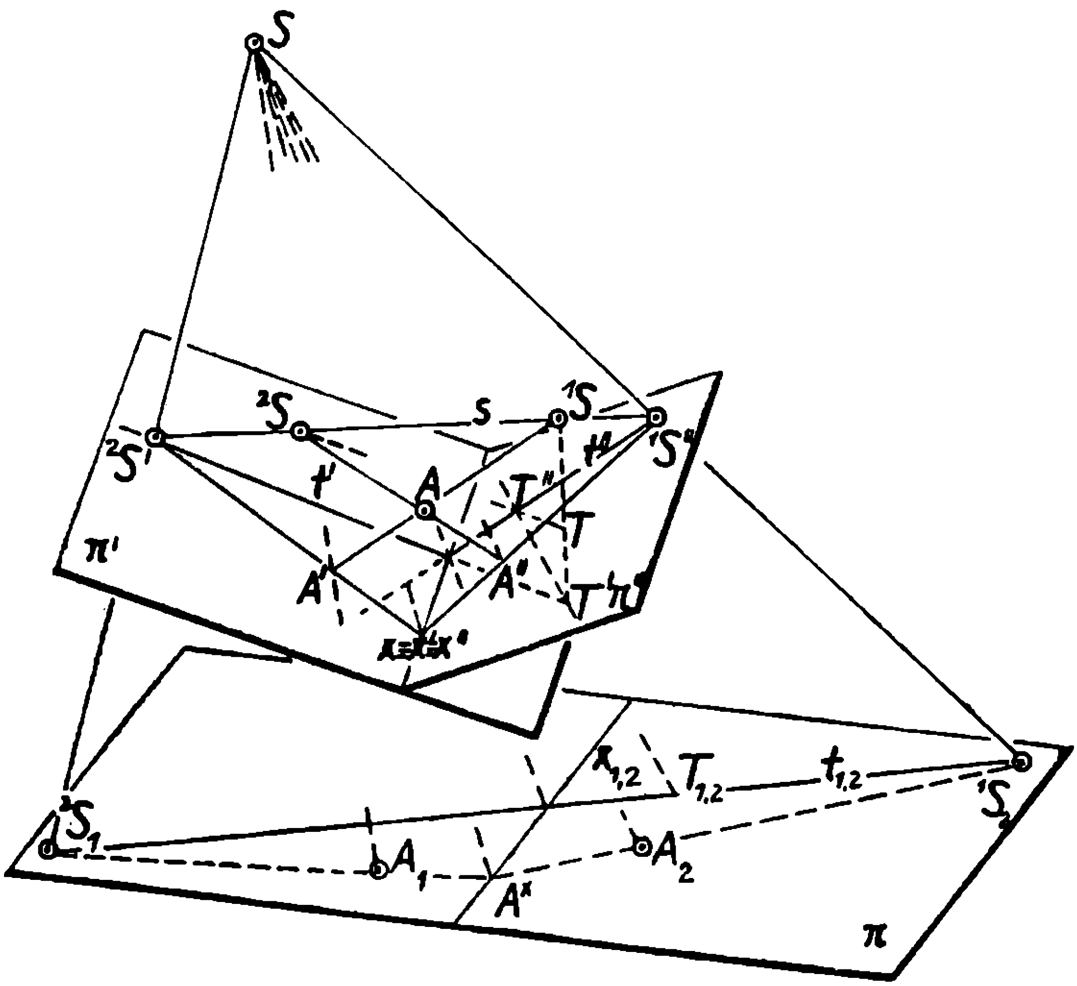
níku 90° přímek hloubkových, t. j. kolmic k průčelné rovině, jež se zobrazují v kruhové oblouky o poloměrech $3d$, a jejichž středy jsou na kružnici k o středu 90° a jdoucí bodem na průměru $^1O^{\circ}\,{}^2O^{\circ}$ vzdáleném od středu S o délku $3d$. Průčelné vodorovné přímky mají za obrazy kruhové oblouky jdoucí úběžníky $^1O^{\circ}$, $^2O^{\circ}$ (jejich půlící body se dostanou v bokoryse podle obrazu). Vodorovné úhlopříčky sítě mají míti úběžníky v půlících bodech 45°, 45° oblouků $^1O^{\circ}90^{\circ}$, $^2O^{\circ}90^{\circ}$. Svislá přímka l v bodě M sítě má za obraz kruhový oblouk jdoucí body N, M^{3}, Z.

Z uvedeného příkladu je patrno, že je tu těžko najíti nějakou zobrazovací zásadu; uvádíme tento případ jen jako ukázku, jak všelijak, více méně vhodně, se lidé snaží napravovati lineární perspektivu, která přece jen, i přes některé své vady, zůstává vedoucí a nejužívanější při perspektivním zobrazování.

6. ZOBRAZENÍ DVOJOBRAZOVÉ

6,1. Bod v obecném zobrazení dvojobrazovém. V odst. **2,1** jsme viděli, že bod v prostoru není určen jedním svým středovým průmětem a bylo třeba jej určovati ještě některou jeho nositelkou. Většina užívaných zobrazení útvarů v prostoru užívá *dvou obrazů* bodů; takové dvojice ovšem nemohou míti v nákresně zcela libovolnou vzájemnou polohu, nýbrž musí to býti nějak uspořádané dvojice. Bod v nákresně je určen dvěma souřadnicemi a tedy dva body čtyřmi souřadnicemi. Protože poloha každého bodu v prostoru je určena jen třemi souřadnicemi, soudíme odtud, že ne každá dvojice bodová nákresny je obrazem bodu v prostoru, nýbrž jen ty dvojice, jež vyhovují jisté podmínce, o níž mluvíme dále.

Obecný případ dvojobrazového průmětu je znázorněn v obr. 20. Body A prostoru promítáme ze dvou středů ${}^1S$, ${}^2S$ na dvě různé průmětny π', π'' do bodů A', A''. Středy ${}^1S$, ${}^2S$ a bod A určují rovinu (dvojnásob promítací), jejíž stopy na průmětnách π', π'' jdou stopníky ${}^2S'$, ${}^1S''$ spojnice $s \equiv {}^1S{}^2S$ a protínají se v bodě na průsečnici x průměten π', π''. Stopníky ${}^2S'$, ${}^1S''$ přímky s jsou průměty středů promítání ${}^2S$, ${}^1S$ na první průmětnu π', případně na druhou průmětnu π''. Tyto stopníky jmenujeme *uzlovými body*, nebo stručně *uzly* průměten π', π''. Vidíme tudíž, že prvý průmět A' a druhý průmět A'' bodu A jsou na uzlových paprscích, jež se protínají v bodě průsečnice x obou průměten a jež jmenujeme též odpovídajícími si uzlovými paprsky. Abychom převedli oba průměty do téže roviny, jež splývá s nákresnou, promítněme



Obr. 20. Vznik dvojobrazového zobrazení.

oba průměty v rovinách π' a π'' z libovolného (mimo s ležícího) středu S na rovinu π. Prvý průmět A' se promítne do prvého obrazu A_1 a druhý průmět A'' do druhého obrazu A_2; uzly mají za průměty uzly ${}^2S_1$, ${}^1S_2$ nákresny a průsečnice x se promítne do základnice $x_{1,2}$. Dostáváme pak: *V obecném dvojobrazovém zobrazení první obraz A_1 a druhý obraz A_2 téhož* *bodu A jsou na odpovídajících si paprscích uzlových, t. j. těch, jež se protínají na základnici* $x_{1,2}$.

Zvolíme-li tudíž první obraz A_1 libovolně, musí druhý obraz A_2 ležeti na uzlovém paprsku odpovídajícím uzlovému paprsku ${}^2S_1A_1$, který jde průsečíkem $A^x \equiv (x_{1,2}, {}^2S_1A_1)$. V tom tkví uspořádání dvojic obrazů bodů v prostoru.

Nejobecnější dvojobrazové zobrazení dostaneme, když pole druhých obrazů přemístíme tak, že se poruší perspektivnost obou paprskových svazků uzlových anebo kolineací pole druhých obrazů převedeme v jiné pole. Při tom uzlové svazky nebyly by sice perspektivní, ale zůstaly by projektivní. Obrazům v případě, jak vyznačeno v obr. 20 v rovině π, říkáme též, že jsou v *orientované poloze*. V dalším budeme uvažovati jen o případě posledním.

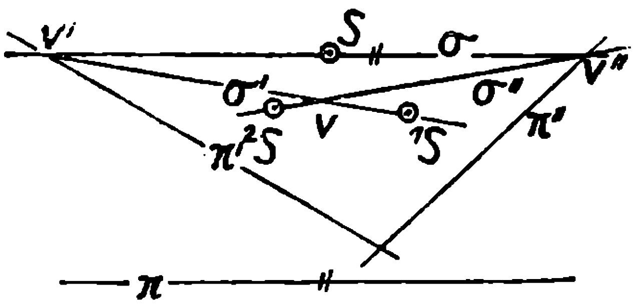
Dány-li uzly ${}^2S_1, {}^1S_2$ v nákresně, základnice $x_{1,2}$, průmětny π', π'' a středy $S, {}^1S, {}^2S$, a vyhovují-li obrazy A_1, A_2 podmínce, že jsou na odpovídajících si uzlových paprscích, tu bod A v prostoru je obecně jednoznačně určen.

Které body v prostoru vymykají se této jednoznačnosti? (Všimněte si bodů přímky $s \equiv {}^1S{}^2S$!)

Dány-li jen uzly ${}^2S_1, {}^1S_2$ v nákresně a základnice $x_{1,2}$, je možno průmětny π', π'', středy promítání $S, {}^1S, {}^2S$ zvoliti nekonečně mnoha způsoby, ale všechny originály k obrazům sestrojené jsou kolineární, t. j. bodu, přímce, rovině jednoho odpovídá bod, přímka resp. rovina druhého a incidence je zachována.

Ve zvláštních případech jsou často středy $S, {}^1S, {}^2S$ na téže přímce, pak uzly ${}^2S_1, {}^1S_2$ splývají a odpovídající si paprsky uzlové též splývají. Případ, kdy spojnice $s \equiv {}^1S{}^2S$ protíná průsečnici x ponecháváme k úvaze laskavému čtenáři.

Body v prostoru, jejichž prvé obrazy jsou úběžnými body nákresny musí míti prvé průměty na průsečnici v' středové roviny σ, jdoucí středem S rovnoběžně s průmětnou a nákresnou π (viz schematický obr. 21). Proto body, které mají prvé obrazy úběžné, jsou v prvé středové rovině $\sigma' \equiv ({}^1Sv')$. Podobně body mající druhé obrazy úběžné jsou v druhé středové rovině $\sigma'' \equiv ({}^2Sv'')$, kde je přímka $v'' \equiv (\sigma\pi'')$. Body, jejichž oba obrazy jsou úběžné, jsou na průsečnici v středových rovin σ' a σ''.

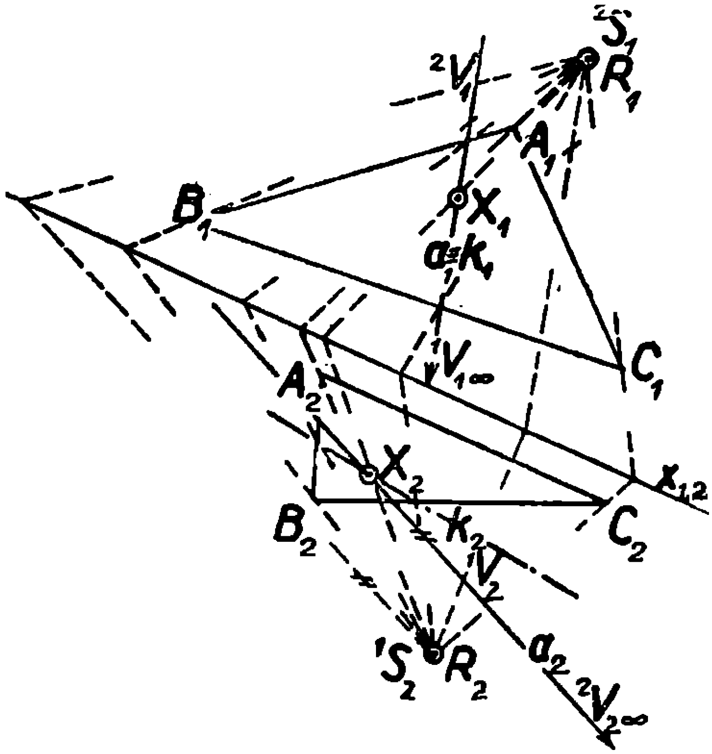


Obr. 21. Středové roviny σ, σ', σ'' dvojobrazového zobrazení.

Ptejme se, kde jsou v prostoru body, jejichž oba obrazy splývají? Místem takových bodů v prostoru je t. zv. *koincidenční* útvar. Podle uspořádání dvojic obrazových je patrno, že splývající obrazy takových bodů mohou býti buď na základnici $x_{1,2}$ anebo na spojnici $t_{1,2}$ obou uzlů ${}^2S_1$, ${}^1S_2$ (obr. 20). Prvému místu odpovídají jako originály body průsečnice x obou průměten. Body odpovídající druhému místu dostaneme takto. Obrazy $t_1 \equiv t_2$ náleží k průmětům t', t'', jež jdou uzly průměten. Bodu $T_1 \equiv T_2$ na $t_{1,2}$ odpovídají průměty T', T'' ležící na paprsku $ST_{1,2}$. Spojnice ${}^1ST'$ a ${}^2ST''$ protínají se v bodě T koincidenčního útvaru. Probíhá-li bod $T_{1,2}$ přímku $t_{1,2}$, probíhají body T', T'' perspektivní řady na přímkách t', t'' a proto spojnice ${}^1ST'$, ${}^2ST''$ opisují kolem středů ${}^1S$, ${}^2S$ projektivní svazky a průsečík T odpovídajících si paprsků vytvořuje kuželosečku k, jež jde body ${}^1S$, ${}^2S$ a protíná průsečnici x.

Při obecném dvojobrazovém zobrazení skládá se koincidenční útvar z průsečnice x obou průměten a kuželosečky k, jež prochází středy promítání ${}^1S$, ${}^2S$ a protíná přímku x.

6,2. Přímka a rovina v obecném dvojobrazovém zobrazení. Průměty přímky a jsou obecně zase přímky; jsou to průsečnice průměten π', π'' s příslušnými promítacími rovinami $({}^1S, a)$, případně (^2S, a). Jestliže přímka a je promítací přímkou, na př. první, t. j. jde středem ^1S, tu první průmět je bodem a druhý je odpovídajícím uzlovým paprskem. Dvojnásob



Obr. 22. **Přímka a rovina v dvojobrazovém zobrazení.**

promítací přímkou je spojnice s a její oba průměty splývají s příslušnými uzly.

Mějme v obr. 22 dánu přímku a oběma obrazy a_1, a_2 v dvojobrazovém zobrazení daném uzly $^2S_1$, $^1S_2$ a základnicí $x_{1,2}$. Obrazy libovolného bodu přímky a jsou na odpovídajících si uzlových paprscích. V obrazci sestrojeny obrazy průsečíků ^1V a ^2V přímky a se středovými rovinami σ', σ'', takže $^1V_{1\infty}$ a $^1V_{2\infty}$. Obrazy dvou přímek téže roviny musí míti průsečík prvých obrazů a průsečík druhých obrazů na odpovídajících si uzlových paprscích.

Vyšetřte polohu obrazů dvou přímek, jež se protínají v bodě ležícím v středové rovině σ', nebo σ'', anebo na jejich průsečnici v!

Obecná rovina ϱ se určuje obrazy tří bodů; v obr. 22 je na př. určena rovina ϱ třemi body A, B, C. Oba obrazy ϱ_1, ϱ_2 bodového pole v rovině ϱ jsou ve vztahu obecné kolineace, jež je určena čtyřmi páry odpovídajících si bodů. Rovina ϱ protíná totiž spojnici s obou středů ${}^1S$, ${}^2S$ v bodě R a obraz $R_1 \equiv {}^1S_2$ a $R_2 \equiv {}^1S_2$. Je tedy kolineace obou obrazů roviny ϱ dána čtyřmi páry odpovídajících si bodů a to $(A_1, B_1, C_1, R_1 \equiv {}^2S_1) \longleftrightarrow (A_2, B_2, C_2, R_2 \equiv {}^1S_2)$.

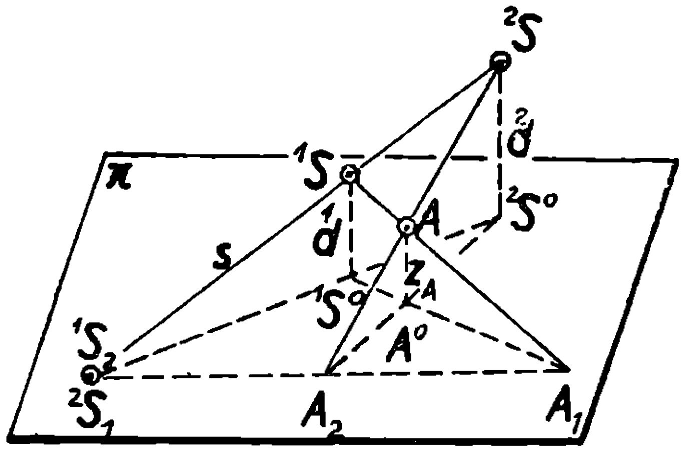
Dán-li jeden obraz přímky k roviny ϱ na př. k_1, lze snadno k němu určiti příslušný druhý obraz k_2, užijeme-li průsečíků přímky k na př. s přímkami AB, BC. Toho lze užíti k určení průsečíku X přímky a s rovinou $\varrho \equiv (A, B, C)$. Použijeme krycí přímky k v rovině ϱ, jejíž (na př. první) obraz splývá s příslušným obrazem přímky a ($k_1 \equiv a_1$). Druhý obraz k_2 protíná pak druhý obraz a_2 v druhém obraze průsečíku X; k bodu X_2 odvodíme první obraz X_1.

Proveďte tutéž úlohu druhou krycí přímkou l, jejíž $l_2 \equiv a_2$! Sestrojte průsečnici dvou rovin tím, že sestrojíte průsečíky dvou přímek jedné z rovin s druhou rovinou! Zvláště určete průsečnici obecné roviny se středovými rovinami σ', σ''!

6,3. Rovnoběžnost a kolmost v dvojobrazovém zobrazení. Přímky a roviny jsou rovnoběžné, když jejich úběžné body nebo přímky splývají; případně jsou incidentní. (Přímky, které jsou rovnoběžné, protínají úběžnou rovinu v tomtéž bodě atd.) Abychom v obecném dvojobrazovém zobrazení mohli uvažovati o rovnoběžnosti, je třeba znáti obrazy úběžné roviny ω_∞ prostoru a tudíž kolineaci mezi poli ω_1, ω_2; potřebujeme tedy obrazy tří úběžných bodů, ježto uzly jsou též párem (t. j. čtvrtým) odpovídajících si bodů v uvažované kolineaci. Je viděti, že úběžná rovina prostoru v obecném dvojobrazovém zobrazení nemá zvláštní postavení vzhledem k jiné rovině.

Úlohy o kolmosti vyžadují zobrazení absolutní kuželosečky v úběžné rovině, což vede k dosti složitým konstrukcím; zde je pomineme, ježto tohoto obecného zobrazení se prakticky málo používá, a obrátíme se k zvláštním případům tohoto zobrazení.

6,4. Dvojstředové promítání na jednu průmětnu. Jestliže v obecném případě (odst. **6,1**) průmětny π', π'' splynou s průmětnou π, není třeba promítati ze středu S a dostáváme případ (znázorněný v obr. 23) často se vyskytující v lékařské praxi při roentgenování,[11]) nebo v zeměměřičství. Body A promítáme tu na průmětnu π ze dvou středů ${}^1S$, ${}^2S$ do průmětů A_1,



Obr. 23. Dvojstředové promítnutí bodu A na π.

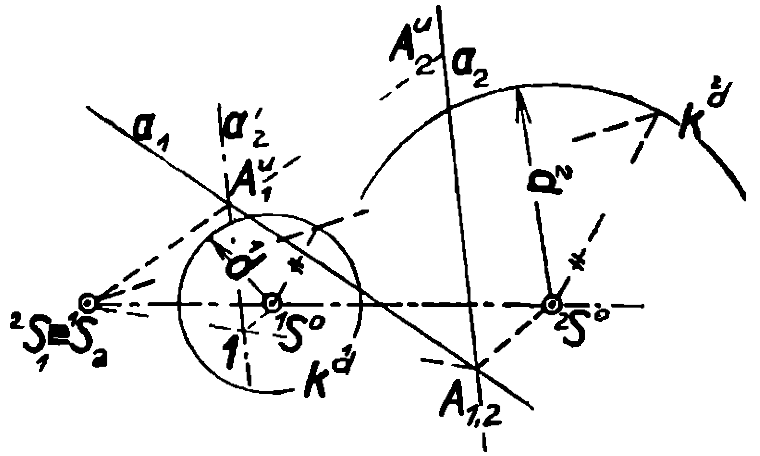
A_2, jež splývají s obrazy bodu A, ježto π může býti ihned nákresnou. Oba uzly splývají se stopníkem ${}^1S_2 \equiv {}^2S_1$ spojnice $s \equiv S^1S$ na průmětně π. Distance středů ${}^1S$, ${}^2S$ od průmětny π značíme ${}^1d$, ${}^2d$ a hlavní body ${}^1S^0$, ${}^2S^0$. Kolmý průmět bodu A na průmětnu π je patrně v průsečíku A^0 spojnic ${}^1S^0A_1$, ${}^2S\,{}^0A_2$. Vzdálenost z_A bodu A od průmětny π lze vypočítati (známe-li hlavní body nákresny, obrazy $\overline{A_1A_2}$ a jednu distanci na př. ${}^1d$) z úměry $z_A : {}^1d = \overline{A_1A^0} : \overline{A_1{}^1S^0}$; stejně bylo by lze tuto vzdálenost vypočítati užitím distance ${}^2d$ a kontrolovati. Je-li bod R v průmětně π, je $R \equiv R_1 \equiv R_2$, takže průmětna π a přímka s jsou tu koincidenčními útvary.

Rovina ϱ se zobrazuje jako dvě soumístná kolineární pole ϱ_1, ϱ_2, jež jsou v poloze perspektivní s polem ϱ a sice prvé

---

[11]) Na př. *F. Schilling*: „Neue Methoden des Ortsbestimmung eines Fremdkörpers, insbesondere eines Geschosses im menschl. Körper durch Röntgenaufnahme“, Zeitschr. f. Math. u. Physik, roč. 1917.

pro střed ${}^1S$ a druhé pro střed ${}^2S$. Je-li p_ϱ stopa roviny ϱ na průmětně π, pak pole ϱ_1, ϱ_2 jsou perspektivní pro osu p_ϱ a střed v uzlu ${}^1S_2 \equiv {}^2S_1$. Rovina rovnoběžná s průmětnou π zobrazuje se tudíž v homotetičnost pro střed v uzlu. Speciálně úběžná rovina ω_∞ má za obraz homothetičnost pro střed v uzlu a poměr ${}^1d : {}^2d$.



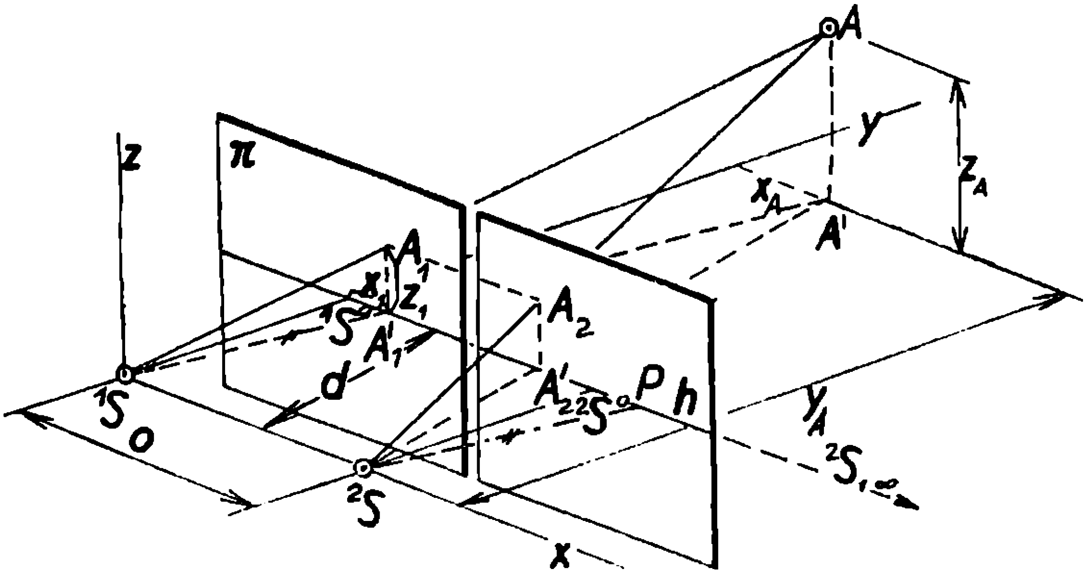
Obr. 24. Úběžníky přímky v dvojstředovém promítání.

Na základě toho jsou sestrojeny v obr. 24 obrazy průsečíku přímky a s rovinou ω_∞, t. zv. úběžníky $A_1{}^u$, $A_2{}^u$ přímky a, pro oboje středové promítání. Třeba jen na obrazech a_1, a_2 přímky vyhledati obrazy $A_1{}^u$, $A_2{}^u$ tak, aby ${}^2\overline{S_1A_1{}^u} : {}^2\overline{S_1A_2{}^u} = {}^1d : {}^2d = {}^2\overline{S_1{}^1S^0} : {}^2\overline{S_1{}^2S^0}$. V obr. zvolen stopník $A_{1,2} \equiv (a_1, a_2)$ přímky a a na spojnici ${}^2S_1A_{1,2}$ určen bod 1 tak, že ${}^1S^0 1 \parallel A_{1,2}{}^2S^0$; potom přímka $a_2' \parallel a_2$ vedená bodem 1 protíná a_1 v prvém obrazu $A_1{}^u$ úběžného bodu $A_\infty{}^u$, t. j. v úběžníku prvého středového promítání, z něhož se určí snadno druhý obraz $A_2{}^u$, úběžník přímky a v druhém středovém promítání.

Uvedený příklad ukazuje, že lze převésti dvojstředové promítání na středové (na př. pro střed promítání ${}^1S$ a distanci ${}^1d$), že lze příslušné úlohy zde vyřešiti podle odst. **2** a pak určiti teprve druhé obrazy.

Určete na př. úběžnice roviny dané obrazy tří svých bodů!

6,5. Stereoskopické průměty. Jestliže v předchozím odst. **6,4** obě distance jsou stejné (${}^1d = {}^2d = d$) a tudíž uzel průmětny π je úběžným bodem ${}^2S_{1\infty} \equiv {}^1S_{2\infty}$ spojnice ${}^1S^0{}^2S^0$ (obr. 25), a když vzdálenost obou středů promítání je rovna vzdálenosti lidských očí (jež je normálně $o \doteq 65$ mm), dostáváme t. zv. *stereoskopické průměty*. Toto promítání odpovídá prostorovému vidění dvěma očima a má hojné praktické upotřebení. Stereoskopické obrazy lze snadno získati stereoskopickým fotografickým přístrojem, který má dva objektivy ve vzdálenosti o. Na takto získané obrazy musíme se dívati tak,



Obr. 25. Stereoskopické průměty bodu A.

aby každé oko vidělo jen svůj obraz. Toho se dosáhne nejlépe t. zv. *stereoskopy*, pro něž musí být oba obrazy *vedle sebe*, takže objekt musí býti za průmětnou π dosti vzdálený.

Jiným prostředkem k získání prostorového dojmu jsou t. zv. *anaglyfy* od *Ducos du Haurona*. Zde oba obrazy předmětu mohou býti přes sebe, takže předmět může býti i před průmětnou π. Oba obrazy se vytisknou (nebo narýsují) v doplňkových barvách. Nejčastěji to bývá pro jedno oko barva zelená (modrá) a pro druhé oko barva červená. Na obrazy se díváme brýlemi, jež jsou opatřeny místo skel želatinou a to vždy pro obraz zelený (modrý) v barvě červené a opačně pro druhé oko.[12]) Anaglyfů lze též použíti k projekci na plátno; ostatně jsou dosud jedinou podstatou t. zv. prostorového filmu, který vede k zajímavým prostorovým klamům.

Zásad prostorového vidění užíváme prakticky též k určování vzdáleností předmětů od nás. Fotografujeme-li vzdálenější předměty, je vzdálenost fotografické desky od objektivu přibližně rovna fokální vzdálenosti f objektivu. Positiv představuje nám tudíž perspektivu pro distanci $d = f$ a pro hlavní bod v kolmém průmětu optického středu objektivu na rovinu snímku. Stereoskopické snímky lze proto uvažovati jako perspektivy na jednu průmětnu a pro tutéž distanci $d = f$. V obr. 25 znázorněny průměty A_1, A_2 bodu A ze středů ${}^1S, {}^2S$ na průmětnu π. Zvolme si pravoúhlou soustavu souřadnic, jejíž počátek je ve středu ${}^1S$, osy $x \equiv {}^1S^2S$, $y \equiv {}^1S^1S^0$ a osa z je svislá za předpokladu, že průmětna π je svislá. Bod A má v této souřadnicové soustavě souřadnice x_A, y_A, z_A. Průmět A_1 má pravoúhlé souřadnice x_1, z_1 (vzhledem k osám $h \equiv {}^1S^{0\,2}S^0$, a kolmému průmětu osy z do π, takže počátek je ${}^1S^0$); průmět A_2 souřadnice x_2, z_2 vzhledem k ose h a ose $z_2 \perp h$ a pro počátek ${}^2S^0$ (v obr. je x_2 záporné). Je patrno, že $z_2 = z_1$, kdežto souřadnice x_1, x_2 jsou různé, leda že by bod A byl úběžným bodem. Vzdálenost $\overline{A_1A_2}$ je pro objekty za průmětnou menší než o; rozdíl $|o - \overline{A_1A_2}| = |x_1 - x_2|$ jmenujeme *stereoskopickou paralaxou* p bodu A. Sestrojme ${}^2SP \parallel {}^1SA'$, kde A' je kolmý průmět bodu A do roviny (x, y); potom $\overline{A'_2P} = p$, je-li A'_2 kolmý průmět obrazu A_2 do osy h. Z podobnosti trojúhelníků $A'_2{}^2SP$, $A'{}^1S^2S$ plyne pro souřadnici $y_A = \dfrac{o\,.\,d}{p}$. Z tohoto vztahu plyne, že body téže hloubky y_A mají tutéž stereoskopickou paralaxu.

Vypočítání souřadnic x_A a z_A ze souřadnic x_1, z_1 prvého průmětu ponecháváme laskavému čtenáři. Právě uvedené

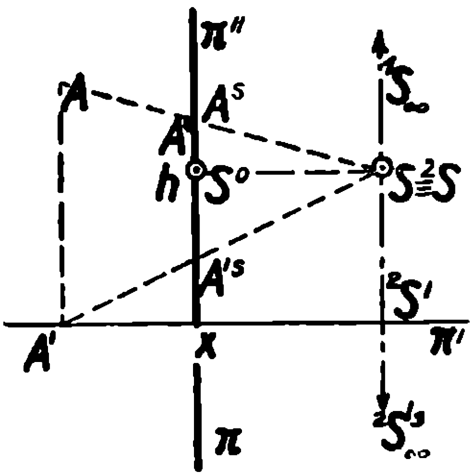
---

[12]) Viz na př. *R. Pruner*: „Anaglyfy k učebnicím Klíma-Ingriš: Deskr. geometrie pro V. tř. reálek“, 1941. Praha.

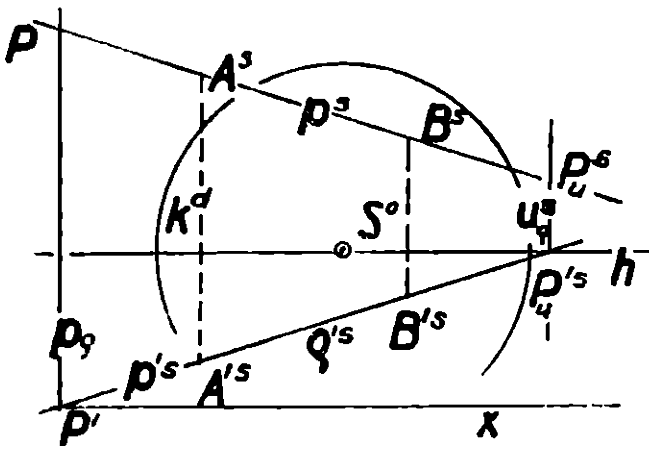
vztahy jsou základem t. zv. *stereofotogrammetrie* v zeměměřičství.

7. ROVNOBĚŽNÝ PRŮMĚT

Je-li při středovém promítání střed promítání v nekonečnu, jako úběžný bod daného směru s, dostáváme rovnoběžný (paralelní) průmět a to *pravoúhlý*, je-li směr s kolmý k průmětně π, jinak *kosoúhlý*. Při rovnoběžném promítání zůstává zachován (je invariantní) dělicí poměr bodu na přímce nebo paprsku ve svazku a rovnoběžnost. Přímky rovnoběžné mají rovnoběžné průměty, pokud nemají za průměty body.



Obr. 26. Vznik středového průmětu a středového půdorysu.

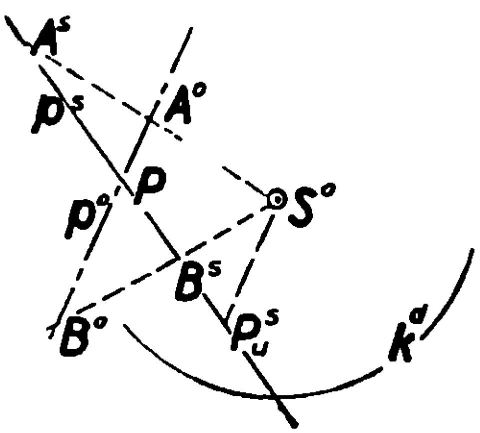


Obr. 27. Střed. průmět a střed. půdorys přímky AB.

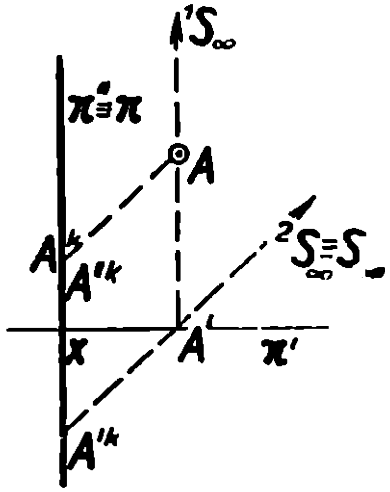
7,1. Středový obraz se středovým obrazem půdorysu. V obr. 26 je schematicky znázorněn případ dvojobrazového zobrazení tak, že průmětny π', π'' zvoleny k sobě kolmé a sice π' vodorovná a příslušný střed promítání ^1S v úběžném bodě kolmic k průmětně π' a střed promítání ^2S v konečnu. Nákresna π je identická s průmětnou π'' a střed promítání $S \equiv {}^2S$. Průmět

A' je první průmět bodu A a jeho středový obraz A'^s jmenujme stručně středový půdorys; středový obraz A^s bodu A je v A''. Oba uzly ${}^1S^s_\infty$ a ${}^2S'^s_\infty$ splývají v úběžném bodě kolmic k základnici x.

V obr. 27 v středovém obraze o hlavním bodě S^0, o distanci dané kružnicí distanční k^d a o úběžnici h vodorovné průmětny



Obr. 28. Středový a kolmý průmět přímky AB.



Obr. 29. Vznik kosoúhlého průmětu a kosoúhlého půdorysu.

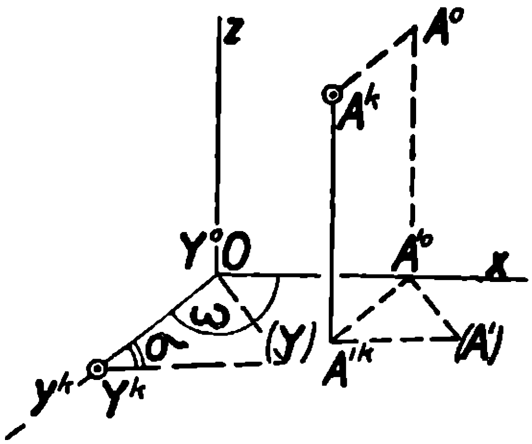
π' o stopě $x \parallel h$, dány obrazy bodů A a B a středové obrazy jejich půdorysů A', B' tak, že $A^sA'^s \parallel B^sB'^s \perp h$. Body A, B určují přímku p, jejíž středový obraz je $p^s \equiv A^sB^s$ a středový půdorys $p'^s \equiv A'^sB'^s$. Abychom dostali stopník a úběžník přímky p, proložíme přímkou p první promítací rovinu ϱ, jejíž středový půdorys je v přímce $\varrho'^s \equiv A'^sB'^s$. Stopa $p\varrho$ a úběžnice $u_\varrho{}^s$ jdou průsečíky $P' \equiv (\varrho'^s, x)$ a $P_u{}'^s \equiv$ $\equiv (\varrho'^s, h)$ kolmo k ose x a jejich průsečíky s obrazem p^s jsou stopník P a úběžník $P_u{}^s$ přímky p. Takto lze řešení úloh tohoto dvojobrazového zobrazení převésti na středový obraz a řešiti podle odst. 2. Tohoto zobrazení užívá se hojně v lineární perspektivě, dán-li půdorys a nárys objektu.

7,2. Středový a kolmý průmět do téže roviny. Jestliže v předchozím případě též průmětna $\pi' \equiv \pi'' \equiv \pi$, pak střed promítání ${}^1S_\infty$ je úběžným bodem kolmic k průmětně π a uzel ${}^1S^s \equiv {}^2S^0 \equiv S^0$ splývá s hlavním bodem S^0 průmětny. V obr. 28 dány dva body A, B svými středovými obrazy A^s, B^s a kolmými obrazy A^0, B^0 tak, že spojnice A^0A^s, $B^0B^s, \dots$ jdou hlavním bodem S^0. Přímka $p \equiv AB$ má stopník $P \equiv (p^s, p^0)$ a úběžník $P_u{}^s$ je na rovnoběžce vedené hlavním bodem S^0 s kolmým průmětem p^0. Tím lze opět úlohy tohoto zobrazení převésti na úlohy v středovém promítání. Také tohoto promítání se používá v lineární perspektivě.

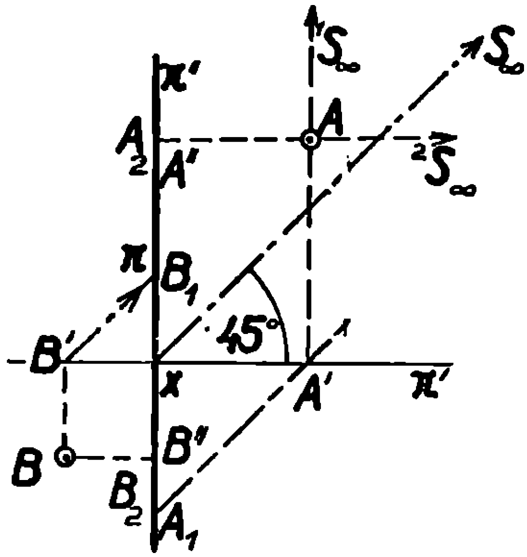
7,3 Kosoúhlý průmět a kosoúhlý průmět půdorysu nebo nárysu. V obr. 29 je opět schematicky znázorněn zvláštní případ zobrazení z odst. **7,1**, kdy i střed ${}^2S \equiv S$ je úběžným bodem směru kosého k průmětně $\pi'' \equiv \pi$, takže dostáváme kosoúhlý průmět na průmětnu π, jak originálu tak i jeho prvního průmětu. Uzel je zde úběžným bodem kolmic k základnici x. Obrazy A_2, A_1 obecného případu (odst. **6,1**) jsou zde označeny jako kosoúhlé průměty originálu A a prvního průmětu A' stejnými znaky s indexem „k“ (klinogonální neboli kosoúhlý průmět). I dostaneme obr. 30, kde $A^kA'^k \perp x$. Aby bylo toto kosoúhlé promítání určeno (hlavně směr promítacích paprsků), určuje se kosoúhlý průmět Y^k bodu Y na ose y kolmé k průmětně v počátku O osy x a vzdálenost $O(Y)$ bodu Y od průmětny. V obrazci je sklopen kolmo promítací trojúhelník YY^0Y^k promítacího paprsku bodu Y do trojúhelníka $(Y)Y^0Y^k$, kde $\sphericalangle\, Y^kY^0(Y) = 90°$ a odvěsna $Y^0(Y)$ je vzdálenost bodu Y od průmětny π. Kosoúhle promítací paprsky svírají s průmětnou $\pi \equiv (x, z)$ úhel $\sigma = \sphericalangle\, (Y)Y^kY^0$.

Chceme-li vyšetřiti vzdálenost bodu A od průmětny π, sestrojíme skutečnou velikost vzdálenosti půdorysu A' od osy y, kteréžto vzdálenosti jsou stejné. Narýsujme trojúhelník $A'^kA'^0(A')$, jehož strany jsou rovnoběžny se stejnolehlými stranami charakteristického trojúhelníka $Y^kY^0(Y)$ a tu odvěsna $\overline{A'^0(A')}$ udává vzdálenost bodu A' a tudíž též bodu A od průmětny π a tedy souřadnici y_A. Souřadnice x_A,

z_A se jeví v obraze ve skutečné velikosti a to prvá v délce $\overline{OA'^0}$ a druhá v $\overline{A'^kA^k}$. Považujeme-li toto zobrazení za kosoúhlé zobrazení předmětu v soustavě souřadnicové, kde průmětna splývá s rovinou souřadnic (x, z), je třeba určiti kosoúhlý průmět osy y, který je dán úhlem $\omega = \widehat{xy^k}$ a poměr



Obr. 30. Kosoúhlé obrazy bodu A.



Obr. 31. Pravoúhlé promítání jako zvláštní případ dvojobrazového zobrazení.

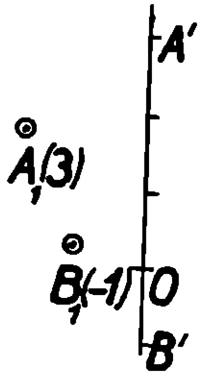
$q = \overline{Y^kY^0} : \overline{Y^0(Y)}$. Dostáváme tak zvláštní případ kosoúhlé axonometrie, který se jmenuje též někdy kavalírní perspektiva (viz odst. **8,2**).

Sestrojíme-li kolmý průmět A^0 bodu A do průmětny $\pi \equiv (x, z)$, tu dvojiny obrazů A^k, A^0 téhož bodu A jsou na paprscích $A^kA^0 \parallel Y^kY^0 \parallel \ldots$ a určují též bod A, známe-li charakteristický trojúhelník $Y^kY^0(Y)$.

7,4. Kolmé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (*Mongeovo zobrazení*). Schematicky je znázorněno v obr. 31. Průmětny π', π'' jsou k sobě kolmé, středy ${}^1S$, ${}^2S$ jsou v úběžných bodech kolmic k první průmětně π' a k druhé průmětně π''.

Kolmé průměty do roviny π' a π'' promítáme šikmo do průmětny $\pi \equiv \pi''$ z úběžného bodu S_∞ přímek svírajících s průmětnami π' a π'' úhly 45° a kolmých k ose $x \equiv (\pi', \pi'')$. Obrazu A_1 prvního průmětu říkáme *půdorys* a obrazu A_2 druhého průmětu říkáme *nárys*, patrně $A_2 \equiv A''$. Kosoúhlý průmět z bodu S_∞ prvního průmětu lze též dostati otočením první průmětny π' kolem osy x do druhé průmětny π'', nebo jak též říkáme, *sdružením* první průmětny π' s druhou π''. Uzel je tu v úběžném bodě kolmic k základnici $x_{1,2}$, takže půdorys a nárys téhož bodu jsou na ordinále, jež je kolmá k základnici. Toto zobrazení je nejvíce prakticky používáno a též je hlavním obsahem vyučování deskriptivní geometrie na našich středních školách.

Většinou si myslíme předměty, jež zde zobrazujeme, ve čtvrti první, t. j. nad první průmětnou π' a před druhou průmětnou π'' (v obr. je to bod A), takže jejich půdorys je pod nárysem. V Americe však si představují promítané předměty ve třetí čtvrti (v obr. je to bod B); pak půdorys je nad nárysem. V obou případech uzlové paprsky splývají s kolmicemi k základnici $x_{1,2}$.



Obr. 32. Promítání kótované.

7,5. Promítání kolmé na jednu průmětnu (*kótované*). Velice názorné a často používané promítání je kolmé promítání na jedinou průmětnu π, kde se bod určuje svým půdorysem A_1 a vzdáleností $\overline{AA_1}$ od průmětny π, kterou si myslíme vodorovnou. Vzdálenost AA_1 měřenou jednotkami připojeného měřítka zapisujeme číslicí do závorky vedle půdorysu A_1 (v obr. 32 je to na př. 3 u bodu A a -1 u bodu B); toto číslo je t. zv. kóta bodu. Body nad průmětnou mají kóty kladné a pod průmětnou záporné.

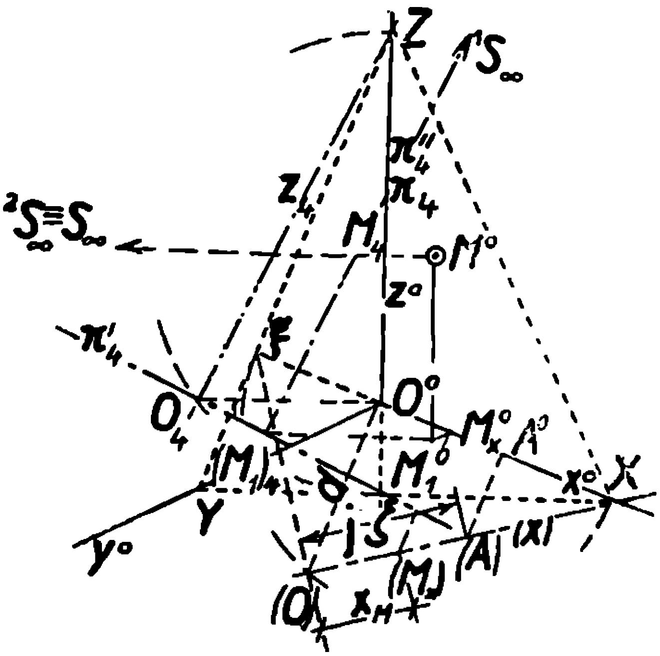
Kótu můžeme též určiti na číselné ose splývající s měřítkem délkou $\overline{OA'}$ pro bod A a $\overline{OB'}$ pro bod B. Pak je patrno, že v tomto promítání se zobrazuje bod vlastně půdorysem a obrazem na číselné ose (u bodu A body A_1 a A'); zobrazení je tedy též dvojobrazové.

8. AXONOMETRIE

Bod v prostoru určujeme nejčastěji třemi souřadnicemi v pravoúhlé soustavě souřadnic, určené třemi osami x, y, z, jež tvoří pravoúhlý trojhran o vrcholu O, který je počátkem souřadnic. K měření souřadnic je třeba zvoliti si jistou jednotku j, kterou přeneseme na osy x, y, z a sice do délek $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = j$ a dostáváme tak pravoúhlý rovnoramenný trojhran tvořící tři hrany krychle vycházející z téhož vrcholu O. Promítneme-li nyní tuto soustavu souřadnic do obecné průmětny π, o níž v dalším předpokládejme, není-li jinak řečeno, že není rovnoběžná se žádnou osou souřadnic, dostaneme kolmou, kosoúhlou a středovou *axonometrii*, podle toho zda promítání na průmětnu π je kolmé, kosoúhlé nebo středové. Obrazy, které tak dostaneme, jsou velmi názorné. Ve zvláštním případě může průmětna splynouti s některou rovinou souřadnic, jako jsme měli již v odst. **7,3** (obr. 30).

Bod v axonometrii bude opět určen dvěma obrazy a to axonometrickým obrazem originálu a axonometrickým obrazem jeho kolmého průmětu do některé roviny souřadnic; (nejčastěji používáme průměty do roviny (x, y), jehož axonometrický obraz je t. zv. axonometrickým půdorysem). Oba tyto obrazy jsou na přímkách, jež jsou obrazy rovin dvojnásob promítacích a to jak axonometricky tak kolmo do příslušné roviny souřadnic.

8,1 Kolmá axonometrie. V obr. 33 je ukázán postup zobrazení bodu v kolmé axonometrii. Obrazy os x^0, y^0, z^0 možno zvoliti libovolně, jen musí býti obraz kterékoliv z os v tupém úhlu obrazů zbývajících dvou os. Na př. osy x, y určují rovinu, jejíž stopa na axonometrické průmětně π je v spojnici XY stopníků X a Y os x a y na průmětně π. Stopa XY musí býti kolma k obrazu z^0 osy z, která je kolmá k rovině (x, y). Osy x, y uzavírají v prostoru čtyři pravé úhly a ty dva z nich, jimiž jde hlavní přímka bodu O rovnoběžně se stopou XY, promítají se kolmo do ostrých úhlů, kdežto zbývající dva, jimiž jde spádová přímka roviny (x, y) do tupých úhlů. Poně-



Obr. 33. Kolmá axonometrie. Základní pojmy.

vadž kolmý průmět kolmice z k rovině (x, y) splývá s průmětem spádové přímky bodu O, musí obraz z^0 býti v tupých úhlech vrcholových přímek x^0, y^0. Stejné ovšem platí i pro obrazy ostatních dvou os x, y. Stopní trojúhelník XYZ soustavy souřadnic na průmětně π má strany kolmé k obrazům os a je tudíž ostroúhlý. Kolmé průměty x^0, y^0, z^0 os souřadnic na průmětnu $\pi \equiv (X, Y, Z)$ jsou výškami stopního trojúhelníka a jejich průsečík O^0 (orthocentrum trojúhelníka XYZ), je průmět počátku soustavy souřadnic. Zvolme si v axonometricky promítací rovině osy z novou, čtvrtou průmětnu kolmého promítání[13]) a sklopme ji kolem průmětu z^0

[13]) (x, y) je první, (x, z) druhá a (y, z) třetí průmětna kolmého promítání.

do axonometrické průmětny (X, Y, Z). Je-li $O\zeta$ spádová přímka roviny souřadnic (x, y) bodu O, trojúhelník ζOZ je pravoúhlý a proto $\sphericalangle\, ZO_4\zeta = 90°$, z čehož se dá obraz O_4 sestrojiti, jakož i čtvrtý průmět π_4' roviny souřadnic $(x, y) \equiv \pi'$ a $z_4 \equiv ZO_4$. Obecný bod M promítáme nyní kolmo na rovinu π' a rovinu axonometrickou π'', jejíž čtvrtý obraz je v z^0 a oba tyto průměty promítáme pak kolmo na průmětnu $\pi \equiv \pi''$. Axonometrický obraz M^0 a axonometrický půdorys $M_1{}^0$ jsou na uzlovém paprsku rovnoběžném s obrazem z^0, ježto oba uzly splývají v úběžném bodě kolmic k základnici, jež tu splývá se stranou $XY \equiv (\pi', \pi'')$ axonometrického trojúhelníka. Je tedy kolmá axonometrie dvojobrazovým zobrazením.

Je-li v obraze dán bod průmětem M^0 a axonometrickým půdorysem $M_1{}^0$, dostaneme jeho souřadnice, vedeme-li axonometrickým půdorysem $M_1{}^0$ rovnoběžku s y^0 až k průsečíku $M_x{}^0$ s osou x^0 a spojnicí $M^0M_1{}^0$; obrazy souřadnic bodu M jsou v délkách $\overline{O^0M_x{}^0}$, $\overline{M_x{}^0M_1{}^0}$ a $\overline{M_1{}^0M^0}$. Jejich skutečné velikosti dostaneme přenesením jich na obrazy os ($\overline{O^0M_x{}^0}$ je již na x^0) a sklopením na př. promítacích rovin os, jak jsme již provedli pro osu z; v obraze je provedeno podobné sklopení ještě pro osu x (sklopením pravoúhlého trojúhelníka $XO\xi$). Na sklopené ose (x) je délka $\overline{(O)(M_x)}$ souřadnicí x_M.

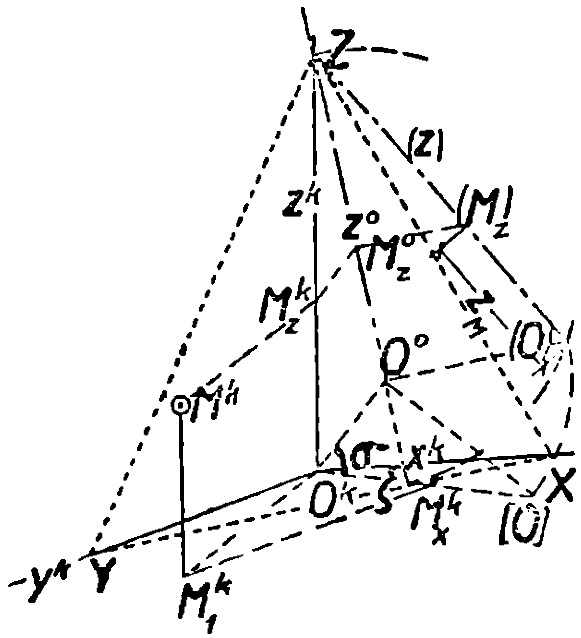
[Sestrojte podle toho ještě skutečné velikosti $y_M = \overline{M_xM_1}$ a $z_M = \overline{M_1M}$.]

Měřítka pro obrazy os dostaneme přenesením jednotky $j = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ na skutečné velikosti $(x), \ldots$ a odvozením axonometrických obrazů A^0, B^0, C^0. (V obrazci sestrojen bod A^0, body B^0, C^0 nechť sestrojí laskavý čtenář sám.)

Délky $\overline{O^0A^0}, \overline{O^0B^0}, \overline{O^0C^0}$ budou nestejné, je-li trojúhelník XYZ různostranný; v tomto případě dostáváme t. zv. kolmou *trimetrii*; je-li trojúhelník XYZ rovnoramenný, jsou měřítka na dvou osách stejná a mluvíme o kolmé *dimetrii*; konečně je-li trojúhelník XYZ rovnostranný, máme kolmou *isometrii*. V posledním případě lze vypočítati jednotku (stejnou pro všechny tři osy); je patrně $\overline{O^0A^0} = \overline{O^0B^0} = \overline{O^0C^0} = j\,.\,\frac{1}{3}\sqrt{6} = 0{,}816\ldots j$. Nezkracujeme-li rozměry zobrazovaného předmětu, měřené ve směru os v této kolmé isometrii, ($\sphericalangle\, x^0y^0 = \sphericalangle\, y^0z^0 = \sphericalangle\, z^0x^0 = 120°$) sestrojujeme kolmý obraz předmětu zvětšeného a sice v měřítku $\sqrt{3} : \sqrt{2} = 1{,}224\ldots : 1$.

Z délek $\overline{O^0A^0}$, $\overline{O^0B^0}$, $\overline{O^0C^0}$ lze dvě co do polohy i velikosti zvoliti a třetí již se dá sestrojiti jak co do velikosti, tak co do polohy. (Řešíme v podstatě v kolmém promítání úlohu: Doplniti obraz krychle, dány-li obrazy dvou hran z téhož vrcholu vycházejících.)

8,2. Kosoúhlá axonometrie. V obr. 34 zvolen kosoúhlý trojúhelník axonometrický XYZ a obraz počátku O^k mimo průsečík výšek tohoto trojúhelníka. Směr kosoúhlého promítání určen pro počátek O souřadnic. Známe totiž kolmý průmět O^0 do axonometrické průmětny (X, Y, Z), další jeho průmět O^k na tutéž průmětnu a vzdálenost počátku O od průmětny. Tuto sestrojíme podle odst. **8,1** v délce $\overline{O^0(O)}$ užitím kolmo promítací roviny osy z do axonometrické průmětny. Sklopením kolmo promítacího trojúhelníka $O^kO^0[O]$, $[O^0[O] \perp O^kO^0$, $\overline{O^0[O]} = \overline{O^0(O)}]$ dostaneme úhel $\sigma = \sphericalangle O^0O^k[O]$, který svírá kosoúhle promítací paprsek s axonometrickou průmětnou; jeho kolmý průmět na axonometrickou průmětnu je v O^0O^k, čímž směr promítání určen stejně jako v odst. **7,3.** Bod M se tu určuje opět axonometrickým obrazem M^k a axonometrickým půdorysem $M_1{}^k$, při čemž musí tyto obrazy býti na ordinále rovnoběžné s obrazem z^k osy z $(M_1{}^kM^k \parallel z^k)$.

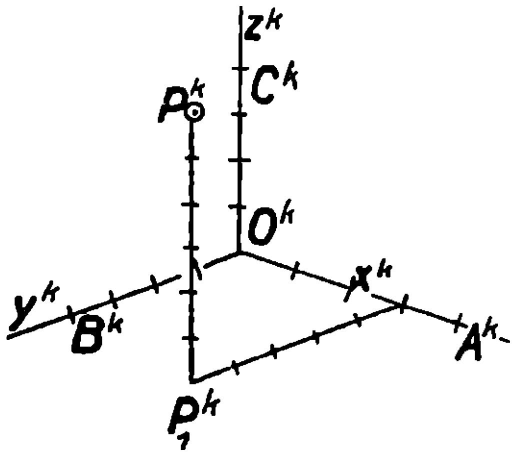


Obr. 34. Kosoúhlé axonometrie. Obrazy bodu M.

Určení souřadnic bodu M lze provésti s pomocí kolmé axonometrie, jak je ukázáno pro souřadnici z_M. Na obraze z^k určíme bod $M_z{}^k$, jehož vzdálenost od obrazu O^k je rovna $\overline{M_1{}^kM^k} = z_M{}^k$. Na kolmém obrazu z^0 určíme $M_z{}^0$ a sice uzlovým paprskem $M_z{}^kM_z{}^0 \parallel O^kO^0$ a z toho na sklopené ose (z) souřadnici $z_M = \overline{(O)(M_z)}$.

V předchozím jsme při konstrukcích používali axonometrického trojúhelníka a kolmého průmětu do axonometrické roviny. Lze však užíti jiné cesty, totiž přímo přechodu k pravoúhlému promítání na roviny souřadnic. Abychom si ji ukázali, uvedeme větu *Pohlkovu:*[14])

Jakékoliv tři z téhož bodu O^k *vycházející úsečky* O^kA^k, O^kB^k, O^kC^k *v nákresně, které nejsou v téže přímce, z nichž žádná není nekonečně dlouhá a nejvýše jedna má délku nulovou, lze považovati za kosoúhlý průmět pravoúhlého rovnoramenného trojhranu* (odst. 8).



Obr. 35. Obrazy bodu *P* v kosoúhlé axonometrii.

Je množství důkazů této základní věty kosoúhlé axonometrie. Nebudeme zde žádný z nich uváděti, ježto v každé obšírnější deskriptivní geometrii[15]) lze jej nalézti. Ukážeme jen použití této věty.

V obr. 35 byly pro kosoúhlou axonometrii zvoleny obrazy x^k, y^k, z^k tří os potud libovolně, pokud to dovolují podmínky vyslovené ve větě Pohlkově; dále byly zvoleny jednotky $\overline{O^kA^k}, \overline{O^kB^k}, \overline{O^kC^k}$. (V možnosti této volby tkví největší výhoda kosoúhlé axonometrie.) V obr. 35 je sestrojen axonometrický obraz P^k a axonometrický půdorys $P_1{}^k$ bodu $P(3; 5; 6)$, kde za jednotku byla zvolena čtvrtina úseček $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Naopak obr. 35 ukazuje, jak lze určiti souřadnice bodu P, jsou-li dány jeho obrazy P^k, $P_1{}^k$.

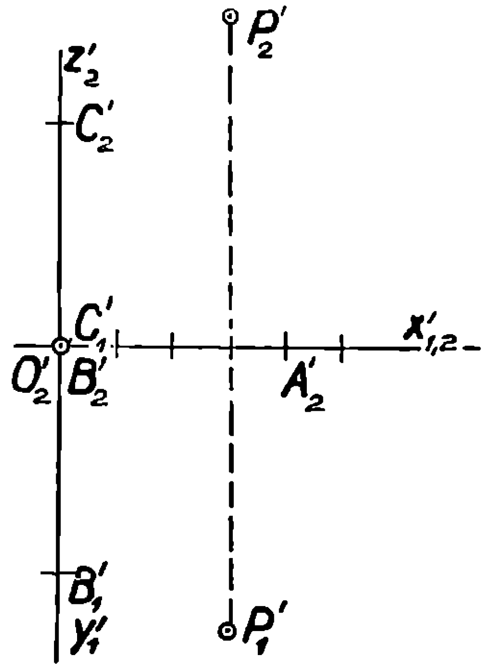
Toho lze nyní použíti k provádění úloh v kosoúhlé axono-

---

[14]) Nazvanou tak podle *K. Pohlka*, něm. geometra, který ji r. 1853 poznal a r. 1860 bez důkazu uveřejnil.

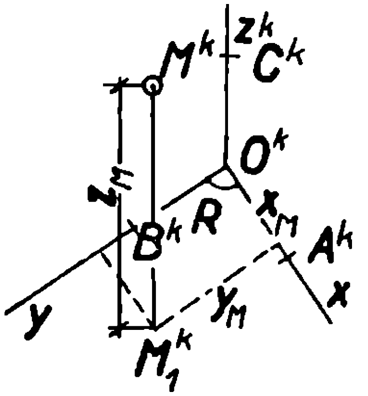
[15]) Viz na př. *Kadeřávek-Klíma-Kounovský*: Deskriptivní geometrie, I. díl, 1929, str. 297 a n.

metrii tím, že zobrazíme dané části v kolmém promítání na dvě k sobě kolmé průmětny a zde úlohy řešíme. Tak byl v obr. 36 zobrazen v pravoúhlém promítání bod P'; měřítka na osách x', y', z' byla zvolena stejná a jednotka $\overline{O'A'} = \overline{O'B'} = \overline{O'C'} = j'$ (v obr. byla zvolena za tuto jednotku přesně jednotka na x^k v obraze axonometrickém). Užitím čtvrtiny jednotky j' byl sestrojen půdorys a nárys bodu P' odpovídajícího bodu P, zobrazeného v obr. 35. Je-li j skutečná délka jednotky $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, kterou lze konstruktivně určiti, pak útvar $(P', \ldots)$ zobrazený v obr. 36 v kolmém promítání na dvě kolmé průmětny, je podobný s útvarem $(P, \ldots)$, který je zobrazen v obr. 35 v kosoúhlé axonometrii, pro poměr $j' : j$. Máme-li provésti v útvaru $(P, \ldots)$ nějakou konstrukci, jež se nemění podobností (kolmost, úhly, ...), lze toto provésti v obr. 36 v útvaru podobném $(P', \ldots)$ a převésti to nazpět do kosoúhlé axonometrie (obr. 35) tím, že přeneseme souřadnice bodů v poměru jednotek na obrazech os x^k, x'; y^k, y'; z^k, z'.



Obr. 36. Pravoúhlé průměty bodu P z obr. 35.

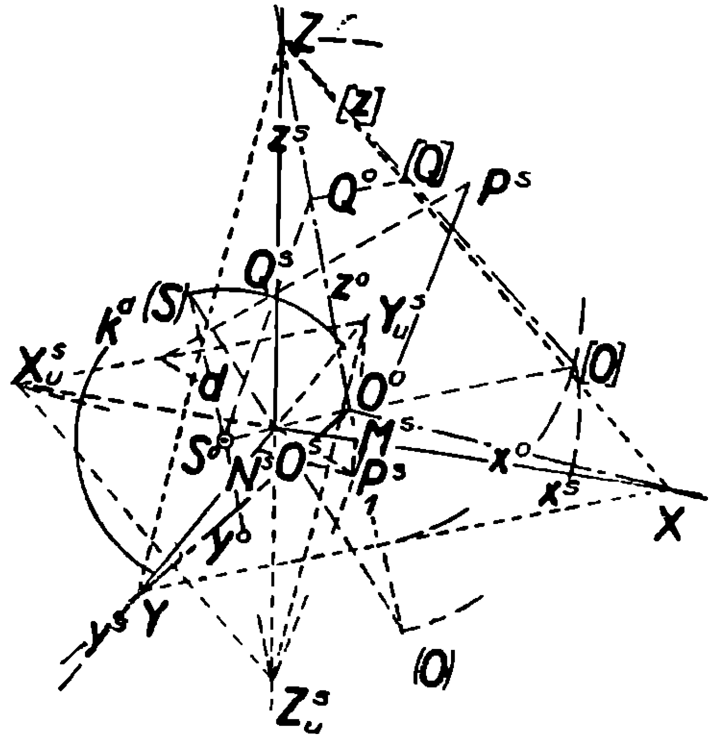
Při skizzování předmětů menší rozlehlosti jedná se nám o znázorňující obraz a tu podle věty Pohlkovy určená kosoúhlá axonometrie skýtá velmi dobré použití. Jen koule se zde promítá jako elipsa, což je nevýhoda. Zvolíme-li na obrazech dvou, případně na obrazech všech tří os stejná měřítka, dostáváme další výhody; příslušná kosoúhlá axonometrie jest dimetrií nebo isometrií. Ovšem ne v každé takové kosoúhlé axonometrii dostaneme příznivý obraz; ukazuje se, že tím více se jeví obrazy oku příjemnější, čím více se kosoúhlá axonometrie blíží kolmé axonometrii. Z dimetrií používá se hojně té, s níž jsme se setkali již v odst. **7,3** a je vyznačena v obr. 30. Z kosoúhlých isometrií je hojně používána tak zvaná *vojenská perspektiva* vyznačená v obr. 37, kde je promítáno kosoúhle do roviny (x, y); úhel paprsků promítacích se volí 45°; potom tedy $x^k \equiv x \perp y \equiv y^k$, z^k se volívá svisle. Situace ve vodorovné rovině (x, y) (t. j. axonometrický půdorys) je podobná situaci ve skutečnosti; poměr podobnosti platí pak i pro výšky, které jsou vynášeny nad půdorysem. Souřadnice bodu M daného v obr. 37 obrazy M^k, $M_1{}^k$ čteme přímo, ovšem, známe-li měřítko, v němž bylo pracováno. (Při této příležitosti je třeba upozorniti, že slovo isometrie neznačí jediné určité zobrazení; může to býti kolmá nebo kosoúhlá isometrie; *kolmá isometrie* je však jen *jediná* [odst. **8,1**].)



Obr. 37. Vojenská perspektiva bodu M.

8,3. Středová axonometrie je vyznačena v obr. 38, kde je opět zvolen axonometrický trojúhelník XYZ, ovšem ostroúhlý, a zvolen hlavní bod S^0 a distanční kružnice k^d středového promítání. Středový obraz počátku O souřadnic lze již z těchto dat sestrojiti. Jako v odst. **8,1** určíme kolmý průmět O^0 počátku O do axonometrické průmětny, což je průsečík výšek v axonometrickém trojúhelníku. Vzdálenost $\overline{O^0[O]}$ počátku O od axonometrické průmětny obdržíme na př. sklopením kolmo promítací roviny osy z do axonometrické průmětny. K sestrojení středového obrazu O^s počátku sklopíme kolmo promítací rovinu středového paprsku SO do axonometrické průmětny, takže $O^0(O) \parallel S^0(S) \perp S^0O^0$, $\overline{O^0(O)} = \overline{O^0[O]}$ a $\overline{S^0(S)} = d$; spojnice $(S)(O)$ vytíná na přímce S^0O^0 středový průmět O^s. Mezi středovým a kolmým průmětem do axonometrické průmětny je vztah odvozený v odst. **7,2**

(viz obr. 28). Úběžníky X_u^s, Y_u^s, Z_u^s os x, y, z tvoří homothetický trojúhelník s axonometrickým trojúhelníkem XYZ pro střed homothetičnosti O^s a pár odpovídajících bodů Z_u^s, Z, kde je $S^0Z_u^s \parallel z^0$. Bod P určuje se tu opět dvěma obrazy a sice axonometrickým P^s a axonometrickým půdorysem P_1^s,



Obr. 38. Středová axonometrie.

jejichž spojnice jde úběžníkem Z_u^s osy z. Uzlové paprsky jsou zde totiž obrazy rovin, jež jsou promítacími jak středově do axonometrické roviny, tak kolmo do roviny (x, y); tyto paprsky procházejí úběžníkem Z_u^s, který proto je uzlem.

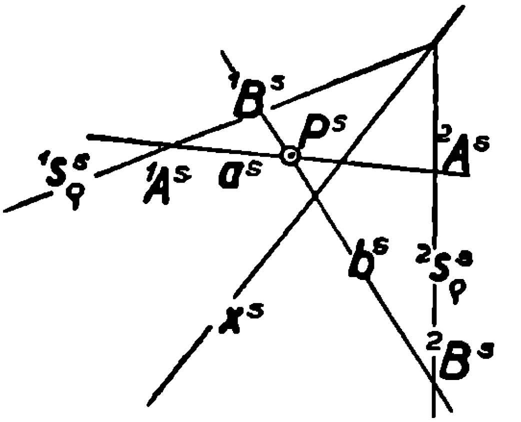
Souřadnice bodu P dostaneme, vedeme-li bodem P_1 rovnoběžky s osami x, y, které vytínají na osách y, x body N, M. Na př. v obraze jde $P_1^sN^s$ úběžníkem X_u^s a $P_1^sM^s$ úběžníkem Y_u^s a tu $x_P = \overline{OM}$, $y_P = \overline{ON}$. Souřadnici $z_P = \overline{P_1P}$ přeneseme na osu z do délky $\overline{OQ}$ rovnoběžkou PQ bodem P se spojnicí OP_1. V středovém průmětě $O^sP_1^s$ a Q^sP^s protínají se na úběžnici $X_u^sY_u^s$ roviny (x, y). Skutečnou velikost souřadnice $z_p = \overline{OQ}$ možno určiti podle postupu při středovém promítání (odst. 2,6, obr. 10) anebo lze spojnicí S^0Q^s dostati na z^0 kolmý průmět Q^0 bodu Q a na sklopené ose $[z]$ obdržeti $[Q]$ a tu $z_p = \overline{[O][Q]}$. Čtenáři se ponechává k laskavému sestrojení skutečných velikostí souřadnic x_p, y_p, jakož i obráceně sestrojení obrazů A^s, B^s, C^s bodů os x, y, z, pro něž $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = j$.

Při větě Pohlkově je možno obraz rovnoramenného trojhranu $O(A, B, C)$ voliti do jisté míry libovolně; jednou volbou je určen směr promítání i poloha trojhranu v prostoru a sice v oboru reálných řešení jsou obecně dva směry promítání a ke každému směru dvě polohy trojhranu, tedy čtyři reálná řešení. V středové axonometrii možno obraz $O^s(A^s, B^s, C^s)$ pravoúhlého rovnoramenného trojhranu voliti také libovolně, ale tím poloha středu promítání a trojhranu není v prostoru určena. Zvolíme-li ale ještě úběžníky X_u^s, Y_u^s, Z_u^s obrazů $x^s \equiv O^sA^s$, $y^s \equiv O^sB^s$, $z^s \equiv O^sC^s$, tu je úloha zase přeurčena, ježto prvky O^s, (A^s, B^s, C^s), (X_u^s, Y_u^s, Z_u^s) musí vyhovovati jisté podmínce. Podmínka ta však není jednoduchá a ježto středové axonometrie se prakticky málo používá, opomíjíme ji zde.

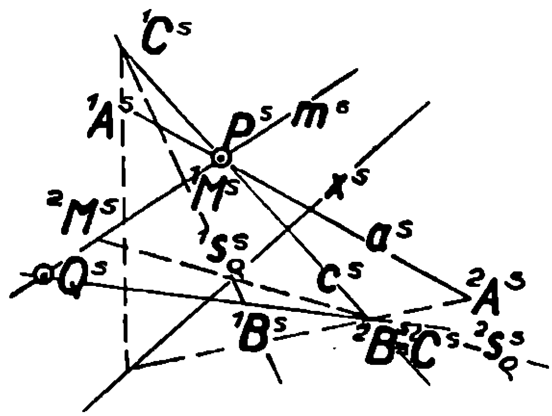
9. ZOBRAZENÍ DVOJSTOPNÍ

Pro zobrazování přímek a rovin prostoru jest velmi výhodné používati stop těchto prvků na dvou základních rovinách ${}^1\sigma, {}^2\sigma$. Toho jsme již použili pro určování přímek a rovin v středovém promítání (odst. 2), kde rovina ${}^1\sigma$ splývala s průmětnou a rovina ${}^2\sigma$ byla úběžnou rovinou prostoru. Nechť roviny ${}^1\sigma, {}^2\sigma$ mají obecnou polohu v prostoru; jejich průsečnici označme jako osu x. Libovolná přímka a protíná stopní roviny ${}^1\sigma, {}^2\sigma$ v stopnících ${}^1A, {}^2A$, a libovolná rovina ϱ v stopách ${}^1s_\varrho, {}^2s_\varrho$, kteréžto stopy se protínají v bodě průsečnice x. Naopak stopníky ${}^1A, {}^2A$ pokud nesplývají v témže bodě osy x, určují jednoznačně přímku a a dvě přímky ${}^1s_\varrho, {}^2s_\varrho$

protínající se v bodě přímky x, pokud současně nesplynou s osou x, určují jako stopy jedinou rovinu ϱ. Vymykají se tudíž tomuto určení dvěma stopami všechny přímky, jež protínají osu x a roviny jdoucí přímkou x.



Obr. 39. Dvojstopní zobrazení různoběžek a, b.

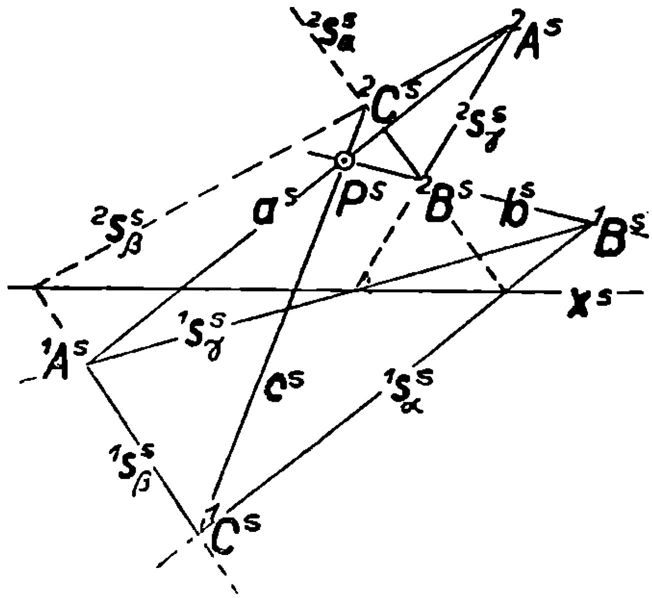


Obr. 40. Dvojstopní zobrazení přímky PQ.

Abychom mohli tyto stopy ležící ve dvou různých rovinách zobraziti na nákresně, promítneme obě stopní roviny do téže průmětny π ze středu S, který není v žádné z rovin $^1\sigma$, $^2\sigma$ a π. Tak dostaneme obr. 39, kde zvoleny obrazy $^1A^s$, $^2A^s$ stopníků přímky a, jejíž obraz středový $a^s \equiv {}^1A^{s\,2}A^s$ a přímka b ležící s přímkou a v téže rovině ϱ, jejíž stopy mají obrazy v přímkách $^1s_\varrho{}^s$, $^2s_\varrho{}^s$ protínajících se na ose x^s. Přímka ležící v rovině má své stopníky na souhlasných stopách roviny. Mají-li tedy dvě přímky býti v téže rovině, t. j. mají-li býti různoběžné nebo rovnoběžné, musí spojnice obrazů souhlasných jejich stopníků protínati se na ose x^s. Středové obrazy a^s, b^s protínají se v obraze P^s průsečíku $P \equiv (a, b)$. Přímky jdoucí v prostoru bodem P tvoří trs přímek a obrazy jejich stopníků odpovídají si v středové kolineaci o středu P^s a ose x^s. Dostáváme tento výsledek:

Body v prostoru se zobrazují v dvojstopním zobrazení v středové kolineace o téže ose x^s.

Z prostorových vztahů bodů, přímek a rovin lze nyní odvoditi ihned vztahy mezi jejich obrazy. Na př. ze vztahu: dva body P, Q určují přímku m, plyne: dvě středové kolineace o téže ose x^s a středech P^s, Q^s mají společný pár odpovídajících si bodů ${}^1M^s$, ${}^2M^s$. V obr. 40 byl tento společný pár



Obr. 41. Dvojstopní zobrazení společného bodu P tří rovin.

sestrojen, dán-li pár odpovídajících si bodů ${}^1A^s$, ${}^2A^s$ v prvé kolineaci o středu P^s a pár odpovídajících si bodů ${}^1B^s$, ${}^2B^s$ v druhé kolineaci o středu Q^s. Páry ${}^1A^s{}^2A^s$, ${}^1B^s{}^2B^s$ určují v prostoru přímky a, b, nositelky bodu P a Q, jež jsou obecně mimoběžné (${}^1A^s{}^1B^s$ neprotíná se ${}^2A^s{}^2B^s$ na ose x^s). Nositelku a nahradíme nositelkou c, která je s přímkou b různoběžná; v obr. 40 má přímka c týž druhý stopník ${}^2C^s \equiv {}^2B^s$ s přímkou b a její první stopník je ${}^1C^s$ (${}^1A^s{}^1C^s$ protíná se ${}^2A^s{}^2C^s$ na ose x^s). Přímky b, c určují rovinu ϱ, jejíž stopy mají obrazy ${}^1s_\varrho{}^s \equiv$ $\equiv {}^1B^s{}^1C^s$, ${}^2s_\varrho{}^s \equiv {}^2B^s$ (${}^1s_\varrho{}^s$, x^s), jež vytínají na spojnici $m^s \equiv$ $\equiv P^sQ^s$ stopníky ${}^1M^s$, ${}^2M^s$ přímky m a tedy společný pár obou středových kolineací.

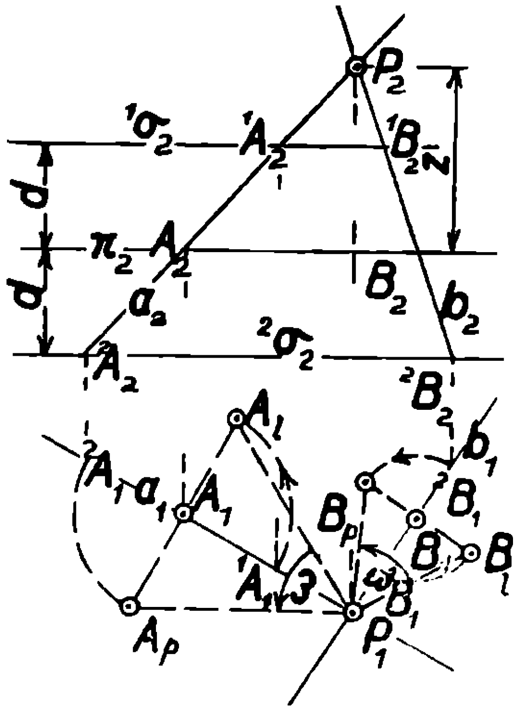
Z toho, že tři roviny mají obecně jediný bod společný, plyne Desarguesova věta o perspektivních trojúhelnících.

V obr. 41 určeny tři roviny α, β, γ obrazy stop, které vždy po dvou se protínají na ose x^s. Tři průsečnice těchto rovin a to $a \equiv (\beta, \gamma)$, $b \equiv (\gamma, \alpha)$, $c \equiv (\alpha, \beta)$ mají stopníky v průsečících odpovídajících si stop na př. ${}^1A^s \equiv ({}^1s_\beta{}^s, {}^1s_\gamma{}^s)$, ${}^2A^s \equiv$ $\equiv ({}^2s_\beta{}^s, {}^2s_\gamma{}^s)$. Obrazy těchto průsečnic procházejí obrazem P^s průsečíku $P \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$. Z toho je patrna věta Desarguesova:

Protínají-li se odpovídající strany (${}^1A^{s1}B^s$, ${}^2A^{s2}B^s$, atd.) *dvou trojúhelníků* (${}^1A^{s1}B^{s1}C^s, {}^2A^{s2}B^{s2}C^s$) *vždy po dvou v bodech téže přímky* (x^s), *pak spojnice odpovídajících si vrcholů obou trojúhelníků* (t. j. ${}^1A^{s2}A^s, {}^1B^{s2}B^s, {}^1C^{s2}C^s$) *jdou týmž bodem* ($P^s$).

A tak by bylo možno pokračovati, ale obrátíme se k některým zvláštním případům tohoto dvojstopního zobrazení.

9,1. Dvojstopní zobrazení s úběžnou osou x^s. (Osa x^s buď úběžnou přímkou nákresny.) Při středovém promítání je obraz průsečnice x stopních rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ tehdy úběžný, jestliže průsečnice leží v středové rovině jdoucí středem promítání S rovnoběžně s průmětnou π. Důležitý je případ, kdy ${}^1\sigma \parallel {}^2\sigma \parallel \pi$. Tento případ se vyskytoval právě při středovém promítání (odst. 2), kde ${}^1\sigma \equiv \pi$ a ${}^2\sigma \equiv$ $\equiv \omega_\infty$. Další užívaný případ nastává, když ${}^1\sigma \equiv \pi$ a ${}^2\sigma \parallel \pi$ a promítáme rovnoběžně (ať již kosoúhle nebo pravoúhle). Rovina ${}^2\sigma$ má pak určitou vzdálenost d od průmětny π a jmenuje se *distanční rovinou*. Konečně ještě je důležitý případ, kdy ${}^1\sigma \parallel {}^2\sigma \parallel \pi$ a promítání je středové, nebo rovnoběžné. Ve všech těchto případech



Obr. 42. Dvojstopní zobrazení. (Stopní roviny rovnoběžné k průmětně.)

bod se zobrazuje v homothetičnost, ježto osa kolineace $x_\infty{}'$ je úběžnou přímkou.

Pro další některá zobrazení povšimněme si případu dvojstopního zobrazení, při němž stopní roviny jsou rovnoběžny s průmětnou π a mají od této průmětny vzdálenosti $\pm d$, t. j. *jsou souměrně položeny k průmětně π a promítání je kolmé.* V obr. 42 je sestrojen půdorys a nárys takových rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$, které jsou rovnoběžny s první průmětnou, která je v rovině π půlící vzdálenost stopních rovin. Označíme-li vzdálenost libovolného bodu P od průmětny π jako souřadnici z, tu souřadnice rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ jsou $\pm d$. Kolmý průmět do roviny π jeví se ve skutečné velikosti v půdoryse. Přímky $a, b, \ldots$ jdoucí bodem P mají stopníky na rovinách ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$, jejichž půdorysy jsou homothetické pro střed P_1 a poměr $\overline{P_1{}^1A_1} : \overline{P_1{}^2A_1} = \overline{P_1{}^1B_1} : \overline{P_1{}^2B_1} = \ldots = k$, kde $k = \dfrac{z-d}{z+d}$. Body průmětny π $(z = 0)$ se zobrazují v středovou souměrnost $(k = -1)$, úběžné body $(z = \infty)$ zobrazují se v translaci $(k = 1)$, body roviny ${}^1\sigma$ $(z = d)$ a roviny ${}^2\sigma$ $(z = -d)$ zobrazují se v speciální homothetičnosti, pro něž v prvém případě $k = 0$ a v druhém případě $k = \infty$.

Dvojstopního zobrazení se užívá s výhodou pro útvary přímkové; ukážeme to na příkladě t. zv. paprskové sítě, které (ve zvláštním případě) potřebujeme v dalším.

10. SÍŤOVÉ PROMÍTÁNÍ

Paprskovou sítí[16]) jmenujeme prostorový útvar skládající se z přímek, z nichž libovolným bodem v prostoru jde jedna a v libovolné rovině je též jen jedna přímka sítě. Tento přímkový útvar má nekonečně mnoho paprsků ∞^2. Lze dokázati, že taková paprsková síť je souhrn příček (trans-

[16]) Též „lineární kongruencí“ viz *L. Seifert* l. c., str. 54.

versál) dvou mimoběžek, které mohou býti reálné různé, nebo reálné splývající anebo konečně imaginární druhého druhu.[17]) Tyto přímky jmenujeme též *řídicími přímkami* paprskové sítě. Paprsků sítě lze užíti též jako promítacích paprsků na průmětnu π při tak zvaném *síťovém* nebo *zborceném promítání*. Označme si m, n řídicí přímky paprskové sítě, jež jsou mimoběžné, a zvolme průmětnu π tak, aby neobsahovala žádnou z přímek m, n. Síťový nebo zborcený průmět libovolného bodu A je v průsečíku A' příčky a, jdoucí bodem A k řídicím přímkám m, n, s průmětnou π. Není-li bod A na žádné z přímek m, n, má jediný síťový průmět. Body přímek m nebo n mají nesčíslné množství síťových průmětů, jež jsou vždy na přímce, jež je průsečnicí průmětny π s rovinou určenou tím bodem a druhou řídicí přímkou, na níž bod ten neleží. Obráceně však bod A svým síťovým průmětem A' není v prostoru určen, ježto bod A' je zborceným průmětem všech bodů příčky jdoucí bodem A' k přímkám m, n; aby byl určen, musela by býti pro bod A dána ještě nějaká podmínka, na př. vzdálenost od průmětny π, nebo jiný zborcený průmět bodu A pro jiné řídicí přímky, ač v posledním případě oba zborcené průměty musely by vyhovovati jisté podmínce atd.

Síťové promítání není lineární, t. j. přímka nemá za průmět zase přímku, nýbrž obecně kuželosečku, jež se může případně rozpadnouti. Mějme sestrojiti síťový průmět přímky p, jež je mimoběžná s přímkami m, n. Promítací paprsky $a, b, \ldots$ všech bodů $A, B, \ldots$ přímky p vyplní plochu zborcenou druhého stupně, obecně t. zv. jednodílný hyperboloid, jejž průmětna π protíná v kuželosečce p', jež se může ve zvláštním případě rozpadnouti ve dvě přímky (kdyby rovina π byla tečnou rovinou hyperboloidu). Promítací hyperboloid obsahuje dvě soustavy tvořících přímek; jedna soustava přímek $a, b, \ldots$ jsou promítací paprsky bodů $A, B, \ldots$ přímky p a druhá soustava sestává z přímek $p, m, n, {}^1p, \ldots$, jež proti-

[17]) Tamtéž str. 54 a n.

nají všechny přímky prvé soustavy; mezi sebou jsou však mimoběžné. Přímky druhé soustavy $p, {}^1p, \ldots$, mimo m, n, mají týž síťový průmět $p' \equiv {}^1p' \equiv \ldots$ Kuželosečka p' jde stopníky M, N řídicích přímek m, n na průmětně π, jakož i stopníkem P přímky p. Kuželosečkový průmět p' jdoucí body M, N neurčuje přímku p jednoznačně, ježto všechny přímky $p, {}^1p, \ldots$ druhé soustavy výše zmíněného promítacího hyperboloidu lze považovati za originál k průmětu p'. Jednoznačnosti mezi průmětem p' a originálem přímky p se zde docílí, určíme-li vedle průmětu p' ještě na něm stopník P přímky p. Bodu P říkáme *bod upevňující*; kuželosečce (s bodem upevňujícím) se říká *upevněná kuželosečka*. Dostáváme tedy tento výsledek:

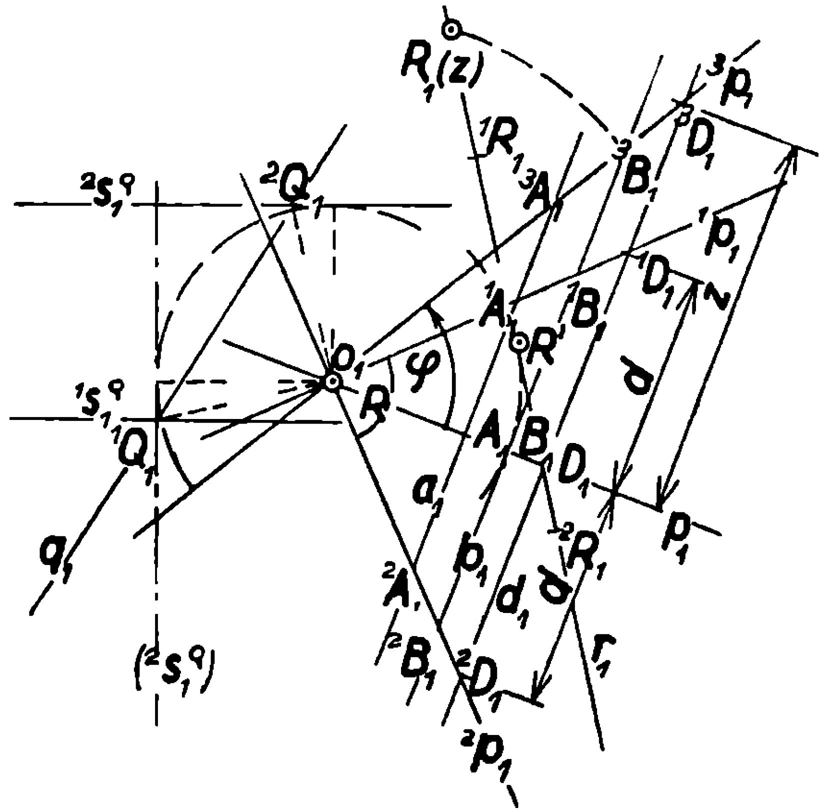
Průmětem přímky v prostoru při síťovém promítání je upevněná kuželosečka, jež prochází dvěma základními body M, N. Promítací paprsek, jenž náleží síti, má za průměty bod (vlastně dvě přímky protínající se v tomto bodě).

Jak se jeví v síťovém průmětě různoběžnost, nebo rovnoběžnost dvou přímek p, q? Označme jejich společný bod R a jejich rovinu $\varrho \equiv (p, q)$. V rovině ϱ je jeden paprsek a sítě, jehož stopník a' náleží oběma kuželosečkám p', q' a je na spojnici stopníků P, Q přímek p, q na π. Čtvrtý průsečík kuželoseček p', q' mimo M, N, a' jest síťovým průmětem R' průsečíku $R \equiv (p, q)$.

Síťové průměty dvou přímek téže roviny jsou dvě upevněné kuželosečky jdoucí základními body M, N průmětny, při čemž spojnice upevňujících bodů (stopníků přímek) *prochází jedním ze zbývajících dvou průsečíků kuželoseček, kdežto druhý z těchto průsečíků je průmětem průsečíku obou přímek.*

Přestaňme na těchto vlastnostech obecného síťového promítání a uvažujme o zvláštním případu paprskové sítě: o t. zv. síti rotační.

10,1. Promítání rotační sítí paprskovou. V zobrazení dvojstopním (odst. **9,1**), kde stopní roviny ${}^1\sigma \parallel {}^2\sigma \parallel \pi$ a $z_{1\sigma} = d$, $z_{2\sigma} = -d$, v kolmém promítání na rovinu π (obr. 43), uvažujme o souhrnu paprsků, jejichž obrazy jsou určeny takto: Mysleme si přímku $o \perp \pi$, jejímž půdorysem je bod o_1. Bodem o_1 v půdoryse veďme dvě k sobě kolmé přímky ${}^1p_1 \perp {}^2p_1$. Přímka ${}^1p_1$ je půdorysem přímky ${}^1p$ v stopní rovině ${}^1\sigma$ a přímka ${}^2p_1$ je půdorysem přímky ${}^2p$ v stopní rovině ${}^2\sigma$, takže



Obr. 43. Průmět bodu R rotační sítí paprskovou.

obě přímky ${}^1p$, ${}^2p$ kolmo protínají přímku o a jsou navzájem mimoběžné. Vezměme nyní přímky a, b, ..., jejichž stopníky ${}^1A$, ${}^1B$, ... jsou na přímce ${}^1p$ a mají od přímky o tytéž vzdálenosti jako druhé stopníky ${}^2A$, ${}^2B$, ... ležící na přímce ${}^2p$. Patrně půdorysy těch přímek a_1, b_1, ... jsou spolu rovnoběžné a jejich stopníky A, B, ... na průmětně π jsou na ose p úhlu přímek ${}^1p_1$, ${}^2p_1$. Přímky a, b, ... vyznačené v obr. 43 jsou všechny pravotočivé, t. j. postavíme-li se do osy o a pozorujeme bod pohybující se na přímkách a, b, ... směrem od naší hlavy k patě, musíme se otáčeti vpravo. Stejně určené přímky levotočivé vzhledem k ose o, měly by stopníky na rovině π v druhé ose úhlu přímek ${}^1p_1$, ${}^2p_1$. Všechny přímky $a, b, \ldots$ v obr. 43 vyplňují plochu zvanou hyperbolický paraboloid, který má dvě soustavy tvořících přímek a sice jednu tvořenou přímkami $a, b, \ldots$, jež jsou kolmy k přímce p a tudíž rovnoběžny s rovinou kolmou k této přímce a druhou soustavu tvořenou přímkami $p, {}^1p, {}^2p, \ldots$, jež jsou rovnoběžny s průmětnou π. (Pro důkaz zvolme si na přímce a bod ${}^3A$, který má od průmětny π vzdálenost z, tu dělicí poměr $\overline{{}^3A_1{}^1A_1} : \overline{{}^3A_1{}^2A_1} = (z - d) : (z + d)$.

Spojme bod ${}^3A_1$ s bodem o_1 přímkou ${}^3p_1 \equiv o_1{}^3A_1$ a označme $\sphericalangle\, p_1{}^3p_1 = \varphi$ a $\overline{A_1o_1} = u$, pak

$$\overline{{}^3A_1A_1} : \overline{{}^3A_1{}^2A_1} = u(\mathrm{tg}\varphi - 1) : u(\mathrm{tg}\varphi + 1) = \\ = (\mathrm{tg}\varphi - 1) : (\mathrm{tg}\varphi + 1).$$

Porovnáním dostaneme $\mathrm{tg}\varphi = z : d$ a proto body přímek $a, b, \ldots$ prvé soustavy, jež mají od π tutéž vzdálenost z, jsou na přímce ${}^3p$, jež protíná kolmo přímku o. [Sestrojíme-li přímku d prvé soustavy, jež má od osy o vzdálenost d, tu na půdorysu d_1 této přímky odtínají půdorysy přímek druhé soustavy svoje kóty z (v obr. 43 je to vyznačeno pro přímku ${}^3p$).]

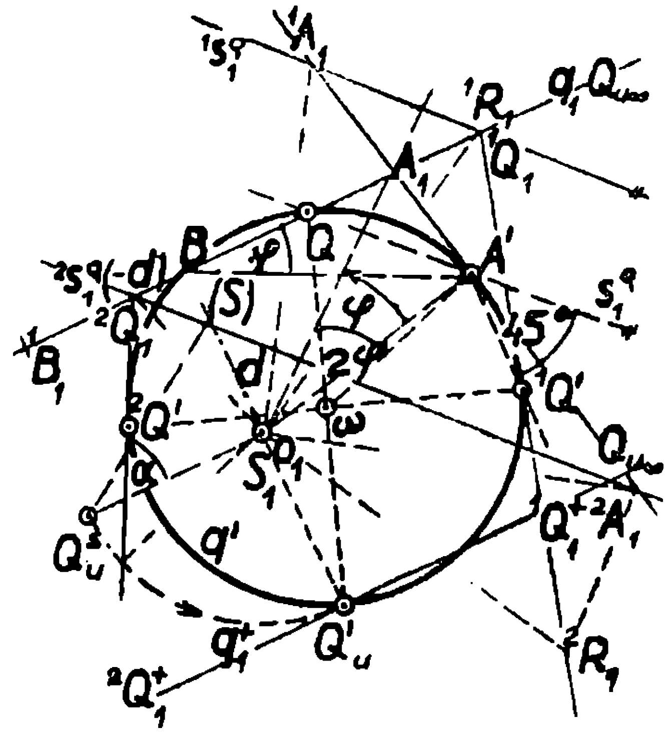
Otočme nyní přímky $a, b, \ldots$ prvé soustavy o 180° kolem přímky o; víme, že každá z nich a souměrně k ní podle osy o sdružená, vytvoří jednu soustavu tvořících přímek na rotačním hyperboloidu. Všechny tyto soustavy na jednomocném systému rotačních hyperboloidů vyplní rotační síť, jejíž řídicí přímky jsou ovšem imaginární druhého druhu.

V libovolné rovině, jež je dána stopami ${}^1s^\varrho$, ${}^2s^\varrho$ (obr. 43) je jediná přímka q této sítě, jejíž prvý stopník ${}^1Q$ má půdorys v průsečíku ${}^1Q_1$ půdorysu ${}^1s_1{}^\varrho$ s otočenou polohou $({}^2s_1{}^\varrho)$ půdorysu ${}^2s_1{}^\varrho$ o 90° ve smyslu kladném kolem bodu o_1. Libovolným bodem R, který je dán půdorysem R_1 a kótou z, jde též jediná přímka r sítě, kterou sestrojíme takto. Na hyperbolickém paraboloidu dříve uvažovaném určíme přímku ^3p o kótě z náležející druhé soustavě a bod R otočíme kolem osy o až přejde na přímku ^3p do bodu ^3B, jímž jde přímka b sítě a sice $b_1 \perp p_1$. Otočením nazpět přímky b až bod ^3B přejde do bodu R, dostaneme přímku r sítě, jejíž stopník R' na průmětně π, který odpovídá bodu B přímky b, je síťovým průmětem bodu R na průmětně π. Řídicí přímky sítě m, n jsou též přímkami druhé soustavy hyperbolického paraboloidu a ježto při otáčení kolem osy o (a tedy jejich půdorysy m_1, n_1 při otáčení kolem bodu o_1) nesmějí se měniti, jsou jejich půdorysy minimálními přímkami bodu o_1.[18]) Půdorysy m_1, n_1 odtínají na půdorysu d_1 svoje kóty, jež jsou $\pm di$, $i^2 = -1$. Řídicí přímky m, n jsou tedy minimálními přímkami mimoběžnými protínajícími kolmo osu o sítě; jedna má kótu $+di$ a druhá $-di$. Pro levotočivou síť se kóty zamění.

V obr. 44 je sestrojen *síťový průmět q' přímky q* dané půdorysem q_1 a půdorysy stopníků ^1Q, ^2Q. Stopník Q přímky q půlí vzdálenost $\overline{{}^1Q_1{}^2Q_1}$. Průmět q' podle odst. 10 je kuželosečka, jež jde stopníky řídicích přímek m, n na průmětně π. Ježto tyto stopníky jsou zde v kruhových bodech průmětny, je *q' kružnicí*. To lze dokázati též přímo konstrukcí jednotlivých bodů průmětu q'. Třeba jen určovati stopníky paprsků rotační sítě, o níž předpokládáme v obr. 44, že je pravotočivou, jež jsou různoběžné s přímkou q. Snadno určíme síťové průměty $^1Q'$, $^2Q'$ stopníků přímky q. Na př. bodem ^1Q jde přímka r sítě, jejíž $^1R \equiv {}^1Q$, $\sphericalangle\, {}^1R_1 o_1 {}^2R_1 = -90°$, $\overline{o_1{}^2R_1} = \overline{o_1{}^1R_1}$ a tu průmět $^1Q'$ půlí úsečku $\overline{{}^1R_1{}^2R_1}$. Obdobně určíme průmět $^2Q'$. Abychom dostali obecný bod M' průmětu q', proložme přímkou q libovolnou rovinu ϱ, jejíž stopy $^1s\varrho$, $^2s\varrho$ jdou stopníky ^1Q, ^2Q spolu rovnoběžně. Otočená poloha půdorysu stopy $^1s_1\varrho$ o úhel $-90°$ kolem o_1, jde bodem $^2R_1$ kolmo k $^2s_1\varrho$ a protíná tuto v půdorysu $^2A_1$ druhého stopníku přímky a sítě, jež protíná přímku q v bodě A. Síťový průmět A' bodu A půlí vzdálenost $^1A_1{}^2A_1$ a je též na stopě $s\varrho$ roviny ϱ na průmětně π, která jde stopníkem Q přímky q rovnoběžně k stopě $^1s\varrho$. Pole bodů A', $^1Q'$, ... je podobné s polem $^1A_1$, $^1Q_1$, ... a prvé vznikne z druhého otočením kolem středu o_1 o úhel $-45°$ a homothetickým přiblížením k o_1 pro poměr $1 : \sqrt{2}$. Proto spojnice $A'{}^1Q'$ svírá s $^1A_1{}^1Q_1$ úhel 45° a tedy též s $A'Q \parallel {}^1A_1{}^1Q_1$. Je proto místem bodů A' kružnice q', na níž body Q, $^1Q'$ ome-

[18]) Viz *L. Seifert* l. c., str. 35.

zují čtvrtkružnici, z čehož lze určiti střed ω kružnice q'. Kratčeji však lze tento střed sestrojiti, určíme-li síťový průmět $Q_u{}'$ úběžného bodu Q_u přímky q. Paprsek $q+$ sítě rovnoběžný s q dostaneme, sestrojíme-li $\overline{o_1 Q_u{}'} \underline{\underline{\perp}} \overline{Q^1 Q_1}$, $\overline{Q_u{}'^1 Q_1}+ = -\overline{Q_u{}'^1 Q_1}+ = \overline{Q^1 Q_1}$ tak, že $\sphericalangle{}^1Q_1 + o_1{}^2 + = -\overline{90}°$. Lze nyní snadno dovoditi, že t. zv. *síťový úběžník* $Q_u{}'$ přímky q je diametrálně protilehlý k stopníku Q na kružnici q'. Je totiž $\overline{o_1{}^1Q'} \underline{\underline{\perp}}$

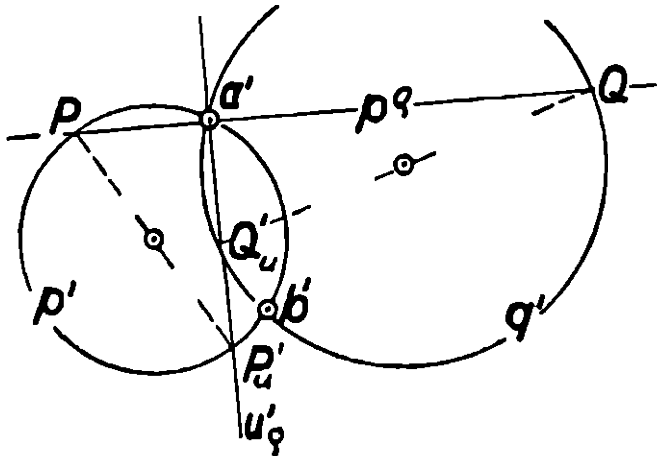


Obr. 44. Rotační síťový průmět přímky q.

$\underline{\underline{\perp}}$ $\overline{^1Q_1{}^1Q'}$ a proto též $\overline{Q_u{}'^1Q'} \underline{\underline{\perp}} \overline{Q^1Q'}$. Zvolíme-li na ose o střed promítání S ve vzdálenosti d nad průmětnou π, tu síťový úběžník $Q_u{}'$ dostane se ze středového úběžníku $Q_u{}^s$ otočením kolem středu o_1 o úhel $+90°$. Z toho je patrno jak lze ze síťového průmětu přímky (q', Q) přejíti k středovému průmětu, známe-li o_1 a d a naopak.

Kružnice q' obsahuje též patu B kolmice spuštěné z bodu o_1 na půdorys q_1, je to totiž stopník síťového paprsku ležícího v půdorysně promítací rovině přímky q a tedy s ní různoběžné. Každému bodu A přímky q přísluší v prostoru jistá kóta z a podle obr. 43 jistý úhel φ, daný vztahem $\mathrm{tg}\varphi = z : d$; při pravotočivé síti jsou φ a z téhož znaménka, kdežto při levotočivé síti mají znaménka opačná. V síťovém průmětu q' přímky q je Q stopník přímky a tu, je-li φ úhel patřící ke kótě z bodu A přímky, je $\varphi = \sphericalangle A'o_1A_1$. Body o_1, B, A_1, A' jsou na kružnici a proto $\sphericalangle A'BQ = \varphi$ a tedy v kružnici q' středový úhel $\sphericalangle Q\omega A' = -2\varphi$. Pro body Q, ${}^1Q$, $Q_{u\infty}$ jest $\varphi = 0°, 45°, 90°$ a podle konstrukce patří k obrazům těchto bodů na kružnici q' středové úhly $0°, -90°, -180°$.

Buď dán síťový obraz přímky q, t. j. upevněná kružnice q' s bodem Q; při rotační síti je k obrazu A' libovolného bodu A přímky q příslušný středový úhel $\sphericalangle Q\omega A'$ měřený od $0°$ do $-180°$ a od $0°$ do $+180°$, roven dvojnásobku úhlu patřícího ke kótě z_A.



Obr. 45. Rotační síťové obrazy různoběžek p, q.

Přímky kolmé k průmětně π se zobrazují v kružnici jdoucí bodem o_1, kde je jejich společný síťový úběžník. *Promítací paprsky*, t. j. paprsky sítě zobrazují se do dvou minimálních přímek, které se protínají v reálném bodě průmětny. *Přímky rovnoběžné s průmětnou* se zobrazují v přímky v průmětně, jež vzniknou z jejich půdorysů otočením o úhel φ patřícím k jejich kótě a homothetickým přiblížením k o_1 pro poměr $\cos\varphi : 1$. (Úběžná přímka doplňuje každý takový obraz na kružnici.)

V obr. 45 jsou vyznačeny kruhové síťové obrazy p', q' *dvou různoběžek* p, q určujících rovinu ϱ. V rovině ϱ je jeden paprsek a sítě, jehož bodový síťový obraz je v jednom z průsečíků a' kružnic p', q', kdežto druhý průsečík b' je síťovým obrazem paprsku b sítě, jež jde průsečíkem (p, q). Stopníky P, Q přímek p, q musí býti na stopě p^{ϱ} roviny ϱ, jež musí jíti průsečíkem a' obou kružnic. Diametrálně protilehlé síťové úběžníky P_u', Q_u' určují přímkový obraz u_{ϱ}' úběžné přímky u_{ϱ} roviny ϱ, jež je kolmá k stopě p^{ϱ}. Poslední plyne z určení síťového úběžníku ze středového úběžníku.

Laskavému čtenáři se ponechává, aby zobrazil v síťovém promítání svazek paprskový, trs paprskový atd.

K tomuto zobrazení, které je v úzké souvislosti s pohybem neproměnné rovinné soustavy v její rovině, dospěli téhož roku 1911 dva autoři a to W. Blaschke a J. Grünwald. Základním prvkem pro zobrazení je tu opět přímka; její zobrazení obdržíme z jejího zobrazení dvojstopního (odst. **9,1**, obr. 42), při němž stopní roviny ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ jsou souměrně položeny ve vzdálenosti d rovnoběžně k průmětně π, na niž kolmo promítáme.

Přímka a se v tomto dvojstopním zobrazení zobrazuje v pár bodový ${}^1A_1$, ${}^2A_1$ (obr. 42). Abychom dostali kinematický obraz přímky a, otočme úsečku $\overline{{}^1A_1{}^2A_1}$ kolem jejího středu A_1 o 90° ve smyslu kladném; tu přejde půdorys prvého stopníku v levý a druhého stopníku v pravý kinematický obraz přímky a, jež označíme A_l, A_p. Tomuto zobrazení se vymykají, podobně jako v dvojstopním zobrazení, všechny přímky, jež jsou rovnoběžny s průmětnou π, neboli protínají úběžnou přímku x_∞ průmětny π.

11,1. Kinematický obraz bodu. Bod P se zobrazoval v dvojstopním zobrazení (odst. **9,1**; obr. 42) v homothetičnost mezi půdorysy prvních a druhých stopníků. I lze nyní ukázati, že všechny páry A_lA_p, B_lB_p, ... kinematického zobrazení přímek $a, b, \ldots$, jdoucích bodem P, spatřují se z půdorysu P_1 pod týmž úhlem ω.

V obr. 42 je:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\overline{A_1A_p}}{\overline{A_1P_1}} = \frac{\overline{A_2{}^1A_2}}{\overline{A_2P_2}} = \frac{d}{z}, \text{ takže } \tfrac{1}{2}\omega = \operatorname{arctg}\frac{d}{z} + n\,.\,180°$$

$$\text{a } \omega = 2\operatorname{arctg}\frac{d}{z} + n\,.\,360°, \text{ kde musí } -180° \leqq \omega \leqq 180°.$$

Je tedy úhel ω pro bod P a všechny body téže vzdálenosti z od průmětny π týž.

Pro zvláštní polohy bodu P dostaneme: Je-li bod P v průmětně π ($z = 0$), je $\omega = 180°$. Pro bod P v stopní rovině ${}^1\sigma$, (${}^2\sigma$) je $z = d$, ($-d$) a tedy $\omega = 90°$, ($-90°$). Jestliže bod P je úběžným bodem, odpovídají si páry ${}^1A_1{}^2A_1$, ${}^1B_1{}^2B_1$, ... v translaci a tedy též páry A_lA_p, B_lB_p odpovídají si v translaci ($\omega = 0°$). Pole bodové levých obrazů přímek trsu o středu P je souhlasně shodné s polem jejich pravých obrazů. I dostáváme:

Body prostoru, vyjma úběžné body průmětny π, zobrazují se v otáčení kolem kolmých průmětů těchto bodů do průmětny π; úběžným bodům v prostoru odpovídají translace. Úhel otočení závisí na vzdálenosti bodu od průmětny při daných stopních rovinách.

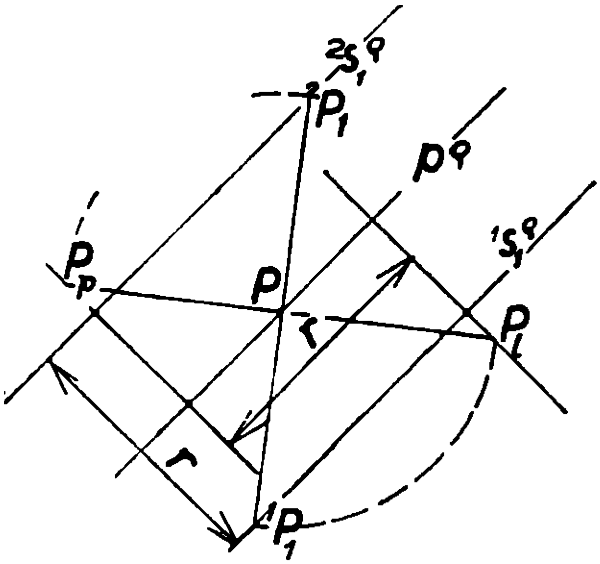
Také obrácená věta je správná.

11,2. Kinematický obraz roviny. Rovinu ϱ je třeba považovati za pole paprskové a vyšetřiti v jakém vztahu je pole pravých obrazů těchto paprsků k poli jejich levých obrazů. Prvé stopníky paprsků pole ϱ jsou na prvé stopě ${}^1s^\varrho$ a druhé stopníky na druhé stopě ${}^2s^\varrho$, patrně v půdoryse je ${}^1s_1{}^\varrho \parallel {}^2s_1{}^\varrho$ (obr. 46). Zvolme si přímku p v rovině ϱ obrazy ${}^1P_1$, ${}^2P_1$ jejích stopníků a otočme tyto kolem stopníku P přímky p, ležícím na stopě p^ϱ, o $+90°$. Obrazy stopníků přejdou v levý a v pravý kinematický obraz P_l, P_p přímky p pole ϱ. Označíme-li vzdálenost půdorysů stop ${}^1s^\varrho$, ${}^2s^\varrho$ písmenem r, vidíme, že pravý obraz P_p dostaneme z levého obrazu P_l, jestliže k poslednímu sestrojíme bod souměrně sdružený podle osy p^ϱ a pak tento posuneme ve směru stopy p^ϱ o délku r, jež je pro všechny přímky roviny ϱ konstantní. Toto překlopení pole (P_l) kolem p^ϱ a posunutí ve směru p^ϱ o délku r, označme si jedním slovem *převrácením* pro osu převrácení p^ϱ a vektor r. Pole (P_p) a (P_l) jsou nesouhlasně shodná. Dostáváme:

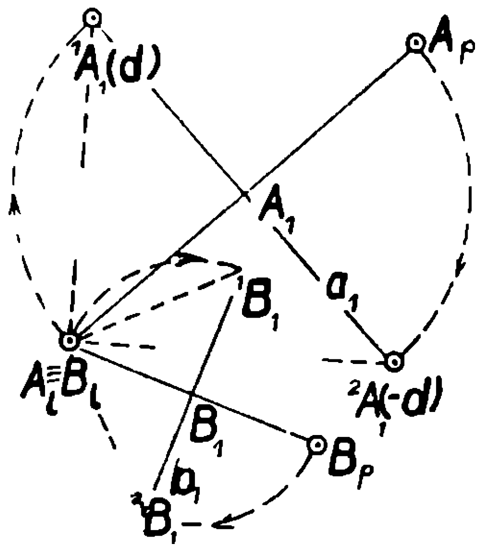
Roviny zobrazují se kinematicky ve všechna převrácení průmětny považované za bodové pole.

Je-li vektor převrácení $r = 0$, t. j. rovina ϱ je kolma k průmětně π, tu převrácení přejde v překlopení kolem p^ϱ, neboli v souměrnost podle osy p^ϱ.

11,3. Vzájemná poloha přímek. Dvě *různoběžné* přímky $a(A_l, A_p)$, $b(B_l, B_p)$ mají společný bod a jsou v téže rovině, proto musí si jejich pravé obrazy A_p, B_p a levé obrazy A_l, B_l odpovídati jak v souhlasné tak nesouhlasné shodnosti, t. j. musí $\overline{A_lB_l} = \overline{A_pB_p}$. Při *rovnoběžnosti* přímek a, b, musí $\overrightarrow{A_pA_l} = \overrightarrow{B_pB_l}$. *Svazek paprskový* se zobrazuje ve dvě shodné řady bodové, z nichž jedna obsahuje pravé a druhá levé obrazy paprsků svazku.



Obr. 46. Kinematický obraz roviny.



Obr. 47. Kinematické obrazy levorovnoběžných přímek.

Zde mluvíme ještě o tak zvaných levo- případně pravorovnoběžných přímkách. Na př. levorovnoběžné přímky jsou takové, které mají týž levý obraz $A_l \equiv B_l$ (obr. 47). Vrátíme-li se od kinematického zobrazení k dvojstopníkovému, poznáme, že trojúhelníky $^1A_1A_l{}^2A_1$, $^1B_pB_l{}^2B_1$ jsou pravoúhlé a rovnoramenné a přímky a, b náležejí tedy podle odst. **10,1** rotační paprskové síti, jež má osu v přímce kolmé k průmětně π v společném levém obraze.

Přímky levorovnoběžné (pravorovnoběžné) *tvoří rotační paprskovou síť pravotočivou* (levotočivou), *jež má osu v přímce kolmé k průmětně v společném levém* (pravém) *obrazu.*

11,4. Užití kinematického zobrazení. Kinematické zobrazení může sloužiti *především* k přenesení různých vět o prostorových útvarech ve věty kinematické geometrie. Uvedeme zde jen dva jednoduché případy:

1. a) Dva body v prostoru určují jedinou spojnici.

b) Dvě různá otáčení v rovině mají jediný pár bodový společný, t. j. existuje jediný bod v rovině, který v obou otáčeních dává týž bod.

2. a) Dvě roviny mají jedinou přímku společnou.

b) Dvě různá převrácení v rovině mají jediný společný pár bodový.

Konstrukci bodových párů v případech b) ponecháváme laskavému čtenáři.

Za *druhé* lze tohoto zobrazení použíti pro spojitý pohyb rovinné neproměnné soustavy v její rovině. Za tím účelem mysleme si nákresnu π jako stálou soustavu a označme ji π_l a jako pohyblivou v sobě označme ji π_p. Každé poloze roviny π_p vzhledem k π_l přísluší jistý bod P prostoru, který dostaneme tak, že body soustavy π_p považujeme za pravé obrazy a odpovídající body shodného stálého pole π_l za levé obrazy přímek trsu P. Když pole π_p se spojitě pohybuje v pevném poli π_l, bod P opíše v prostoru křivku p, kterou jmenujeme *obrazem pohybu*. Obráceně každé křivce p v prostoru, jež je spojitá a jež má v každém bodě určitou tečnu (která se spojitě mění, mění-li se bod na křivce), odpovídá v nákresně spojitý pohyb neproměnné rovinné soustavy π_p v rovině π.

Vytkněme si v pohybující soustavě π_p bod A_p a vyšetřme co odpovídá dráze toho bodu, pohybuje-li se rovina π_p spojitě v π. Bodu A_p odpovídá v shodné soustavě π_l bod A_l; tyto body mohou případně splynouti, je-li π_l počáteční polohou pohybující se soustavy π_p. Pár A_l, A_p je obrazem přímky a, jež jde bodem P odpovídajícím této poloze π_p na obrazu p pohybu. Pohybuje-li se soustava π_p spojitě v π, tu opíše bod A_p v rovině π dráhu (A_p) a příslušná přímka a prochází odpovídajícími body P na obrazu p. Dostáváme:

Dráha libovolného bodu A_p pohybující se soustavy π_p je místem pravých obrazů všech přímek, jež protínají křivku p a patří síti levorovnoběžných přímek, jež mají levý obraz v odpovídajícím bodě A_l shodné pevné soustavy π_l.

Zvolíme-li A_l v levém obraze tečny a obrazu pohybu p, tu zůstane A_p při přechodu k soumeznému obraznému bodu P' na křivce p týž, ježto levorovnoběžná přímka k přímce a bodem P' je táž přímka a. Bod A_p zůstane v tom okamžiku pohybu pevný a je tudíž okamžitým středem otáčení, jež převádí polohu π_p v soumeznou polohu π_p'. Tyto okamžité středy vyplní v rovině π t. zv. *pevnou pólovou křivku p_p pohybu*. Levý obraz A_l tečny a je v soustavě π_l bodem, který při pohybu splyne s okamžitým středem A_p a body ty vyplňují t. zv. *hybnou pólovou křivku p_l pohybu*, jejímž kotálením po pevné křivce pólové p_p dá se pohyb v rovině π uskutečniti.

Pohybuje-li se rovinná neproměnná soustava, jejíž body považujeme za pravé obrazy přímek po shodné rovinné soustavě pevné, jejíž body jsou levými obrazy přímek, při čemž obrazy téže přímky jsou v odpovídajících si bodech obou soustav, pak pólové křivky tohoto pohybu jsou v pravém a levém obrazu plochy tečen prostorového obrazu p tohoto pohybu. Pravý obraz je pevnou a levý obraz hybnou pólovou křivkou pohybu.

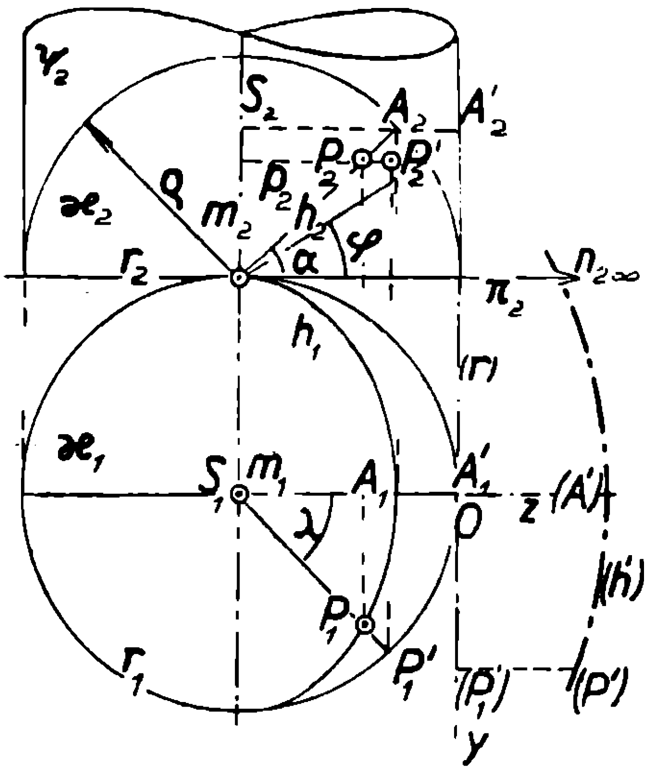
Je-li křivka p přímkou, tu příslušný pohyb je rotací kolem jejího pravého obrazu P_p. Potvrďte to obrazem!

Ježto soumezné tečny křivky p se protínají, tu z podmínky různoběžnosti (odst. **II,3**) plyne, že odpovídající si oblouky obou pólových křivek jsou stejně dlouhé.

Přestaneme na těchto vlastnostech kinematického zobrazení, z nichž již plyne odůvodnění jeho pojmenování.

12. STEJNOPLOCHÉ ZOBRAZENÍ KULOVÉ PLOCHY NA ROVINU

Mějme kulovou plochu $\varkappa$ o rovníku r a poloměru ϱ. (V obr. 48 v půdoryse a nárysе zobrazena jen polovina kulové plochy nad rovníkem r.) Podél rovníku dotýká se kulové plochy ro-



Obr. 48. Stejnoploché zobrazení kulové plochy na rovinu.

tační válcová plocha ψ. Body P kulové plochy $\varkappa$ promítáme na válcovou plochu ψ paprsky, jež protínají kolmo průměr m kulové plochy, jenž je současně osou válcové plochy ψ. Z dvou průsečíků promítacího paprsku bodu P s válcovou plochou ψ, bereme ten P', který je s bodem P na téže straně od osy m. Body rovníku r splývají se svými průměty a póly S, J, jež jsou na ose m mají za průmět všechny body rovníku. Promítací paprsky jsou tu paprsky sítě, jejíž řídicí přímky jsou osa

m a úběžná přímka roviny π rovníka r. Rovnoběžky kulové plochy, jež jsou v rovinách rovnoběžných s rovinou rovníku, promítají se v kružnice válcové plochy, takže kulový pás omezený dvěma rovnoběžkami kulové plochy a výšky v, jehož obsah je $2\pi\varrho v$, promítne se v pás válcové plochy ψ omezený dvěma jeho kružnicemi ve vzdálenosti v, který má týž obsah. Z tohoto lze odvoditi, že nějaká část kulové plochy $\varkappa$ promítá se v stejnoplochou část válcové plochy ψ. Ovšem chceme-li tuto plochu měřiti, třeba válcovou plochu ψ rozvinouti. V obr. 48 sestrojen průmět P' bodu P na válcovou plochu ψ, jakož i hlavní kružnice h, jež jde bodem P v rovině kolmé k druhé průmětně, jejíž nejvyšší bod je označen A a úhel její roviny s rovinou π pak α. Rozvinutí válcové plochy ψ je provedeno do její tečné roviny v průmětě A' a sice tak, že rovina je sklopena do roviny π. Zavedeme-li pro bod P zeměpisné souřadnice λ, φ, kde nultý poledník je v poledníku bodu A, plyne pro body kružnice h ze sférického trojúhelníka pravoúhlého SAP, jehož odvěsna $\widehat{SA} = 90° - \alpha$, přepona $\widehat{SP} = 90° - \varphi$ a úhel jimi sevřený je λ, tento vztah:

$$\cos\lambda = \mathrm{tg}\varphi \,.\, \mathrm{cotg}\alpha.$$

Zavedeme-li v rozvinutí válcové plochy pravoúhlé souřadnicové osy $y \equiv (r)$ a $z \equiv A_1'(A')$, jsou souřadnice bodu (P') právě $y = \varrho\lambda$, $z = \varrho \sin\varphi$ a tedy rovnice křivky (h') je

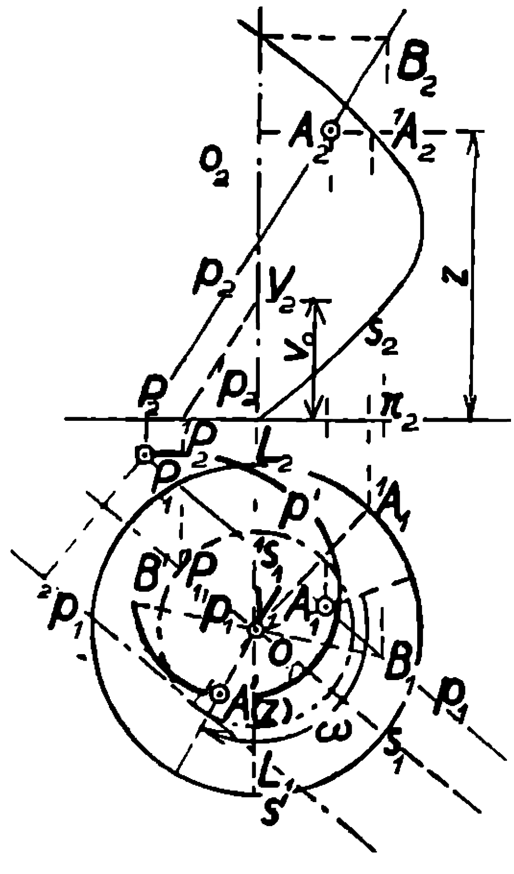
$$z = \sqrt{\varrho^2 - z^2}\, \mathrm{tg}\alpha \cos\frac{y}{\varrho}.$$

Křivka (h') má vrchol v bodě (A'), kde poloměr křivosti je $\varrho : \sin\alpha \cos^2\alpha$ a obrací svoji konkávní stranu k ose y. Kdyby $\varkappa$ byla zorná kulová plocha (odst. 5), pak rozvinutí válcové plochy ψ je křivočarou perspektivou, jež splňuje podmínky 1, 2, 4, 8 a podmínka 6 je splněna jen na horizontu.

Tohoto zobrazení, které pochází od Lamberta, se používá v kartografii a jinde.

Při vyšetřování šroubových ploch a hlavně při konstrukcích jejich normálních řezů se používá šroubového promítání. Budiž dán v obr. 49 šroubový pohyb o svislé ose o, redukované výšce v_0 (t. j. posunutí ve směru osy o při otočení kolem této o úhel v absolutní míře rovný 1, t. j. o úhel 57°17′45″) a buď pravotočivý (v půdorysu je vyznačeno šipkou klesání bodu). Každým bodem A prostoru prochází jediná šroubovice tohoto pohybu, která protíná průmětnu π kolmou k ose o šroubového pohybu, v šroubovém průmětu A' bodu A. Promítací paprsky přecházejí zde v křivky; proto lze tento průmět označiti jako *křivočarý průmět* bodu A. K sestrojení šroubového průmětu bodu A užijeme toho, že při šroubovém pohybu je posuv ve směru osy o přímo úměrný úhlu otočení kolem osy o.

V obr. 49 je sestrojena šroubovice s tohoto pohybu pro bod L v průmětně π. Hledejme průmět libovolného bodu A. Bod A při přechodu do průmětny π (naším šroubovým pohybem) musí klesnouti ve směru osy o o délku $z = (A_2 \dashv \pi_2)$; proto se v půdorysu otočí ve smyslu klesání o úhel ω, který je stejný jako úhel pro bod ${}^1A$ ležící na šroubovici s ve stejné výši z nad π. I je v půdoryse $\sphericalangle A_1 o_1 A' = \sphericalangle {}^1A_1 o_1 L_1 = \omega$. Je-li kóta z kladná, otáčení se děje ve



Obr. 49. Šroubový průmět bodu A a přímky p.

smyslu šipky, pro z záporné opačně. Každému bodu A náleží tak zcela určitý šroubový průmět A'. Nikoliv však obráceně, k šroubovému průmětu A' náležejí, jako originály, všechny body šroubovice bodu A' v šroubovém pohybu (o, v_0). Aby bod A byl též svým šroubovým průmětem jednoznačně určen, je třeba předně prostor originálů omeziti jen na vrstvu mezi průmětnou π a rovinou ${}^1\pi \parallel \pi$, jejíž vzdálenost od π je $v = 2\pi v_0$ t. zv. výška závitu jednoho chodu šroubového pohybu, a pak určiti bod A ještě jeho půdorysem A_1. Patrně šroubový průmět A_1 a půdorys A_1 musí býti na kružnici o středu o_1; tak dospíváme k dvojobrazovému zobrazení bodů vrstvy prostoru, při němž obrazové dvojiny jsou vždy na kružnici o středu o_1. Bylo by též možno místo půdorysu A_1 použíti kóty, která by se u šroubového průmětu připsala; tak bychom dostali kótované šroubové promítání; při tom originály bodů by mohly býti kdekoliv v prostoru.

Šroubový průmět přímky $p \parallel \pi$ je opět přímka p', jejíž půdorys vznikne otočením půdorysu p_1 kolem středu o_1 o úhel ω odpovídající vzdálenosti z přímky p od průmětny π. *Má-li přímka p obecnou polohu* k průmětně π, je jejím průmětem šroubovým *kruhová evolventa*, kterou opisuje bod pevně spojený s přímkou, kotálí-li se tato po kružnici.

V obr. 49 je sestrojen šroubový průmět p' přímky p jdoucí bodem A. Určíme nejprve půdorys šroubovice ${}^1s$ tohoto šroubového pohybu, jejíž tečny mají k průmětně π týž sklon jako přímka p. Tečny šroubovice na př. s jsou rovnoběžny s tvořícími přímkami rotační kuželové plochy o vrcholu V na ose o, který má od průmětny π vzdálenost v_0, a řídicí kružnici v půdoryse s_1 šroubovice. Sestrojíme-li tedy vrcholem V přímku ${}^1p \parallel p$, tu její stopník ${}^1P$ na průmětně π leží na půdorysu ${}^1s_1$ šroubovice ${}^1s$. Dále sestrojme půdorys tečny ${}^2p$ šroubovice ${}^1s$, jež je rovnoběžna s přímkou p. Kotálí-li se tečna ${}^2p_1$ se stopníkem P_1 přímky p po kružnici ${}^1s_1$, opíše bod P_1 šroubový průmět přímky p; můžeme jej tedy sestrojiti. V obr. 49 je sestrojen průmět p' jen části PB přímky p a sice od $z = 0$

do $z = \frac{1}{2}v$. Šroubový průmět bodu B je souměrně sdružený k půdorysu B_1 podle středu o_1.

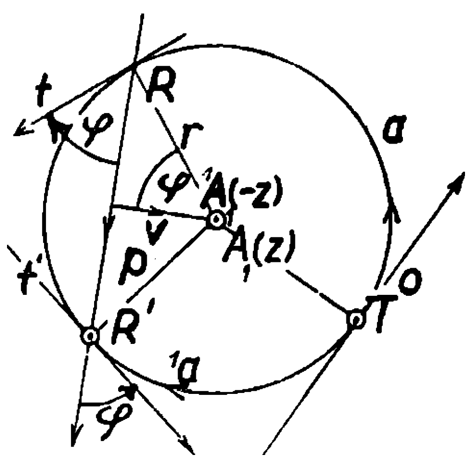
Když *přímka p protíná osu o*, má bod P_1 od tečny ${}^2p_1$ vzdálenost rovnou poloměru kružnice ${}^1s_1$ a její průmět, t. j. křivka p' přechází v *Archimedovu spirálu.*

Přímka p kolmá k průmětně π má za šroubový průmět *kružnici* o středu o_1.

Je patrno, že konstrukce šroubového průmětu přímky je dosti pracná; tím spíše je tomu u jiných křivek v prostoru, kde bychom museli sestrojovati průmět jen z bodů.

14. CYKLOGRAFICKÉ PROMÍTÁNÍ

Určení středu promítání v středovém promítání (odst. 2) hlavním bodem a distanční kružnicí je v podstatě *cyklografickým* promítnutím středu do průmětny. Libovolný bod A prostoru zobrazujeme v průmětně, kterou myslíme si vodorovnou, kolmým průmětem A_1 do této roviny a kružnicí a opsanou kolem A_1 poloměrem rovným vzdálenosti z_A (kótou) bodu A od průmětny. Poněvadž týž obraz by měl také bod ${}^1A$ souměrně sdružený k bodu A podle průmětny (který má kótu zápornou, ale co do absolutní hodnoty stejnou), opatřujeme kružnici a ještě smyslem, který vyznačujeme šipkou na zmíněné kružnici a sice tak, že díváme-li se z promítaného bodu, jeví se tento smysl jako kladný (t. j. proti pohybu ručiček na hodinách). Potom je cyklografickým průmětem bod prostoru jednoznačně určen.

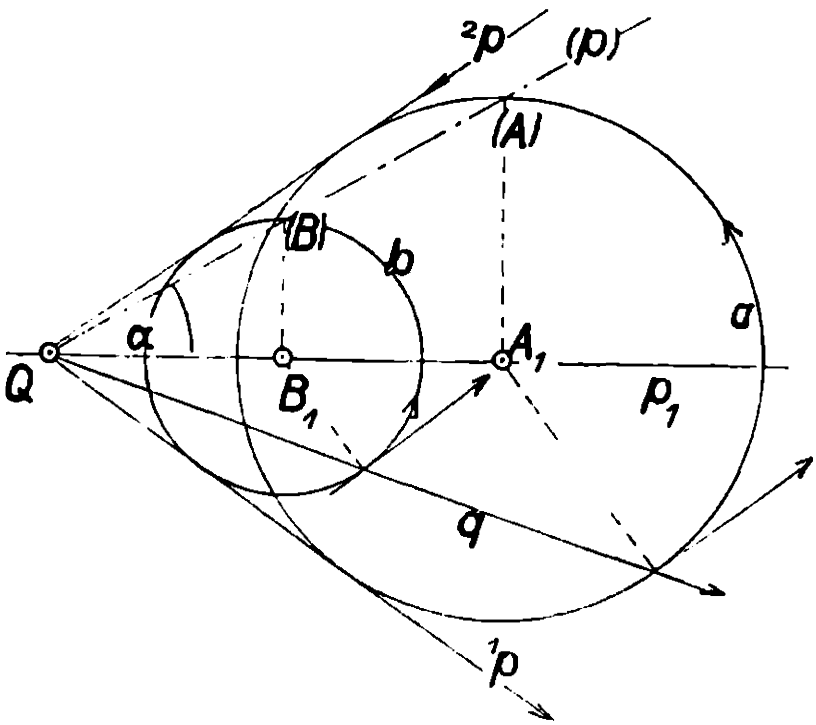


Obr. 50. Cyklografický průmět bodu A.

Kružnice v obr. 50 je orientována dvěma způsoby; říkáme, že obsahuje dva *cykly* a to kladný a a záporný ^1a; z nich prvý zobrazuje bod A o kótě $+z$ a druhý bod ^1A o kótě $-z$, kde z je rovno poloměru r cyklu a. Rotační kuželové plochy, jež mají vrcholy v bodech prostoru a řídicí křivky v jejich zobrazujících cyklech, svírají s průmětnou π úhel 45°; na všech lze vyznačiti tvořící přímky vzájemně rovnoběžné; tyto všechny plochy procházejí úběžnou kružnicí k_∞. Cyklografické průměty bodů jsou tudíž průměty bodů z úběžné kružnice k_∞, při čemž průmětům přisuzujeme smysl, abychom rozeznali dva body, jež by jinak měly tutéž kružnici za průmět.

Přímky, jež protínají úběžnou křivku k_∞ a svírají proto s průmětnou π úhel 45°, jmenujeme dále k-přímkami a roviny, jež se dotýkají křivky k_∞ označme obdobně k-rovinami; jsou to roviny, jež svírají s průmětnou π úhel 45°. Všechny body k-roviny zobrazují se v cykly, jež se dotýkají stopy p této roviny na průmětně π a smysl těchto cyklů se přenáší souhlasně na jejich tečnu p. Takto orientovaná přímka p v obr. 50 v průmětně určuje nám jedinou k-rovinu, jež jí prochází a svírá s průmětnou úhel 45° a je nad π na naší levé straně, pohybujeme-li se v přímce p ve směru vyznačeném šipkou. Neorientovanou přímkou v průmětně procházejí dvě k-roviny odpovídající dvojímu orientování přímky. Úhlem dvou orientovaných přímek p a t v tomto pořadí (obr. 50) rozumíme úhel $\varphi < 180°$, o který musíme otočiti přímku p kolem průsečíku $R \equiv (p, t)$, aby splynula s přímkou t nejen co do polohy, ale i co do smyslu. Úhel orientované přímky p s cyklem a je úhel orientované přímky p s orientovanou tečnou t cyklu a v některém z průsečíků (p, a). Oba úhly jsou co do velikosti stejné a jen se liší znaménkem; jejich kosiny jsou tedy stejné: $\cos\varphi = \frac{v}{r}$, kde v je vzdálenost orientované přímky p od středu A, cyklu a a r je poloměr cyklu a. (V obrazci jsou obě délky v, r kladné, ježto body obou k-rovin, jdoucích orientovanými přímkami p, t, a které mají půdorys v bodě A_1, jsou nad průmětnou π.)

Cyklografickým průmětem křivky je soustava (řada) *cyklů*, obrazů to jejích bodů, jež v případě přímky jmenuje se lineární, jinak křivá. Tyto řady mají orientované obálky, jež ovšem nemusí býti reálné. Středy cyklů řady jsou na půdorysu křivky. V případě, že křivka je v rovině rovnoběžné s průmětnou, je obálkou příslušné řady ekvidistanta půdorysu křivky, ne-

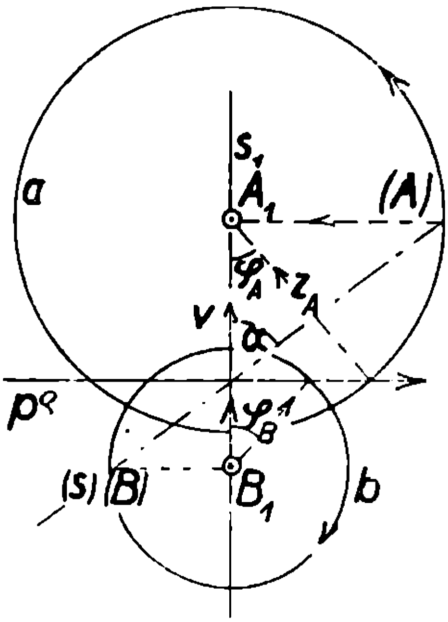


Obr. 51. Cyklografický průmět přímky p.

boli rovnoběžná křivka s ní ve vzdálenosti rovné kótě roviny té křivky. Obálky jsou též stopy ploch o spádu 1, proložené křivkou.

Všimněme si jen cyklografického průmětu obecné přímky p (obr. 51) dané půdorysem p_1 a sklopenou polohou (p) kolmo promítací její roviny. Cykly $a, b, \ldots$, jež zobrazují body A, $B, \ldots$ přímky p, obalují dvě orientované přímky ${}^1p, {}^2p$, jež jdou stopníkem Q přímky p a které jsou reálné různé pokud je úhel $\alpha = \sphericalangle\, p_1(p)$, který svírá přímka p s průmětnou π menší než 45°. Kdyby $\alpha = 45°$, byla by přímka k-přímkou a přímky ${}^1p, {}^2p$ by splynuly v orientované přímce, jíž se v bodě Q dotýkají cykly lineární řady tvořící cyklografický průmět přímky. Jestliže $\alpha > 45°$, jsou přímky ${}^1p, {}^2p$ imaginární.

Body plochy zobrazují se v tak zvanou *kongruenci cyklů* obsahující ∞^2 cyklů. Všimněme si v obr. 52 případu, kdy plocha je rovinou ϱ, jež má stopu p^ϱ na průmětně a od této odchylku $\alpha > 45°$. Abychom sestrojili obrazný cykl bodu A roviny, myslíme si tím bodem v rovině spádovou přímku $s \perp p^\varrho$ a tuto s její promítací rovinou sklopíme do polohy (s), kde $\sphericalangle\, s_1(s) = \alpha$ a na ní je bod (A) a je $A_1(A) \perp s_1$. Kružnice o středu A_1 a poloměru $\overline{A_1(A)} = z_A$ je nositelkou cyklu a, který je kladně orientován, ježto podle orientace stopy p^ϱ je bod A nad průmětnou π. Cykl a protíná stopu p^ϱ pod úhlem φ_A, jehož $\cos\varphi_A = v : z_A = \operatorname{cotg}\alpha$, takže *tento kosinus* je pro *všechny cykly kongruence, do níž se body roviny* ϱ *zobrazují, konstantní a roven kotangentě úhlu, jejž rovina* ϱ *svírá s průmětnou.* Ovšem kosinus ten je reálný i pro $\alpha < 45°$, ale příslušný úhel není reálný. Platí též obráceně, že body v prostoru patřící k cyklům, jež orientovanou přímku p^ϱ protínají pod úhlem, jehož kosinus je dán, vyplňují rovinu ϱ, jež jde stopou p^ϱ a svírá s průmětnou úhel, jehož kotangenta je rovna danému kosinu; z toho lze tuto rovinu určiti.



Obr. 52. Cyklografický průmět roviny ϱ.

Z jiných ploch je zajímavá k-kuželová plocha, jejíž body se zobrazují v cykly dotýkající se cyklu zobrazujícího její vrchol. Této plochy a jejího cyklografického zobrazení lze na př. použíti k určení cyklu, který se dotýká tří daných cyklů.[19][20]

15. ZOBRAZENÍ VEKTORŮ V PROSTORU DO VEKTORŮ V ROVINĚ

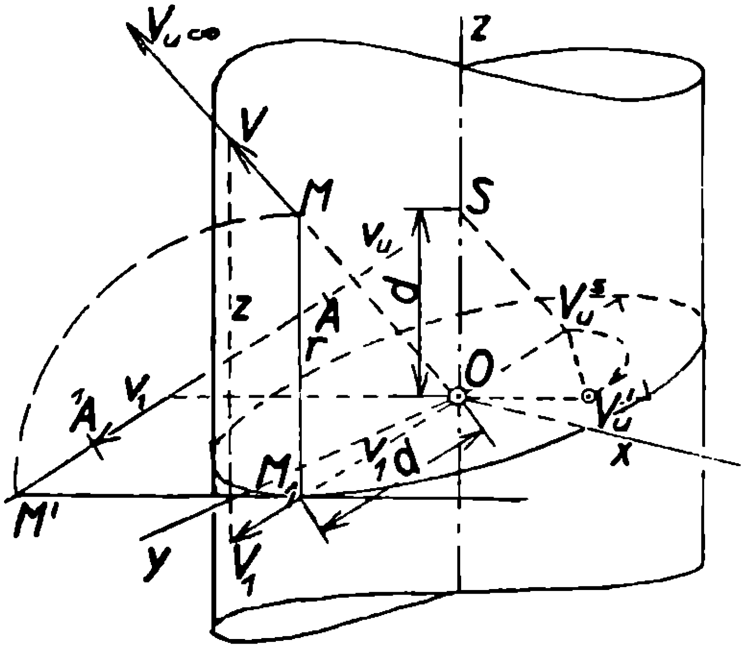
Volný vektor v prostoru je úsečka opatřená smyslem, kterou lze rovnoběžně přemístiti kamkoliv v prostoru. Stejně máme volné vektory v rovině, které možno ovšem rovnoběžně posouvati jen v této rovině. Když vektor je vázán ve svém posunu jen na přímku, svoji nositelku, říkáme, že je *vázaným vektorem.*

Zavedeme-li v prostoru pravoúhlou soustavu souřadnic x, y, z o počátku O, lze všechny volné vektory $\mathbf{v}$ v prostoru posunouti tak, že jejich počátek je v počátku O soustavy souřadnic a druhý koncový bod vektoru je v bodě $V(x; y; z)$. Délka, nebo modul vektoru $\mathbf{v}$ je $v = \overline{OV}$. Vektor $\mathbf{v}$ se rozkládá ve složky x, y, z v osách souřadnic, jež jsou souřadnicemi bodu V. Za průmětnu, na níž zobrazujeme, volme rovinu souřadnic (x, y); vektor $\mathbf{v}$ se kolmo promítá do vektoru $\mathbf{v}_1$ délky $v_1 = \overline{OV_1}$ (obr. 53), který má v osách x, y tytéž složky jako vektor $\mathbf{v}$. Aby se nám v tomto průmětě objevila též složka z, vážeme vektor $\mathbf{v}_1$ na přímku $v_u \parallel v_1$, aby moment vektoru $\mathbf{v}_1$ k počátku O byl $d \, . \, z$, kde d je vhodně zvolená konstanta. Geometricky lze dospěti k nositelce v_u zobrazujícího vektoru takto: Mysleme si válcovou rotační plochu o ose z a poloměru d; pak orientovaná nositelka vektoru $\mathbf{v}$ posunutého do počátku O protíná válcovou plochu v bodě M, který má od průmětny (x, y) vzdálenost $r = \overline{M_1M}$. Bod M sklo-

[19]) Viz *J. Holubář*: „O methodách rovinných konstrukcí“, Cesta k vědění 4, 2. vyd., 1949 a „O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů“, Cesta k vědění; 47, 1948.

[20]) Obšírně pojednává o cyklografii monografie *L. Seifert*: Cyklografie, Kruh 15, JČMF, 1949.

píme do průmětny kolem půdorysu v_1 ve smyslu záporném, stojíme-li v ose z a díváme-li se směrem vektoru $\mathbf{v}$. Sklopenou polohou M' bodu M jde nositelka $\mathbf{v}_u$ vázaného vektoru $\mathbf{v}_1$, který nám zobrazuje volný vektor $\mathbf{v}$ v prostoru. Je totiž z obrazu patrno: $r : d = z : v_1$ a tedy $r \,.\, v_1 = d \,.\, z$ a tedy



Obr. 53. Zobrazení vektorů prostoru vektory v rovině.

moment vektoru $\overrightarrow{A^1A} = \mathbf{v}_1$ k počátku O je úměrný složce z vektoru $\mathbf{v}$ pro poměr d.

Úlohy o volných vektorech v prostoru převádí se tak v známé úlohy o vázaných vektorech v rovině.

Pro odvození dalších některých vlastností tohoto zobrazení je výhodné odvoditi si síťový průmět úběžného bodu $V_{u\infty}$ nositelky vektoru $\mathbf{v}$, je-li promítací síť rotační o ose z a levotočivá (viz odst. **10,1**). Na ose z zvolme střed S středového promítání na průmětnu (x, y) a distanci $d = \overline{SO}$. Středový průmět $V_u{}^s$ úběžného bodu $V_{u\infty}$ otočíme kolem počátku O o $-90°$ do síťového úběžníku V_u'. Potom je $OV_u' \perp$ $\perp v_u$ a z podobnosti trojúhelníků OMM_1 a $V_u{}^sSO$ plyne

$\overline{OV_u^s} : d = d : r$, z čehož $\overline{OV_u^s} = \overline{OV_u'} = d^2 : r$, nebo $r \, . \, \overline{OV_u'} = d^2$. Nositelka v_u obrazu vektoru **v** na rovině (x, y) je antipolárou (odst. **2,61**) síťového úběžníku V_u' vektoru **v** vzhledem ke kružnici středu O a poloměru d, nebo polárou k imaginární kružnici o středu O a poloměru di, ($i^2 = -1$). Z tohoto vyplývají ihned dva důležité vztahy pro obrazy vektorů v prostoru:

1. Volné vektory, které jsou v prostoru rovnoběžny s rovinou, t. j. jejich nositelky protínají tutéž úběžnou přímku u_∞, mají za obrazy vázané vektory, jejichž nositelky jdou týmž bodem, který je antipólem síťového přímkového průmětu u' vzhledem ke kružnici $(O; d)$.

2. Volné vektory v prostoru, které jsou k sobě kolmé, mají za obrazy vektory, při čemž nositelka jednoho vektoru prochází antipólem nositelky druhého vektoru. (Síťové průměty úběžných bodů nositelek vektorů v prostoru jsou totiž tak položeny, že antipolára jednoho prochází druhým.)

Vektor **v** v prostoru vázaný na nositelku p zobrazujeme stejně jako volný vektor **v** do vázaného vektoru $\mathbf{v}_1$ na nositelce v_u; při tom určujeme stopník P nositelky p na průmětně (x, y).

Obdobného zvláštního zobrazení přímek p prostoru dvojinami bod — přímka, t. j. stopníkem P přímky p a obrazem v_u jejího úběžného bodu $V_{u\infty}$ použil pro řešení prostorové soustavy sil po prvé *Mayor* (XIV) a později *Mieses* (XV). (Síly působící v jediném bodě, který považujeme za počátek O, lze převésti v soustavu vázaných vektorů roviny, kterou řešíme užitím čáry složkové a výslednicové. Působí-li síly v různých bodech, lze provésti jejich složení složením dvou druhů vektorů a to vektorů sil a pak jejich momentů pro nějaký bod.)

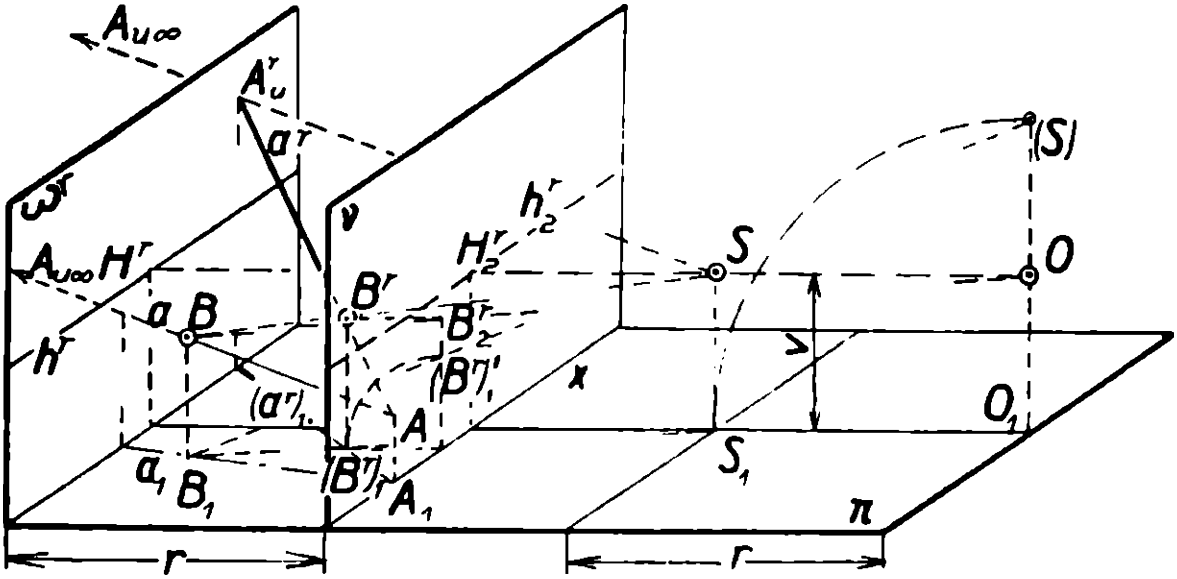
16. RELIEF

V tomto odstavci si ukážeme zobrazení jednoho *prostoru* druhým *prostorem* zvaným reliefem. *Středový relief* dostaneme takto: Mysleme si vodorovnou rovinu π (t. zv. rovinu základní nebo nosnou) (znázorňující obr. 54) a mimo ní bod S (oko pozorovatele), který je ve výši v nad rovinou π. Kolmé průměty na rovinu π jsou půdorysy; označme je jak obvykle indexy 1. Dále zvolme rovinu ν (pro pozorovatele průčelnou) kolmou k π jako druhou průmětnu a kolmé průměty na tuto označme indexy 2; jsou to nárysy. Za průmětnou ν (vzhledem k pozorovateli) ve vzdálenosti r buď rovina $\omega^r \parallel \nu$, jež budiž *reliefem* úběžné (nekonečně vzdálené) *roviny* ω_∞. Úběžné body a přímky mají své reliefy v rovině ω^r na příslušných promítacích paprscích vedených bodem S resp. v příslušných promítacích rovinách bodem S; stopníky přímek a stopy rovin na rovině ν splývají se svými reliefy; říkáme, že jsou samodružné. Rovině ν říkáme proto též rovina samodružná, ježto $\nu^r \equiv \nu$.

Přímky a roviny obecně položené mají zase přímky resp. roviny za reliefy. Přímce a odpovídá jako *relief* přímka a^r, která spojuje její stopník A na rovině ν s reliefem $A_u{}^r$ úběžného bodu $A_{u\infty}$ přímky a, který je v rovině ω^r a na paprsku $SA_u{}^r \parallel a$. *Relief bodu B* přímky a je na středovém paprsku SB a na reliefu a^r přímky a.

Relief úběžné přímky vodorovných rovin tak zvaný *horizont* je v přímce h^r roviny ω^r ve vzdálenosti v nad π. *Hlavní bod* reliefu je v patě H^r kolmice spuštěné ze středu S na rovinu ω^r a leží patrně na horizontu h^r. Vzdálenost středu S od reliefu ω^r úběžné roviny jmenujeme *distancí d reliefu*. Z konstrukce je patrno, že prostor za rovinou ν až k úběžné rovině se zobrazuje v prostor mezi rovinami ν a ω^r, tedy do vrstvy šířky r; této šířce říkáme *rozpon reliefu*. Je-li pro relief $r = 0$, splývá rovina ω^r s rovinou ν a dostaneme středové (perspektivní) promítání. Jeví se nám tedy z tohoto hlediska středový (perspektivní) relief jako zobecněné středové promítání.

Pro konstrukci reliefu nějakého předmětu slouží dvě věty, které udávají konstrukci nárysu a půdorysu reliefu, t. j. kolmé průměty reliefu do samodružné roviny ν a do základní



Obr. 54. Základy perspektivního reliefu.

roviny π. Na hlavním zorném paprsku SH^r zvolme střed promítání O tak, že $\overline{H_2{}^rO} = d$ a tedy $\overline{SO} = r$. Buď $B_2{}^r$ nárys reliefu bodu B; pak lze ukázati, že spojnice $BB_2{}^r$ prochází středem O. Dostáváme větu:

Nárys reliefu je středovým průmětem originálu ze středu O na samodružnou rovinu.

První průmět reliefu B^r bodu B označíme $(B^r)_1$, aby nevznikla záměna s reliefem $B_1{}^r$ prvního průmětu B_1 bodu B. Sdružíme-li první průmětnu π s druhou průmětnou otočením části před osou x dolů, přejde první průmět $(B^r)_1$ v půdorys sdružený s nárysem podle osy $x \equiv (\nu, \pi)$; označme jej $(B^r)_1{}'$; potom můžeme ukázati, že spojnice $B_1(B^r)_1{}'$ prochází středem (S), který je nad středem O a sice ve vzdálenosti rozponu r nad základní rovinou π. Platí tedy tato věta:

Sdružený půdorys reliefu je středovým průmětem (do roviny v) kolmého průmětu originálu na základní rovinu π pro střed promítání (S).

Je-li $r = v$, pak $(S) \equiv O$ a nárys i sdružený půdorys reliefu se dostanou perspektivou pro týž střed promítání, který je od průmětny ν ve vzdálenosti distance d a ve výšce v nad základní rovinou π.

Rovnoběžný relief se dostává, je-li střed S úběžným bodem směru s. Je-li $s \perp \nu$, dostáváme *kolmý rovnoběžný relief*; jinak mluvíme o *kosém* nebo *kosoúhlém* reliefu. Rovina ω^r je tu úběžnou rovinou, t. j. $\omega_\infty \equiv \omega^r{}_\infty$, odpovídající si body B, B^r jsou na rovnoběžce se směrem s, a je-li B' průsečík tohoto paprsku se samodružnou rovinou ν, platí: $\overline{B'B^r} : \overline{B'B} = k$ (= konst.), jež se volí obvykle menší než 1. Rovnoběžný relief zachovává rovnoběžnost, t. j. rovnoběžkám v originále odpovídají rovnoběžky v reliefu. (Úběžná rovina prostoru je totiž samodružnou rovinou; její relief s ní splývá.)

V praxi se užívá nejčastěji rovnoběžného kolmého reliefu a pro $k < 1$ na př. na mincích, pro $k > 1$ v plastických mapách, kde se výšky vynášejí v měřítku větším než situace, nad níž plastickou mapu modelujeme.

17. ZOBRAZENÍ ČTYRROZMĚRNÉHO PROSTORU

Bod jmenujeme někdy lineárním prostorem o rozměru 0. Na přímce $x \equiv OP$ libovolný bod A je určen vektorem $\overrightarrow{OA} = \lambda \,.\, \overrightarrow{OP}$. Zavedeme-li za jednotku délku (vektoru) $\overline{OP}$, můžeme za souřadnici bodu A prohlásiti $x_A = \lambda$. Probíhá-li takto definovaná souřadnice x_A všechny *reálné* hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$, dostáváme reálné body přímky x. Přímka obsahuje nekonečné množství bodů a ježto jejich poloha závisí jen na jednom parametru, říkáme, že toto množství je mohutnosti 1. O přímce proto někdy mluvíme jako o lineárním prostoru rozměru 1.[21])

Podobně v rovině určené třemi různými body OPQ, které neleží v přímce, lze zavésti souřadnicový systém. Vezměme vektory $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ a utvořme jejich lineární kombinaci $\lambda \,.\, \overrightarrow{OP} + \mu \,.\, \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA}$. Dostali jsme vektor $\overrightarrow{OA}$; čísla $\lambda = x_A$, $\mu = y_A$ prohlásíme za souřadnice bodu A v soustavě souřadnic o osách OP, OQ a o jednotkách $\overline{OP}, \overline{OQ}$ na nich. Každé z měrných čísel x_A, y_A může probíhati reálné hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$; proto množství bodů v rovině je mohutnosti 2. Rovina je dvojrozměrný lineární bodový prostor.[22]) (Můžeme míti též křivé prostory bodové dvojrozměrné, na př. kulovou plochu, jejíž bod je určen též dvěma souřadnicemi, na př. zeměpisnými λ, φ [odst. 5,2].)

Rovinu jako souhrn ∞^2 bodů lze zobraziti na přímku na př. na x tím, že bod A roviny promítneme kolmo na osu x do bodu A' a k tomuto průmětu připíšeme kótu, t. j. souřadnici y_A. Dostali bychom tak kótovaný obraz roviny do její přímky x.

Postoupíme nyní do bodového prostoru, kde bod A je určen třemi souřadnicemi x_A, y_A, z_A, na př. v pravoúhlé soustavě souřadnic; tohoto určení bodu jsme v předchozím stále používali. Je proto bodový prostor trojrozměrný a ovšem je lineární.[23]) Body A prostoru[24]) lze zobraziti kolmým kóto-

---

[21]) Slovo lineární zde vystihuje okolnost, že lineární kombinace vektorů určeného dvěma různými body přímky je vektorem téže přímky.

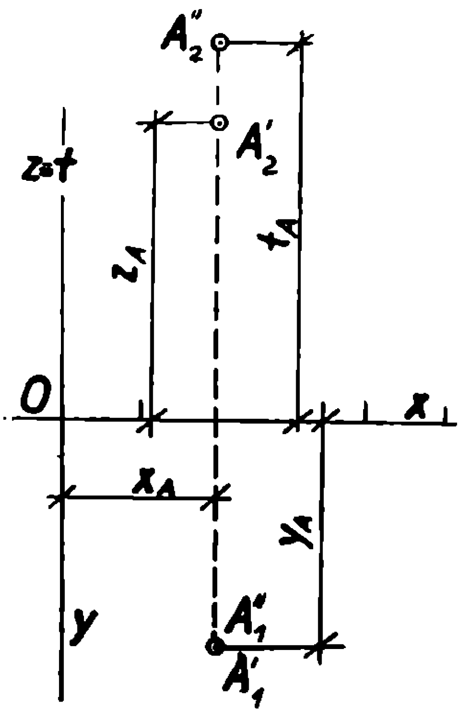
[22]) Slovem lineární vystihujeme opět vlastnost, že lineární kombinace dvou různých vektorů roviny je opět vektorem roviny určené zmíněnými dvěma vektory.

[23]) Lze ukázati, že lineární kombinace stejnojmenných souřadnic libovolných čtyř bodů prostoru je souřadnice bodu prostoru; jsou-li body obecně položeny, dostaneme všemi lineárními kombinacemi všechny body prostoru. (Obdobně k vytvoření roviny lze vytvořiti prostor s pomocí tří vektorů určených zmíněnými body.)

[24]) V dalším pod slovem „prostor" myslíme trojrozměrný bodový prostor lineární.

vaným průmětem A_1 do roviny (x, y) (k průmětu připíšeme kótu z_A bodu A) (viz odst. 7,5). Lze si též mysliti body prostoru zobrazeny do bodů řady bodové, na př. na ose x; potom ovšem každý bod bude míti dvě kóty. Promítneme totiž průmět A_1 kolmo do bodu A' na osu x a k bodu A' připíšeme kóty y_A, z_A.

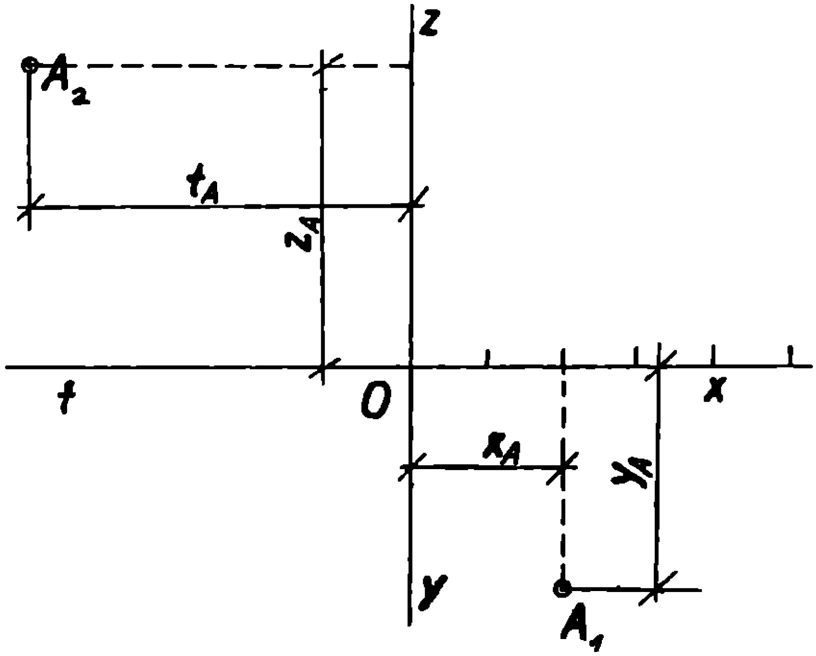
Obdobou lze postoupiti k lineárnímu prostoru čtyrrozměrnému nebo jak říkáme k nadprostoru. Tento nelze si sice představiti, ale dedukcí lze k němu dospěti. Z jednorozměrného bodového prostoru na ose x dospějeme k dvojrozměrnému bodovému prostoru v rovině (x, y), zvolíme-li mimo osu x libovolný bod P v rovině (x, y); řady bodové na přímkách spojujících bod P s body řady x vytvoří dvojrozměrný prostor bodový roviny (x, y). K trojrozměrnému prostoru bodovému dospějeme tím, že mimo pole bodové (x, y) zvolíme bod Q; řady bodové na spojnicích bodu Q s body roviny (x, y) vytvoří prostor (x, y, z). Až sem lze si vytvoření prostorů názorem představiti.



Obr. 55. Zobrazení bodu A čtyrrozměrného prostoru do A_1', A_2', A_2''.

Pro vytvoření lineárního bodového prostoru čtyrrozměrného třeba vzíti bod R ležící mimo náš prostor (x, y, z), jehož existenci názorem nelze podepříti. Pak body spojnic bodu R s body prostoru (x, y, z) vyplní bodový lineární prostor čtyrrozměrný P_4, v němž bod má čtyři souřadnice x, y, z, t v pravoúhlé soustavě souřadnic, jejíž osa t je v počátku O kolma k prostoru $O(x, y, z)$ a leží mimo tento prostor. Souřadnice t_A bodu A je vzdáleností bodu A od prostoru $O(x,$

y, z). Kolmice spuštěná z bodu A na prostor $O(x, y, z)$, která je rovnoběžná s osou t, protíná tento prostor v bodě A' a délka $\overline{A'A} = t_A$. Je tedy možno zobraziti body A čtyrrozměrného prostoru P_4 body A' prostoru $O(x, y, z)$, k nimž jsou připsány kóty t_A. (Na př. je-li t_A čas, je P_4 t. zv. časo-



Obr. 56. Zobrazení bodu A čtyrrozměrného prostoru do A_1, A_2.

prostor.) Zobrazíme-li body A' v kótovaném promítání na rovině (x, y), je třeba průměty opatřiti dvěma kótami z_A, t_A; dostali bychom dvojnásob kótované promítání prostoru P_4 na průmětnu (x, y); o tomto zobrazení pojednal v roce 1904 Marletta.[25])

Chceme-li zobraziti body prostoru P_4 obdobně jako v Mongeově promítání, vytkneme si dva souřadnicové prostory k sobě kolmé, na př. $O(x, y, z)$ a $O(x, y, t)$, jež mají společnou rovinu $\xi \equiv O(x, y)$. Kolmý průmět bodu A do prvého prostoru označme A' a do druhého A''. Oba tyto průměty mají týž kolmý průmět $A_1' \equiv A_1''$ do roviny ξ. Kol-

[25]) Ve spisku Sulla proiezione quotata sopra un piano dello S_4.

mice $A'A_1'$, $A''A_1''$ jsou rovnoběžny s osami t a z a tedy určují rovinu kolmou k rovině ξ; obě roviny mají v P_4 společný jen bod $A_1' \equiv A_1''$. Prostor $O(x, y, t)$ myslíme si otočen o 90° kolem roviny ξ až osa t splyne s osou z a tedy oba prostory splynou; říkáme stručně, že oba prostory sdružíme. Body A', A'' budou po sdružení na téže kolmici k základní rovině ξ. Užijeme-li pak pro prostor $O(x, y, z)$ kolmého Mongeova promítání na průmětny (x, y) a (x, z), dostáváme (obr. 55) zobrazení bodů prostoru P_4 v trojiny bodové spořádané $A_1' \equiv A_1''$, A_2', A_2'', jež jsou na téže ordinále kolmé k ose x a z nichž možno (podle obrazu) určiti všechny čtyři souřadnice bodu A.

Jiné zobrazení čtyrrozměrného prostoru P_4, velmi často užívané, je vyznačeno v obr. 56. Roviny (x, y), (z, t) položeny do nákresny tak, že splývají osy $x \equiv t$ a $y \equiv z$. Bod A je tu zobrazen průmětem A_1 do roviny (x, y) a průmětem A_2 do roviny (z, t). Tyto průměty jsou získány pomocí úběžných přímek roviny (z, t) a roviny (x, y). (Souřadnice v průmětech jsou vyznačeny v obr. 56.) Jak je patrno z obrazce, zobrazují se zde body čtyrrozměrného prostoru ve dvojice bodové A_1, A_2 nákresny, které nejsou spořádané a jejichž množství má mohutnost 4 jako množství bodů v prostoru P_4.

Omezíme se na tyto základní způsoby zobrazení prostoru čtyrrozměrného bez řešení úloh, jež si čtenář najde v pracích Schouteových, Eckhartových, autorových a jinde. (Viz XVII, XVIII a V.)

LITERATURA

a) Česká:

I. *J. Sobotka*: Deskriptivní geometrie promítání paralelního (1906).
II. *Kadeřávek-Klíma-Kounovský*: Deskriptivní geometrie I. a II. díl (1929, 1932).
III. *Fr. Kadeřávek*: Perspektiva (1922).
IV. *Fr. Kadeřávek*: Relief (1925).
V. *J. Klíma*: Deskriptivní geometrie čtyrrozměrného prostoru (Sborník České techniky v Brně, spis č. 44) (1938).
L. Seifert: Cyklografie (1949).

b) Cizí:

VI. *E. Müller-E. Kruppa*: Die linearen Abbildungen (1923).
VII. *E. Müller-J. Krames*: Die Zyklographie (1929).
VIII. *L. Eckhart*: Konstruktive Abbildungsverfahren (1926).
IX. *E. Reusch*: Die stereographische Projektion (1881).
X. *K. Pelz*: Die Hauptsätze der stereographischen Projektion als Corollarien des Satzes von Quetelet und Dandelin (Věstník Král. č. spol. nauk) (1898).
XI. *F. Stark*: Netzhautbildperspektive, Neuss. (1928).
XII. *L. Serrano*: Una nueva perspettiva. La perspettiva curvilinea (Mexico) (1934).
XIII. *L. Tuschel*: Über eine krummlinige Projektion und deren Verwendung in der darstellenden Geometrie (Monatshefte f. Math. u. Physik) (1909).
XIV. *B. Mayor*: Statique graphique des systèmes de l'espace (1910).
XV. *R. Mises*: Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme (Ztschr. f. Math. u. Physik) (1917).
XVI. *E. Kruppa*: Über die Misessche Abbildung räumlicher Kräftesysteme (Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.) (1924).
XVII. *P. H. Schoute*: Mehrdimensionale Geometrie, I. díl (1902).
XVIII. *L. Eckhart*: Der vierdimensionale Raum (1929).

OBSAH

Str.

Spisovatel	*Prof. Dr Josef Klíma*
Název díla	*Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1950*
nákladem	*Přírodovědeckého nakladatelství*
v edici	*Cesta k vědění, svazek 27*
za redakce	*Dr F. Vyčichla*
Stran	*92*
Obrazců	*56*
Vytiskly	*Středočeské tiskárny, n. p., závod Prometheus, Praha VIII*
Vydání	*Druhé (2001—6400 výt.)*
Cena	*Kčs 26,—*