O metodách rovinných konstrukcí

CESTA K VĚDĚNÍ

PROF. JOSEF HOLUBÁŘ

O METODÁCH ROVINNÝCH KONSTRUKCÍ

(ÚLOHA APOLLONIOVA A ÚLOHY PŘÍBUZNÉ)

Se 63 obrazci

Vyšlo jako 4. svazek sbírky

CESTA K VĚDĚNÍ

vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce

Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLA a Dra L. ZACHOVALA

1940

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

PŘEDMLUVA.

Obecná ú. A.,*) sestrojiti kružnici, která se dotýká daných tří kružnic v rovině, zaujímá mezi planimetrickými úlohami místo zvláště významné už proto, že řešení planimetrické vyžaduje vrcholných vztahů a vlastností, které se o útvarech planimetrických na střední škole dokazují. Jsou to především vlastnosti homothetických útvarů, zvláště kružnic, pak vlastnosti chordál a vztahy polárné při kružnicích. S ú. A. setkáváme se často v různých souvislostech. Poskytuje na př. řešení základního úkolu zvukoměřického, určiti polohu zvukového zdroje, známe-li rozdíl dob nebo drah, po kterých dospěl zvukový rozruch ze zdroje do různých zvukových stanic. (Viz článek dr. Zd. Pírka „Matematická teorie zvukoměřictví“ v Časopise pro pěst. mat. a fys., roč. 66, 1937, str. D 1).

Tato klasická úloha byla důležitým zdrojem četných nových pouček geometrických, které při jejím řešení byly objeveny. Zajímala geometry všech věků do té míry, že bylo podáno množství způsobů jejího řešení. Proto lze na této úloze vhodně ukázati různé metody řešení složitějších úloh konstruktivních.

Naším úkolem bude zařaditi rozličná řešení ú. A. v soubor hlavních metod, jakými řešíme planimetrické úlohy kon-

---

*) **Vysvětlení zkratek** v knize užívaných: Úloha Apolloniova se značí stručně ú. A., geometrické místo g. m., kružnice k se středem O, po případě s poloměrem r, se označuje $k(O)$ nebo $k(O, r)$ anebo $k(r)$. V citátech značí na př. (1Aa) kapitolu 1 této knihy, odstavec A, jeho část a) a p.; v citátech téže kapitoly se její číslo vynechává. Citáty z knih seznamu literatury vzadu jsou uvedeny znakem, na př. Lit. č. II, str. 10. Častěji citovaná učebnice J. Vojtěcha, Geometrie pro V. třídu reálek, 6. vyd. JČMF 1935, je označena prostě GV.

struktivní, zvláště o kružnicích, i naopak z metod přejíti k úlohám příbuzným a obecnějším. Při tom máme na mysli úlohy zvané elementární, t. j. stupně druhého, kvadratické, v nichž úlohy stupně prvého jsou zahrnuty jako zvláštní případ.

Pro různé metody, kterých použijeme, dokážeme hlavní vztahy a potřebné poučky, čímž připravíme čtenáři množství úloh, které by bylo lze na základě uvedených poznatků nejen formulovati, ale také příslušnou metodou vhodně řešiti. Mimo ú. A. a úlohy s ní těsně související provedeme nebo aspoň naznačíme jako příklad také jiné úlohy.

Z uvedených metod pak může vyplynouti mnoho užitečného pro praktické provedení konstrukcí i v úlohách neuvedených. Mohutná stavba konstrukcí vyšší geometrie zasluhuje býti pro budoucího technika podepřena v základech. A to se může státi právě jen hlubším proniknutím do konstrukcí a metod především planimetrických. Těm však na střední škole není možno se věnovati tolik, jak by zasluhovaly i pro zvláštní svůj význam ve vzdělání rozumovém i všeobecném. Tato kniha má tuto mezeru poněkud vyplniti. —

Při jejím vydání vzdávám srdečné díky p. řediteli vinohradské reálky *B. Vlkovi* za ochotné půjčení rukopisu jeho starší práce, uvedené v seznamu literatury, p. dr. *J. Bečkovi*, profesoru téže školy, za pečlivé prohlédnutí textu po stránce jazykové a p. *M. Kolářovi*, loňskému abiturientu vinohradské reálky, za vzorný popis všech obrazců.

Zejména děkuji za cenné rady p. dr. *F. Vyčichlovi*, docentu matematiky na vysokých školách, *Jednotě českých matematiků a fysiků* za vydání tohoto spisku a knihtiskárně „*Prometheus*“ za vzorné jeho provedení.

V Praze o vánocích 1939.

Josef Holubář.

1.

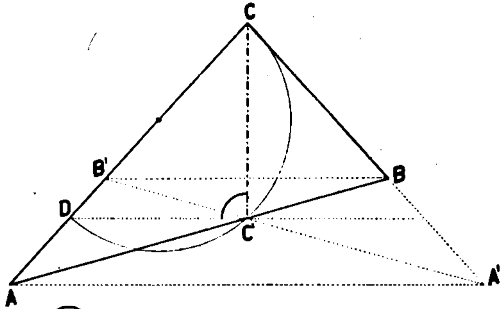
PŘEHLED METOD PLANIMETRICKÝCH KONSTRUKCÍ.

Metody řešení konstruktivních úloh planimetrických lze rozlišiti podle toho, pracuje-li se s geometrickými prvky a útvary přímo beze všech výpočtů anebo vyšetřují-li se geometrické útvary pro konstrukci pomocí algebry, hlavně na základě souřadnic. První metoda jest ryze geometrická, druhá pak je metoda na základě algebraickém. Metoda první používá jako pomůcky obrazců, čímž se stává velmi názornou, a byla v elementárních částech geometrie hojně využita již ve starém Řecku. Bývá také někdy nazývána metodou synthetickou, ježto vytváří a vyšetřuje geometrické útvary na základě vlastností a souvislostí těchto útvarů anebo jejich částí, při čemž postupuje od jednodušších vztahů k složitějším. Metoda na základě algebraickém nebo též analytickém vypočítává veličiny hledané z veličin daných proto, abychom došli k výslednému výrazu, jenž určuje veličiny hledané, a z něho mohli sestrojiti hledaný útvar. Jest však i metoda algebraická vhodným postupem, jak často jednoduše řešiti úlohy konstruktivní.

Metoda ryze geometrická, pokud máme na mysli hlavní myšlenku konstruktivního postupu při řešení úlohy, jest dvojího druhu, a to metoda geometrických míst a metoda transformační. Toto rozdělení platí však jen při řešení úloh jednoduchých; řešíme-li konstruktivní úlohu složitější, vniká postup transformační do řešení používajícího geometrických míst a zase naopak při metodě transformační použité při úloze složitější vyskytnou se některá, aspoň základní geometrická místa.

Při řešení mnohých úloh užíváme často speciálních vztahů, odvozených mezi útvary danými a hledanými, že nelze dobře mluviti ani o prvé ani o druhé metodě, neboť se obě metody prostupují a výlučný jejich ráz se podřizuje oněm speciálním vztahům; říkáme, že jsme použili metody založené na speciálních vztazích.

A. Úloha řešená několika metodami. Abychom lépe objasnili postup při jednotlivých metodách, provedeme jako příklad úlohu řešenou několika metodami, při čemž uvidíme, že všechny metody nejsou vždy stejně výhodné.



1

Zvolíme úlohu: Sestrojiti trojúhelník ABC, který je dán dvěma stranami a, b a délkou osy o_γ úhlu γ, tedy třemi nezávislými prvky.

a) K speciálním vztahům dospějeme rozborem. Na obr. 1 je hledaný trojúhelník ABC; $\overline{CA} = b$, $\overline{CB} = a$. Vedeme-li kolmice k ose úhlu γ koncovým bodem osy C' a vrcholy A, B, pak na straně AC dostaneme body, které tvoří harmonickou čtveřinu, protože platí $(AB'CD) = -1$; to plyne z rovnoramenného lichoběžníka $AA'BB'$, který považujeme za úplný čtyrroh.[1])

Konstrukci tedy provedeme tak, že na danou stranu, na př. b, naneseme $\overline{CB'} = a$ a sestrojíme bod D jakožto čtvrtý

[1]) Viz J. Vojtěch: GV, str. 60.

harmonický ke třem bodům $A, B'; C$. Nad průměrem CD sestrojíme kružnici ($\sphericalangle\, CC'D = 90°$), která určí vrchol C' pomocného trojúhelníka pravoúhlého $CC'D$, v němž známe ještě jednu odvěsnu $\overline{CC'} = o_\gamma$; trojúhelník výsledný ABC snadno již pak doplníme.

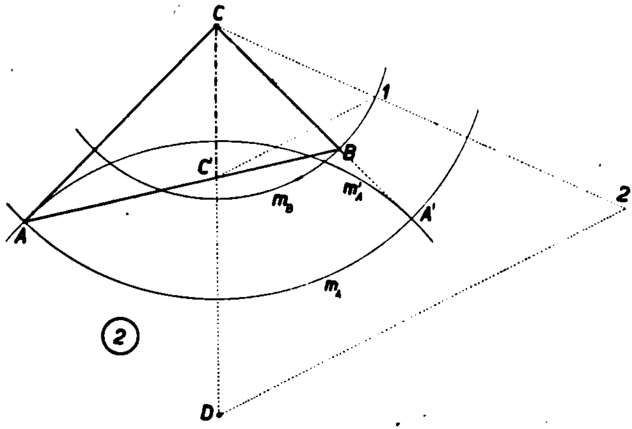
Vymezení: Abychom dostali vrchol C' pravoúhlého trojúhelníka, musí býti $\overline{CC'} < \overline{CD}$,[2]) t. j. daná délka o_γ menší než harmonický průměr daných stran $a = \overline{CB'}$, $b = \overline{CA}$. Harmonický průměr úseček a, b je dán výrazem $\dfrac{2ab}{a+b}$; proto musí $o_\gamma < \dfrac{2ab}{a+b}$. Úloha je pak jednoznačná, nehledíme-li k trojúhelníku souměrně sdruženému k $\triangle ABC$ podle strany b.

b) Máme-li **úlohu řešiti užitím g. m.**, hledíme obyčejně sestrojiti určitý bod výsledného útvaru, čímž úloha je již v podstatě rozřešena. Při úloze t. zv. určité, t. j. dané tak, aby uvedeným podmínkám vyhovoval konečný počet výsledných útvarů, dospějeme ke g. m. hledaného bodu vynecháním jednoduché podmínky. Provedeme-li to dvakráte, dojdeme k dvěma g. m. — dvěma čarám — pro hledaný bod, jenž je pak jejich průsečíkem.

V našem příkladě (obr. 2) hleďme určiti vrchol A hledaného trojúhelníka. Sestrojíme-li danou délku $o_\gamma = \overline{CC'}$ a vyhovíme-li podmínce dané délkou strany b, pak g. m. bodu A je kružnice $m_A\,(C, b)$. Podobně bod B leží na kružnici $m_B\,(C, a)$, z níž lze odvoditi druhé g. m. pro bod A, uvážíme-li, že platí známý vztah $\overline{C'A} : \overline{C'B} = -b : a$. Opíše-li bod B kružnici m_B, opíše proto současně bod A kružnici m'_A homotheticky sdruženou s m_B dle vnitřního středu homothetie C'; pro střed D kružnice m'_A platí $\overline{DC'} : \overline{CC'} = -b : a$ a pro její poloměr $r' = a \cdot \dfrac{b}{a} = b$. Tím jest kružnice určena.

[2]) Ze svých úvah vylučujeme útvary degenerované v úsečky, přímky atd.

V konstrukci tedy pokračujeme tak, že na libovolný paprsek vedený C naneseme $\overline{C1} = a$, $\overline{12} = b$ a učiníme $2D \parallel 1C'$; tím na paprsku CC' dostaneme bod D. Průsečík g. m. m_A a m'_A je hledaný vrchol A.[3]) Druhý průsečík A' těchto kružnic spojen s C stanoví na m_B vrchol B. Úloha je v podstatě jednoznačná (trojúhelník o výsledném vrcholu A' byl by totiž s prvním trojúhelníkem souměrně sdružený podle CC'); je možná tehdy, pokud středná CD kružnic



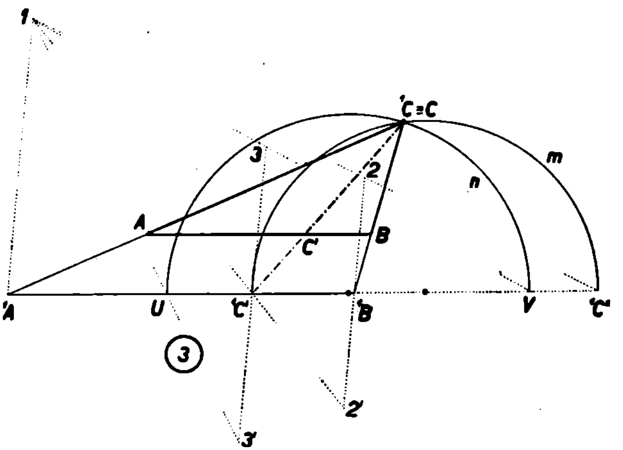
m_A a m'_A je menší než součet jejich poloměrů, t. j. $2b$. Však $\overline{CD} = \overline{CC'} + \overline{C'D} = o_\gamma \left(1 + \frac{b}{a}\right)$, takže opět musí $o_\gamma < \frac{2ab}{a+b}$.

c) Řešíme-li úlohu metodou transformační, pak přeměníme útvary dané nebo jejich část tak, aby řešení úlohy za změněných poměrů bylo možno snáze provésti. Máme ovšem na mysli přeměnu, transformaci, která je před tím definována zcela určitými vlastnostmi, jež udávají jednoznačně

[3]) Viz Lit. č. XII, str. 12.

přechod z dané soustavy útvarů do druhé a naopak. Z výsledku získaného v útvaru odvozeném přejdeme zpětnou transformací k výsledku, který řeší úlohu původní. Tak je tomu při transformacích pohybových, jak jsou známy ze školních výkladů, jako je posunutí (translace), otočení (rotace) nebo překlopení kolem přímky (souměrnost podle osy).

Při transformaci v útvar homothetický nebo podobný sestrojíme rovněž napřed výsledek pro odvozené útvary,

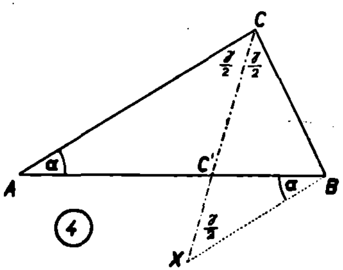


kterého lze snáze dosíci; k tomuto výsledku je pak výsledek úlohy původní homothetický, resp. podobný.

Zvláštní postavení při řešení konstruktivních úloh zaujímá a speciálního použití skýtá inversní transformace a dilatace, jak uvidíme později; rovněž tak i středová kolineace (a afinita) nebo polarita.

Vraťme se opět ke zvolené úloze, kterou rozřešíme nyní stejnolehlostí (homothetií). Sestrojíme napřed $\triangle\, {}^1A{}^1B{}^1C$, v němž je dán poměr ${}^1a : {}^1b : {}^1o_\gamma = a : b : o_\gamma$, tedy trojúhelník podobný výslednému $\triangle\, ABC$; sestrojíme jej (obr. 3) pomocí g. m. takto: Zvolíme libovolně stranu ${}^1c = \overline{{}^1A{}^1B}$;

ježto poměr dalších stran je dán, je g. m. vrcholu ${}^1C$ Apolloniova kružnice m sestrojená[4]) nad průměrem ${}^1C'{}^1C''$ pro daný poměr $b : a$. Podobně známe v trojúhelníku pomocném ${}^1A{}^1C'{}^1C$ poměr stran $\overline{{}^1A{}^1C} : \overline{{}^1C'{}^1C} = b : o_\gamma$ a sestrojíme tedy druhé g. m. bodu ${}^1C$, Apolloniovu kružnici n nad průměrem UV. V průsečíku g. m. m a n je hledaný bod ${}^1C$; trojúhelník výsledný ABC sestrojíme jako homothetický s $\triangle\, {}^1A{}^1B{}^1C$ podle středu ${}^1C \equiv C$. Úloha je možná potud, pokud se kružnice m a n protínají, čili padne-li bod V v našem obrazci (za předpokladu $b>a$) dovnitř úsečky ${}^1C'{}^1C''$, t. j. platí-li ${}^1C'V : {}^1C''V<0$. Výpočtem bychom dostali pro o_γ zase nerovnost dřívější. Je viděti, že metoda této konstrukce je pro zvolený příklad složitější než obě metody předcházející.



d) Nejrychlejší cestu k výsledku v našem příkladě poskytne však **metoda na základě algebraickém**: Napřed vypočteme neznámou délku x (na obr. 4 je $x = \overline{C'X}$) a tu pak sestrojíme. Vrcholem B výsledného $\triangle\, ABC$ je v obrazci vedena se stranou AC rovnoběžka BX, jež protíná prodlouženou úsečku $o_\gamma \equiv CC'$ v bodě X. Z podobných trojúhelníků $AC'C$ a $BC'X$ plyne: $\overline{AC} : \overline{C'C} = \overline{BX} : \overline{C'X}$. Poněvadž však $\triangle\, CXB$ je rovnoramenný, ježto oba úhly při základně CX se rovnají $\frac{1}{2}\gamma$, jest $\overline{BX} = \overline{BC} = a$. Předchozí úměru můžeme tedy psáti:

$$b : o_\gamma = a : x$$

a podle toho můžeme sestrojiti délku x. Sestrojení $\triangle\, ABC$ je pak velmi jednoduché. Z $\triangle\, CXB$, který se sestrojí napřed, vyplývá pak toto vymezení: Řešení je možné, pokud $\overline{CX} <$

[4]) Viz J. Vojtěch: GV, str. 58.

$< \overline{CB} + \overline{BX}$. Dosazením za $\overline{CX} = o_\gamma + x$, dostaneme zase jako dříve, že musí býti $o_\gamma < \frac{2ab}{a+b}$. —

B. K přehledu metod užívaných k řešení konstruktivních úloh elementárních připojíme ještě zmínku o tom, **kdy je úloha elementární**, t. j. kdy k jejímu řešení stačí užíti jen přímek a kružnic, a o pomůckách, kterými se takové úlohy provádějí. Tato část teorie geometrických konstrukcí nebude naším úkolem, i odkazujeme zvláště na pojednání uvedené v Lit. č. XIII.

a) Analytické kriterium německého geometra F. Kleina o elementárních úlohách konstruktivních praví: Konstruktivní úlohu lze tehdy a jenom tehdy řešiti kružítkem a pravítkem, dají-li se veličiny, určující hledané prvky, odvoditi z veličin daných konečným počtem sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma.[5])

b) Všecky konstrukce proveditelné pravítkem a kružítkem lze provésti též jen kružítkem, jak po prvé ukázal italský geometr Mascheroni (1797) — „konstrukce mascheroniovské" — nebo také použitím pravítka a jediné pevné kružnice s daným středem — „konstrukce Steinerovy"[6]) — anebo též náhradním náčiním jiným, jako je pravoúhlé pravítko a j.

C. Jako příklad provedeme nyní konstrukce, kterých bude později potřebí.

a) Sestrojíme úsečku $x = \frac{a \, . \, b}{c}$, tedy čtvrtou geometricky úměrnou ke třem daným úsečkám a, b, c (obr. 5a), pouhým kružítkem. Sestrojíme kružnici $k(O)$ poloměrem $\overline{OC} = c$, učiníme $\overline{CA} = b$, $\overline{CB} = a$ a opíšeme z bodů B a A oblouky

[5]) Viz o tom též v knize B. Bydžovský - J. Vojtěch: Mathematika pro nejvyšší třídu reálek, Praha 1912, str. 80 a zvláště stať v pojednání výše citovaném.

[6]) Nazvané podle slavného německého geometra J. Steinera (1796—1863).

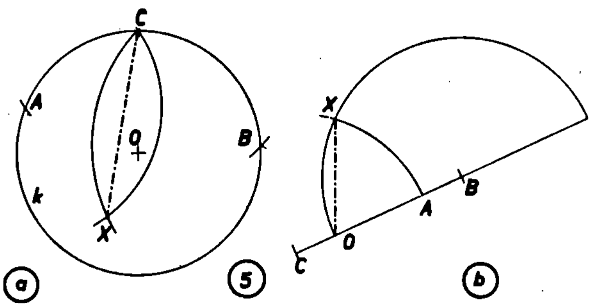
jdoucí bodem C; ty se protnou v bodě X. Pro obsah trojúhelníka ABC platí:

$$P = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB}}{4 \cdot \overline{OC}} = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot \tfrac{1}{2}\overline{CX}.$$

Z toho:

$$\overline{CX} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{\overline{OC}} = x.$$

Aby konstrukce byla možná, musí: $a < 2c$, $b < 2c$. Není-li



tomu tak, zvolíme vhodně celé číslo n a sestrojíme napřed úsečku $y = \frac{ab}{n \cdot c}$; pak $x = n \cdot y$, což lze učiniti zase kružítkem (viz též str. 79).

b) Pro sestrojení úsečky $x = \sqrt{ab}$, tedy střední geometricky úměrné, je výhodná konstrukce Pelzova[7]) (obr. 5b). Na přímku naneseme úsečky: $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, z bodu A úsečku $\overline{AC} = b$ a z bodů B i C touž délkou b sestrojíme

[7]) Viz Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskriptivní geometrie pro vys. šk. techn., I; JČMF, Praha 1928; str. 18.
K. Pelz byl vynikající český geometr (1845—1909).

oblouky, které se protnou v bodě X. Podle věty Eukleidovy v kružnici o středu B platí:

$$\tfrac{1}{2}\overline{OA} \,.\, 2 \,.\, \overline{OB} = \overline{OA} \,.\, \overline{OB} = \overline{OX}^2 = x^2.$$

Tedy $\overline{OX} = x$.

Jiná konstrukce mascheroniovská jest provedena též na obr. 27. —

2.

PŘEHLED ÚLOH SOUVISÍCÍCH S ÚLOHOU APOLLONIOVOU.

Slavná ú. A., definovaná v úvodě, má své jméno podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (kolem r. 200 př. Kr.), který se jí zabýval a ji řešil v díle „περὶ ἐπαφῶν“, t. j. „o dotycích“. Spis ten se nezachoval, takže není bezpečně známo, jaké řešení tento velký geometr provedl. Soudí se však, že podal řešení i pro obecný případ, a zdá se, že bylo asi takové, jaké uveřejnil r. 1600 v Paříži francouzský matematik Viète ve spise „Apollonius Gallus...“; je to řešení „dilatací“, které uvedeme v (5A). Vrstevník Viètův Adrian van Roomen (Adrianus Romanus) rozřešil ú. A. užitím kuželoseček. Toto řešení známe z výkladů školních.[1])

Od té doby zabývalo se touto úlohou mnoho slavných matematiků, jako Fermat, Newton, Euler, Carnot, později Plücker, Casey a j., cestou synthetickou i analytickou. K řešení zvláště jednoduchému a elegantnímu dospěl francouzský matematik Gergonne v „Annales de math.“, sv. VII (1816—17), pak Gaultier a později Fouché (viz kapit. 3). Význam řešení Gergonnova je nejlépe viděti z toho, že bylo potom dokázáno mnoha jinými způsoby, ať už jako důsledek řešení založeného na vztazích útvarů prostorových, přiřaděných vhodně k útvarům rovinným, což provedl proslulý geometr německý W. Fiedler užitím cyklografie,[2]) nebo jako zvláštní případ řešení úkolů obecnějších. Tu můžeme jmenovati velkého českého geometra J. Sobotku (viz Lit. č. VIII). Odvození Gergonnova řešení deskriptivní geometrií i jiná řešení naší úlohy podal již prof.

---

[1]) Viz učebnici: Klíma-Ingriš, Rýsování pro III. a IV. tř. rrg. a r., (JČMF, 1934) § 19.

[2]) Na základě promítání kruhového (cyklického) v knize: Zyklographie . . ., Leipzig 1882.

karlínské reálky F. Machovec (viz Lit. č. VI) v r. 1879, jiné odvození geometrií projektivní, a to kolineací, český geometr V. Jarolímek (viz Lit. č. III, sv. 5) a další pak dr. J. Klíma (viz Lit. č. V).

Již ze zájmu, jakému se těšila ú. A., je viděti, že úloha ta má nejen veliký význam teoretický, což bylo naznačeno již v úvodě, ale i obecně kulturní.

A. Určení kružnice podmínkami dotyku. K určení kružnice v rovině jest třeba tří jednoduchých podmínek nezávislých, což je jasné již z toho, že k určení polohy středu je třeba dvou podmínek (v analytické geometrii dvou souřadnic) a k určení poloměru jedné podmínky (na př. jeho délky). V obecné ú. A. jsou dány tři podmínky dotyku s danými kružnicemi k_i, $i = 1, 2, 3$; označíme-li takovou jednu podmínku symbolem (k), můžeme obecnou ú. A. značiti (kkk). Nahradíme-li danou kružnici bodem, jakožto kružnicí poloměru nulového, bude tu jednoduchá podmínka pro hledanou kružnici, aby procházela daným bodem; označíme ji (B). Přejde-li daná kružnice v přímku, jakožto mezní kružnici o poloměru nekonečně velkém, pak bude podmínkou, aby se hledaná kružnice dotýkala této přímky; vznikne podmínka (p).

Utvoříme-li kombinace s opakováním třetí třídy z podmínek (k), (p), (B), dostaneme $\binom{5}{3} = 10$, deset úloh Apolloniových, v nichž nových devět jsou zvláštní případy úlohy obecné.

Jsou to úlohy:

1. kkk	6. kBB
2. kkp	7. ppp
3. kkB	8. ppB
4. kpp	9. pBB
5. kpB	10. BBB.

B. Podmínky protnutí orthogonálního, diametrálního a podmínka daného poloměru. Podmínku (k) můžeme nahraditi též jinou: Určíme-li, že hledaná kružnice má danou kružnici

a) protínati orthogonálně, dostaneme podmínku (k^o),

b) má-li ji protínati diametrálně čili půliti ji, bude nová podmínka (k^d).

c) Zaveďme mimo to v naše úlohy ještě podmínku, že hledaná kružnice má míti daný poloměr, t. j. podmínku (r).

Poznáme později, že podmínky (k^o) a (k^d) jsou s podmínkou dotyku ú. A. v těsné souvislosti, ba dokonce, že lze podmínku (k) ú. A. jimi vhodně nahraditi. Zavedení podmínky (r) je odůvodněno tím, že se vyskytuje při některém řešení ú. A. jako důsledek zvoleného postupu.

Spojíme-li nyní podmínky (k, k^o, k^d a r) v kombinace po třech s opakováním (podmínka (r) se však nemůže opakovati), vzniknou nové úlohy, jež rozřešíme v kap. 4 v tomto pořadí:

α) $k^ok^ok^o$	β) kk^ok^o	γ) kkk^o	δ) k^ok^or
$k^ok^ok^d$	kk^ok^d	kkk^d	k^ok^dr
$k^ok^dk^d$	kk^dk^d		k^dk^dr
$k^dk^dk^d$			kk^or
			kk^dr
			kkr.

Dostaneme tak n o v ý c h 15 ú l o h.

C. Zvláštní úlohy s podmínkami předcházejícími. Můžeme je dále rozmnožiti specialisací takto: Podmínku dotyku (k) nahradíme podmínkou (p) anebo (B); podmínku (k^o) můžeme nahraditi jedinou novou speciální (p^o), aby kružnice hledaná protínala danou přímku orthogonálně, neboli měla střed na této přímce. Podmínku (k^d) a ovšem ani (r) nelze pak již specialisovati k získání nových úloh. Dostaneme úlohy:

Z úlohy na př. $k^ok^ok^o$: $k^ok^op^o$, $k^op^op^o$, t. j. dvě nové úlohy a pod. Dospějeme tak k 51 n o v ý m ú l o h á m, z nichž mnohé jsou zcela jednoduché. Ukáže se, jak podmínka (r) je též organicky spjata s ostatními; dojdeme totiž od ú. A. zpět k úlohám základním, jako jest na př. úloha $(p^o p^o r)$, značící sestrojiti kružnici danou středem (průsečíkem dvou přímek) a poloměrem.

D. Podmínka dotykového bodu. K těmto úlohám se pak přidružují ještě takové úlohy, v nichž daný bod jest dotykovým bodem na dané kružnici, podmínka (k_B), nebo na dané přímce, podmínka (p_B). Jsou obdobou šesti známých úloh Pappových, jež naznačeným způsobem vznikají z příslušných ú. A. takto:

Z ú. A.	3. kkB	vznikne:	kk_B
	5. kpB	„	k_Bp; kp_B
	6. kBB	„	k_BB
	8. ppB	„	pp_B
a	9. pBB	„	p_BB.

Když také uvážíme, že daný bod může ležeti na dané kružnici, kterou má výsledná kružnice protínati orthogonálně nebo diametrálně, anebo na přímce dané podmínkou (p^o), dospějeme k novým 35 úlohám. Konečně také oba dané body, pokud se vyskytují, mohou ležeti na kružnici (přímce), která má být proťata orthogonálně. Vzniknou tím ještě dvě nové úlohy: $(k^o{}_{B+B})$ a $(p^o{}_{B+B})$; tedy celkem nových 37 úloh, většinou zcela jednoduchých.

E. Podmínky protnutí v daném úhlu. Místo podmínky dotyku ú. A. můžeme dále zavésti obecnější podmínku, aby výsledná kružnice protínala kružnice dané k_i, $i = 1, 2, 3$, v daných úhlech φ_i, ježto dotyk je zvláštním případem protnutí, totiž v úhlu nulovém.

Označíme-li takovouto podmínku (k^φ), přejde obecná ú. A. v úlohu $(k^\varphi k^\varphi k^\varphi)$. Ze všech ú. A. kromě úlohy poslední dostaneme tak 9 úloh nových, zobecněných, a to:

1. $k^\varphi k^\varphi k^\varphi$	6. $k^\varphi BB$
2. $k^\varphi k^\varphi p^\varphi$	7. $p^\varphi p^\varphi p^\varphi$
3. $k^\varphi k^\varphi B$	8. $p^\varphi p^\varphi B$
4. $k^\varphi p^\varphi p^\varphi$	9. $p^\varphi BB$.
5. $k^\varphi p^\varphi B$	

Kdybychom ponechali vedle podmínky k^φ a p^φ jednu nebo dvě podmínky dotyku, rozmnožil by se počet úloh na 25 a ve spojení s ostatními podmínkami, o něco výše uvedenými, na veliký počet dalších. Také rovnost úhlů $\varphi_1 = \varphi_2$, resp. $= \varphi_3$, by vedla k dalším speciálním úkolům.

Všecky tyto úlohy, které souvisí s ú. A. a jež jsme v přehledu uvedli, lze řešiti pravítkem a kružítkem, tedy elementárně; řešení úlohy nejobecnější ($k^\varphi k^\varphi k^\varphi$) provedeme až v (5B).

Poznámka. K jiným úlohám o sestrojení kružnice bychom dospěli zavedením ještě jiných podmínek, na př. aby hledaná kružnice určovala na dané přímce nebo na dané kružnici svými průsečíky tětivy dané délky, nebo aby byla danou kružnicí proťata diametrálně a j. Tyto podmínky však ve svých výkladech pomineme.

Zvláštní postavení mezi úlohami o sestrojení kružnice zaujímá úloha Malfattiho, nazvaná tak podle italského matematika, který ji po prvé vyslovil a algebraicky řešil r. 1803:

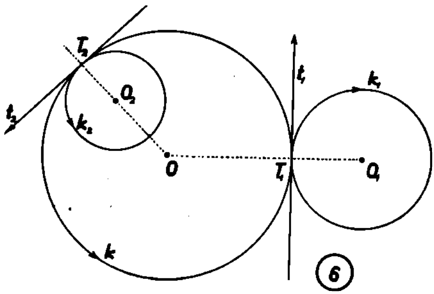
Do daného trojúhelníka vepište tři kružnice tak, aby se každá z nich dotýkala dvou stran trojúhelníka a obou kružnic ostatních. Ryze geometrické její řešení podal J. Steiner (1827), který tuto úlohu ještě zobecnil tím, že nahradil strany daného trojúhelníka kružnicemi. Touto úlohou se zabývati však nebudeme.[3]) —

[3]) Řešení viz na př. Lit. č. I, str. 192 a n. nebo v pojednání V. Rychlíka: „O Malfattiho problému" v Příloze k ČMF, roč. XIX, 1911, str. 1 a 69.

3.

ŘEŠENÍ APOLLONIOVY ÚLOHY ZALOŽENÁ NA SPECIÁLNÍCH VZTAZÍCH.

A. Zavedení cyklu. Uvidíme, že ú. A. (*kkk*) vyhovuje obecně nejvýše osm reálných kružnic výsledných, které se dají seřaditi v čtyři dvojice. Toto seřadění není náhodné, o čemž se přesvědčíme, zavedeme-li do úlohy **kružnice orientované neboli cykly.**[1]) Každé kružnici lze totiž



6

přisouditi dva smysly, navzájem opačné, ve kterých lze otáčením bodu kružnici vytvořiti. Vznikne t. zv. orientovaná kružnice (t. j. se smyslem), jež se zove cyklus. Smysl otáčení proti pohybu ruček hodinových označujeme jako kladný a příslušný cyklus se nazývá kladný. Při opačném smyslu je cyklus záporný. Smysl cyklů označujeme v obrazech šipkou (obr. 6); poloměr cyklu kladného považujeme též za kladný, poloměr cyklu záporného za záporný. I tečny cyklů se stávají orientovanými, a to tak, že mají smysl jediný, určený smyslem cyklu v dotykovém bodě, jak vidíme v obr. 6 u tečny t_1 v bodě T_1 nebo u t_2 v bodě T_2 cyklu k.

[1]) Zavedl franc. matematik E. Laguerre (1834—1886).

V témž obrazci je viděti, že dva cykly, které se dotýkají vně (k a k_1 v T_1), musí být opačného smyslu, majíce v T_1 společnou tečnu, jejíž smysl určený cyklem k musí být v souhlase i se smyslem druhého cyklu k_1. Při dotyku vnitřním (k a k_2 v T_2) musí být oba cykly smyslu stejného; kdyby tomu tak nebylo, nastal by v tomto bodě dotyk t. zv. nevlastní, který se v našich úvahách nevyskytne. Ve větách o cyklech není třeba proto mluviti o způsobu dotyku (vnitřním a vnějším) a vyjádření vět je kratší. Poznáme snadno, že dva cykly mohou mít jen dvě společné tečny a že mají jen jediný střed podobnosti.

Mimo to lze poznati, že tří cyklů mohou se dotýkati jen dva cykly, a to vede při ú. A. právě k dvojicím uvedeným na počátku.

Ve svých úvahách zavedení orientovaných kružnic vždycky zvlášť vytkneme. —

K řešení ú. A. vedou, jak již bylo v úvodu řečeno, planimetrické vlastnosti kružnic, které se zakládají na podobnosti, resp. homothetii, na polárnosti a pak na mocnosti bodu ke kružnici a z ní vyplývající vlastnosti chordály (potenční přímky) a potenčního (chordálného) středu.

Základní věty, užívající těchto pojmů, jsou známé ze středoškolského učiva; odvodíme proto jen potřebné věty další.

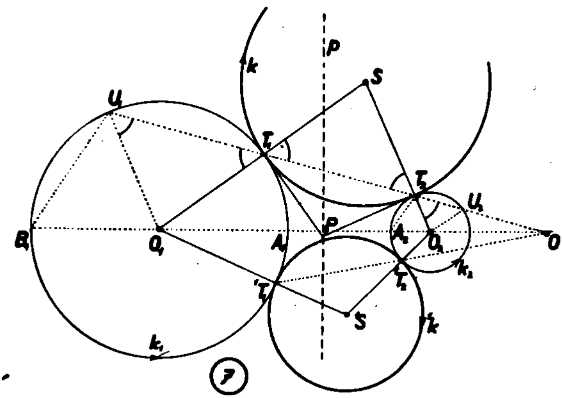
a) Mějme dvě orientované kružnice — v obr. 7 jsou to cykly kladné $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$ — se středem podobnosti v bodě O. Lze snadno dokázati větu:

Dotýká-li se cyklus dvou daných cyklů, pak spojnice dotykových bodů prochází středem podobnosti daných cyklů.

Jsou-li v obr. body T_1 a T_2 dotykové, pak protíná spojnice T_1T_2 cyklus k_1 ještě v bodě U_1. Úhly v obr. žatržené jsou vesměs stejné, takže zvláště $\sphericalangle\, O_1U_1O = \sphericalangle\, O_2T_2O$; proto poloměry O_1U_1 a O_2T_2 jsou úsečky rovnoběžné a tedy homothetické. Spojnice U_1T_2 homotheticky sdružených bodů U_1

a T_2 jde pak skutečně středem podobnosti O. Je to také důsledek věty uvedené sub e).

Naopak protneme-li dané dva cykly paprskem homothetie ve čtyřech bodech T_1, U_1 a T_2, U_2, pak vždy dva průsečíky na různých cyklech ležící, které nejsou spolu homothetické,[2]) t. j. T_1, T_2 nebo U_1, U_2, určují cyklus, který se v těchto bodech daných cyklů dotýká. Z rovnosti zatržených úhlů vyplývá zase naopak rovnost úseček $ST_1 = ST_2$, t. j. poloměrů dotykového cyklu k.



7

b) Sestrojíme-li v témž obrazci tečny cyklu k v bodech T_1 a T_2, protnou se v pólu P dotykové sečny T_1T_2 a platí $\overline{PT}_1 = \overline{PT}_2$; mocnost bodu P vzhledem k cyklům k_1 a k_2 je stejná, čili bod P náleží jejich chordále p. To vyplývá rovněž ze známé vlastnosti chordál tří kružnic.

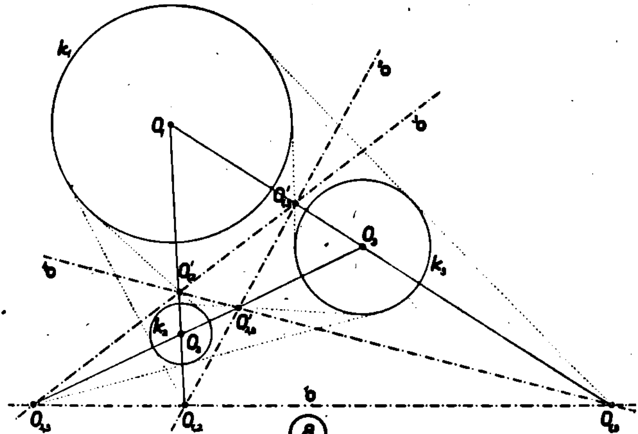
Můžeme tedy říci, a to bez zřetele na smysl cyklů: Dotýká-li se kružnice k dvou kružnic k_1, k_2, pak pól spojnice dotykových bodů vzhledem ke kružnici k leží na chordále kružnic k_1, k_2 a naopak.

---

[2]) Nazývají se někdy inversně sdružené, nebo krátce inversní podle středu O.

c) Z této věty a z vlastnosti sdružených pólů[3]) plyne hned další věta:

Pól chordály dvou kružnic vzhledem ke kružnici třetí, která se prvých dvou dotýká, leží na spojnici dotykových bodů.



8

d) Z obr. 7 můžeme napsati známým způsobem rovnice:

$$\overline{OT_1} \,.\, \overline{OU_1} = \overline{OA_1} \,.\, \overline{OB_1}$$

$$\frac{\overline{OT_2}}{\overline{OU_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_1}}.$$

Znásobením obou rovnic dostáváme:

$$\overline{OT_1} \,.\, \overline{OT_2} = \overline{OA_1} \,.\, \overline{OA_2}.$$

Jestliže se v témž obraze dotýká další cyklus ${}^1k$ obou daných v bodech ${}^1T_1$ a ${}^1T_2$, pak platí podobně:

[3]) Viz J. Vojtěch: GV, 62.

$$\overline{O^1T_1} \,.\, \overline{O^1T_2} = \overline{OA_1} \,.\, \overline{OA_2},$$

čili

$$\overline{OT_1} \,.\, \overline{OT_2} = \overline{O^1T_1} \,.\, \overline{O^1T_2}.$$

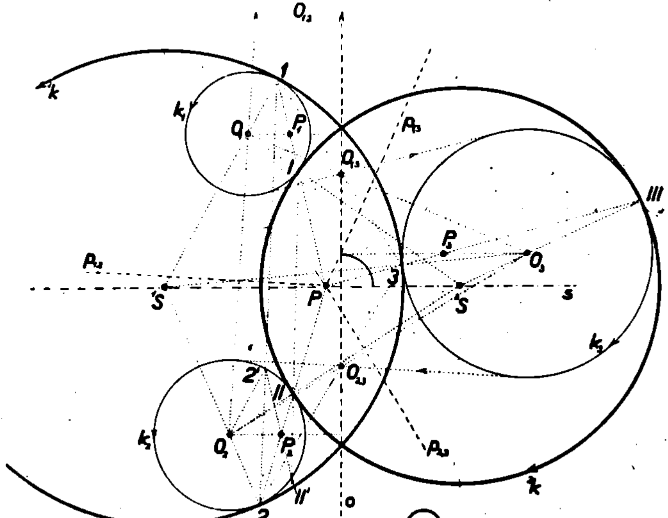
To znamená, že bod O má stejnou mocnost k oběma cyklům k i ${}^1k$ i ke všem ostatním, které se cyklů k_1 a k_2 dotýkají, a že leží na chordále cyklů k, ${}^1k$ i na chordále každé jiné takové dvojice.

Platí tedy: **Jestliže se dva cykly dotýkají současně dvou jiných cyklů, pak chordála jedné dvojice cyklů dotykových jde středem podobnosti druhé dvojice cyklů.**

e) Nyní uvedeme větu Mongeovu: **Šest středů podobnosti tří kružnic tvoří vrcholy úplného čtyrstranu; jedna strana obsahuje tři vnější středy podobnosti a ostatní tři strany spojují vždy jeden vnější střed s dvěma vnitřními.** Jsou to čtyři osy **podobnosti** tří kružnic, jedna vnější a tři vnitřní (obr. 8). Důkaz této věty jest proveden v GV, str. 52.

B. S těmito větami vystačíme, abychom provedli **Gergonnovo řešení ú. A.**

Rozbor: Dané tři kružnice $k_i(O_i)$, $i = 1, 2, 3$, orientujme v cykly — v obr. 9, na př. v pořadí $(++-)$. Dotýkají-li se dva výsledné cykly ${}^1k({}^1S)$ a ${}^2k({}^2S)$ daných cyklů, pak podle věty sub d) prochází chordála oněch cyklů středy podobnosti dvojic k_1, k_2, resp. k_2, k_3 a k_3, k_1, čili je osou podobnosti o daných cyklů. Z téže věty pak plyne, že střed podobnosti dvojice ${}^1k$, ${}^2k$ leží na chordále p_{12} dvojice k_1, k_2, rovněž i na chordále dvojice k_2, k_3 i k_3, k_1, čili jest potenčním středem P daných cyklů. A proto: **Středy ${}^1S$, ${}^2S$ výsledných cyklů leží na kolmici s, spuštěné s potenčního středu P daných cyklů na jejich osu podobnosti.** Podle věty sub c) spojnice dotykových bodů *1*, *I* cyklu ${}^1k$ a ${}^2k$ s cyklem k_1 prochází pólem P_1 osy podobnosti o, jakožto chordály dvojice ${}^1k$, ${}^2k$, vzhledem k cyklu k_1. A podle věty sub a) táž spojnice *II* jde středem podobnosti dvojice ^1k, $^2k_2$, t. j. bodem P. Rovněž pak spojnice dotykových bodů výsledných cyklů s cyklem k_2 a k_3 spojují pól P_2, resp. P_3 téže osy o vzhledem k daným cyklům k_2, resp. k_3 s potenčním středem P.



9

Konstrukce: K daným třem cyklům sestrojíme osu podobnosti o a jejich potenční střed P. Určíme dále póly P_i osy o vzhledem k daným cyklům k_i.

Spojnice PP_i protnou cykly k_i v dotykových jejich bodech s dvěma cykly hledanými ^1k a ^2k, jejichž středy ^1S a ^2S snadno již doplníme.

Důkaz, že cykly ^1k a ^2k takto sestrojené skutečně vyhovují žádaným podmínkám, můžeme provésti takto:

Body P_1 a P_2 jakožto póly osy podobnosti o vzhledem k cyklům k_1 a k_2 jsou body homothetické dle středu O_{12} ve vztahu určeném homothetickými cykly k_1 a k_2, ježto osa o je paprskem homothetie.

Vedeme-li proto bodem P_2 sečnu cyklu k_2 rovnoběžnou se sečnou *1I*, t. j. přímkou PP_1, protne k_2 v bodech *2'* a *II'*, které jsou homothetické s body *1*, resp. *I*; paprsky homothetie *12'* a *I II'* protnou k_2 ještě v bodech (*2*), resp. (*II*), inversních s *1*, resp. s *I*. Spojnice (*2*)(*II*) prochází nutně bodem P_2, jak plyne z konstrukce poláry bodu O_{12} vzhledem ke k_2, kdybychom ji sestrojovali užitím úplného čtyrrohu (*2*)*2'*(*II*)*II'*. Polára ta musí jít právě bodem P_2, který je pólem přímky o, na níž bod O_{12} leží. Spojnice inversních dvojic bodů *1*, *I* a (*2*), (*II*) protínají se však nutně na chordále p_{12} cyklů k_1, k_2 (dle věty Ad), tedy v bodě P, kterým byla vedena spojnice *1I*, od níž jsme vyšli. Je tedy spojnice (*2*)(*II*) totožná se spojnicí PP_2 a body (*2*), (*II*), získané jako inversní s body *1*, *I*, jsou totožné s body *2*, *II* sestrojenými původně na PP_2.

Stejně dokážeme, že body *3*, resp. *III* jsou inversní s body *1*, resp. *I* na homothetických cyklech k_3 a k_1 a že též body *2*, resp. *II* jsou inversní s body *3*, resp. *III* na homothetických cyklech k_2 a k_3.

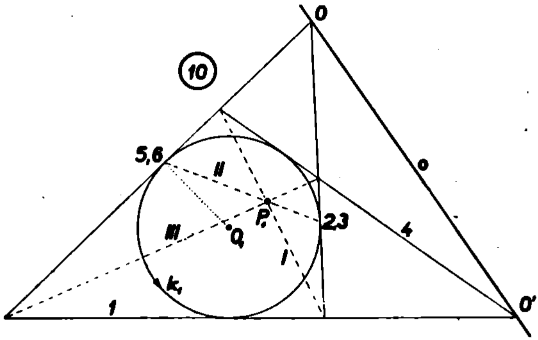
Proto cyklus ${}^1k$ dotýkající se k_1 v bodě *1* a jdoucí bodem *2*, dotýká se v tomto bodě i k_2 (podle věty Aa). Podobně i cyklus, dotýkající se na př. k_1 v bodě *1* a jdoucí bodem *3*, dotýká se v tomto bodě i cyklu k_3.

Avšak tento cyklus je totožný s cyklem ${}^1k$ prve určeným, což plyne hned z toho, že trojúhelníky *1 2 3* a $O_1O_2O_3$ jsou v poloze perspektivní (osou perspektivnosti jest o), takže spojnice perspektivně sdružených vrcholů: O_1*1*, O_2*2* a O_3*3* protínají se dle věty Desarguesovy[4]) v jediném bodě ${}^1S$, středu to výsledného cyklu ${}^1k$.

Podobně jest tomu u cyklu ${}^2k$. —

[4]) Věta ta zní: Jsou-li dva trojúhelníky v poloze takové, že průsečíky odpovídajících si stran jsou na přímce, procházejí spojnice odpovídajících si vrcholů jediným bodem, a naopak. Objevil ji francouzský geometr Desargues († 1662) a lze ji

Poznámky ke konstrukci. a) Na obr. 9 jest provedena tato konstrukce úplně, ale k sestrojení výsledných cyklů bylo použito skutečně jen pólu P_1, jímž určeny dotykové body *1* a *I* na cyklu k_1. Dotykový bod *2* na cyklu k_2 můžeme sestrojiti dle věty sub a) i bez pólu P_2. Středem O_2 vedeme v cyklu k_2 poloměr $O_2 2'$ rovnoběžný s $O_1 1$. Spojnice *12'* protne k_2 již v bodě *2*. Spojnice pak $O_2 2$ určí na $O_1 1$ hledaný střed ${}^1S$; podobně i ${}^2S$.



Dalších pólů P_2 a P_3 bylo by možno použíti ke kontrole přesnosti, zrovna tak jako středné $s \equiv {}^1S{}^2S$, která musí jít bodem P kolmo k o; tato osa o jest pak chordálou cyklů ${}^1k$ a ${}^2k$. —

b) Pro sestrojení pólů P_i osy o, která ani nemusí být vyrýsována, jest výhodná tato konstrukce, jsou-li společné tečny daných cyklů s cyklem na př. k_1 reálné (obr. 10). Dvě úhlopříčky čtyrstranu, určeného čtyřmi tečnami cyklu k_1, protínají se v pólu P_1 třetí úhlopříčky, t. j. osy o, vzhledem ke k_1. Tímto bodem P_1 procházejí totiž i spojnice dotykových bodů protějších tečen (v obr. na př. spojnice *II*), zřejmě poláry bodu O, resp. O', které náleží ose o.

snadno dokázati prostorově. (Viz Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskriptivní geometrie pro vys. šk. techn., díl I; JČMF, Praha 1928; str. 65.)

Důkaz lze provésti třebas užitím věty Brianchonovy.[5]) Označíme-li tečny čísly *1*, . . ., *6*, při čemž dvěma protějším přidělíme čísla *2, 3* a *5, 6* (ježto každou považujeme za dvě soumezné, které se protínají v příslušném dotykovém bodě), pak schema spojnic průsečíků dvojic tečen jest:

$$\left.\begin{matrix} 1,2 \\ 4,5 \end{matrix}\right\} I; \quad \left.\begin{matrix} 3,4 \\ 6,1 \end{matrix}\right\} III; \quad \left.\begin{matrix} 2,3 \\ 5,6 \end{matrix}\right\} II.$$

Vymezení: Různé skupiny znamének cyklů, které přidělíme daným třem kružnicím v obecné poloze, vedou k čtyřem osám podobnosti — dle věty Ae); z osmi ($= 2^3$) možných skupin znamének vždy dvě skupiny znamének vesměs vzájemně různých (v obr. 9 jsou to skupiny $(++-)$, $(--+)$), poskytnou totiž jednu osu podobnosti. Jsou tedy obecně čtyři dvojice výsledných cyklů, čili obecně osm výsledných kružnic ú. A.

Některé dvojice výsledných cyklů mohou však být imaginární: Jestliže spojnice potenčního středu P s póly P_i osy podobnosti vzhledem k cyklům k_i neprotnou příslušné cykly k_i, jsou dotykové body imaginární, a proto příslušná dvojice výsledku rovněž imaginární. Jest tedy imaginárních výsledků vždycky sudý počet.

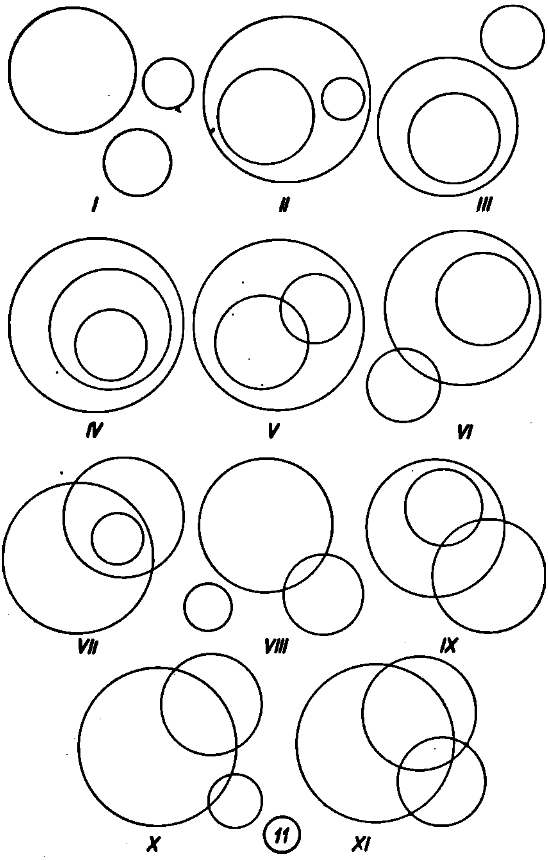
Počet reálných výsledků závisí původně na vzájemné poloze daných kružnic.

a) Vyloučíme-li zatím případy, kdy se dané dvě kružnice dotýkají, jakožto mezní případy obecných případů, kdy se tyto kružnice protínají anebo neprotínají (protínají imaginárně), možno uvésti 11 obecných poloh daných kružnic podstatně různých.[6]) Na obr. 11 má případ *I*, *II* a *XI* osm reálných výsledků, případy *V* až *X* poskytují čtyři reálná řešení a případ *III* a *IV* nedává žádných reálných výsledků.

[5]) Viz J. Vojtěch: GV, 63. Pro důkaz stačilo by též říci: Útvar vzniklý touto konstrukcí je polárný s útvarem, který dává konstrukci poláry k danému pólu užitím vlastností úplného čtyrrohu.

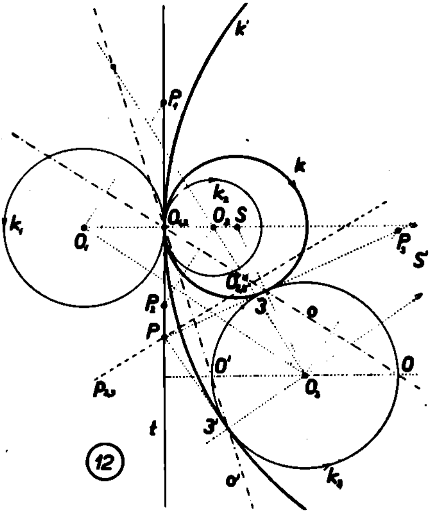
[6]) Viz Lit. č. II, str. 291; zde uvedeny i důvody reálnosti výsledků.

b) Jsou-li mezi danými kružnicemi k_i dvě, které se dotýkají, na obr. 12 jsou to k_1 a k_2, a dotýkají se v bodě O_{12}, pak



je vždy o dvě výsledné kružnice méně než v obdobném případě obecném. V obr. opět dané kružnice orientujme:

$k_1(+)$, $k_2(-)$ a k_3 na př. $(+)$. Osa podobnosti o těchto cyklů jde bodem O_{12}, takže její póly P_1 a P_2 vzhledem k cyklům k_1, resp. k_2 leží na jejich společné tečně t v bodě O_{12}. Tato tečna je však chordálou dvojice k_1, k_2 a obsahuje proto i potenční střed P daných cyklů. Spojnice $PP_1 \equiv t$ určuje tedy na k_1 dva body dotyku splývající s bodem O_{12}, rovněž tak i spojnice PP_2 na k_2, a splývají tedy také výsledné cykly v jediný



$k(S)$. Pak ovšem musí i spojnice PP_3, kdež P_3 je pólem osy o vzhledem ke k_3, býti tečnou tohoto cyklu k_3. Podobně i osa podobnosti o', k níž bychom dospěli při záporné orientaci kružnice k_3, poskytne dva výsledné cykly splývající v $k'(S')$. Ve zvoleném případě dostali bychom tedy šest reálných výsledků.

V obr. 12 je řešena současně úloha Pappova, neboť sestrojené cykly k a k' se dotýkají přímky t v bodě O_{12} a kružnice k_3. Při jejím řešení stačí buď nalézti jen potenční střed P kružnice k_3, přímky t a bodu O_{12} a z něho vésti tečny ke kružnici k_3, které již stanoví na k_3 dotykové body *3* a *3'* hledaných kružnic; nebo by stačilo sestrojiti osy podobnosti o a o',[7]) které jdou kromě bodu O_{12} ještě také bodem O, resp. O', krajními to body průměru kružnice k_3, kolmého na přímku t. Přímky o a o' určí pak na k_3 body dotyku *3* a *3'*, což je konstrukce obvyklá při řešení této úlohy.

c) Jestliže dané kružnice mají jeden společný bod P, je již tento bod jejich potenčním středem a každá osa podobnosti vede jen k jedné kružnici výsledné a vždy k bodu P, jakožto kružnici nulové. Bod P zastupuje tedy čtyři výsledky, takže jsou v tomto případě další čtyři řešení reálná. Jestliže dané kružnice náleží témuž svazku, zastupují společné body všechna řešení.

d) Řešení Gergonnova nelze použíti, jestliže středy daných tří kružnic leží na přímce, neboť v tomto případě jak potenční střed, tak póly os podobnosti, které vesměs splývají se společnou střednou, jsou body úběžnými ve směru kolmém k této přímce. Tento případ rozřešíme později způsoby jinými.

C. Pro zvláštní případy ú. A., když dané kružnice jsou body, nebo přímky,[8]) můžeme použíti řešení Gergonnova, jestliže mezi danými prvky zůstává aspoň jedna kružnice, na níž pak určíme dotykové body s kružnicemi výslednými. Jest to tedy 5 případů v (2A) na str. 15 označených čísly: 2. až 6.; probereme stručně první čtyři, protože poslední případ (*kBB*) je zcela jednoduchý a dobře známý. V případě 4. (*kpp*) nutno vyloučiti však zvláštní polohu, když dvě dané přímky jsou rovnoběžné, neboť řešení Gergonnovo zde selhává podle (Bd). Ale tento případ lze řešiti zcela jednoduše.

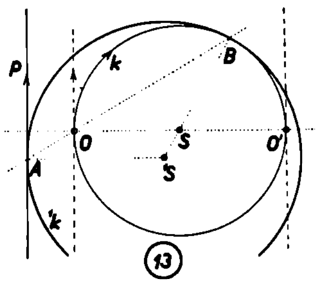
Vymezení ve všech případech lze provésti aplikováním případů obecných; pro stručnost je vynecháme.

[7]) Osy podobnosti trojice t, O_{12}, k_3; viz (3 Ca), str. 31.
[8]) Zde je třeba vzíti za kružnici degenerovanou nejen přímku v konečnu, ale i přímku úběžnou, jako druhou její část.

a) Poněvadž budeme používati středů podobnosti, chordál, pólů a polár při dvojicích kružnic (nebo cyklů), z nichž jedna nebo obě přešly v bod anebo v přímku, předešleme, jak se jeví tyto útvary podle vlastností je definujících při takových dvojicích.

α) Pro dvojici bod a kružnice: Oba středy podobnosti splývají v daném bodě, chordála půlí vzdálenost bodu od jeho poláry vzhledem k dané kružnici, což není třeba zvlášť dokazovati.

β) Přímka a kružnice: Středy podobnosti jsou krajní body O a O' průměru kružnice kolmého na danou přímku (obr. 13). Vedeme-li bodem O, resp. O' paprsek, pak snadno nahlédneme, že na tomto paprsku je vždy homotheticky sdružen bod A přímky p s bodem O, resp. O' a bod úběžný (na druhé části[8]) degenerované kružnice) s druhým bodem B kružnice k (pro nekonečně velký poměr homothetie, jak musí být, ježto pro přímku je nutno položiti $r = \infty$); body A, B jsou zde body inversními. Orientujeme-li kružnici i přímku, pak středem podobnosti je ten bod O, v němž tečna cyklu je téhož smyslu jako orientovaná přímka p (v obraze je to bod O). Chordála této dvojice je ovšem daná přímka.

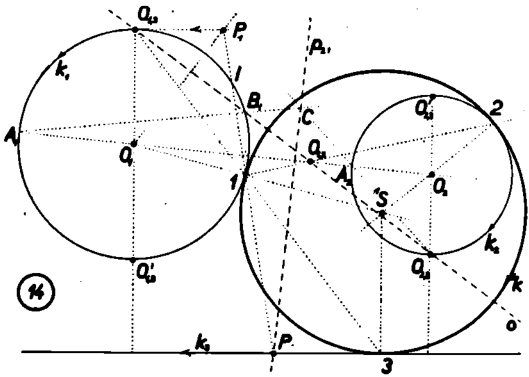


γ) Bod a přímka: Středy podobnosti zase splývají v daném bodě, chordálou je daná přímka. Bod je k přímce pólem, přímka pak k bodu polárou.

δ) Dva body: Středy podobnosti jsou střed úsečky danými body určené a úběžný bod této spojnice. Chordálou je osa souměrnosti těch bodů.

ε) Pro dvě přímky lze určiti jen chordálu, jakožto jednu osu souměrnosti daných přímek, z vlastnosti, že chordála půlí úhel dvou kružnic stejných poloměrů.

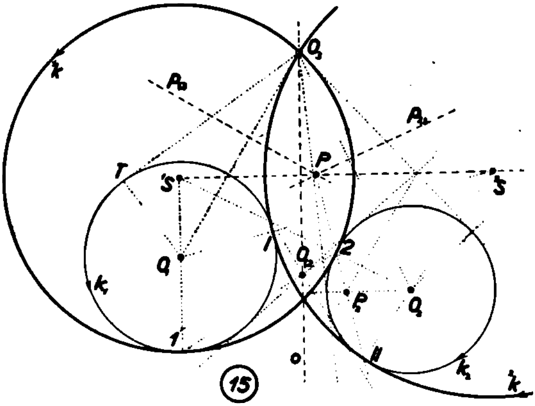
b) Je-li řešiti úlohu (kkp), t. j. nalézti kružnici, která se dotýká daných kružnic $k_1(O_1)$, $k_2(O_2)$ a dané přímky k_3 (obr. 14), sestrojíme průměry v k_1 i k_2 ke k_3 kolmé, jež určí svými krajními body O_{13}, O'_{13}, resp. O_{23}, O'_{23} středy podobnosti dvojic k_1, k_3, resp. k_2, k_3. Při zvolené orientaci daných kružnic a přímky je osou podobnosti o spojnice $O_{13}O_{23}$. Potenční



střed P stanovíme v průsečíku přímky k_3 a chordály p_{12} daných cyklů. Tuto chordálu určíme třebas bodem C, který je průsečíkem spojnic bodů A_1, B_1 a A_2, O_{23}, vzájemně inversních ve vztahu homothetických cyklů k_1 a k_2; je kolmá k středné O_1O_2. Pak sestrojíme pól P_1 osy podobnosti o vzhledem ke k_1 a spojnicí PP_1 dospějeme k dotykovým bodům *1* a *I* na k_1 s výslednými cykly ^1k a ^2k. Sestrojení dotykových bodů *2* a *3* na k_2, resp. na k_3 a dokončení konstrukce je již známé a jest provedeno v obrazci jen pro cyklus ^1k.

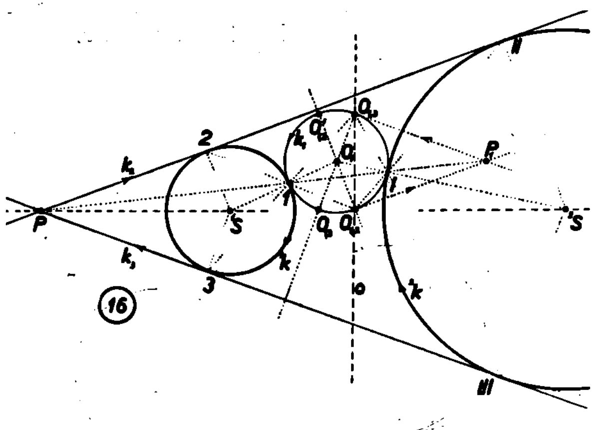
Úloha má obecně 8 výsledků, protože jsou 4 osy podobnosti: kromě o, ještě $O_{13}O'_{23}$, $O'_{13}O_{23}$ a $O'_{13}O'_{23}$.

c) Případ (kkB), sestrojiti kružnici, která se dotýká daných kružnic $k_1(O_1)$, $k_2(O_2)$ a prochází daným bodem O_3, jest proveden při zvolené orientaci kružnic na obr. 15. Střed podobnosti O_{12} byl sestrojen jako průsečík společných tečen cyklů k_1, k_2 a pól P_2 osy podobnosti $o \equiv O_{12}O_3$ vzhledem k cyklu k_2 konstrukcí, vyloženou na str. 26 sub b), když byly vedeny též tečny cyklu k_2 z bodu O_3. Chordála p_{13} dvojice k_1, O_3 byla sestrojena středem tečny O_3T kolmo na střednou O_1O_3; podobně i chordála p_{23}. Další sestrojení jest již známé. Pro určení středu ${}^2S$ výsledného cyklu ${}^2k$ bylo použito středné ${}^1S{}^2S$, jež jde ovšem bodem P kolmo na o.



Osy podobnosti jsou možné dvě, a proto má úloha obecně čtyři výsledky.

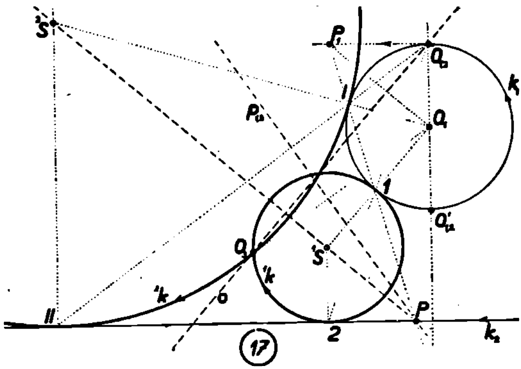
d) Máme-li sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice $k_1(O_1)$ a daných dvou přímek k_2, k_3 (obr. 16), t. j. řešiti úlohu (kpp), pak podobně jako sub b) sestrojíme středy podobnosti O_{12}, O'_{12} dvojice k_1, k_2 na průměru kružnice k_1, kolmém na k_2, a středy podobnosti O_{13}, O'_{13} dvojice k_1, k_3. Orientujeme-li opět dané útvary, pak v našem obrazci je osou podobnosti o spojnice $O_{12}O_{13}$, jak rozhodly tečny cyklu k_1, rovnoběžné i stejného smyslu s k_2, resp. s k_3; tyto tečny určují ve svém průsečíku P_1 pól osy o vzhledem ke k_1. Potenční střed P je v průsečíku daných přímek k_2, k_3, jakožto chordál dvojic k_1, k_2 a k_1, k_3. Ježto osa podobnosti o podle konstrukce svých bodů O_{12} a O_{13} tvoří s danými přímkami trojúhelník rovnoramenný, je středná $^1S^2S$ výsledných cyklů osou souměrnosti přímek k_2, k_3, kolmou k ose o. Dokončení konstrukce jest již jasné.



Jiné možné orientace daných útvarů poskytují ještě tři osy podobnosti, $O'_{12}O'_{13}$, $O_{12}O'_{13}$ a $O'_{12}O_{13}$, takže je úloha obecně osmiznačná.

Poznámka: Odvozená konstrukce splývá s postupem, který lze vyložiti homothetií mezi daným cyklem k_1 a hledaným cyklem, na př. ^1k. Jejich středem podobnosti jest hledaný bod dotyku *1*. Známe však tečny k_2 a k_3 hledaného cyklu ^1k, můžeme tedy sestrojiti k danému cyklu k_1 tečny s nimi rovnoběžné, jakožto homothetické: průsečíky P a P_1 jsou pak body homothetické a jejich spojnice jakožto paprsek homothetie prochází středem homothetie *1*, resp. *I* na cyklu k_1.

e) Případ (kpB), sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice $k_1(O_1)$, dané přímky k_2 a prochází daným bodem O_3, je řešen na obr. 17 a nepotřebuje téměř výkladu. Osa podobnosti o jde ovšem bodem O_3, který je středem podobnosti — podle a) — jak dvojice k_1, O_3, tak dvojice k_2, O_3. Osy podobnosti jsou celkem jen dvě, kromě o ještě $O_3O'_{12}$ při jiné orientaci dané kružnice nebo dané přímky, takže je úloha obecně čtyřznačná. —

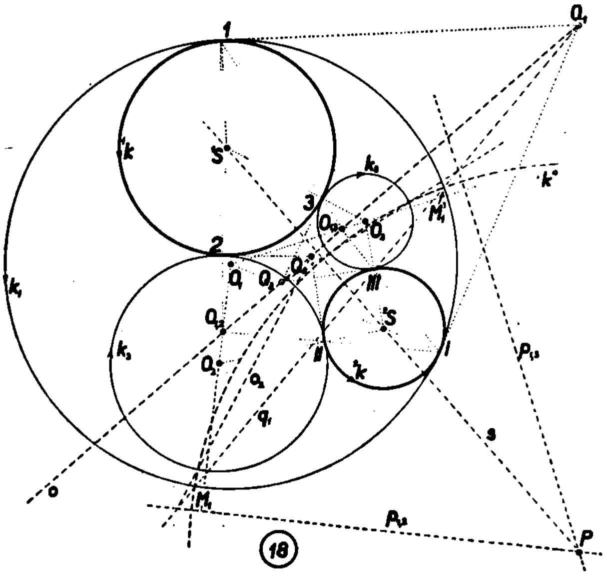


D. Řešení Gaultierovo. Z Gergonnova řešení ú. A. lze odvoditi jinou konstrukci, kterou podal francouzský geometr Gaultier.[9]) Víme, že v obr. 9 body P_1, *1*, *I*, P leží na přímce; proto poláry těchto bodů vzhledem ke kružnici k_1 se protínají v jediném bodě. Polára bodu P_1 je osa podobnosti o, poláry bodů *1* a *I* jsou tečny k_1 v těchto bodech a společným průsečíkem těchto tří polár, t. j. bodem Q_1 (v obr. 9 není sestrojen), jde i polára potenčního středu P vzhledem ke kružnici k_1. Řešení ú. A. bude pak pro dané kružnice $k_i(O_i)$, $i = 1, 2, 3$, takovéto (obr. 18):

Sestrojíme osu podobnosti o daných kružnic libovolně orientovaných a jejich střed potenční P. Potom určíme na o bod Q_1 jako průsečík její s polárou q_1 potenčního středu P

[9]) V Journal de l'école polytechnique, **16**, **1816**.

vzhledem ke kružnici k_1; tečny vedené z bodu Q_1 ke k_1 určí na tomto cyklu dotykové body *1, I* s dvěma výslednými cykly ${}^1k$ a ${}^2k$. Podobně by se daly sestrojiti i dotykové body *2, II*, resp. *3, III* cyklů ${}^1k$, ${}^2k$ s cyklem k_2, resp. k_3. Stačí však použít středů podobnosti O_{12}, resp. O_{13} a sestrojiti body *2*, resp. *3* a *II*, resp. *III*, jako body inversní v homothetických



vztazích dvojic k_1, k_2 a k_1, k_3 způsobem již známým (viz pozn. ke konstr. a) na str. 26), dokonce i při nepřístupných středech podobnosti.

Je-li mocnost bodu P vzhledem k daným kružnicím kladná (jako v našem obrazci), pak délka reálné tečny $\overline{PM_1} = \overline{PM'_1}$ vedené z P ke k_1 určuje poloměr kružnice k^o, která protíná dané kružnice orthogonálně, čili t. zv. kružnice orthotomické. Společné sečny její s kružnicemi danými jsou hned všemi třemi polárami q_i potenčního středu P vzhledem ke kružnicím k_i, které opět vedou k dřívějším bodům Q_i.

Z téhož obrazce poznáváme dále, že mocnost bodu Q_1 ke kružnicím k^o, ${}^1k$ a ${}^2k$ jest stejná a rovna mocnosti Q_1 ke k_1, neboť

$$\overline{Q_1M_1} \, . \, \overline{Q_1M'_1} = \overline{Q_1I}^2 = \overline{Q_1I}^2.$$

Proto bod Q_1 leží na chordále dvojic k^o, ${}^1k$ i k^o, ${}^2k$; totéž platí o bodu Q_2 a Q_3. Jest tedy osa podobnosti o společnou chordálou těchto tří kružnic, což znamená, že kružnice orthotomická náleží svazku kružnic, určenému kružnicemi dotykovými a má s nimi společné dva body X, Y na ose podobnosti o.

Postup konstrukce, kterou řešíme ú. A., je-li kružnice orthotomická reálná, můžeme vyložiti také takto:

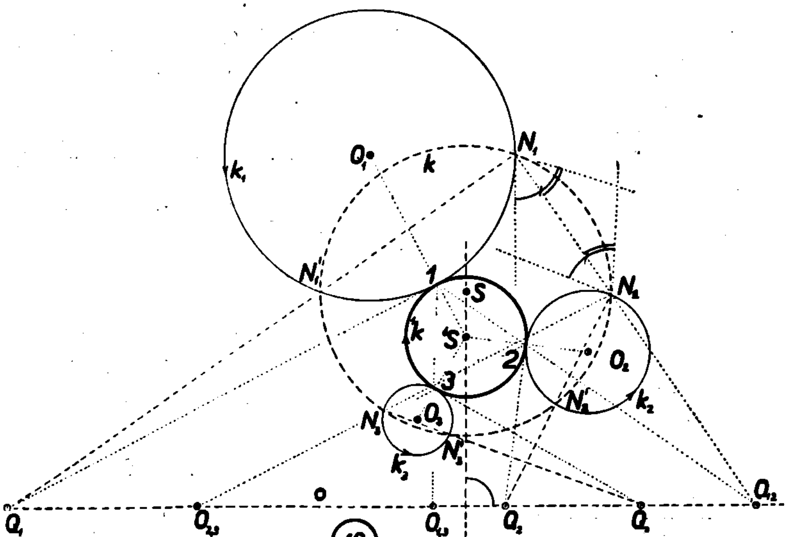
Sestrojíme průsečíky X, Y osy podobnosti daných cyklů s kružnicí orthotomickou a pak určíme kružnice, které se dotýkají kterékoliv kružnice dané a procházejí body X, Y, což jsou již výsledné kružnice dotykové ${}^1k$, ${}^2k$ úlohy původní. Jsou-li body X, Y reálné, řešíme tedy známou úlohu (kBB); kružnice k^o je zde pomocnou kružnicí svazku (X, Y). Jsou-li body X, Y imaginární, můžeme také konstrukci tímto postupem důsledně vyložiti (srovn. (4Bb), str. 58).

E. Řešení Fouchéovo. Obecnější konstrukce, jak dospěti k bodům Q_i předešlého odstavce a tím k společným tečnám výsledných kružnic s kružnicemi danými, pochází od francouzského geometra Fouché.[10])

Rozbor: Dotykové body cyklu ${}^1k$, resp. ${}^2k$ s danými cykly k_i (obr. 19), t. j. body *1*, *2*, *3* jsou, jak víme, v dvojicích inversně sdružené podle středu podobnosti příslušné dvojice daných cyklů. Zvolíme-li nyní na k_1 libovolný bod N_1 a sestrojíme-li k němu bod N_2 na k_2 inversní podle středu podobnosti O_{12} a na k_3 dále bod N_3 inversní k bodu N_2 podle

[10]) V Nouvelles Annales de mathématiques, 1892.

středu podobnosti O_{23} a vedeme-li body N_i kružnici $k(S)$, jest mocnost bodu O_{12} (dle věty (Ad) na str. 22) při proměnnem bodu N_1 ke všem kružnicím k stále táž a rovněž mocnost bodu O_{23}. Kružnice k takto určené tvoří tedy svazek, kterému náleží i dotykové cykly ${}^1k$ a ${}^2k$ jako zvláštní případy a podle předešléhe odstavce i kružnice orthotomická; osa o



19

jest jejich společnou chordálou. Společné sečny jakožto chordály kružnic k tohoto svazku s danou kružnicí k_1 protínají tedy osu o v jediném bodě Q_1, kterým jde i společná tečna cyklu ${}^1k$, resp. ${}^2k$ s cyklem k_1 v bodě *1*, resp. *I*. Stejně dospějeme k bodu Q_2 a Q_3, jestliže vezmeme kružnice k_2, resp. k_3, proťaté svazkem kružnic k.

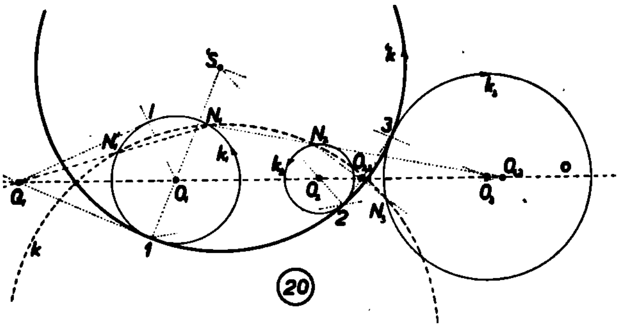
Konstrukce Fouchéova je tedy takováto: K daným třem kružnicím (orientovaným celkem čtyřikrát různě) sestrojíme osu podobnosti o a libovolnou kružnici k, jak bylo vyloženo. Společná sečna kružnice k na př. s k_1 protne osu o v bodě Q_1. Z něho vedené tečny ke k_1 určují již na k_1 dotykové body *1* a *I* dvou hledaných cyklů. Dokončení konstrukce je pak již známé.

D ů k a z plyne z rozboru, neboť myslíme-li si na př. kružnici ^1k, pak $Q_1 1$ jest chordálou dvojice ^1k a k_1 a při tom tečnou cyklu k_1, což znamená, že se cykly ^1k a k_1 v bodě *1* dotýkají; ^1k jde však body inversními *2* a *3*, a dotýká se proto i v nich cyklů k_2, resp. k_3.

P o z n á m k a. Tečny cyklů k_1 a k_2 na obr. 19 sestrojené v bodech inversních N_1, resp. N_2 svírají podle věty (Ab) na str. 21 se spojnicí N_1N_2 stejné úhly (jednou zatržené). Ale i tečny kružnice k v týchž bodech svírají s N_1N_2 úhly stejné (dvakrát zatržené); proto i úhly tečen k_1 a k v bodě N_1 a tečen k_2 a k v bodě N_2 jsou stejné. Protíná tedy kružnice k cykly k_1 a k_2 ve stejných úhlech čili isogonálně. Stejně tak i úhly kružnic k, k_1 a k, k_3 jsou stejné. Tedy: K r u ž n i c e k t v o ř í s v a z e k k r u ž n i c i s o g o n á l n ě p r o t í n a j í c í c h d a n é t ř i c y k l y, s v a z e k t. z v. k r u ž n i c i s o t o m i c k ý c h, se společnou chordálou v ose podobnosti daných cyklů. Kružnice orthotomická jest zvláštním případem kružnice isotomické pro úhel pravý a cykly dotykové pro úhel nulový.

Pro dané tři kružnice a jejich čtyři osy podobnosti dostaneme celkem č t y ř i t a k o v é s v a z k y k r u ž n i c i s o t o m i c k ý c h. Snadno lze dokázati i opak, že každá kružnice protínající dané tři kružnice isogonálně, protíná je v bodech, které jsou v dvojicích inversní podle příslušného středu podobnosti, a že náleží tedy některému tomuto svazku. Kružnice orthotomická je všem čtyřem svazkům společná a může být také imaginární. Středné těchto svazků procházejí středem kružnice orthotomické, t. j. potenčním středem daných kružnic, a jsou kolmé na osy podobnosti; každá obsahuje dva středy kružnic dotykových, výsledných pro ú. A., jež mohou být také imaginární.

a) Řešení Fouchéovo poskytuje výsledek i v případě, že dané kružnice mají středy na přímce, kdy řešení Gergonnovo selhává; tento případ jest proveden v obr. 20 pro kružnice k_i, určitě orientované. Osa podobnosti o splývá zde ovšem s jejich střednou, ale bodů N_i, určujících kružnici isotomickou k, lze použít stejně jako při obecné poloze daných kružnic. Z obou výsledných cyklů jest vyrýsován v obrazci jen cyklus ${}^1k$, který se dotýká daných cyklů v bodech *1*, *2*, *3*; cyklus ${}^2k$ by byl souměrný s ${}^1k$ podle středné. Použití bodu Q_1 není už třeba vykládati ani zde, ani v případech, které dále řešíme.



20

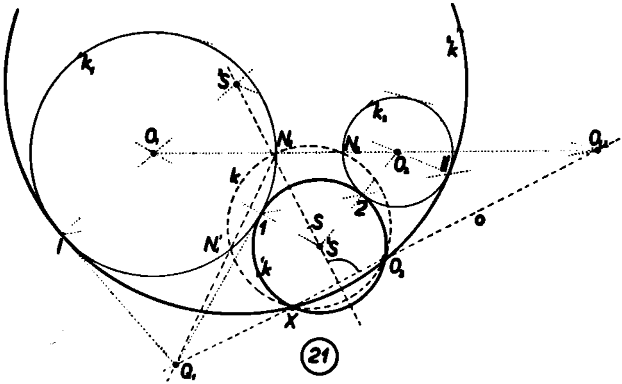
b) Je zajímavé, že pro zvláštní případy ú. A., a to (*kkB*), (*kpB*) a také (*kBB*) dostaneme z řešení Fouchéova konstrukci, která splývá s konstrukcí obvykle užívanou.

α) Na obr. 21 je rozřešen případ (*kkB*), když jsme obě dané kružnice orientovali kladně. Bod N_1 na k_1 volíme výhodně na středné O_1O_2, takže bod inversní N_2 na k_2 leží též na středné. Bod N_3 splývá ovšem s daným bodem O_3; tím je pomocná kružnice isotomická k snadno určena. Na ose podobnosti $o \equiv O_{12}O_3$, jakožto chordále výsledných cyklů, dostaneme ještě jeden reálný bod X těchto cyklů. Pro bod X platí úměra:

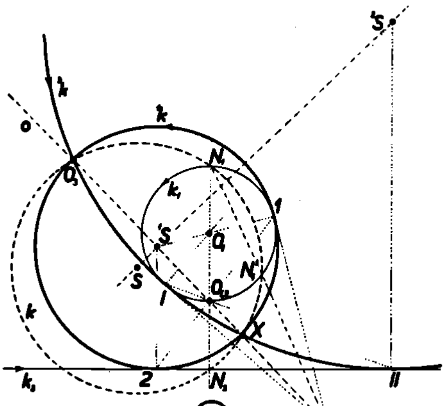
$$\overline{O_{12}N_1} \cdot \overline{O_{12}N_2} = \overline{O_{12}O_3} \cdot \overline{O_{12}X},$$

jejíž obě strany vyjadřují mocnost bodu O_{12} ke kružnici k.

Použitím této úměry se bod X také při obvyklém řešení tohoto případu ú. A. určuje, a to sestrojením čtvrté úměrné úsečky $O_{12}X$.



(21)



(22)

β) Podobně v úloze (kpB) na obr. 22, kde při zvolené orientaci dané kružnice k_1 a dané přímky k_2 bylo použito osy podobnosti $o \equiv O_{12}O_3$, byla sestrojena vhodně pomocná kružnice isotomická k bodem N_1, který byl zvolen v druhém krajním bodě průměru kružnice k_1 kolmého na k_2 (první krajní bod tohoto průměru je střed podobnosti O_{12}). Bod inversní N_2 je tedy patou tohoto prodlouženého průměru na přímce k_2. Kružnice k jde opět body N_1, N_2, O_3. Protne osu podobnosti o opět nutně v dalším reálném bodě X, který náleží oběma výsledným cyklům. Platí pak v kružnici k pro mocnost bodu O_{12} opět úměra sub α) napsaná, z níž se při obvyklé konstrukci stanoví opět bod X, jako další bod výsledné kružnice. —

4.

ŘEŠENÍ UŽITÍM GEOMETRICKÝCH MÍST.

Středy kružnic, vyhovující dvěma podmínkám ú. A., vyplňují, jak známo, obecně dvě kuželosečky. K obdobným g. m. středů kružnic dojdeme i tehdy, nahradíme-li podmínku dotyku jinými jednoduchými podmínkami, jaké jsme vytkli v kap. 2. Příslušná g. m. ve všech případech jsou, jak ukážeme, opět buď kuželosečky, nebo kružnice anebo přímky.

Pořadí g. m., jež odvodíme pro spojení vždy dvou podmínek, zvolíme takovéto:

1. kk	4. $k^o k^d$	7. kr
2. $k^o k^o$	5. kk^o	8. $k^o r$
3. $k^d k^d$	6. kk^d	9. $k^d r$.

Třebaže půjde potom při řešení úloh užitím těchto g. m. obecně o určení průsečíků dvou kuželoseček, ukáže se, že jsou to jen dva platné průsečíky použité dvojice kuželoseček, které hledáme; a ty možno nalézti „kvadraticky“, t. j. užitím kružnic a přímek.

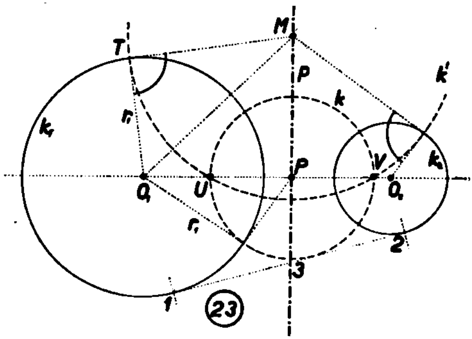
A. Geometrická místa. a) Případ g. m. pro (kk) je znám podrobně ze školních výkladů,[11]) takže jen pro úplnost je uvedeme:

G. m. středů kružnic, které se dvou daných kružnic dotýkají, jsou dvě kuželosečky konfokální, jež mají ohniska ve středech daných kružnic a jejichž hlavní osy mají délku rovnu rozdílu, resp. součtu poloměrů daných kružnic. K tomu poznamenáme, že ke každé kuželosečce zvláště by se došlo při určité orientaci daných kružnic v cykly; rozdíl poloměrů, který pak udává délku hlavních os

[11]) Klíma-Ingriš: Rýsování III. a IV., str. 81 a n. JČMF.

v obou případech, přejde v součet abs. hodnot, jsou-li cykly opačných znamének, t. j. při nesouhlasném dotyku kružnic s kružnicemi danými.

b) Pro známý případ ($k^o k^o$): G. m. **středů kružnic, které protínají dvě dané kružnice orthogonálně, jest chordála obou kružnic.** Její konstrukce i vlastnosti jsou známy, připojíme jen ještě větu:



Všecky kružnice protínající dané dvě kružnice orthogonálně tvoří svazek se základními body na středné obou kružnic, která je jejich společnou chordálou.

Důkaz: Kružnice k (obr. 23), opsaná ze středu P, který je průsečíkem chordály p daných kružnic $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$ s jejich střednou, a orthogonálně protínající dané kružnice (leží mimo sebe), protíná střednou v bodech U a V; pak ovšem $\overline{PU} = \overline{PV}$ jest poloměr kružnice k a platí:

$$\overline{PU}^2 = \overline{O_1P}^2 - r_1^2.$$

Pro jinou kružnici k', protínající orthogonálně k_1 i k_2, o středu M na p můžeme psáti:

$$\overline{MO_1}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{O_1P}^2 = \overline{MT}^2 + r_1^2,$$

kdež T je dotykový bod na k_1 tečny vedené z M. Platí tedy:

$$\overline{MT}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{O_1P}^2 - r_1^2.$$

Protíná-li k' střednou v bodě U', jest ovšem $\overline{MU'} = \overline{MT}$. Proto

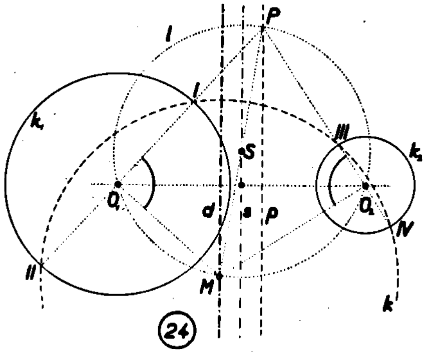
$$\overline{PU'}^2 = \overline{MU'}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{MT}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{O_1P}^2 - r_1^2 = \overline{PU}^2,$$

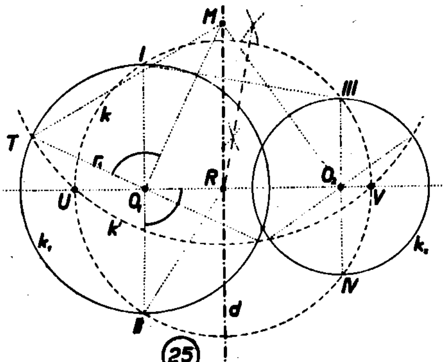
což znamená, že $U' \equiv U$.

Body U, V mohou být také imaginární, a to když $\overline{PU}^2 < 0$, čili když $\overline{O_1P} < r_1$, což nastane, když se naopak dané kružnice protínají reálně. Z bodů na společné tětivě nelze pak opsati reálné kružnice k protínající dané kružnice orthogonálně, neboť mocnost $\mathbf{M}$ takových bodů ke kružnicím daným je záporná a poloměr kružnice k je $\sqrt{\mathbf{M}}$, a tedy imaginární; lze však z týchž bodů opsat vždy kružnici o poloměru $\sqrt{|\mathbf{M}|}$, reálném, která je pak proťata danými kružnicemi diametrálně. —

Máme zde celkem **dva svazky** kružnic, a to: svazek kružnic, protínajících kružnice dané orthogonálně se základními body U, V a svazek kružnic určený kružnicemi danými. Má-li prvý svazek základní body reálné, má druhý svazek základní body imaginární a naopak. Kružnice jednoho svazku protínají orthogonálně kružnice svazku druhého.

c) V případě $(k^d k^d)$ hledáme g. m. středů kružnic, **které dané dvě kružnice** $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$ **protínají diametrálně.** K obecné takové kružnici $k(M)$ dospějeme takto (obr. 24): Zvolíme na chordále p daných kružnic bod P a spojíme jej s O_1 a O_2. Krajními body průměrů I, II na k_1 a III, IV na k_2 a na těchto spojnicích, je určena kružnice k, neboť: $\overline{PI}\,.\,\overline{PII} = \overline{PIII}\,.\,\overline{PIV}$. Její střed M tedy dostaneme na kolmicích v O_1, resp. v O_2 k oněm průměrům vztyčených. Můžeme nyní sestrojiti kružnici l, opsanou tětivovému čtyrúhelníku O_1MO_2P ze středu S nad jejím průměrem MP: Všecky takové kružnice l procházejí danými body O_1 a O_2, tvoří tedy svazek a středy S vyplňují střednou s, osu souměrnosti úsečky O_1O_2. Ježto body P jsou stále na chordále p, body S na přímce s s p rovnoběžné, jest g. m. bodů M **přímka** d, souměrně sdružená s p dle přímky s a tedy také souměrně sdružená s p podle středu úsečky O_1O_2.





Všecky kružnice k **protínající dané dvě kružnice diametrálně tvoří svazek** o základních bodech U, V na středné daných kružnic; body U, V jsou vždycky reálné.

Důkaz: Sestrojme nejprve takovou kružnici k (obr. 25), která má střed R na středné O_1O_2. Půjde krajními body průměrů kružnic k_1 a k_2, kolmých k středné O_1O_2. Bod R tedy dostaneme v průsečíku středné O_1O_2 a osy souměrnosti úsečky na př. $I\,III$. Kružnice k protíná střednou v bodech U a V; úsečky $\overline{RU} = \overline{RV}$ jsou poloměry kružnice k a platí:

$$\overline{RU}^2 = \overline{O_1R}^2 + r_1^2.$$

Jestliže jiná kružnice k', protínající obě dané diametrálně, má střed M a jeden průsečík s k_1 bod T, můžeme psáti:

$$\overline{MO_1}^2 = \overline{MT}^2 - r_1^2 = \overline{MR}^2 + \overline{O_1R}^2$$

nebo

$$\overline{MT}^2 - \overline{MR}^2 = \overline{O_1R}^2 + r_1^2.$$

Je-li jeden průsečík k' se střednou bod U', jest poloměr $\overline{MU'} = \overline{MT}$ a tedy

$$\overline{RU'}^2 = \overline{MU'}^2 - \overline{MR}^2 = \overline{MT}^2 - \overline{MR}^2 = \overline{RU}^2,$$

t. j. body U' a U jsou totožné. Ježto $\overline{RU}^2$ je vždy kladné, jest $\overline{RU}$ vždy reálné a také body U i V vždycky reálné.

d) Máme-li odvoditi g. m. středů kružnic pro případ $(k^o k^d)$, kdy daná kružnice $k_1(O_1)$ je protťata orthogonálně a jiná daná kružnice $k_2(O_2)$ diametrálně, počínejme si podobně jako při známém odvození chordály.[12]) Pro libovolný bod M tohoto g. m., jakožto střed kružnice k, která protíná k_1 orthogonálně (na př. v bodě T_1) a k_2 diametrálně (jeden průsečík je T_2), platí (obr. 26):

$$\overline{MO_1}^2 = \overline{MT_1}^2 + r_1^2,$$
$$\overline{MO_2}^2 = \overline{MT_2}^2 - r_2^2;$$

při tom $\overline{MT_1} = \overline{MT_2}$. Odečtením rovnic dostaneme:

$$\overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Kolmice c spuštěná s M na střednou O_1O_2 protíná ji v bodě R. Platí pak:

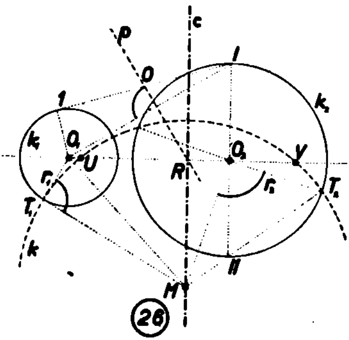
[12]) Viz J. Vojtěch: GV, 39.

$$\overline{RO_1}^2 = \overline{MO_1}^2 - \overline{RM}^2,$$
$$\overline{RO_2}^2 = \overline{MO_2}^2 - \overline{RM}^2.$$

Tedy podobně

$$\overline{RO_1}^2 - \overline{RO_2}^2 = \overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

což značí, že bod R náleží také hledanému g. m. a rovněž i libovolný jiný bod kolmice MR a mimo ni žádný jiný. Tedy: G. m. středů kružnic, které jednu kružnici protínají orthogonálně a druhou kružnici diametrálně, jest přímka kolmá na střednou daných kružnic.

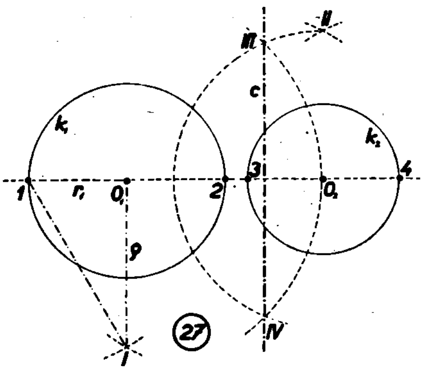


Tyto kružnice tvoří opět svazek se základními body U, V na středné O_1O_2; body U, V jsou i zde vždy reálné. Důkazu není zde již třeba, neboť je obsažen v důkaze sub c).

Konstrukci našeho g. m. možno provésti vhodně pomocí bodu R (obr. 26) na středné O_1O_2; příslušná kružnice musí totiž protnouti k_2 diametrálně v bodech I, II, krajních to bodech průměru jejího, kolmého na O_1O_2. Sestrojíme-li tedy g. m. středů kružnic, které procházejí bodem I a protínají k_1 orthogonálně, t. j. chordálu p bodu I a kružnice k_1, protne již p střednou O_1O_2 v bodě R, jímž jde g. m. hledané, t. j. přímka c kolmá k O_1O_2.

Nebo si myslíme libovolný poloměr ϱ pro obecnou kružnici k, jež má vyhovět žádaným podmínkám, a pak užitím

g. m. této kapitoly (odst. f, β a γ na str. 57) sestrojíme dva body přímky c, souměrně sdružené podle středné O_1O_2. To se může státi i pouhým kružítkem (konstrukce mascheroniovská) takto (obr. 27)[13]: Z krajních bodů *1, 2* průměru kružnice k_1, který leží na středné O_1O_2, opíšeme libovolným poloměrem oblouky, které se protnou v bodě *I*, z bodů *3, 4*, které leží na středné O_1O_2 a na kružnici k_2 pak oblouky poloměrem O_1I; ty se protnou v bodě *II*. Průsečíky pomocných



kružnic sestrojených jednak z O_1 poloměrem *1I*, jednak z O_2 poloměrem O_2II, jsou body *III*, *IV* hledané přímky c. Označíme-li totiž $\overline{O_1I} = \varrho$, pak *1I* určuje vzdálenost středů *III* a *IV* dvou kružnic k od O_1 — ta se totiž rovná $\sqrt{r_1^2+\varrho^2}$. Ježto dále bylo $\overline{3II} = \overline{4II} = \varrho$, je úsečka O_2II rovna vzdálenosti týchž středů *III* a *IV* od O_2.

e) G. m. středů kružnic k vyhovujících podmínkám (kk^o) nebo (kk^d), t. j. dotýkajících se jedné kružnice a protínajících druhou kružnici orthogonálně nebo diametrálně, jest kuželosečka, jejíž hlavní osa

[13]) Viz B. Vlk, Lit. č. IXb, str. 10.

leží na středné daných kružnic a jejíž ohnisko je ve středu kružnice, které se kružnice k dotýkají.

Pro **důkaz** uvedeme nejdříve jednu pomocnou větu.

α) Buďtež nejprve dány dvě kružnice $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$ ležící mimo sebe (obr. 28). Myslíme-li si, že jsme je orientovali na př. obě souhlasně, a jsou-li T_1 a T_2 body dotyku libovolného cyklu $k(S)$ s cykly k_1, resp. k_2, pak podle věty (3Ad) na str. 23 je mocnost jejich středu podobnosti O ke všem kružnicím k stejná. I můžeme psáti:

$$\overline{OT_1} \,.\, \overline{OT_2} = \overline{OA_1} \,.\, \overline{OA_2} = \overline{OR}^2,$$

kdež R je dotykový bod tečny vedené z O ke k a OR poloměr kružnice $k_p(O)$, která protíná všecky kružnice k orthogonálně.

Ale i naopak: Pro každý cyklus k, který se daného cyklu k_1 dotýká v T_1 a který k_p protíná orthogonálně, jest mocnost bodu O ke k rovna $\overline{OR}^2$. Proto druhý bod T_2 paprsku OT_1 na k leží i na k_2; v něm se pak k cyklu k_2 nutně dotýká.

Pro kružnice k_1, k_2 orientované nesouhlasně sestrojíme podobně cyklus $k'(S')$, který se dotýká k_1 a k_2 v bodě T'_1, resp. T'_2. Mocnost středu podobnosti O' cyklů k_1 a k_2 ke kružnicím k' je zde záporná, neboť

$$\overline{O'T'_1} \,.\, \overline{O'T'_2} = \overline{O'A'_1} \,.\, \overline{O'A_2} = -\overline{O'R'}^2.$$

Při tom R' je průsečík cyklu k' s kružnicí k'_p, jež je opsána ze středu O' poloměrem

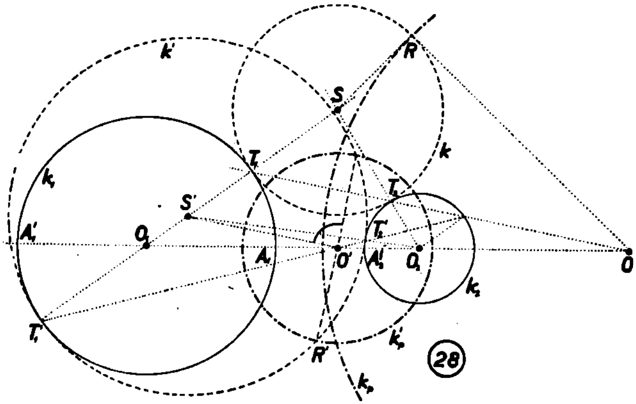
$$\overline{O'R'} = \sqrt{|\overline{O'A'_1} \,.\, \overline{O'A_2}|}$$

a která je proto proťata cykly k' diametrálně.

Kružnice k_p a k'_p se nazývají **potenční kružnice** kružnic k_1 a k_2, a to k_p vnější kružnice potenční a k'_p vnitřní kružnice potenční.

Jestliže se kružnice k_1 a k_2 neprotínají, ale jedna leží uvnitř druhé, je tomu naopak: Vnější potenční kružnice je proťata všemi cykly dotykovými diametrálně, kdežto vnitřní potenční kružnice protíná příslušné dotykové cykly orthogonálně. Obraz i důkaz jsou zcela podobné předcházejícím.

Jestliže se konečně kružnice k_1 a k_2 protínají, pak obě kružnice potenční protínají příslušné dotykové cykly orthogonálně a procházejí společnými body kružnic k_1 a k_2, které jsou zde nulovými kružnicemi dotykovými, což lze odvoditi podobně.

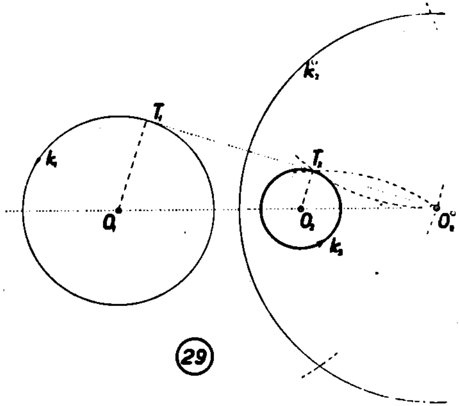


Celkem lze vysloviti tuto (pomocnou) větu: **Každá kružnice, která se dvou daných kružnic dotýká, protíná příslušnou kružnici potenční daných kružnic buď orthogonálně nebo diametrálně.**

β) Jde-li nyní o g. m. v případě (kk^o), můžeme danou kružnici k_2^o považovati za potenční kružnici dané kružnice $k_1(O_1)$ a jisté kružnice k_2, kterou lze snadno sestrojiti ze vztahů, odvozených sub α). Kružnice k, které se mají dotýkati k_1 a protínati k_2^o orthogonálně, budou se jako cykly dotýkati cyklů k_1 a k_2. Poněvadž pak g. m. středů cyklů, které se dotýkají cyklů k_1 a k_2 jest kuželosečka uvedená v odst. a) této kapitoly, je tato kuželosečka c_{12} i hledaným

g. m. pro podmínky (kk^o): ohnisko její je tedy skutečně v bodě O_1 a hlavní osa leží na středné daných kružnic k_1 a k_2^o.

V obr. 29, kde je dán střed O_2^o kružnice k_2^o vně k_1, jest sestrojen pomocný cyklus k_2 z dané kružnice k_1, libovolně orientované v cyklus, takto:



29

Označíme-li poloměr kružnice k_2^o písmenem r, délku tečny $\overline{O_2^oT_1} = t_1$ a délku tečny, vedené z O_2^o k hledanému cyklu k_2, $\overline{O_2^oT_2} = t_2$, platí:

$$t_1 \,.\, t_2 = r^2,$$

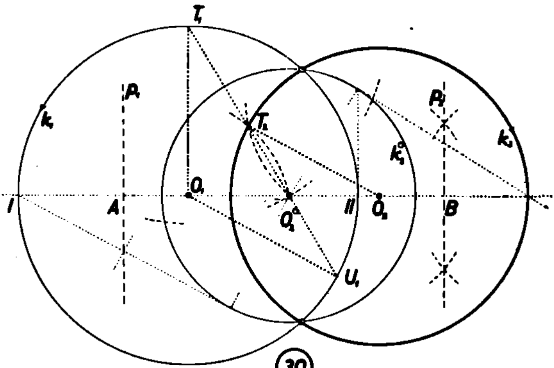
z toho

$$t_2 = \frac{r^2}{t_1}.$$

Možno tedy t_2 sestrojiti jako čtvrtou úměrnou úseček r, r, t_1 i její znaménko a jednoznačně určiti bod T_2 (výhodně konstrukcí odvozenou v (1Ca) na str. 12. Střed O_2 cyklu k_2, homothetického s k_1 podle středu O_2^o, určíme rovnoběžkou T_2O_2 s T_1O_1.

Pak lze již určiti kuželosečku c_{12}. V našem případě je to hyperbola s ohnisky v bodech O_1 a O_2; jejími asymptotami jsou osy souměrnosti úsečky T_1T_2 a obdobné úsečky na druhé společné tečně cyklů k_1 a k_2.

Bylo by možné hned také určiti vrcholy osy hlavní této kuželosečky bez sestrojování cyklu k_2. Tak je provedena konstrukce na obr. 30, kde střed $O_2{}^o$ kružnice $k_2{}^o$ je dán uvnitř dané kružnice k_1. Poněvadž nelze vésti z bodu $O_2{}^o$ tečny ke k_1, jest kuželosečka c_{12} elipsou. Vrcholy její A, B, ležící na středné $O_1O_2{}^o$ dostaneme jako středy kružnic, které



30

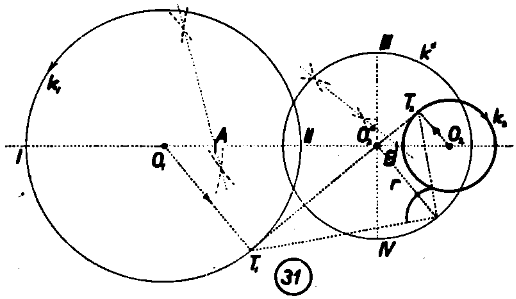
se dotýkají k_1 v bodě I, resp. II a protínají orthogonálně $k_2{}^o$. Použijeme chordály p_1 a p_2 bodu I a II a kružnice $k_2{}^o$. Tyto chordály jsou již vrcholové tečny elipsy c_{12} v bodech A, resp. B. Bod O_1 je ohniskem c_{12}, čímž elipsa je určena bez rýsování cyklu k_2. Ale k tomuto cyklu bylo by možno dospět zde tak, že bychom zvolili libovolný bod T_1 na k_1 (v obr. provedeno tečkovaně) a sestrojiti příslušný bod T_2 cyklu k_2 z rovnice:

$$\overline{O_2{}^oT_1} \,.\, \overline{O_2{}^oT_2} = r^2.$$

Bod T_2 by byl inversní k T_1 a cyklus k_2, podle smyslu homothetických poloměrů $O_1U_1 \parallel O_2T_2$, opačného znaménka než k_1.

Protínají-li se dané kružnice k_1 a $k_2{}^o$, jako v obrazci 30, pak kuželosečka c_{12} prochází i jejich průsečíky; kdyby se k_1 a $k_2{}^o$ dotýkaly, byl by dotykový bod k_1 a $k^o{}_2$ jedním vrcholem kuželosečky c_{12}.

γ) Jde-li dále o g. m. v případě (kk^d), je důkaz obdobný: kružnice (cykly), které se dotýkají dané kružnice k_1, již jsme orientovali v cyklus, a protínají diametrálně druhou danou kružnici $k_2{}^d$, dotýkají se současně dalšího cyklu k_2, takže hledané g. m. je opět kuželosečka odst. a).



Určení této kuželosečky c_{12} provedeme takto (obr. 31): Vrcholy její A, B jsou středy kružnic, jež se dotýkají k_1 v bodě I, resp. II a diametrálně protínají $k_2{}^d$ v bodě III a IV na průměru kružnice $k_2{}^d$ kolmém na střednou $O_1O_2{}^d$; určí se na této středné osami souměrnosti bodů I, III, resp. II, III. Známe opět její ohnisko O_1, čímž je dostatečně určena. Mimo to, jsou-li tečny z bodu $O_2{}^d$ ke kružnici k_1 reálné, jako v našem obrazci, jsou to také dvě kružnice, vyhovující podmínkám, o poloměrech nekonečně velikých, a proto asymptoty hyperboly c_{12} jsou k těmto tečnám kolmé. (V obr. arci je určen obdobně jako dříve sub β) i příslušný cyklus k_2.)

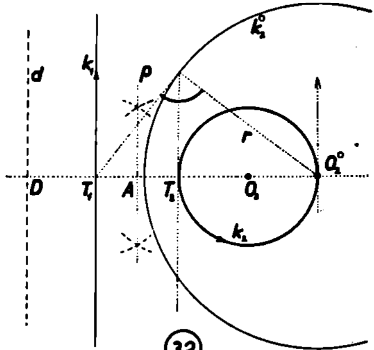
δ) Zvláštního výkladu zasluhuje případ, když kružnice k_1 je přímkou. Půjde o g. m. při podmínkách, které označíme (pk^o) a (pk^d). Důkaz provedený sub β) a γ) platí i zde, ovšem se zřetelem k parabolickému g. m. odst. a). Dostáváme v obou případech paraboly, jakožto kuželosečky c_{12}.

Určení parabol c_{12} provedeme takto:

V obr. 32 pro případ (pk^o) jest O_2^o středem podobnosti přímky (orientované) k_1 a cyklu k_2, který tímto bodem proto prochází (viz 3C a β, str. 31). Druhý bod T_2, k bodu O_2^o diametrálně protilehlý, na kolmici ke k_1 sestrojíme ze vztahu:

$$\overline{O_2^o T_2} \, . \, \overline{O_2^o T_1} = r^2,$$

kdež r je poloměr kružnice k_2^o a bod T_1 pata oné kolmice



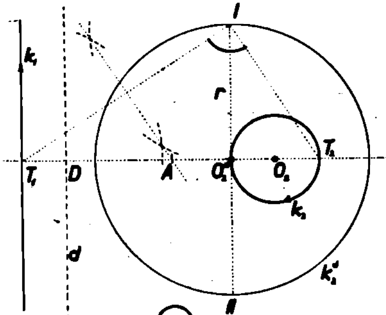
32

na k_1; třeba jako sdružený pól k T_1 vzhledem ke kružnici k_2^o na poláře bodu T_1. Střed O_2 průměru $O_2^o T_2$ pomocného cyklu k_2 je ohniskem paraboly c_{12} a d jest její přímka řídicí (učinili jsme $T_1 D = O_2 T_2$); z toho vyplývá, že parametr paraboly se rovná vzdálenosti středu dané kružnice k_2^d od dané přímky k_1, t. j. $\overline{O_2 D} = \overline{O_2^o T_1}$. Určení paraboly c_{12} je pak toto: Sestrojíme její vrchol A jako střed kružnice, která se dotýká k_1 v bodě T_1 a protíná orthogonálně k_2^o, tedy na chordále p bodu T_1 a kružnice k_2^o a ovšem na kolmici $O_2^o T_1$ ke k_1, jakožto ose paraboly c_{12}. Od bodu A naneseme pak na obě strany polovinu parametru, který je roven $O_2^o T_1$, čímž dostaneme ohnisko O_2 i bod D přímky řídicí d, zřejmě jednoznačně.

V případě (pk^d) je bod T_2 určen vztahem

$$\overline{O_2^d T_1} \,.\, \overline{O_2^d T_2} = -r^2,$$

kde opět r je poloměr dané kružnice k_2^d a bod T_1 pata kolmice vedené středem O_2^d kružnice k_2^d na danou přímku k_1 (v obr. 33 orientovanou). Střed O_2 úsečky $O_2^d T_2$ je ohniskem paraboly c_{12}, jakožto střed cyklu k_2, kterého se zase dotýkají všecky cykly, dotýkající se k_1 a protínající diametrálně k_2^d.



33

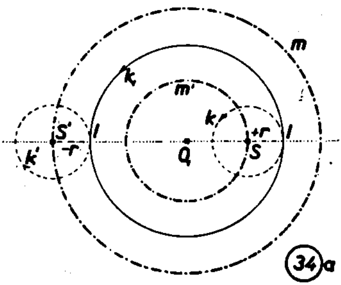
Střed A úsečky T_1T_2 je opět vrcholem paraboly; z obrazu pak vyplývá, že parametr její se zase rovná vzdálenosti O_2^d od k_1, t. j.

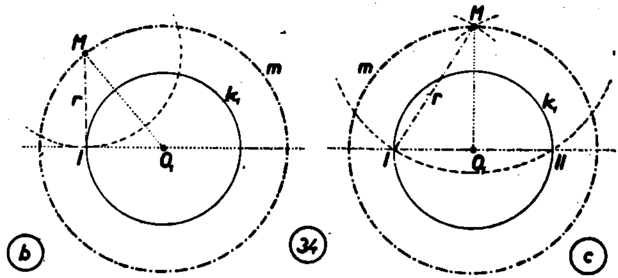
$$\overline{O_2D} = 2 \,.\, \overline{O_2A} = \overline{O_2^d T_1}.$$

Určení paraboly c_{12} je tedy toto: Sestrojíme nejprve její vrchol A jako střed kružnice, která se dotýká k_1 v bodě T_1 a seče diametrálně k_2^d v bodech I a II, tedy v průsečíku osy souměrnosti úsečky T_1I a osy paraboly ležící v přímce $O_2^dT_1$. Pak naneseme polovinu parametru délky $O_2^dT_1$ od A na osu na obě strany, čímž dostaneme ohnisko O_2 paraboly a bod D přímky řídicí d. Ať je poloha daných útvarů jakákoliv, není možná záměna bodů O_2 a D, představíme-li si jen, kde má podle rovnice na začátku použité ležeti bod T_2; to platí i v případě předchozím (pk^o).

f) Další g. m. pro podmínky (kr), ($k^o r$) a ($k^d r$) probereme krátce v jediném odstavci.

α) G. m. středů kružnic k, které se dotýkají kružnice $k_1(O_1, r_1)$ a mají poloměr r, je dvojice kružnic soustředných s kružnicí k_1 o poloměrech $r_1 - r$, kdež r je buď $+$ nebo $-$ podle toho, jakého znaménka jsou cykly k při zvolené orientaci dané kružnice k_1 (obr. 34a).





β) Je-li odvoditi g. m. středů kružnic, které protínají kružnici $k_1(O_1, r_1)$ orthogonálně a mají poloměr r, pak sestrojíme-li jeden takový bod M (obr. 34b), střed kružnice, jež protíná k_1 v libovolném bodě I, jest vzdálenost bodu M od O_1 konstantní, a tedy g. m. je kružnice soustředná s kružnicí k_1 o poloměru

$$\overline{O_1M} = \sqrt{r_1^2 + r^2}.$$

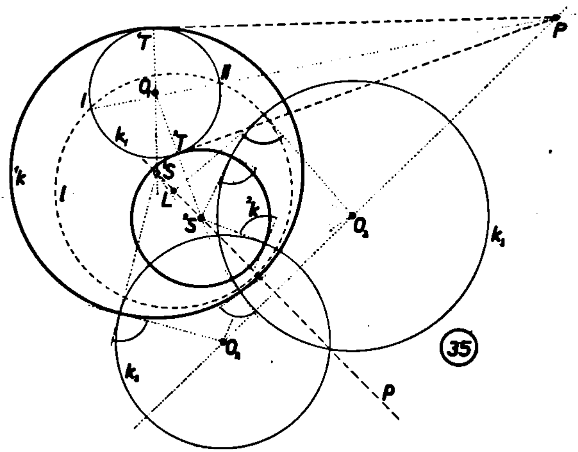
γ) Abychom dostali libovolný bod g. m. pro podmínky $(k^d r)$, sestrojíme rovnoramenný trojúhelník $I\ II\ M$ (obr. 34c), jehož základnou jest průměr dané kružnice $k_1(O_1, r_1)$, proťaté diametrálně, a jehož ramena mají délku r, poloměru daného. Výška jeho $\overline{O_1M} = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ jest konstantní a udává vzdálenost všech bodů g. m. od O_1. Hledaným g. m. je tedy opět kružnice soustředná s kružnicí danou o poloměru O_1M. Aby výsledek byl reálný, je třeba, aby $r > r_1$.

B. Řešení úloh. Přistoupíme nyní k řešení úloh uvedených v kap. 2 sub B ve skupinách α) až δ) na str. 16.

a) Při řešení úloh sub α) jsou použitá g. m. vesměs přímky; provedení je snadné a ponecháme je čtenáři. Úlohy jsou jednoznačné, ale poloměr výsledné kružnice může být v úloze $(k^o k^o k^o)$ také imaginární.

b) Při úloze sub β), označené $(k k^o k^o)$, jest jedním g. m. středů kružnic, a to těch, které protínají dané kružnice $k_2(O_2)$ a $k_3(O_3)$ orthogonálně, jejich chordála. Jestliže se kružnice k_2 a k_3 neprotínají, pak (dle Ab na str. 44) základní body U, V svazku kružnic protínajících k_2 a k_3 orthogonálně na středné O_2O_3 jsou reálné; jimi půjdou i hledané kružnice, které se mají mimo to dotýkati dané kružnice k_1. Úloha je tím převedena na známou zvláštní ú. A. (kBB). Protínají-li se dané kružnice k_2, k_3 (obr. 35), pak (dle Ab) nedostáváme reálných bodů U, V pro hledané kružnice, ale lze postupovati v konstrukci obdobně jako při řešení úlohy (kBB). Sestrojíme libovolnou kružnici pomocnou l protínající orthogonálně k_2 a k_3, která má střed L na chordále p kružnic k_2, k_3 a jejíž poloměr je roven délce tečny, vedené z L ke k_2 nebo k_3, aby protínala kružnici k_1 v bodech I, II. Sestrojíme-li potenční střed P kružnic k_1, l a hledané kružnice k na O_2O_3, jakožto chordále kružnic l a k, a na spojnici $I\ II$, chordále kružnic l a k_1, pak tečny vedené z bodu P ke kružnici k_1 určí na ní již dotykové body ${}^1T$ a ${}^2T$ dvou kružnic výsledných ${}^1k$ a ${}^2k$. Spojnice $O_1{}^1T$, resp. $O_1{}^2T$ protínají p ve středech ${}^1S$ a ${}^2S$ těchto kružnic; úloha je dvojznačná.

Takovým způsobem řeší se i další úlohy skupiny β), při nichž dokonce vždy základní body U, V příslušného svazku kružnic jsou reálné (podle Ac, d).



c) Pro řešení úlohy sub γ), označené (kkk^o), vystačíme také s přímkou jako použitým g. m., když napřed úlohu tu převedeme na některou úlohu ze skupiny β), a to takto:

K dvojici daných kružnic k_1 a k_2, kterých se mají výsledné kružnice dotýkati, když je předem orientujeme v cykly, sestrojíme kružnici potenční k_p, která pak jest cykly, jež se k_1 a k_2 dotýkají, protňata orthogonálně nebo diametrálně. Tím dospějeme k úloze nové, buď ($kk^ok_p{}^o$) nebo ($kk^ok_p{}^d$), jež nahrazuje úlohu původní. To jest však úloha skupiny β). Vzhledem k další možné orientaci kružnic k_1 a k_2, odlišné od orientace prvé, má úloha (kkk^o) obecně čtyři výsledky.

Zcela týmž postupem možno řešiti i druhou úlohu sub γ), t. j. (kkk^d).

Také obecnou ú. A. (kkk) lze řešiti použitím potenčních kružnic a pak postupem provedeným při úlohách sub β):

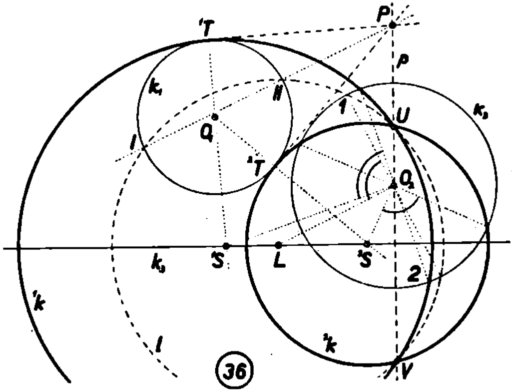
Dané tři kružnice k_i, $i = 1, 2, 3$, orientujeme v cykly. Sestrojíme potenční kružnici ${}^1k_p$ některé dvojice cyklů, na př. k_2, k_3, a pak potenční kružnici ${}^2k_p$ další dvojice k_1, k_3. Výsledné kružnice, řešící ú. A., budou tyto potenční kružnice protínati orthogonálně nebo diametrálně. Připojíme-li pak ke kružnicím ${}^1k_p$, ${}^2k_p$ kteroukoli kružnici danou s podmínkou dotyku, dospějeme již k úloze ze skupiny β). Různé skupiny znamének cyklů k_i, povedou opět obecně k osmi výsledkům ú. A., která je zde převedena na speciální případ (kBB). Užité body U, V leží zřejmě vždy na příslušné ose podobnosti cyklů k_i. (Srovn. s řešením v 3D na str. 37.)

d) Úlohy uvedené sub δ), a to (kk^or), (kk^dr) a (kkr), řešíme vesměs g. m., uvedenými v (Af) této kapitoly na str. 57, jakožto nejjednoduššími; při řešení dalších tří úloh: (k^ok^or), (k^ok^dr), (k^dk^dr), užijeme též přímek jako g. m. odvozených v (Ab, c, d). Jejich konstruktivní provedení je pak zcela jednoduché.

e) Také úlohy uvedené v kapit. 2 sub C a D na str. 16 a n. možno řešiti použitím g. m., která se vyskytla při řešení úloh v předešlých odstavcích, postupem náležitě přizpůsobeným nebo pozměněným, někdy zcela jednoduše.

Provedeme jako příklad jen úlohu (kk^dp^o), t. j. sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice $k_1(O_1)$, protíná danou kružnici $k_2(O_2)$ diametrálně a má střed na dané přímce k_3 (protíná ji orthogonálně) — obr. 36.

Sestrojíme-li z libovolného bodu L přímky k_3 pomocnou kružnici l, která diametrálně seče k_2^*, vhodně tak, aby protínala k_1 v bodech I a II, pak hledaná kružnice k náleží s kružnicí l svazku kružnic, které protínají diametrálně k_2 mající středy na k_3. Kolmice p vedená z O_2 ke k_3 jest společnou chordálou kružnice l a k. Určíme pak potenční střed P trojice kružnic k_1, l, k, t. j. průsečík p a $I\,II$; tečny vedené z P ke k_1 stanoví již na k_1 body dotyku ${}^1T$ a ${}^2T$ dvou hledaných kružnic ${}^1k({}^1S)$ a ${}^2k({}^2S)$.



C. Užití kolineace. K řešení ú. A. i úloh příbuzných lze použíti výhodně též kuželoseček, jakožto g. m. odvozených v odst. A této kapit., a dospěti ke konstrukcím, které přímo navazují na konstruktivní obraty známé ze střední školy.

Jak už na začátku této kapit. bylo řečeno, poskytnou dvojice kuželoseček, užitých k řešení našich kvadratických úloh, jen ve svých dvou průsečících hledané body; půjde tedy o to, nalézti potřebné průsečíky, aniž ony kuželosečky narýsujeme. Tomu je věnována tato stať.

Řešení zde podané bude přechodem od řešení metodou g. m. k řešením, provedeným metodou transformační v kapitole 5.

a) Konfokální kuželosečky, jakožto g. m. středů kružnic, které se dotýkají kružnice $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$, jedné to dvojice, zvolené z daných tří kružnic ú. A. (kkk), označme c_{12} a c'_{12} a pro další dvojici kružnic k_1, k_3 podobně c_{13} a c'_{13}, a to tak, že c_{12} a c_{13} jsou kuželosečky, které dostaneme při souhlasně orientovaných kružnicích k_1, k_2, resp. k_1, k_3, kuželosečky c'_{12}

a c'_{13} naopak při nesouhlasně orientovaných kružnicích dvojic k_1, k_2, resp. k_1, k_3.

Kružnice k_1 je s kuželosečkou c_{12} a též s c_{13} ve vztahu středové kolineace pro společný střed kolineace v bodě O_1, který je společným ohniskem kuželoseček c_{12} a c_{13}.[14]) Tyto kolineární vztahy označíme $O_1(k_1, c_{12})$, resp. $O_1(k_1, c_{13})$. Pak i kuželosečky c_{12} a c_{13} jsou středově kolineárně sdruženy při témž středu kolineace O_1. Tento vztah označíme $O_1(c_{12}, c_{13})$. Osy těchto kolineací, (a to pro každý případ dvě[15])), buďtež o_{12} a p_{12} při dvou kolineacích $O_1(k_1, c_{12})$, o_{13} a p_{13} pak pro dvě kolineace $O_1(k_1, c_{13})$; podobně dvě osy kolineací $O_1(k_1, c'_{12})$ buďtež o'_{12} a p'_{12}, pro kolineace $O_1(k_1, c'_{13})$ pak o'_{13} a p'_{13}. Konečně pro kolineace: $O_1(c_{12}, c_{13})$, $O_1(c'_{12}, c'_{13})$, $O_1(c_{12}, c'_{13})$ a $O_1(c'_{12}, c_{13})$ buďtež příslušné osy označeny s a indexy, které připojíme účelně později. Přímky s budou obsahovati společné průsečíky dvojic kuželoseček c_{12}, c_{13} atd. a budou tedy spojovati také středy hledaných kružnic ú. A. Sestrojíme-li tyto středné s, budeme moci, jak uvidíme, dospěti k středům výsledných kružnic opět některým vhodně voleným vztahem kolineárním.

b) Než přikročíme k skutečnému provedení úlohy, poznamenejme, že přímky s, jakožto osy kolineací na př. $O_1(c_{12}, c_{13})$, musí procházeti průsečíky os kolineací $O_1(k_1, c_{12})$ a $O_1(k_1, c_{13})$, jakožto samodružnými body obou těchto kolineárních vztahů zároveň, tvoříce úhlopříčky rovnoběžníku, určeného čtyřmi stranami na o_{12}, p_{12} a na o_{13}, p_{13}.

α) Hledejme nejprve osy kolineací $O_1(k_1, c_{12})$ a $O_1(k_1, c'_{12})$, a to pro různé druhy kuželoseček c_{12}, resp. c'_{12}!

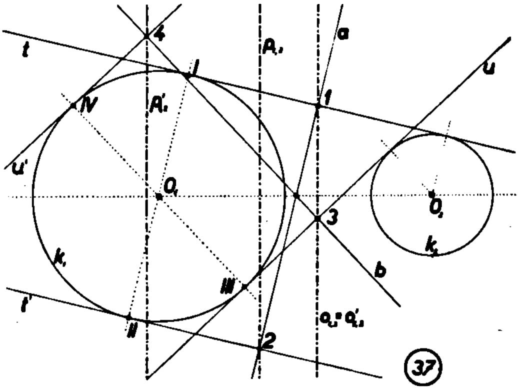
V obr. 37 buďtež kružnice k_1 a k_2 voleny tak, aby tyto kuželosečky byly hyperboly ($\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$).

Sestrojíme-li vnější společnou tečnu t kružnic k_1 a k_2, pak paprsek kolineace, vedený kolmo k t, určí na k_1 body I a II,

[14]) Odůvodnění tohoto vztahu viz na př. v autorově článku „Sestrojení kuželoseček z ohniska a dalších prvků" v Rozhledech, **16** (1936—37), str. 135.

[15]) Viz Lit. č. III, svazek 1, odst. 52.

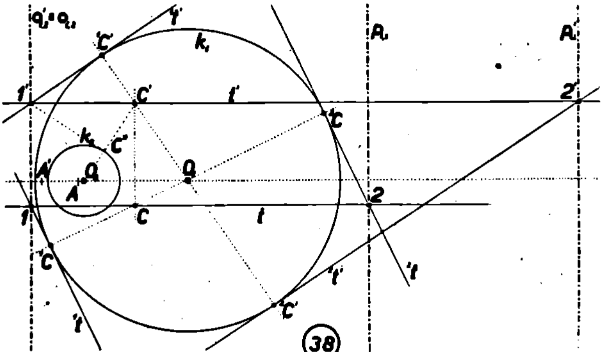
oba kolineárně sdružené k úběžnému bodu hyperboly c_{12} při dvou kolineacích $O_1(k_1, c_{12})$. Asymptota a této hyperboly jde totiž středem úsečky O_1O_2 kolmo k tečně t. Průsečík přímek a, t je tedy samodružný bod *1* na prvé ose kolineace o_{12} a průsečík a s tečnou t' kružnice k_1 v bodě *II*, t. j. bod *2*, je samodružný na druhé ose kolineace p_{12}. Tyto osy jsou ovšem kolmé k O_1O_2 a o_{12} jest chordálou kružnic k_1, k_2.



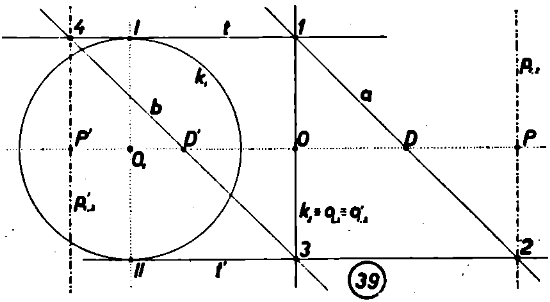
37

Jestliže sestrojíme vnitřní společnou tečnu u kružnic k_1, k_2 a podobně paprsek kolineace kolmý k u s body *III*, *IV* na k_1, pak asymptota b hyperboly c'_{12}, kolmá k u, určí na u, resp. na u' (tečně kružnice k_1 v bodě *IV*) samodružné body *3*, resp. *4* obou os kolineací $O_1(k_1, c'_{12})$, t. j. os $o'_{12} \equiv o_{12}$ a p'_{12}.

β) Na obr. 38 buďtež c_{12} a c'_{12} elipsy ($\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$). Známým způsobem sestrojíme vrchol hlavní osy A', třebas napřed elipsy c'_{12}, a vrchol její osy vedlejší C': paprsek kolineace O_1C' určí na k_1 body ${}^1C'$ a ${}^2C'$, kolineárně sdružené s bodem C' při dvou kolineacích $O_1(k_1, c'_{12})$. Tečna t' elipsy v bodě C' protne tečnu ${}^1t'$ kružnice k_1, sestrojenou v bodě ${}^1C'$, v samodružném bodě *1'*, tečnu ${}^2t'$ podobně v samodružném bodě *2'* — dvou os kolineace, t. j. o'_{12}, resp. p'_{12}, kolmých k O_1O_2. Osa o'_{12} jest opět chordálou daných kružnic, což by se také snadno dokázalo z vlastnosti deltoidu $1'{}^1C'C'C''$. Podobně pro druhou elipsu c_{12} sestrojíme osy kolineací $O_1(k_1, c_{12})$, t. j. p_{12} mimo sestrojenou již chordálu $o_{12} \equiv o'_{12}$.



(38)



(39)

γ) Ještě jednodušeji dostaneme osy kolineace v tom případě, když kuželosečky c_{12}, c'_{12} jsou **paraboly**, t. j. když jedna kružnice, na př. k_2 se stane přímkou (obr. 39). Společnou osou $o_{12} \equiv o'_{12}$ obou kolineací $O_1(k_1, c_{12})$ a $O_1(k_1, c'_{12})$ jest zde ovšem daná přímka k_2. Paprsek kolineace, rovnoběžný s k_2, určí na k_1 body I, resp. II, kolineárně sdružené s bodem paraboly, v němž její tečna a svírá s osou paraboly úhel 45°; tečna a jde průsečíkem osy paraboly s její přímkou řídicí, t. j. bodem D. ($\overline{OD} = r_1$). Tečny t a t' kružnice k_1, sestrojené v bodech I, resp. II, protínají a v bodech samodružných *1* (na k_2) a *2*. Druhá osa kolineace p_{12} jde bodem *2* rovnoběžně s k_2 a jest vzdálena od k_2 o délku $OP = 2r_1$. Podobně je sestrojena v obrazci druhá osa kolineací $O_1(k_1, c'_{12})$, t. j. přímka p'_{12}; opět platí: $-\overline{OP'} = \overline{OP} = 2r_1$.

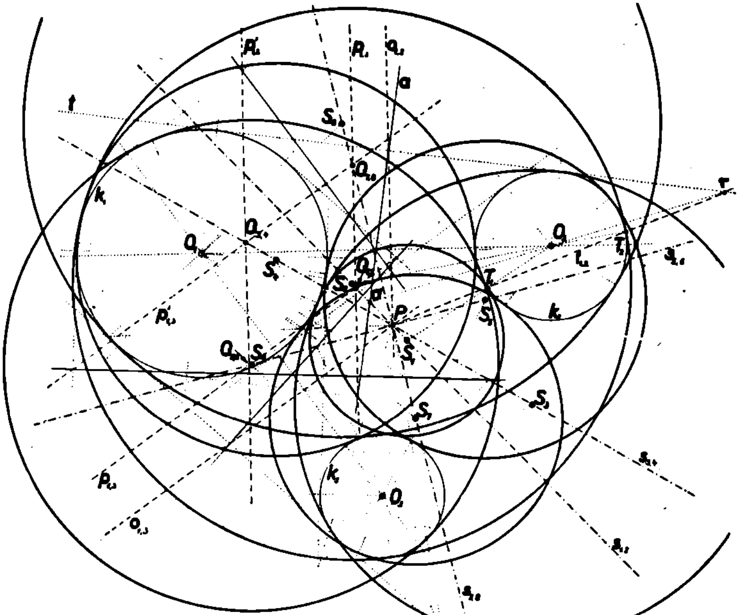
c) Na obr. 40 jest provedena úplně ú. A. pro případ, že dané kružnice k_i, $i = 1, 2, 3$, jsou vesměs mimo sebe, takže všecky kuželosečky c_{12} atd. jsou hyperboly. Podle obr. 37 jsou zde sestrojeny osy kolineací $O_1(k_1, c_{12})$ a $O_1(k_1, c_{13})$, t. j. přímky $o_{12} \parallel p_{12}$ a $o_{13} \parallel p_{13}$. Ty tvoří rovnoběžník, jehož vrchol P, ležící na chordálách o_{12} a o_{13}, je potenčním středem daných kružnic. Úhlopříčky tohoto rovnoběžníku jsou osy kolineací $O_1(c_{12}, c_{13})$. Obsahují po dvou čtyři průsečíky kuželoseček c_{12} a c_{13}. Z nich však jen dva jsou středy kružnic ú. A. Ježto víme, že středná takto určených dvojic výsledných kružnic musí jíti vždy potenčním středem daných kružnic, jest touto střednou ta úhlopříčka onoho rovnoběžníku, která spojuje P s bodem Q_{12}, průsečíkem to přímek p_{12} a p_{13}, t. j. $s_{12} \equiv PQ_{12}$.

Dvojicí kuželoseček c'_{12} a c'_{13} dostaneme podobně střednou $s_{34} \equiv PQ_{34}$ další dvojice hledaných kružnic; a ostatními možnými dvojicemi kuželoseček, t. j. c_{12}, c'_{13} a c'_{12}, c_{13}, dostaneme středné s_{56} a s_{78}, které obsahují vždy středy dvou dalších hledaných kružnic celé skupiny osmi zde reálných výsledků.

Je-li sestrojena středná s_{12}, můžeme dospěti k hledaným středům S_1 a S_2, průsečíkům to s_{12} s kuželosečkou c_{12} nebo c_{13}, opět středovým vztahem kolineárním.

Můžeme totiž použíti kterékoliv dané kružnice (v obr. 40 použito k_2) a stanoviti v jedné kolineaci $O_2(k_2, c_{12})$ k přímce s_{12} přímku kolineárně sdruženou t_{12}, která bude obsahovati body T_1 a T_2, ležící na k_2, sdružené s body S_1 a S_2. Přímka t_{12}

jde samodružným bodem P na ose kolineace o_{12} a určíme ji ještě dalším bodem, třebas τ, sdruženým s bodem σ, který je průsečíkem s_{12} s asymptotou a hyperboly c_{12}; τ je na t a na paprsku kolineace $O_2\sigma$.

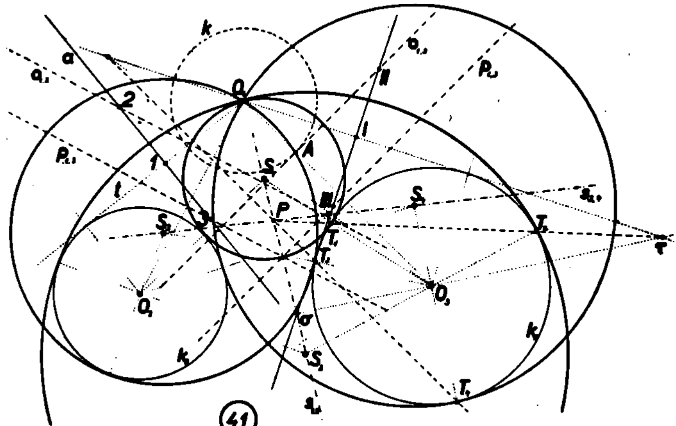


40

Jest patrno, že jsme výhodně dospěli v bodech T_1 a T_2 k dotykovým bodům dvou hledaných kružnic s kružnicí k_2 : t_{12} je spojnice dotykových bodů, jdoucí potenčním středem, známá z klasického Gergonnova řešení naší úlohy.

V našem obrazci jsou sestrojeny také ostatní výsledné středy $S_3 \ldots S_8$ rovněž uvedenými vztahy kolineárními, ale příslušné konstrukce jsou jen vyrýsovány bez popisu.

d) Ještě provedeme ú. A. ve zvláštním případě (*kkB*), t. j. když na př. k_1 se stane bodem O_1. V tomto případě je možno vyrýsovati obě středné dvou se vyskytujících dvojic výsledných kružnic najednou. Každá kuželosečka c_{12} a c_{13} zastupuje zde vždy dvě kuželosečky splývající, a proto



41

všecky čtyři jejich průsečíky jsou středy hledaných kružnic, čili obě osy kolineací $O_1(c_{12}, c_{13})$ povedou k výsledku.

Na obr. 41 jsou obě kuželosečky c_{12} a c_{13} hyperboly. Zvolíme-li pomocnou kružnici $k(O_1, r)$, (v obrazci je na př. $r = \overline{O_1A}$, kdež A je vrchol hyperboly c_{13}), pak k osám kolineací $O_1(k, c_{12})$ a $O_1(k, c_{13})$ dospějeme jednoduše takto: Bodem O_1 vedeme tečnu t ke kružnici k_2, středem její délky, bodem *1*, sestrojíme asymptotu a hyperboly c_{12}, kolmou k t, a od bodu *1* naneseme na a stejnou délku r na obě strany do bodů *2* a *3*; těmito body jdou již osy kolineace o_{12}, resp. p_{12} kolmo k O_1O_2. Důvod je zřejmý z toho, že tečny k, kolineárně sdružené s a při kolineacích $O_1(k, c_{12})$, vytínají na a body samodružné *2*, resp. *3* skutečně tak, že $\overline{12} = \overline{13} = r$. Je patrno také, že kružnici k není potřeba ani rýsovati, a dále, že pro poloměr $r = 0$ obě osy o_{12} a p_{12} by se ztotožnily s chordálou dvojice O_1, k_2. Pro hyperbolu c_{13} při použitém r jedna osa kolineací $O_1(k, c_{13})$, a to o_{13}, jde hned bodem A; druhá osa p_{13} jde bodem *III* na příslušné asymptotě sestrojeným ($\overline{I\ III} = r$) opět kolmo k O_1O_3. Úhlopříčky rovnoběžníku, určeného přímkami o_{12}, p_{12} a o_{13}, p_{13}, jsou již osy kolineací $O_1(c_{12}, c_{13})$, t. j. s_{12} a s_{34}. Protínají se v potenčním středu P daných kružnic k_2, k_3 a bodu O_1, neboť zmíněná volba kružnice k pro $r = 0$ by dala právě průsečík P na s_{12} i s_{34}.

Dotykové body T_1, T_2 a T_3, T_4 hledaných kružnic s kružnicí na př. k_3 i středy $S_1 \dots S_4$ výsledných kružnic sestrojeny byly na obr. 41 opět kolineací $O_3(k_3, c_{13})$, a to postupem, vyloženým na konci odst. c).

e) Těmito kolineacemi mohli bychom také řešiti úlohy uvedené na str. 16 sub B, v kapitole 2, ze skupiny β) a γ), kdybychom hledali průsečíky kuželoseček, jako g. m. odvozených z podmínek (kk^o) a (kk^d), s kuželosečkami o společném ohnisku anebo s přímkami, dalšími to g. m., které by se v příslušných úlohách při zvoleném postupu vyskytly.

D. Užití polárnosti. Potřebné průsečíky těchto kuželoseček můžeme vyhledati také nepřímo způsobem, na který rovněž stačí středoškolské znalosti.[16])

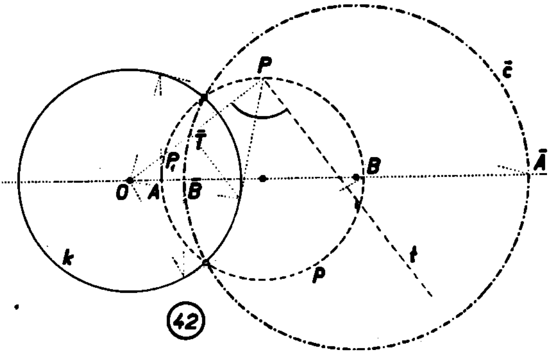
Způsob ten se zakládá na větě, jež pochází od J. Steinera: Křivka s kuželosečkou polárně sdružená vzhledem k řídicí kružnici, jejíž střed leží v ohnisku oné kuželosečky, jest kružnice.

Dříve než ji dokážeme, připomeneme, že polárnou křivku[17]) $\bar{c}$ k dané křivce c vzhledem k určité řídicí kružnici k dostaneme, když k bodům a tečnám křivky c sestrojíme po-

[16]) Uveřejnil B. Vlk: viz Lit. č. IX a).
[17]) O útvarech polárných viz J. Vojtěch: GV, 63.

láry, resp. póly, vzhledem ke kružnici k; tím získáme tečny a body polárné křivky $\bar{c}$. Z vlastnosti sdružených polár plyne, že bodu dotyku T na tečně t křivky c odpovídá polárně tečna $\bar{t}$ s dotykovým bodem $\bar{T}$ křivky $\bar{c}$.

a) Pro důkaz věty shora uvedené zvolme v obr. 42 řídicí kružnici $k(O, r)$, jejíž střed O je v ohnisku kuželosečky c, dané mimo to oběma vrcholy A, B hlavní osy. K tečnám vrcholovým (v obr. nejsou vyrýsovány) sestrojíme póly $\bar{A}$,



resp. $\bar{B}$ vzhledem ke kružnici k; jsou to sdružené póly k A, resp. B vzhledem ke kružnici k na AB. Obecnou tečnu t kuželosečky c určíme jako kolmici ke spojnici ohniska O s libovolným bodem P, zvoleným na kružnici p, jež byla sestrojena nad AB jako průměrem. Pól $\bar{T}$ tečny t určíme jako sdružený pól k bodu P na OP vzhledem ke kružnici k. Pro body P a $\bar{T}$ platí známý vztah:[18])

$$\overline{OP} \,.\, \overline{O\bar{T}} = r^2.$$

Nechť druhý průsečík spojnice OP s kružnicí p jest P_1; pak

[18]) Viz J. Vojtěch: GV, 60.

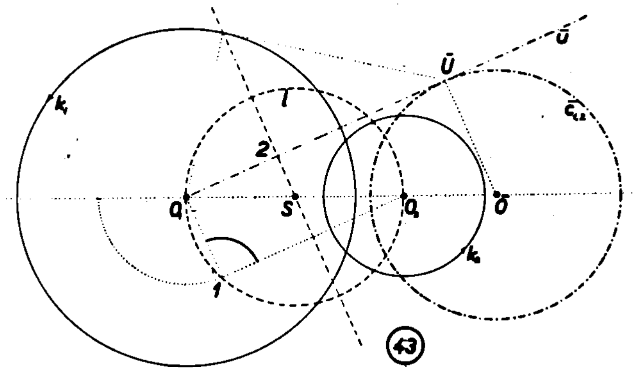
platí o mocnosti M bodu O vzhledem ke kružnici p:

$$\overline{OP} \,.\, \overline{OP_1} = \mathsf{M}.$$

Dělením obou rovnic dostáváme

$$\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OT}} = \frac{\mathsf{M}}{r^2} = \text{konst.}$$

Protože g. m. bodů P pro všecky tečny t kuželosečky c jest



kružnice p, kterou také vyplňují body P_1, jest g. m. bodu $\overline{T}$ skutečně kružnice $\bar{c}$, homothetická s kružnicí p pro střed homothetie v O a poměr homothetie rovný $\dfrac{\mathsf{M}}{r^2}$.

b) Konstrukce polárně sdružené kružnice $\bar{c}$ s kuželosečkou c je zvlášť jednoduchá pro hyperbolu.[19]) Buďtež dány v obr. 43 kružnice $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$ tak, že délka středné $O_1O_2 > r_1 - r_2$. Orientujeme-li obě dané kružnice souhlasně, pak g. m. středů cyklů dotýkajících se k_1 a k_2 jest hyperbola c_{12} (viz Aa na str. 43). Za řídicí kružnici polárného vztahu

[19]) B. Vlk: Lit. č. IX a), str. 17.

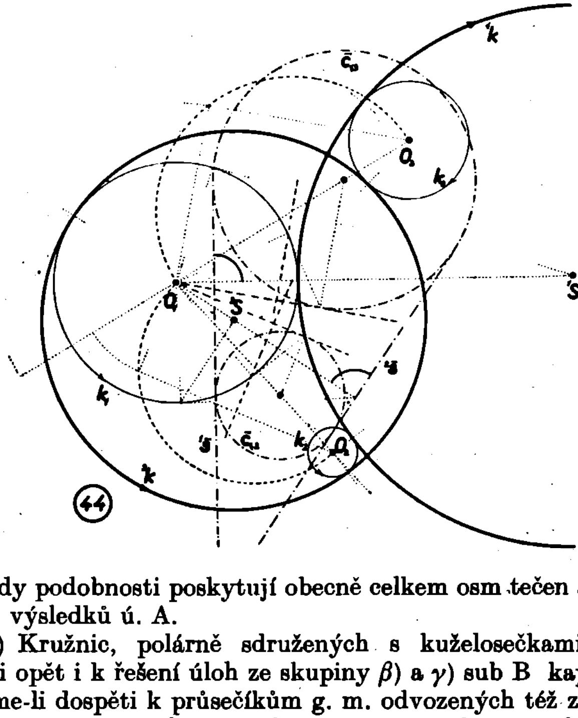
zvolme zde danou kružnici k_1, ježto $r_1 > r_2$. Víme, že asymptoty hyperboly c_{12} jsou kolmé na společné tečny cyklů k_1, k_2; opíšeme-li tedy nad O_1O_2 jako průměrem pomocnou kružnici l a přetneme-li ji z O_1 obloukem o poloměru $r_1 - r_2$ v bodě *1*, jest $O_1 1$ směr jedné asymptoty. Proto průměr $\bar{u}$ kružnice k_1 rovnoběžný s $O_2 1$ je polárou úběžného bodu U hyperboly c_{12} vzhledem ke kružnici řídicí a tedy tečnou kružnice $\bar{c}_{12}$. Sestrojíme dále pól asymptoty $S2$ vzhledem ke k_1. (S je střed úsečky O_1O_2, tedy střed hyperboly, bod *2* průsečík asymptoty s tečnou $\bar{u}$.) Polára bodu *2* vzhledem ke k_1 protíná $\bar{u}$ v pólu $\bar{U}$ oné asymptoty, t. j. v dotykovém bodě kružnice $\bar{c}_{12}$; střednou O_1O_2 pak protíná ve středu $\bar{O}$ této kružnice.

Je-li kuželosečka c_{12} elipsa, pak určíme póly $\bar{A}$, $\bar{B}$ k jejím vrcholovým tečnám, jako sdružené póly k vrcholům A, B na ose hlavní, a tím průměr kružnice $\bar{c}_{12}$ tak jako v obr. 42.

Pro parabolu pak jest bod $\bar{A}$ hned v bodě O_1, jakožto pól přímky úběžné, které se parabola dotýká, a bod $\bar{B}$ jest opět pólem její tečny vrcholové.

c) Při řešení obecné ú. A. postupujeme metodou polárných kružnic $\bar{c}_{12}$ a $\bar{c}_{13}$ tak, že je určíme jako polárně sdružené útvary vzhledem k dané kružnici k_1, jakožto kružnici řídicí, s nevyrýsovanými kuželosečkami c_{12} a c_{13}, kdež c_{12} je g. m. dotykových cyklů pro dvojici cyklů (k_1, k_2) a c_{13} pro dvojici cyklů (k_1, k_3). Pak sestrojíme dvě společné tečny ${}^1\bar{s}$ a ${}^2\bar{s}$ kružnic $\bar{c}_{12}$, $\bar{c}_{13}$, jež svými póly ${}^1S$ a ${}^2S$ poskytují středy výsledných cyklů ${}^1k$ a ${}^2k$. Tak jsou určeny tyto cykly v obr. 44, kdež jsme orientovali dané kružnice k_i ($i = 1, 2, 3$) ve skupinu cyklů ($++-$). Opět čtyři podstatně různé skupiny znamének cyklů k_i poskytnou obecně osm výsledků. Které dvě společné tečny kružnic $\bar{c}_{12}$, $\bar{c}_{13}$ atd. vedou k výsledkům, rozhodlo by se přesně takto: Víme, že středy vždy dvou výsledných cyklů jsou na přímce jdoucí potenčním středem P

daných kružnic; myslíme-li si tedy poláru p bodu P vzhledem k řídicí kružnici, obsahuje tato přímka průsečík společných tečen polárných kružnic, právě těch, které vedou k výsledku. Že prakticky přímku p není třeba rýsovati, leč snad pro kontrolu přesnosti, je zřejmé. Na ní pak leží celkem čtyři středy podobnosti dvojic polárných kružnic; tyto



středy podobnosti poskytují obecně celkem osm tečen a pak osm výsledků ú. A.

d) Kružnic, polárně sdružených s kuželosečkami, lze užíti opět i k řešení úloh ze skupiny β) a γ) sub B kapit. 2, máme-li dospěti k průsečíkům g. m. odvozených též z podmínek (kk^o) a (kk^d) s kuželosečkami o společném ohnisku anebo s přímkami, které se v oněch úlohách vyskytnou jako příslušná g. m. —

5.

METODY TRANSFORMAČNÍ.

Už v předcházející kapitole v odst. C a D hledali jsme průsečíky dvou kuželoseček se společným ohniskem a potom průsečíky přímek a kuželoseček tak, že jsme transformovali kuželosečky v kružnice vhodně volenou kolineací, resp. transformací polární, abychom napřed našli průsečíky přímky s kružnicí, jakožto křivkou kolineární, resp. tečny kružnic, jakožto polárně sdružených s oněmi kuželosečkami; zpětnou transformací jsme pak dostali hledané body.

Jestliže však hned vhodně transformujeme v úlohách dané útvary tak, aby v příslušné úloze útvary transformací odvozené poskytly jako výsledek útvar, k němuž zpětnou transformací dostaneme útvar původně hledaný, a bude-li možno v nové soustavě úlohu snáze řešiti, je jasné, že tento postup bude výhodný k řešení konstruktivních úloh.

Ježto v ú. A. jednáme o kružnicích dotykových, bude možno užít takových transformací, při kterých kružnice přecházejí opět v kružnice, ve zvláštním případě výhodně v přímky, jako kružnice o nekonečně velkém poloměru, anebo v body, jako kružnice o poloměru nulovém; mimo to musí užité transformace být dotykové, t. j. útvary odvozené se musí dotýkati, jestliže se dotýkaly též útvary původní. [Říkáme někdy, že takové útvary (zde kružnice), resp. vlastnosti (zde dotyk) jsou invariantní vzhledem k takové transformaci.]

Těmto podmínkám vyhovuje především transformace homothetická; a také jsme vlastností útvarů podobných, resp. homothetických, hojně již použili, třebas to nebylo způsobem zde vytčeným. Dále to bude transformace zvaná dilatace a pak zvláště důležitá kruhová inverse. Také

t. zv. inverse Laguerrova, méně známá,[1]) rovněž umožňuje řešiti obecnou ú. A. převedením na úlohy jednodušší.

Velký německý matematik F. Klein (*1872), který se hojně zabýval geometrickými transformacemi a jejich významem pro uspořádání geometrie, zařadil ú. A. do t. zv. grupy transformací inversních (spolu s transformacemi homothetickými) a pak do grupy transformací dilatačních.[2])

A. Užití dilatace. Dilataci definujeme jako transformaci, při které se orientované přímky posunují o danou délku ϱ ve směru k nim kolmém v orientované přímky s původními rovnoběžné. Délka ϱ nazývá se velikostí dilatace. Směr kolmý je při tom určen i smyslem, a to takto: Zvolíme-li na orientované přímce a libovolný bod A jakožto počátek polopaprsku téhož smyslu, jaký má přímka a, pak otočením polopaprsku o 90° v kladném smyslu — tedy proti pohybu ruček hodinových — kolem A dostaneme polopaprsek k přímce a kolmý. Ta část roviny, do níž polopaprsek kolmý směřuje, je kladnou, opačná pak zápornou částí, ve které orientovaná přímka dělí rovinu. Body v kladné části roviny mají od a vzdálenosti kladné; je-li tedy velikost dilatace ϱ kladná, posune se přímka a ve směru kolmice do části kladné, kdežto je-li ϱ záporné, posune se opačně.

Je proto výhodné zvláště pro tuto transformaci místo kružnic užíti cyklů, jakožto obálek tečen stejně orientovaných s cyklem ve všech jeho bodech. Cyklus poloměru r přejde dilatací v cyklus soustředný poloměr $r - \varrho$, což je patrno z polohy dilatovaných jeho tečen; nový cyklus je téhož smyslu jako původní podle toho, je-li $r - \varrho$ a r znaménka stejného nebo opačného.

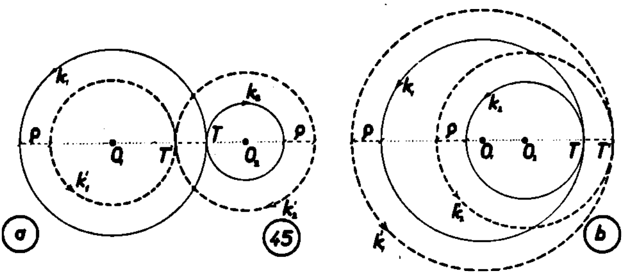
Ve zvláštním případě může tedy přejít dilatací cyklus v bod, nebo naopak bod v cyklus.

---

[1]) Viz Lit. č. VII, str. 323 nebo článek K. Lerla „O Laguerrově paprskové inversi“ v Rozhledech mat.-přírodov., Praha 1932, 11, str. 129.

[2]) Viz Lit. č. IV, str. 264 a 271.

Připomeňme, že této transformace se užívá i při školních výkladech k řešení úlohy o společných tečnách dvou kružnic. Z obr. 45a), b) je hned jasné, že pro cykly $k_1(r_1)$ a $k_2(r_2)$, které se dotýkají, platí obecně, provedeme-li s nimi dilataci velikosti ϱ (délka kladná nebo záporná), že se nové cykly $k'_1(r'_1)$ a $k'_2(r'_2)$ opět dotýkají. Při tom jsou smyslu kladného anebo záporného podle toho, jsou-li poloměry $r'_1 = r_1 - \varrho$, resp. $r'_2 = r_2 - \varrho$ kladné nebo záporné.



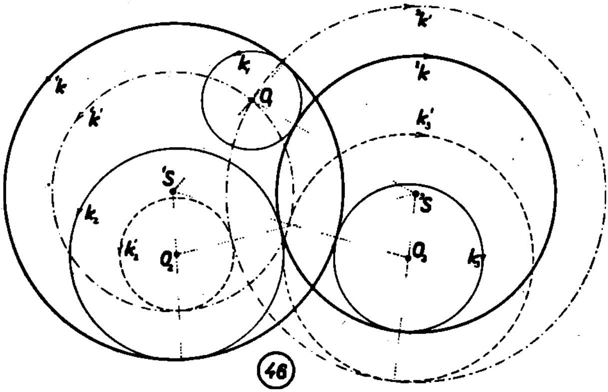
a) Máme-li řešiti obecnou ú. A., není třeba při konstrukci rozlišovati čtyři případy dvojic výsledných kružnic podle způsobu dotyku s kružnicemi danými $k_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, když předem tyto kružnice orientujeme jako v obr. 46 na př. ve skupinu $(++-)$. Předpokládejme, že jsme sestrojili cyklus ${}^1k({}^1S, {}^1r)$, který se dotýká daných tří cyklů k_i. Provedeme-li dilataci velikosti r_1 s celým útvarem, přejde poloměr výsledného cyklu ${}^1k$ v délku ${}^1r - r_1$ a poloměry daných cyklů v délky $r_i - r_1$, takže cyklus k_1 přejde v bod O_1.

V transformované soustavě rozřešíme nyní úlohu zvláštní (Bkk): sestrojíme dva cykly ${}^1k'({}^1S, {}^1r')$ a ${}^2k'({}^2S, {}^2r')$, které procházejí daným bodem O_1 a dotýkají se cyklů k'_2 a k'_3. Stačí ovšem určiti jejich středy ${}^1S$ a ${}^2S$,[3]) které jsou zároveň

[3]) V obr. 46 je podrobná konstrukce, již dříve vyložená, vynechána.

středy cyklů výsledných pro úlohu původní, jež je tím již rozřešena. Poloměry těchto cyklů pak jsou: ${}^1r = {}^1r' + r_1$ a ${}^2r = {}^2r' + r_1$.

Pro čtyři podstatně různé skupiny znamének cyklů k_i dostaneme tedy nejvýše osm reálných řešení ve čtyřech dvojicích podle toho, kolik reálných výsledků poskytují celkem příslušné úlohy (*Bkk*).



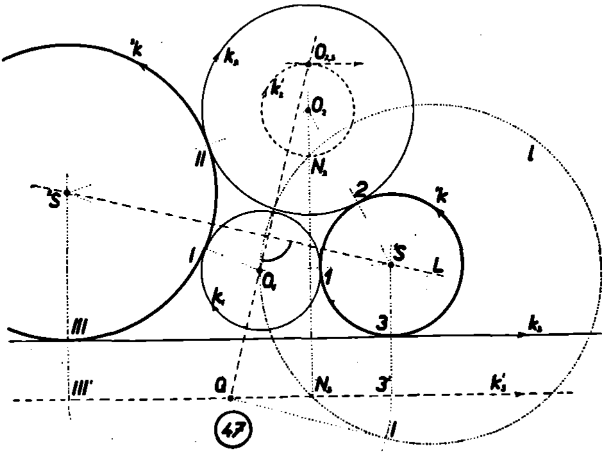
46

b) Dilatace lze použíti ve zvláštních případech ú. A., a to v případě (*kkp*) a (*kpp*); úlohy přejdou v jednoduché, a to (*Bkp*), resp. (*Bpp*).

α) Jsou-li dány dvě kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ a přímka $k_3(r_3 = \infty)$, orientujeme tyto kružnice i přímku a provedeme dilataci o velikosti r_1. Dospějeme mimo bod O_1 obdobně jako v odst. a) k cyklu k'_2 o poloměru $r_2 - r_1$ a k přímce orientované k'_3, rovnoběžné s k_3 ve vzdálenosti r_1 od k_3, jejíž umístění je jednoznačné.

Má-li na obr. 47 při zvolené orientaci přímky k_3 bod O_1 od ní vzdálenost v (kladnou), pak po provedené dilataci bude mít O_1 od přímky k'_3 vzdálenost $v' = v - r_1$. V obraze je r_1 záporné, proto v' je opět kladné: $v' = v + | r_1 |$.

Řešíme nyní jmenovanou úlohu (Bkp) a určíme dva cykly ${}^1k'({}^1S)$ a ${}^2k'({}^2S)$, které procházejí bodem O_1 a dotýkají se cyklu k'_2 i přímky k'_3, třeba způsobem dříve uvedeným na obr. 22. V našem obraze 47 bylo použito pomocné kružnice $l(L)$ jdoucí body O_1, N_2, N_3; další bod této kružnice a také cyklu hledaného ${}^1k'$ na spojnici O_1O_{23} nebyl ani vyrýsován (vychází nepřesně a lze se obejíti bez něho). Stačí z bodu Q (průsečíku to k'_3 a O_1O_{23}) vésti tečnu QI ke kružnici l a její



délku nanésti na k'_3 od bodu Q na obě strany do bodů $3'$ a III', čímž dospějeme k dotykovým bodům cyklů ${}^1k'$ a ${}^2k'$; ty ovšem zase není třeba rýsovati: středy ${}^1S$ a ${}^2S$ výsledných cyklů ${}^1k$ a ${}^2k$ leží tam, kde se kolmice vedené z bodů $3'$ a III' k tečně k_3 protínají s kolmicí spuštěnou s bodu L na spojnici O_1O_{23}. Řešením čtyř příslušných úloh (Bkp) dostaneme opět osm výsledných cyklů, reálných podle toho, jak dopadne řešení jednotlivých úloh (Bkp).

β) Je-li dána kružnice $k_1(O_1, r_1)$ a dvě přímky k_2, k_3, pak tyto útvary opět orientujeme a provedeme dilataci velikosti r_1, čímž cyklus k_1 přejde ve svůj střed O_1 a orientované přímky k_2 a k_3 v přímky s nimi rovnoběžné ve vzdálenostech r_1, a to k'_2, resp. k'_3, jako v odstavci předcházejícím jednoznačně umístěné a orientované. Tím je převedena úloha (kpp) na zmíněnou úlohu (Bpp), tedy zcela jednoduchou, kterou řešíme celkem čtyřikráte pro dané útvary podstatně různě ve čtyři skupiny orientované; dospějeme tak obecně k osmi výsledkům úlohy původní.

Poznámka: Tuto transformační metodu zavedl do geometrie slavný Viète, a jak již v úvodu kapitoly 2 bylo uvedeno, má řešení ú. A. jí provedené i vzpomenutý význam historický.

B. Užití kruhové inverse. Transformace inversní, která je důležitá pro řešení četných úloh planimetrických a jež má veliký počet aplikací dalších, sahajíc hluboko do transformačních metod vyšší geometrie, byla zavedena do geometrie Stubbsem (ve Philosophical Magazine) r. 1843. Název inverse zavedl italský geometr Bellavitis (v Annali delle scienze del regno Lombardo Veneto, sv. VI). Podle základních vlastností byla pak francouzským matematikem Liouvillem (v Journal de mathématiques, sv. XII, 1847) nazvána transformací reciprokými (převrácenými) průvodiči.

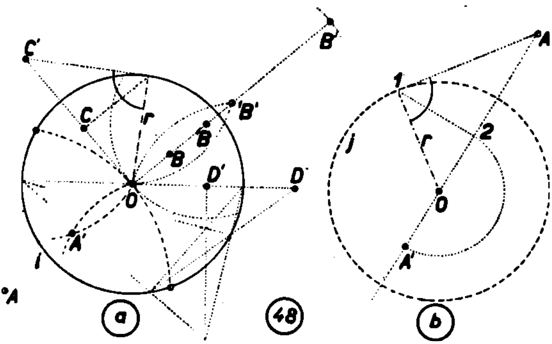
Vlastnosti inverse: Její hlavní a pro náš účel potřebné vlastnosti odvodíme.

a) Je-li dána kružnice i (obr. 48a), t. zv. základní (řídicí) kružnice inverse, jejíž střed O se zove středem inverse a r poloměrem inverse, pak body A, A' jsou navzájem inversní neboli inversně sdružené, platí-li vztah

$$\overline{OA} \,.\, \overline{OA'} = r^2.$$

Hodnota konstantního součinu nazývá se též mocností inverse. Odtud plyne konstrukce bodu A', je-li dán bod A, nebo naopak, protože body inversní jsou sdruženy involutorně, t. j. náleží-li bodu A jako inversní bod A', náleží i bodu A', provedeme-li inversi, opět bod A. V obrazci jest provedena konstrukce bodu A' pouze kružítkem podle

(1Ca), str. 11. Tu doplníme ještě pro případ, když bod B je dán tak, že $\overline{OB} < \frac{r}{2}$, že tedy kružnice se středem v B a poloměru BO kružnici i neprotne. Sestrojíme nejprve bod ${}^1B$ k bodu B homothetický dle středu O v poměru n (celé číslo dostatečně velké, v obrazci $= 2$), což by bylo možno učinit opět na př. jen kružítkem, a to tak, aby $O^1B > \frac{r}{2}$; pak již sestrojíme dřívějším způsobem bod inversní ${}^1B'$. Hledaný bod B' bude n-kráte více vzdálen od O než bod ${}^1B'$.[4])



Z vlastnosti bodů A, A', jakožto sdružených pólů vzhledem ke kružnici i, je dána též výhodná konstrukce bodu A' při jakékoliv poloze daného bodu A užitím pravoúhlého pravítka anebo známá konstrukce na základě vlastností úplného čtyrrohu. Tak určen v témž obrazci bod C', resp. D'.

Body kružnice i jsou samodružnými body při této transformaci; středu inverse O, a to jedinému reálnému toho druhu, náleží jako inversní kterýkoliv bod úběžný.

Kdyby vztah inversních bodů A, A' byl dán rovnicí

$$\overline{OA} \,.\, \overline{OA'} = -r^2,$$

[4]) Jiné konstrukce mascheroniovské útvarů inversních viz Lit. č. XI, str. 47 a n.

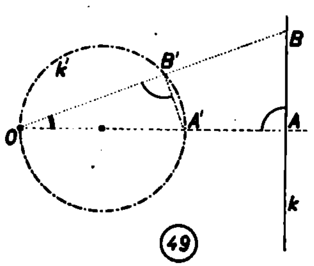
byly by body A a A' na různých stranách od středu inverse a kružnice základní poloměru imaginárního ri. Často se tato imaginární kružnice nahrazuje kružnicí reálnou j (poloměru r), jakožto svým „ideálním“ obrazem (obr. 48b).

b) Pohybuje-li se bod A po přímce k (obr. 49), inversní body A' vytvoří kružnici k', jdoucí středem inverse O. Důkaz: Budiž A' bod inversní k bodu A přímky k na kolmici spuštěné s O na k, k jinému bodu B přímky k inversní bod B'. Platí:

$$\overline{O'A} \,.\, \overline{OA'} = \overline{OB} \,.\, \overline{OB},$$

neboli

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB'} : \overline{OA'}.$$

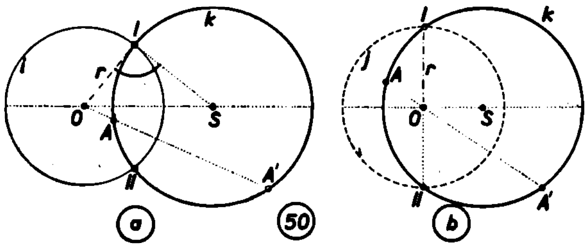


Trojúhelníky OAB a $OB'A'$ jsou tedy podobné, takže úhel $OB'A'$ jest pravý. Pokud bod B jest na přímce k, leží body inversní B' na kružnici k' inversně sdružené s přímkou k. Z involutorního přiřazení bodů inversních plyne i naopak, že každé kružnici, která prochází středem inverse, odpovídá jako útvar inversní přímka kolmá na střednou kružnice inverse i a kružnice dané. Toliko přímky, které jdou středem inverse, t. zv. paprsky inverse, jsou samy k sobě inversní.

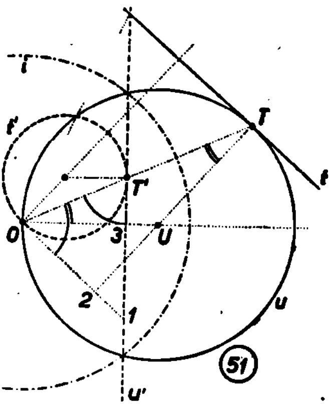
c) Kružnici, která neprochází středem inverse, náleží jako inversní útvar opět kružnice. Důkaz této věty byl už vlastně proveden v (4Da), str. 69, obr. 42 pro body P kružnice p, neboť podle vztahů tam použitých jsou body $\overline{T}$ inversně sdruženy s body P a při tom body $\overline{T}$ vyplňují kružnici tam označenou $\overline{c}$. Vidíme odtud i dále, že kružnice inversně sdružené jsou vždy zároveň vzájemně homothetické podle téhož středu O, a protínají-li se, pak jejich průsečíky leží na kružnici inverse.

Má-li střed inverse O při zvláštní poloze kružnice k

mocnost k ní r^2, tedy rovnu mocnosti inverse, je **kružnice** k **inversní sama k sobě** tak, že body její po dvou na každém paprsku inverse jsou spolu sdruženy; kružnice k protíná kružnici inverse i orthogonálně (obr. 50a). Při záporné mocnosti inverse $-r^2$ protíná taková kružnice k, k níž opět střed inverse má mocnost $-r^2$, ideální obraz j kružnice i diametrálně (obr. 50b).



d) Jestliže se kružnice (křivky) dotýkají v bodě T, mají v tomto bodě společnou tečnu t a dotykovou kružnici u, kterou lze vésti středem inverse O (obr. 51). Kružnice (křivky) inversní mají v společném bodě T', který je inversní k T, společnou tečnu u', inversní ke kružnici u, neboť i kružnice t', inversní k t, se přímky u' v bodě T' dotýká. To plyne z rovnosti zatržených úhlů při O a při T' v trojúhelníku $OT'1$, kdež $O1$ jest tečna kružnice t' v bodě O rovnoběžná s přímkou t. Jest postupně:



$\sphericalangle\, 1OT' = R - \sphericalangle\, OT2$ (v pravoúhlém $\triangle\, O2T$),

$$\sphericalangle\, OT'1 = R - \sphericalangle\, T'O3 \text{ (v pravoúhlém } \triangle\, O3T');$$

ale

$$\sphericalangle\, OT2 = \sphericalangle\, T'O3 \text{ (v rovnoramenném } \triangle\, TOU),$$

proto

$$\sphericalangle\, 1OT' = \sphericalangle\, OT'1.$$

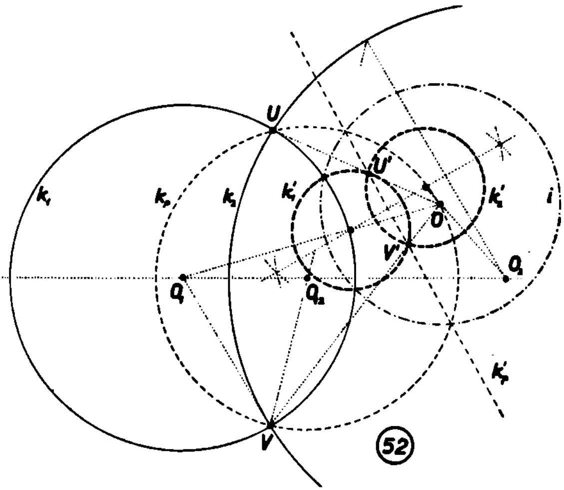
Jest proto i $T'1$ tečnou kružnice t'. Dotýkají-li se tedy dvě křivky, dotýkají se i jejich křivky inversní. Inverse je proto **transformací dotykovou.**

Z výkladů dřívějších (3Aa) na str. 21, kde jsme již také název bodů inversních uvedli, můžeme odvoditi hned další vlastnosti transformace inversní. Z obr. 7 a z rovnice $\overline{OT}_1 \,.\, \overline{OT}_2 = \overline{OA}_1 \,.\, \overline{OA}_2$ vyplývá, že kružnice k_1, k_2 jsou navzájem inversně sdružené pro bod O jakožto střed inverse a že je paprsek inverse protíná v T_1, resp. T_2 pod stejnými úhly opačného smyslu, tedy isogonálně. Kdyby body T_1, resp. T_2 téhož obrazce procházely ještě jiné dvě kružnice k'_1, resp. k'_2 vzájemně sdružené při téže inversi, protínal by je týž paprsek rovněž isogonálně; proto i úhly kružnic k_1, k'_1 a kružnic k nim inversních k_2, k'_2 v bodech inversních by byly stejné a opačného smyslu. Můžeme tedy prosloviti větu, kterou lze i jinak dokázati z dřívějších pouček: Inversí přecházejí kružnice (a ovšem i křivky) v kružnice (křivky), jež se protínají v úhlu téže velikosti, ale opačného smyslu jako kružnice původní; říkáme, že inverse je **transformací isogonální.**

e) Každé **dvě kružnice, které se protínají** nebo **dotýkají,** a tím též **svazek kružnic** těmito dvěma kružnicemi určený, můžeme inversí transformovati ve **svazek přímek,** resp. **osnovu rovnoběžek.** Stačí zvoliti střed inverse v základním bodě svazku podle věty sub b).

Dvě **kružnice se neprotínající i svazek jimi určený** lze transformovati v **kružnice soustředné,** zvolíme-li střed inverse v základním bodě svazku kružnic k^o, které protínají kružnice prvého svazku orthogonálně (viz 4Ab na str. 45). Inversí přejde totiž svazek kružnic k^o ve svazek přímek a kružnice svazku prvého v kružnice, které protínají svazek přímek orthogonálně, tedy v kružnice soustředné.

f) Z obr. 28 a z rovnic k němu se vztahujících vyplývá tato věta: Každé dvě kružnice k_1, k_2 lze považovati za útvary navzájem inversní, a to pro oba středy podobnosti jako středy inversí. Základní kružnice těchto inversí jsou příslušné kružnice potenční k_p a k'_p. Třeba však rozlišovati:

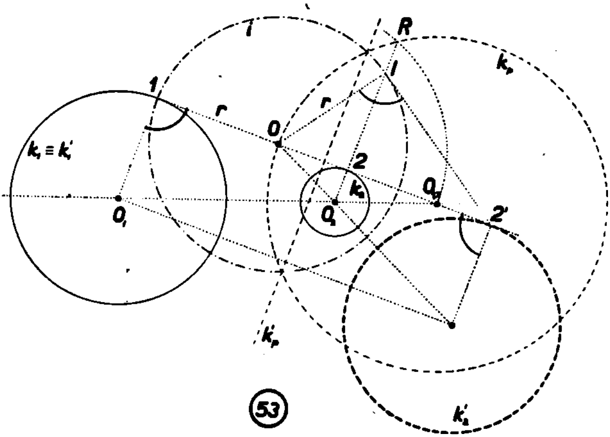


(52)

Kružnice potenční je reálnou kružnicí inverse při kladné mocnosti ($\overline{OR}^2$) nebo je ideálním obrazem imaginární kružnice inverse při záporné mocnosti ($-\overline{O'R'}^2$). Kružnice k dotýkající se k_1 a k_2 v inversních bodech T_1 a T_2 jsou při tom samy k sobě inversní, zrovna tak, jako kružnice k protínající k_1 a k_2 isogonálně (viz obr. 19); kružnici potenční k_p protínají pak tyto kružnice k orthogonálně, po případě při záporné mocnosti inverse diametrálně.

Obě kružnice potenční půlí úhel obou kružnic k_1, k_2, což je důsledek vlastností odvozených sub d), a samy k sobě jsou tedy kolmé; platnost této věty je z předešlých výkladů jasná v případě, když se kružnice k_1, k_2 protínají reálně. Případ imaginárního průseku zde pomineme.

g) Mysleme si nyní inversi novou (obr. 52), aby střed inverse ležel v bodě O na kružnici potenční k_p daných



53

kružnic k_1, k_2. Poloměr inverse může býti jakýkoliv. Pak kružnice k_p se transformuje v přímku k'_p a kružnice k_1, k_2 přejdou v kružnice k'_1, k'_2 svírající s přímkou k'_p stejné úhly opačného smyslu, protínajíce k'_p ve dvou společných bodech U', V'; jsou tedy kružnicemi souměrnými podle osy k'_p a tedy stejných poloměrů.

Totéž by platilo[5]) i pro kružnice k_1, k_2, jež by se neprotí-

[5]) Kdybychom totiž úhel dvou kružnic poloměrů r_1, r_2 a středné c definovali z věty kosinové užité na $\triangle O_1O_2U$ rovnicí

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{2r_1r_2}$$

naly. Takový případ je proveden v obr. 53, kde střed inverse byl zvolen v průsečíku O kružnice k_p a společné tečny *12* daných kružnic k_1, k_2; poloměr inverse r byl zvolen rovný délce *O1* tečny kružnice k_1. Základní kružnice inverse i protíná tedy k_1 orthogonálně, takže kružnice k_1 a inversní k ní k'_1 se ztotožňují. Kružnice k'_2, inversní k dané k_2 a shodná s k'_1, byla určena užitím bodu *2'*, inversně sdruženého s bodem *2*.

Řešení úloh inversí. Uvedené vlastnosti transformace inversní dovolují řešiti výhodně nejen obecnou ú. A. a její případy zvláštní, ale též úlohy obsahující podmínku orthogonálního (a také diametrálního) protnutí daných kružnic, některé z nich dokonce zvlášť jednoduše. Vlastnost odvozená sub d) v předešlém odstavci umožňuje pak použíti inverse i pro skupinu úloh, jež obsahují podmínku protnutí kružnic nebo přímek pod danými úhly.

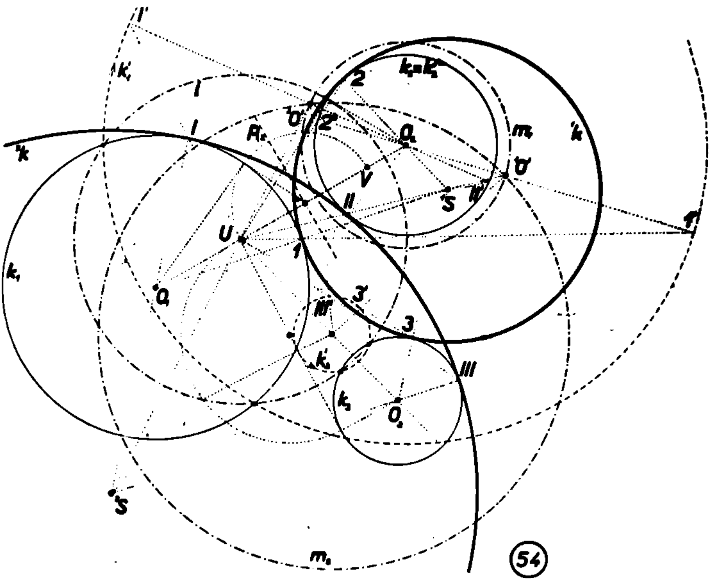
a) Při obecné ú. A. zvolme nejprve případ, kdy aspoň dvě kružnice, na př. k_1 a k_2, se neprotínají. Pak můžeme konstrukci uspořádati takto: Podle vlastnosti sub e) transformujeme kružnice k_1 a k_2 v kružnice soustředné k'_1 a k'_2. Volíme-li pak poloměr inverse rovný délce tečny vedené ze středu inverse k jedné dané kružnici, transformuje se tato kružnice v samu sebe.

V soustavě nové rozřešíme úlohu: Sestrojiti kružnici, která se dotýká dvou kružnic soustředných k'_1 a k'_2 a kružnice k'_3. Známe zde poloměr kružnic, které se dotýkají k'_1 a k'_2, t. j. $r' = \dfrac{r'_1 + r'_2}{2}$ nebo $\dfrac{r'_1 - r'_2}{2}$; tato druhá hodnota poloměru by byla obsažena v první, kdybychom užili cyklů. Úloha tedy přechází v úlohu jednoduchou (*krk*) skupiny δ) v (2B) na str. 16.

---

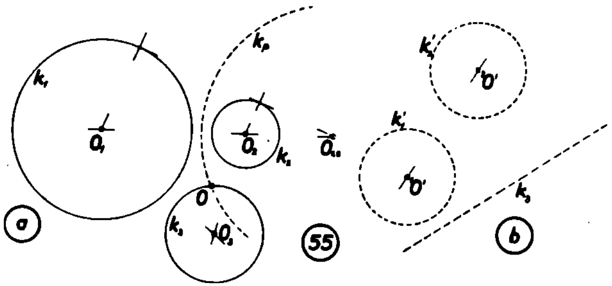
a vypočetli $\cos \alpha'$, kde α' je úhel kružnic inversních, pak bychom snadno potvrdili rovnost $\cos \alpha$ a $\cos \alpha'$ i pro $|\cos \alpha| > 1$, t. j. při $r_1 - r_2 > c > r_1 + r_2$, čili když úhel α je imaginární.

V obr. 54 jsme zvolili střed inverse v bodě U, jenž byl sestrojen tak jako v obr. 23, a poloměr tak, aby $k'_2 \equiv k_2$. Kružnice k'_i, $i = 1, 2, 3$, nyní orientujeme, na př. v pořadí $(++-)$, takže poloměr cyklů zde výsledných má jedinou hodnotu $\left(r' = \dfrac{r'_1 + r'_2}{2} > 0\right)$. G. m. sestrojené podle (4Afα)



na str. 57 jest pro dvojici (k'_1, k'_2) kružnice m_1 a pro podmínky (k'_3, r') kružnice m_2; v průsečících těchto kružnic leží dva středy ${}^1O'$ a ${}^2O'$ dotykových cyklů ${}^1k'$ a ${}^2k'$. Tyto cykly není třeba ani rýsovati, nýbrž jen jejich body dotyku $1', 2'$ a I', II' na k'_1, resp. k'_2 spojnicemi ${}^1O'O_2$, resp. ${}^2O'O_2$. Z nich dostaneme dotykové body dvou kružnic výsledných ${}^1k$ a ${}^2k$ s k_1, resp. k_2 na příslušných paprscích inverse. Z nich doplníme snadno středy ${}^1S$ a ${}^2S$ výsledných kružnic; jsou ovšem i na spojnicích U^1O', resp. U^2O'. Příslušné další skupiny znamének cyklů k'_i poskytly by stejným postupem dalších šest řešení. —

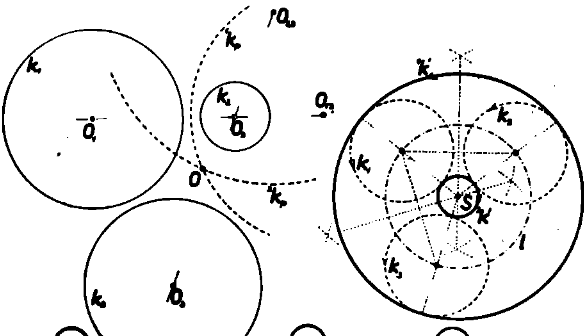
Jestliže dané tři kružnice k_i se vesměs protínají, zvolíme střed inverse v některém průsečíku dvou kružnic, na př. k_1 a k_2. Transformací přejdou k_1 a k_2 v přímky k'_1 a k'_2, kružnice k_3 v k'_3 a pro útvary odvozené řešíme úlohu (ppk) některým způsobem dříve uvedeným. —



Užitím vlastností sub g) možno postupovati ještě jinak. Zvolíme-li střed inverse O na některé kružnici potenční k_p na př. dvojice k_1, k_2, bude odvozený útvar obsahovati dvě kružnice k'_1 a k'_2 stejných poloměrů, a jestliže kružnice k_p protne kružnici k_3, pak volbou středu inverse v průsečíku O (obr. 55a) dostaneme dokonce po transformaci kromě dřívějších dvou kružnic k'_1 a k'_2 jako třetí útvar odvozený přímku k'_3 (obr. 55b). Úloha týkající se útvarů odvozených provede se pak výhodně dilatací.

Kdyby poloha daných kružnic byla tak příznivá, že by se dvě kružnice potenční, na př. dvojic k_1, k_2 a k_2, k_3 protínaly (obr. 56a), volili bychom střed inverse v tomto průsečíku O; kružnice dané by transformací přešly ve tři kružnice shodné (obr. 56b) a řešení úlohy v nové soustavě bylo by zvlášť jednoduché. (Dva výsledky — nejjednodušší — cykly soustředné jsou v obr. b) vyznačeny.)

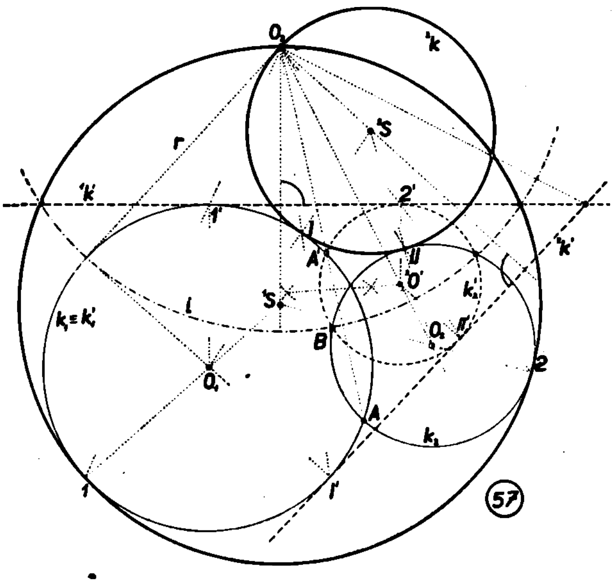
b) Všimneme si ještě čtyř zvláštních případů ú. A. Úlohy (kkp) a (kpp) řešili bychom inversí podobně jako v případě obecném. Poněkud jinak utváří se řešení případu (kkB) a (kpB). Zvolíme-li střed inverse v daném bodě O_3, bude v inversi odpovídati tomuto bodu přímka úběžná, dalším daným prvkům pak dvě kružnice k'_1, k'_2. Kružnice, které se mají dotýkati k'_1, k'_2 a přímky úběžné, mají nekonečně velké poloměry a jsou tedy společnými tečnami kružnic k'_1 a k'_2.



(a) (56) (b)

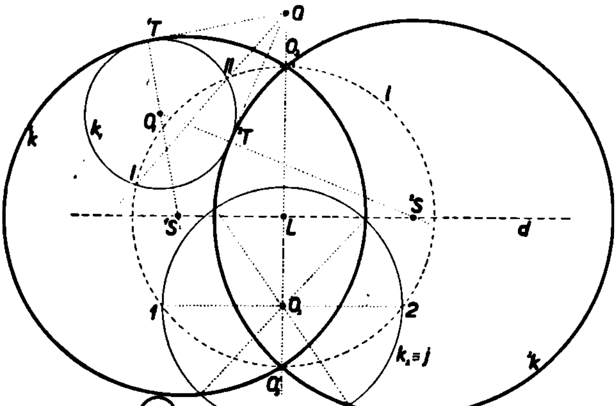
V obr. 57 je proveden případ (kkB). Poloměr inverse r byl volen tak, aby $k'_1 \equiv k_1$. Kružnice k'_2, jejíž střed ${}^2O'$ leží na přímce O_2O_3, byla sestrojena pomocí svého bodu A', inversního k A, a bodu samodružného B na kružnici inverse i. Společné tečny ${}^1k'$ a ${}^2k'$ kružnic k'_1, k'_2 se protínajících jsou jen dvě reálné, a proto také jsou jen dvě reálné kružnice výsledné ${}^1k$ a ${}^2k$. Středy těchto kružnic, body ${}^1S$ a ${}^2S$, leží na kolmicích, vedených středem inverse k tečnám ${}^1k'$ a ${}^2k'$; byly určeny použitím dotykových bodů $1, 2$ a I, II kružnice ${}^1k$, resp. ${}^2k$ s kružnicemi danými, inversních k bodům $1', 2'$ a I', II' tečny ${}^1k'$, resp. ${}^2k'$.

c) Souvislost p o d m í n k y dotyku a p r ů s e k u orthogonálního nebo diametrálního při kružnicích, vyložená již v kapitole 4 (obr. 28), poskytuje možnost řešiti inversí úlohy, které obsahují podmínku (k^o) nebo (k^d) ve spojení s podmínkou (k) a pod. takto: Považujeme-li danou kružnici, která má býti proťata orthogonálně nebo diametrálně za



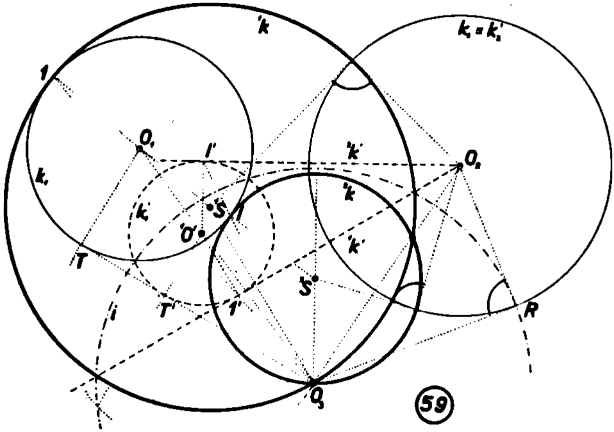
základní kružnici inverse i, resp. j, dospějeme od podmínky (k^o), resp. (k^d) k další podmínce (k) a pod. pro úlohu odvozenou; tedy opačně, než tomu bylo v (4Bc) na str. 59.

Tak je řešena v obr. 58 úloha (kk^dB), sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice $k_1(O_1)$, diametrálně protíná danou kružnici $k_2(O_2, r_2)$ a prochází daným bodem O_3. Kružnici k_2 zvolíme za ideální obraz j kružnice inverse, jejíž mocnost je záporná, rovna $-r_2^2$. K bodu O_3 sestrojíme inversní bod O'_3, kterým také musí procházeti kružnice hledaná. Rovněž tak by se hledaná kružnice musela dotýkati kružnice k'_1, inversní ke kružnici k_1, což v obrazci jako zbytečné nebylo sestrojeno. Bod O'_3 určíme na paprsku inverse O_2O_3 pomocnou kružnicí $l(L)$, která protíná diametrálně kružnici j v bodech *1*, *2* a prochází bodem O_3. Kružnice l pak použijeme i pro řešení úlohy $(k_1O_3O'_3)$ známým způsobem. Výsledné dvě kružnice ${}^1k$ a ${}^2k$, samy k sobě inversní, řeší současně úlohu původní.



58

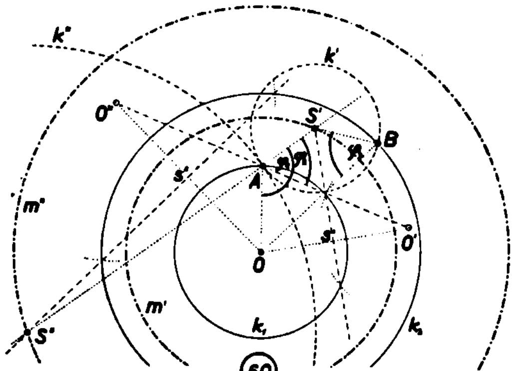
d) Některé úlohy s podmínkou (k^o), a to ve spojení s podmínkou (B) lze inversí řešiti zvlášť výhodně. Ukážeme to aspoň na příkladě (kk^oB) v obr. 59; úlohou jest nalézti kružnici, která se dotýká $k_1(O_1)$, protíná orthogonálně $k_2(O_2)$ a prochází bodem O_3. Střed inverse zvolíme v bodě O_3, poloměr inverse tak, aby $k'_2 \equiv k_2$, a sestrojíme kružnici k'_1, inversní ke k_1 (v obrazci byl určen bod T', inversní k bodu T na tečně O_3T kružnice k_1). Ježto bodu O_3 přináleží jako útvar inversní přímka úběžná, budou kružnice ${}^1k'$ a ${}^2k'$ řešící úlohu pro útvary odvozené tečnami kružnice k'_1, vede-nými z bodu O_2, který je středem kružnice k'_2, jež má být proťata orthogonálně. Střed ${}^1S$ prvé výsledné kružnice ${}^1k$ leží jednak na kolmici s O_3 spuštěné na tečnu ${}^1k'$, jednak na spojnici dotykového bodu *1* (inversního k dotykovému



bodu *1'*) na kružnici k_1 se středem této kružnice. Podobně dostaneme i střed ${}^2S$ výsledné kružnice ${}^2k$. Kontrola přesnosti je v tom, že kružnice ${}^1k$ a ${}^2k$ se protínají ze známého důvodu na středné O_2O_3.

Řešení zobecněné ú. A. Velikost úhlů, ve kterých se kružnice protínají, se při transformaci inversní podle věty sub d) nemění, takže transformujeme-li dané dvě kružnice výhodně dle e) na dvě kružnice soustředné, resp. na dvě přímky, převedeme zobecněnou ú. A. označenou v kapit. 2 sub E ($k^{\varphi}k^{\varphi}k^{\varphi}$) na některou zvláštní úlohu této skupiny, a to na úlohu sestrojiti kružnici, která buď protíná dvě kružnice soustředné v úhlech dané velikosti φ_1, resp. φ_2 a kružnici třetí v daném úhlu φ_3, nebo která protíná dvě přímky v daných úhlech φ_1, resp. φ_2 a mimo to kružnici v daném úhlu φ_3. Řešením těchto zvláštních úloh pro útvary odvozené bude pak po inversi řešena i úloha původní, t. j. ú. A. zobecněná.[6])

a) Odvodíme nejprve konstrukci g. m. středů kružnic, které protínají dvě kružnice soustředné $k_1(O, r_1)$ a $k_2(O, r_2)$ v daném úhlu φ_1 a φ_2. Při tom vezmeme velikosti úhlů absolutně (bez zřetele na jejich smysl), což povede k výkladu pro náš účel jednoduššímu.



60

Je-li sestrojena v obr. 60 jedna kružnice $k'(S')$, která protíná k_1 v bodě A v úhlu φ_1 a k_2 v bodě B v úhlu φ_2, mysleme si bod O' souměrně sdružený s O podle osy souměrnosti s' bodů A, B. Ježto úhel $OAS' = \varphi_1$ a úhel $OBS' = \varphi_2$, jest úhel $OAO' = \varphi_1 - \varphi_2$, tedy známý. Dále jest úsečka $AO' = OB = r_2$ také známá. Můžeme tedy bod O' sestrojiti, zvolíme-li na k_1 bod A, jakožto vrchol trojúhelníka OAO' dokonale určeného. Středem S' kružnice k' jest pak průsečík osy souměrnosti bodů O, O' a toho ramene úhlu φ_1, které středem O neprochází. Kružnice m', soustředná s kružnicemi danými a procházející bodem S', jest jednou částí hledaného

[6]) Viz Lit. č. VII, str. 304 a n.

g. m. Bod O' jest určen vzdáleností r_2 dvojznačně, takže naneseme-li r_2 od bodu A do bodu O'', souměrného s O' podle středu v bodě A — úhel OAO'' bude roven $2R - (\varphi_1 - \varphi_2)$ — poskytne bod O'' stejným postupem jako bod O' ještě střed S'' druhé kružnice k'', která vyhovuje daným podmínkám a jde bodem A; kružnice m'' soustředná s m' jdoucí S'' jest druhou částí g. m. hledaného. Snadno lze ukázati, že nanesením φ_2 od ramene AS' úhlu φ_1 opačně dojdeme opět jen k bodům S' a S''.

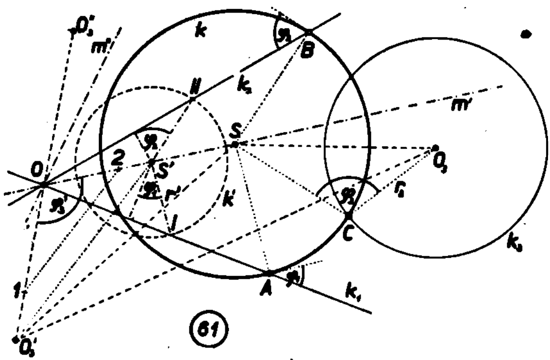
Je dále patrno, že všecky kružnice k', jejichž středy jsou na m' a jež splňují dané podmínky, mají stálý poloměr $r' = \overline{S'A}$, jednou z nich tedy určený, a zrovna tak, že kružnice k'' mají stálý poloměr $r'' = \overline{S''A}$.

Je-li dána nyní ještě kružnice k_3, která má být proťata v daném úhlu φ_3 kružnicemi nalezených poloměrů r', resp. r'', dostaneme pro každý poloměr dvě kružnice soustředné s k_3, jakožto příslušné g. m. středů kružnic pro dvojici podmínek $(k^\varphi r)$. Úloha $(k^\varphi k^\varphi k^\varphi)$ má tedy obecně **osm řešení**, tak jako obecná ú. A.

b) Pro druhou odvozenou úlohu určíme opět nejprve g. m. středů kružnic, které protínají dvě přímky k_1 a k_2 v daných úhlech φ_1 a φ_2.

Protíná-li na obr. 61 kružnice $k'(S', r')$ přímku k_1 v bodě I v úhlu φ_1, pak její střed je vzdálen od k_1 o délku $r' \cos \varphi_1$; od přímky k_2 je tedy vzdálen o délku $r' \cos \varphi_2$. Poměr těchto vzdáleností je proto $\dfrac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} =$ konst., při čemž znaménko může býti kladné i záporné. G. m. jsou tedy dvě přímky m' a m'', jejichž body mají od přímek k_1, k_2 vzdálenosti v daném poměru $(\pm)$. Tvoří s k_1 a k_2, jak známo, harmonickou čtveřinu paprskovou. Je dále patrno, že všecky kružnice, vyhovující daným podmínkám, jsou homothetické podle středu $O \equiv k_1 \times k_2$, mají-li středy jednou na m', po druhé na m''.

V obrazci budiž ještě dána kružnice $k_3(O_3, r_3)$, která má být proťata výslednou kružnicí v daném úhlu φ_3. Jestliže touto výslednou kružnicí je $k(S)$, tedy kružnice homothetická s kružnicí pomocnou k', a je-li vždy jeden průsečík její s k_i $(i = 1, 2, 3)$ bod A, resp. B, resp. C, pak úhel $SCO_3 = \varphi_3$. Sestrojme úhel $\varphi'_3 = \varphi_3$ při vrcholu O a rameni m' a doplňme $\triangle\, SOO'_3$ tak, aby byl podobný $\triangle\, SCO_3$. Pak platí postupně:



(61)

$$\frac{\overline{SO'_3}}{\overline{SO_3}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{S'O}}{\overline{S'I}} = \frac{\overline{S'O}}{r'} = n$$

a rovněž:

$$\frac{\overline{OO'_3}}{\overline{CO_3}} = n = \frac{\overline{OO'_3}}{r_3},$$

a proto: $$\overline{OO'_3} = n \,.\, r_3.$$

Volbou pomocné kružnice k' známe tedy hodnotu poměru n a můžeme bod O'_3 snadno sestrojiti: Na obr. jsme učinili $\overline{O1} = r_3$, $\overline{O2} = r'$ a bodem S' jsme vedli se spojnicí 12 rovnoběžku, která proťala spojnici $O1$ v bodě O'_3. Z rovnice $\dfrac{\overline{SO'_3}}{\overline{SO_3}} = n$ plyne, že g. m. bodu S jest Apolloniova kružnice m_1, sestrojená pro pevné body O'_3 a O_3 a dělicí poměr hodnoty $\pm n$.[7]) Průsečíky kružnice m_1 (na obr. není sestrojena) s přímkou m' jsou pak dva středy hledaných kružnic naší úlohy $(p^\varphi p^\varphi k^\varphi)$.

Použijeme-li úhlu $2R - \varphi_3$, dostaneme ještě další bod, a to O''_3 souměrný podle středu O s bodem O'_3, který určí podobně pro týž poměr $\pm n$ druhou Apolloniovu kružnici m_2 a poskytne obecně na přímce m' další dva výsledné středy.

Nanesením úhlu φ_3 na opačnou stranu ramene m' nedospěli bychom k novým výsledkům.

Na přímce m'' dostaneme pak rovněž obecně čtyři výsledné středy, tedy dohromady obecně zase osm řešení.

c) Konstrukcí v předcházejících odstavcích jsou také řešeny zvláštní případy zobecněné ú. A. $(k^\varphi k^\varphi \chi^\varphi)$ a $(k^\varphi k^\varphi B)$.

Tuto poslední úlohu a všecky úlohy v kap. 2 uvedené, které obsahují aspoň jednu podmínku (B), lze řešiti inversí zvláště výhodně tak, že zvolíme střed inverse v daném bodě. Výsledné kružnice se tím transformují v přímky.

Tak provedeme v obr. 62 aspoň úlohu $(k^\varphi p^\varphi B)$; máme sestrojiti kružnici, která protíná danou kružnici $k_1(O_1)$ v daném úhlu φ_1, danou přímku k_2 v daném úhlu φ_2 a prochází daným bodem O_3.

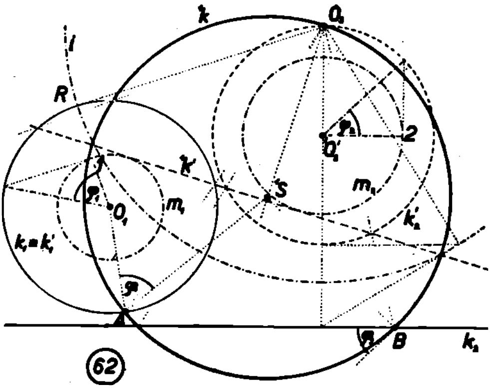
Inversi středu O_3 volme tak, aby základní kružnice i protínala k_1 orthogonálně, takže $k'_1 \equiv k_1$; přímka k_2 se transformuje v kružnici k'_2. Kružnice, které řeší úlohu pro útvary odvozené a mají nekonečně velké poloměry, určíme jako čtyři společné tečny ${}^1k'$, ${}^2k'$, ... kružnic pomocných m_1 a m_2, soustředných s kružnicí k'_1, resp. k'_2, o poloměrech $r_1 \cos \varphi_1 = O_1 1$, resp. $r'_2 \cos \varphi_2 = {}^1O'_2 2$. Kružnice ${}^1k$, ${}^2k$, ..., inversní k oněm tečnám jsou hledané kružnice o středech ${}^1S$, ${}^2S$, ... Na obrazci je vyrýsována jedna výsledná kružnice ${}^1k$, odpovídající jedné tečně ${}^1k'$ kružnic m_1, m_2; úloha je ovšem obecně čtyrznačná.

---

[7]) Viz J. Vojtěch: GV, str. 58.

d) Zvláště jednoduše lze pak řešiti úlohu $(p^\varphi p^\varphi p^\varphi)$, neboť příslušná g. m. podmínek $(p^\varphi p^\varphi)$ jsou přímky, odvozené v odst. b). Úloha má tedy čtvero řešení.

Úlohu $(p^\varphi p^\varphi B)$ lze řešiti zcela jednoduše, a to homothetií: středem homothetie kružnic výsledných a pomocných je průsečík daných přímek; další postup pak je již jasný podle výkladů odst. b). —



62

e) Jestliže v úloze $(k^\varphi k^\varphi k^\varphi)$ úhly φ_i $(i = 1, 2, 3)$ jsou si rovny, pak máme protnouti dané tři kružnice k_i isogonálně v daném úhlu φ. Mimo řešení inversí, které jsme vyložili pro případ obecný, můžeme pro tento zvláštní případ použít někdy vhodně i vlastností kružnic isotomických, známých nám z poznámky na str. 39. Sestrojíme-li pro dané tři kružnice (orientované v cykly) osu podobnosti o, dostaneme na o dva základní body U, V svazku kružnic isotomických. Jsou-li tyto body reálné, přejde naše úloha na zvláštní úlohu $(k^\varphi BB)$, již řešíme snadno podle odst. c).

f) Při této příležitosti zmíníme se ještě o úloze isogonálního protnutí daných kružnic kružnicí hledanou, neudáme-li velikost úhlu φ. Aby úloha byla určitá, musí býti dány čtyři kružnice k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, jež jest protnouti isogonálně. Úlohu řešíme tak, že pro dvojici orientovaných kružnic k_i, na př. pro $i = 1, 2$, najdeme kružnici potenční ${}^1k_p$. Ta bude hledanou kružnicí podle f) na str. 83 proťata orthogonálně (resp. diametrálně). Podobně i potenční kružnice ${}^2k_p$ další dvojice cyklů $k_i\,(i = 2, 3)$ a ${}^3k_p$ pro dvojici $k_i\,(i = 3, 4)$. Kružnice hledaná protíná pak tyto tři potenční kružnice orthogonálně (nebo diametrálně) a lze ji sestrojiti způsobem vyloženým v kapit. 4.

Pro osm podstatně různých skupin znamének cyklů k_i — skupiny znamének pro všecky příslušné cykly k_i vesměs opačných poskytují zřejmě týž výsledek — dostaneme obecně osm výsledných kružnic isotomických. —

6.

KONSTRUKTIVNÍ ŘEŠENÍ APOLLONIOVY ÚLOHY NA ZÁKLADĚ ALGEBRAICKÉM.

Postupem algebraickým, resp. analytickým, odvodil různé konstrukce pro řešení ú. A. náš geometr J. Sobotka v několika pojednáních (viz Lit. č. VIIIa, b, c), kde se zabýval většinou úlohami prostorovými o dotykových koulích a isogonálních koulích a též zobecněnou ú. A. Z úvah a konstrukcí tam odvozených vyplývají planimetrické konstrukce jako speciální případy. V těchto pojednáních je též obsaženo starší analytické řešení ú. A., které podal již r. 1866 anglický geometr Casey (v „Royal Irish Academy"), z něhož lze vytěžiti rovněž zajímavé konstrukce, jež by patřily též do této části našich úvah.

Omezíme se však jen na zajímavou souvislost útvarů, kterou odvodil J. Sobotka pro úlohu prostorovou a jež doplňuje vztahy užité při řešení Gergonnově (Lit. č. VIIIb, str. 9). Můžeme ji pro ú. A. v rovině odvoditi analogicky takto:

Pro dané tři kružnice $k_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, které orientujeme v cykly, sestrojme osu podobnosti o (obr. 63) a potenční střed P, jehož vzdálenost od osy o budiž p. Pišme pro stručnost $P(p)$. Mysleme si pól P_1 osy podobnosti o vzhledem ke k_1 a pišme $P_1(x_1)$, kdež x_1 je opět vzdálenost bodu P_1 od o; středy daných kružnic jsou podobně $O_i(a_i)$. Na kolmici vedené bodem P k přímce o určíme nyní bod $F(x)$ rovnicí:

$$\frac{x}{p} = \frac{a_1}{x_1}.$$

Mezi vzdáleností x_1 a vzdáleností a_1 platí[1])

$$a_1(a_1 - x_1) = r_1^2,$$

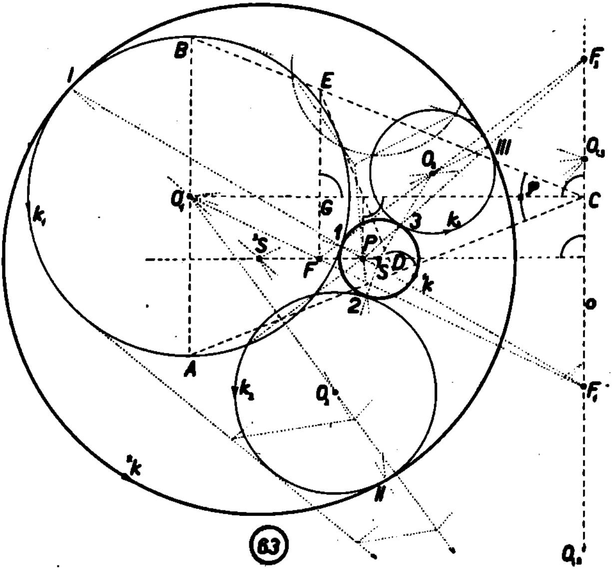
[1]) Viz J. Vojtěch: GV, str. 60.

takže

$$x_1 = \frac{a_1^2 - r_1^2}{a_1},$$

a tedy

$$x = p \cdot \frac{a_1^2}{a_1^2 - r_1^2}.$$



63

Protože o je osou podobnosti, můžeme psát:

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = \frac{a_3}{r_3},$$

a proto

$$x = p \cdot \frac{a_i^2}{a_i^2 - r_i^2},$$

ať vyjdeme od kteréhokoliv pólu P_i.

Protínají tedy spojnice středu potenčního P s póly P_i osu podobnosti v bodech F_i, jimiž procházejí odpovídající spojnice pevného bodu F s body O_i. Dotykové body cyklů výsledných ú. A. s cykly k_i můžeme sestrojiti právě na základě tohoto pevného bodu F a bodů F_i, aniž póly P_i určíme, což bylo třeba při konstrukci Gergonnově. Stručně lze vyjádřiti dokázanou větu takto: Pevný bod F jest středem, z něhož se promítají středy daných cyklů na osu podobnosti do bodů F_i; spojnice těchto bodů se středem potenčním protínají k_i v dotykových bodech s hledanými cykly.

Konstrukce bodu F je pak tato (obr. týž): Středem O_1 veďme v k_1 průměr AB rovnoběžný s osou o a jeho krajní body spojme s bodem C, který je patou kolmice spuštěné s O_1 na o. Pak s potenčního středu P spustíme kolmici na O_1C a s paty její kolmici na AC do bodu D; ta protne CB v bodě E. Rovnoběžka s o vedená E protne kolmici vedenou z bodu P na o právě v hledaném bodě F.

Důkaz: Označíme-li G průsečík EF s O_1C a zavedeme-li v obrazci zatržený úhel φ, jest:

$$\overline{CG} = \overline{CE} \cdot \cos\varphi = \frac{\overline{CD}}{\cos 2\varphi} \cdot \cos\varphi = \frac{p \cdot \cos\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} \cdot \cos\varphi = $$
$$= \frac{p}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Ježto $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r_1}{a_1}$, jest skutečně

$$\overline{CG} = p \cdot \frac{a_1^2}{a_1^2 - r_1^2} = x.$$

Tím se praktické provedení ú. A. užitím bodu F stává velmi jednoduchým i graficky přesným. Postup konstrukce je pak takovýto (obr. týž):

Sestrojíme osu podobnosti o daných cyklů; graficky stačí k spolehlivému určení potřebných středů podobnosti použíti společných tečen, rýsovaných podle přiloženého pravítka nebo, jsou-li tečny imaginární, užitím homothetických bodů s pomocí dvou trojúhelníkových pravítek. Pak sestrojíme potenční střed P; jestliže se kružnice dané neprotínají, užitím jediné kružnice pomocné, která všecky tři dané protíná. Dále sestrojíme bod F podle předchozího opět jenom rýsováním kolmic. Nyní spojíme bod F s O_i, protneme těmito spojnicemi o v bodech F_i a spojnice F_iP určují již na k_i hledané dotykové body. Přesnost konstrukce se zvyšuje také tím, že pro určení bodu F můžeme zvoliti kteroukoliv kružnici danou.

Konstrukci Sobotkovu můžeme právem považovati za praktické zdokonalení nejdůležitějšího řešení ú. A., t. j. Gergonnova, které jsme mezi různými planimetrickými řešeními této slavné úlohy uvedli na místě prvním. A konstrukcí Sobotkovou, stejně elegantní, své výklady končíme. —

7.

DODATEK: ÚLOHY PRO CVIČENÍ.

A. POUŽITÍ RŮZNÝCH METOD.

1. Podle příkladu v textu na str. 6 řešte čtyřmi způsoby úlohu: Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány jeho dvě strany a, b a délka těžnice t_c. — [a) Doplněním na rovnoběžník; b) použitím geometrických míst pro vrchol A, sestrojí-li se nejdříve t_c; c) homothetií, použijeme-li napřed jen poměru $a : b : t_c$; d) na základě výpočtu strany c; $c^2 = 2(a^2 + b^2) - 4t_c^2$.]

2. Sestrojte trojúhelník, je-li dán poloměr kružnice jemu opsané r, poloměr kružnice vepsané ϱ a úhel α. — [a) Určíme $\triangle ABS$ (S je střed kružnice vepsané); b) vypočteme a pak sestrojíme střednou OS; $\overline{OS}^2 = r(r - 2\varrho)$; O je střed kružnice opsané.]

3. Podobně sestrojte trojúhelník pravoúhlý, je-li dána jeho přepona c a ϱ; ($c = 2r$). — [Užijte též vztahu $a + b = 2(r + \varrho)$!]

4. Sestrojte trojúhelník, je-li znám jeho obvod $2s$ a úhly. — [a) Známým způsobem, užitím pomocného trojúhelníka se základnou $2s$; b) použitím vztahu, že délka tečny vedené z C ke kružnici vně vepsané jest rovna s.]

5. Podobně dvěma způsoby sestrojte trojúhelník, známe-li $2s$, α, v_a.

6. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno c, $a + b$, γ. — [a) Určením pomocného trojúhelníka, která má stranu $a + b$; b) sestrojíte-li nejdříve c a pak užijete geometrických míst pro vrchol C. c) Jak lze podle toho sestrojiti průsečíky kružnice, která prochází ohnisky elipsy s touto elipsou? Ukažte také, že hledané průsečíky jsou dotykové body tečen, vedených k elipse z průsečíku dané kružnice s vedlejší osou elipsy.]

7. Podobně sestrojte trojúhelník, v němž je dáno: c, $a - b$, γ; odvoďte příslušné konstrukce pro hyperbolu.

8. Z konstrukce trojúhelníka, v němž známe c, $a \pm b$, α, ukažte, jak lze nalézti průsečíky přímky jdoucí ohniskem elipsy (hyperboly) s touto kuželosečkou. Která zvláštní úloha Apolloniova se zde vyskytuje? Řešte úlohu ještě jinak: a) kolineací s kružnicí opsanou z ohniska F; b) polárností; c) pro elipsu afinním vztahem se soustřednou kružnicí.

9. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: c, γ, v_c. — [a) Užitím geometrických míst. b) Zvolte C a určete hyperbolu, která má střed C, jejíž asymptoty svírají úhel γ a jejíž výstřednost $e = cv_c : \sin \gamma$; společné tečny této hyperboly a kružnice $k(C, v_c)$ určují také trojúhelník hledaný. Proč?]

Ad 9. Všimněte si, že každé dvě společné tečny hyperboly nebo elipsy a soustředné kružnice $k(r)$, které jsou spolu rovnoběžné, protínají další soustřednou kružnici p, opsanou poloměrem rovným hlavní poloose hyperboly (elipsy), v patách P_1, P_2 kolmic, spuštěných na tečny s ohniska F, a že tětiva kružnice p, úsečka $P_1P_2 = 2r$. Z toho odvoďte konstrukci společných tečen.

10. Do daného čtverce (strana a) vepište čtverec, který má danou stranu b. — [a) Sestrojením pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona jest b a součet odvěsen jest a; b) otočením libovolného čtverce soustředného, který má stranu b, do příslušné polohy; c) na základě výpočtu úseku vzniklého na straně daného čtverce, $x = \dfrac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$].

11. Ke dvěma známým konstrukcím společných tečen dvou daných kružnic (homothetií a dilatací) připojte tuto třetí konstrukci a dokažte ji: Dotykové body vnější tečny jsou na spojnicích AM, resp. BM, kdež body A, B jsou vnější krajní body průměrů obou daných kružnic na středné, bod M je na chordále a při tom spojnice AM a BM jsou k sobě kolmé. Obdobně i pro vnitřní společné tečny. [Př. 1911, 14.[1])]

12. Sestrojte elipsu, která je dána polohou os a tečnou t s dotykovým bodem T. — [a) Poloosa a jest poloměrem afinní kružnice a úhel ST_01 jest pravý (S je střed elipsy, T_0 bod afinně sdružený s T a 1 bod samodružný); b) $\overline{ST_1} \cdot \overline{S1} = a^2$ (T_1 je pravoúhlý průmět bodu T do hlavní osy); c) analyticky dokažte konstrukci: Kružnice opsaná ze středu úseku SN, který utíná normála na ose vedlejší, a procházející T, jde vrcholy hlavní osy; podobně pro vrcholy osy vedlejší.]

13. Sestrojte parabolu danou ohniskem F a dvěma body A, B. — [a) Průvodiče určují přímku řídicí; b) kružnice $k(F)$ jdoucí A je kolineárně sdružena s parabolou.]

14. Určete průsečíky dané přímky p s parabolou, danou ohniskem F a přímkou řídicí f. — [a) Řešením zvláštní úlohy

---

[1]) Některé úlohy jsou převzaty z „Přílohy k Časopisu čes. mat. a fys." a z „Rozhledů matem.-přírodovědeckých". Jsou označeny: Př., resp. R s udáním ročníku a čísla úlohy nebo stránky článku.

Apolloniovy; b) homothetií pro střed $O \equiv (p \times f)$, sestrojíme-li hledaný bod jako homothetický s libovolným bodem 1 na p při poměru homothetie $\overline{O2} : \overline{OF}$ (bod 2 najdeme na spojnici OF tak, aby úsečka $\overline{12}$ se rovnala vzdále osti bodu 1 od f; c) kolineací s kružnicí (střed v bodě F); d) polárností.]

15. Sestrojte úsečku $x = \frac{ab}{c}$. — Kromě způsobu obvyklého a způsobu uvedeného na str. 12 ještě užitím pohyblivého pravého úhlu (pravoúhlého pravítka): Zvolíme dvě osy x, y k sobě kolmé, na x naneseme $\overline{OA} = a$ a na druhou stranu $\overline{OB} = b$, na y pak $\overline{OC} = c$. Kterou kolmicí dostaneme na y úsečku x?

16. Připomeňte si podle toho konstrukci poloměrů křivosti pro vrcholy elipsy a sestrojte středy kružnic křivosti také pouhým kružítkem.

17. Sestrojte $x = \sqrt{ab}$. — [Mimo obvyklý způsob a způsob uvedený na str. 12 proveďte konstrukci tak, že nanesete na osu x úsečky $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ stejným směrem, sestrojíte kružnici k nad průměrem AB a pak ji protnete orthogonálně kružnicí, která má střed na ose y. Kde je úsečka x? Dokažte!]

18. Sestrojte střed úsečky a pouhým kružítkem podle vztahu $x = \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2a}$.

19. Sestrojte pouhým kružítkem délky stran pravidelných mnohoúhelníků do dané kružnice $k(S, r)$ vepsaných, a to $a_3, a_4, a_5, a_6, a_{10}, a_{12}, a_{15}, a_{20}$ a j. — [Jsou-li vrcholy pravidelného šestiúhelníku A až F, pak učiníme $\overline{AG} = \overline{DG} = \overline{AC}$; $\overline{SG} = a_4$; potom $\overline{CH} = \overline{EH} = \overline{SG}$; $\overline{SH} = a_{10}$ atd.]

B. ÚLOHY O KRUŽNICI.

20. Použitím příslušných úloh Apolloniových sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko F a ještě a) tři její body A_1, A_2, A_3; b) dva body a tečna t; c) jeden bod a dvě tečny; d) tři tečny. — [Určíme buď kružnici $q(F', 2a)$ nebo $p(S, a)$[2]): K tomu použijeme kružnic $k_i(A_i, \overline{A_iF})$, resp. kružnic sestrojených nad průměry FA_i; mimo to bodů Q_i, souměrně sdružených s F podle tečen t_i, resp. pat P_i kolmic spuštěných s F na t_i.]

---

[2]) F' je druhé ohnisko, S střed kuželosečky, a je hlavní poloosa.

21. Podobně sestrojte kuželosečku, známe-li F, směr osy a mimo to ještě a) dva body; b) dvě tečny; c) bod a tečnu.

22. Určete průsečíky dané přímky s elipsou (hyperbolou), známe-li F, F' a $2a$. — [Použijeme kružnice $q(F', 2a)$.]

23. Určete obdobně průsečíky dvou kuželoseček, které mají společné ohnisko. Jak jednoduše dostaneme společné tečny takových kuželoseček? — [Použitím bodů Q.]

24. Dokažte, že kružnice k opsaná z ohniska hyperboly poloměrem b (vedlejší poloosa) je protťata kružnicí $p(S, a)$ orthogonálně. — Užitím tohoto výsledku sestrojte hyperbolu, dáno-li F, b a mimo to ještě a) dvě tečny; b) tečna a bod; c) dva její body.

25. Podobné úlohy řešte pro elipsu. — [Zde však jest obdobná kružnice k protťata kružnicí p diametrálně.]

26. Sestrojte kružnici k, je-li dán pól P a jeho polára p vzhledem k hledané kružnici k a mimo to kružnice k_1, kterou k orthogonálně protíná. — [Nejdříve sestrojíme pomocnou kružnici k°, která prochází P a jež orthogonálně protíná k i k_1. (R. 14, 5).]

27. Sestrojte kružnici k, je-li dán pól P s polárou p a mimo to kružnice k_1, kterou k protíná diametrálně nebo které se k dotýká. — [Užijeme chordál trojice (P, k_1, k). (R. 14, str. 63).]

28. Sestrojte kružnici k, je-li dán pól P s polárou p a poloměr r. — [a) Lze sestrojiti společnou chordálu bodu P a všech kružnic k z P a p, které tvoří svazek; svazek kružnic k nim orthogonálních je určen základními body P, Q, kdež Q je pata kolmice spuštěné s P na p. b) Zcela jednoduchá konstrukce vyplývá z výpočtu vzdálenosti x středu kružnice k od p; označíme-li $\overline{PQ} = m$, pak $x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + r^2}$.]

Jiné určující podmínky:

29. Sestrojte kružnici, která jde danými dvěma body A, B a dělí danou kružnici $k(O)$ v daném poměru $m : n$. — [Použijeme pomocné kružnice $k'(O)$, jejíž tečny protínají k tak, jak úloha vyžaduje, a další pomocné kružnice k'' jdoucí A, B a protínající k libovolně. (Př. 1912, 14).]

30. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body A, B a na dané přímce p vytíná tětivu dané délky u. — [Vypočteme a sestrojíme snadno vzdálenost x středu této tětivy od průsečíku P přímky p s AB; $x = \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + t^2}$, kde $t^2 = \overline{PA} \, . \, \overline{PB}$.]

31. Odvoďte (analyticky) a sestrojte geometrické místo středů kružnic k, které protínají dané kružnice $k_1(O_1)$ a $k_2(O_2)$ tak, že chordály všech dvojic (k_1, k) a (k_2, k) procházejí danými body M_1, resp. M_2. — [Je to přímka kolmá na spojnici M_1M_2. (Důkaz synthetický — projektivními svazky — viz Př. 1912, str. 231.) — K jakému geometrickému místu dospějeme, když body M_1 a M_2 splynou s O_1, resp. O_2?]

32. Podobně: Geometrické místo středů kružnic k, které protínají $k_1(O_1)$ orthogonálně a k_2 tak, že chordály dvojic (k, k_2) jdou vždy bodem M, jest přímka kolmá na spojnici O_1M. (Důkaz synthetický viz opět jako v př. 31.)

33. Podle toho řešte úlohu: Sestrojiti kružnici k, která protíná dané kružnice k_i $(i = 1, 2, 3)$ tak, že chordály dvojic (k, k_i) procházejí danými body M_i. — [Můžeme postupovati také tak, že nejdříve sestrojíme pomocné kružnice a_i se středy A_i, které protínají k_i orthogonálně. Jak tedy protínají hledanou kružnici k? (Př. 1918, 11).]

Utvořte a řešte i jiné obdobné úlohy; také je-li poloměr některé dané kružnice nulový.

34. Odvoďte (analyticky) a sestrojte geometrické místo středů kružnic, které procházejí daným bodem M a jež jsou proťaty danou kružnicí $k(O)$ diametrálně. — [Je to kružnice, jejíž střed půlí úsečku $\overline{OM}$.]

35. Řešte nyní úlohu: Sestrojiti kružnici, která prochází dvěma danými body a jež jest danou kružnicí půlena.

36. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem a jež jest dvěma danými kružnicemi půlena. (R. 18, 11).

37. Sestrojte kružnici, která jde M, jež jest půlena danou kružnicí k_1 a která protíná danou kružnici k_2 orthogonálně nebo diametrálně.

38. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body A, B a kterou z daného bodu P jest viděti v daném úhlu α. — [Použijeme geometrického místa středů S kružnic, které jdou A a k nimž tečny z P vedené tvoří úhel α. Je to Apolloniova kružnice, neboť $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$. (R. 1, 4).]

39. Podobně sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a jež z daných bodů P, Q jest viděti v úhlu α, resp. β.

40. Pak i kružnici, kterou vidíme z daných tří bodů v daných úhlech α, resp. β, resp. γ.

41. Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou daných přímek a již jest viděti z daného bodu v daném úhlu α. — [Homothetií; středem homothetie jest průsečík daných tečen. (R. 14, 24).]

42. Sestrojte dvě kružnice ^1k a ^2k, aby ^1k procházela danými body A, B, aby ^2k se dotýkala dané kružnice k v daném bodě T a aby obě měly svou chordálu v dané přímce p. — [Je-li P průsečík p a tečny t, sestrojené v T ke kružnici k, pak platí $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \,.\, \overline{PC}$, čímž se dospěje k třetímu bodu C kružnice ^1k. (R. 9, 8.)]

43. Obdobně sestrojte dvě kružnice ^1k a ^2k, aby ^1k se dotýkala dané přímky ^1t v bodě ^1T, ^2k dané přímky ^2t v bodě ^2T a aby obě měly svou chordálu v dané přímce p. (R. 10, 8.)

44. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma sdruženými body imaginárními (jsou dány kružnicí $k(O)$ a přímkou p, jež k neprotíná, jakožto základní body svazku kružnic k se společnou chordálou p) a mimo to daným bodem A. — [a) Použijeme chordál tří kružnic: hledané, dané k a pomocné, kterou sestrojíme bodem A. b) Sestrojíme kružnici l, která má střed na p a jež protíná k kolmo, ta protne kolmici spuštěnou s O na p v základních bodech U, V svazku kružnic, protínajících kolmo kružnice k; sestrojíme-li nyní na p střed P kružnice určené body U, V, A, jest PA tečnou hledané kružnice.]

45. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma imaginárními body (jsou opět dány k, p) a jež se dotýká dané přímky t. — [Délky tečen, vedených z průsečíku P přímek p a t ke kružnici k i ke kružnici hledané, jsou stejné.]

46. Sestrojte kružnici danou dvěma imaginárními body (k, p) a délkou poloměru. — [Postupem sub b) v př. 44.]

47. Podobně sestrojte kružnici danou dvěma imaginárními body tak, aby danou kružnici k_1 protínala orthogonálně nebo diametrálně.

48. Sestrojte kružnici danou dvěma imaginárními body tak, aby na dané přímce vyťala tětivu dané délky (viz př. 30).

49. Dvě sdružené imaginární tečny jsou dány kružnicí k a bodem O, který je uvnitř k a jenž je středem podobnosti řady kružnic homothetických s k podle středu O; dané tečny jsou společné všem kružnicím řady. — [Utvořte a řešte úlohy obdobné úlohám v př. 44—47, ale s dvěma imaginárními tečnami.] —

Do těchto příkladů nebyly ovšem pojaty úlohy vyplývající z přehledu podaného v kap. 2; řešíme-li je metodami, které jsou v knize vyloženy, dospějeme k speciálním konstrukcím též velmi rozmanitým a zajímavým. —

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.

I. *H. Cranz*: Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Kleyers Encyklopädie der gesamten math., tech. und exakten Naturwissenschaften, Bremerhaven 1890.

II. *J. Hadamard*: Leçons de géométrie élémentaire, Paris 1911, 4. vyd., I. část.

III. *V. Jarolímek*: Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru, Praha 1908—18.

IV. *F. Klein*: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Berlin 1925, 3. vyd., II. svazek.

V. *J. Klíma*: Prostorové odvození Gergonnova řešení Apollonické úlohy. Rozhledy mat.-přírodovědecké, Praha 1923, roč. 2, str. 35 a n.

VI. *F. Machovec*: O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii. Pátá výroční zpráva reálky karlínské 1879.

VII. *E. Rouché, Ch. de Comberousse*: Traité de géométrie, Paris 1912, 8. vyd., I. část.

VIII. *J. Sobotka*: a) Analytické úvahy o koulích dotýkajících se čtyř daných koulí. Rozpravy České akademie, Praha 1912, roč. XXI, tř. II, č. 9.
b) Dodatky k analyt. úvahám o kružnicích a koulích Apolloniových a isogonálných. Rozpravy České akademie, Praha 1912, roč. XXI, tř. II, č. 12.
c) Contribution à la solution analytique du problème d'Apollonius généralisé. Bulletin intern. de l'Académie de Bohême, Praha 1929.

IX. *B. Vlk*: a) Problém Apolloniův. XVIII. výroční zpráva II. čes. reálky v Plzni, 1929—30.
b) Rozšířený problém Apolloniův. XIX. výroční zpráva téže reálky, 1930—31.
c) Problém Apolloniův a úlohy příbuzné, Plzeň, 1917 (v rukopise). —

O metodách geometrických konstrukcí:

X. *I. Alexandroff*: Aufgaben aus der niederen Geometrie (něm. vyd.: M. Schuster), Leipzig - Berlin 1903.

XI. *F. Enriques*: Fragen der Elementargeometrie (něm. vyd.: H. Fleischer), Leipzig 1907.

XII. *B. Kerst*: Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben, II. vyd. Math.-physikalische Bibliothek von Lietzmann u. Witting, Leipzig - Berlin 1925, sv. 26.

XIII. *J. Vojtěch*: Theorie geometrických konstrukcí. Příloha k Časopisu pro pěst. mat. a fys., Praha 1902, roč. 31. —

OBSAH.

Knihtiskárna „Prometheus", Praha VIII.