Neurčité rovnice

Brána k vědění

JAN VYŠÍN

NEURČITÉ ROVNICE

Jč
m+f

SVAZEK 3

JAN VYŠÍN

NEURČITÉ ROVNICE

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ÚVOD

Abychom si vysvětlili, co je obsahem této příručky, začneme příkladem. Skupina cvičenců — bylo jich méně než sto — nastoupila do sedmistupu, a tu poslední řada byla neúplná: scházeli dva cvičenci. Když však táž skupina nastoupila do devítistupu, dva cvičenci zbyli. Kolik tu bylo osob? — Snad každý z čtenářů se někdy setkal s podobnou úlohou, třeba někde v hádankářském časopise. Někdo výsledek prostě uhodl, jiný se pokusil řešit úlohu matematicky — rovnicí. Uvažoval: označím-li počet všech sedmistupů x, je počet cvičenců $7x - 2$; označím-li počet úplných devítistupů y, je počet cvičenců $9y + 2$. Jistě platí $7x - 2 = 9y + 2$, čili $7x - 9y = 4$. To je jedna rovnice pro dvě neznámé veličiny x, y: taková má nekonečně mnoho řešení, ale úloha vyžaduje, aby x, y byla čísla celá, a mimo to aby číslo $7x - 2 = 9y + 2$ (počet cvičenců) bylo menší než sto. Tím se počet řešení velmi omezí: zbude jediné řešení $x = 7$, $y = 5$ (počet cvičenců 47), jak si později sami vypočtete.

Uvedená úloha vedla k rovnici, kterou nazýváme *neurčitou* (*diofantickou*), a takovými rovnicemi se budeme v této knížce zabývati. Mezi ně patří ovšem mnoho jiných složitějších rovnic nebo soustav. Ve škole jste se možná zamyslili nad tím, jak našel váš učitel matematiky nebo autor učebnice trojúhelník, jehož všechny prvky (strany, výšky, poloměry kružnic opsané i vepsané) byly malá celá čísla. Určení takového trojúhelníku je také výsledkem řešení jistých neurčitých rovnic.

Nauka o neurčitých rovnicích souvisí velmi úzce s vlastnostmi celých čísel, o kterých pojednává t. zv. *číselná theorie*. Proto si připomeneme v první kapitole stručně nejjednodušší z těchto vlastností, které asi většinou všichni znáte.

I. O DĚLITELNOSTI — EUKLIDŮV ALGORITMUS

Čísly budeme v dalším rozuměti — nebude-li nic jiného řečeno — racionální celá čísla, t. j. čísla $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Celá kladná čísla $1, 2, 3, \ldots$ nazýváme *přirozená čísla*. Napíšeme-li číslo x jako součin dvou čísel $x = yz$, je y (a ovšem též z) *dělitel* čísla x, x je *násobek* čísla y. Každé číslo x má jistě dělitele $\pm 1, \pm x$. Přirozená čísla větší než jedna, která nemají mimo $\pm 1, \pm x$ jiného dělitele, se nazývají *prvočísla*. Prvočísel je nekonečně mnoho, jejich řada začíná takto: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$. Čísla, která nejsou prvočísly, se jmenují *čísla složená*. Nejjednodušší čísla složená jsou mocniny prvočísel, na př. $8 = 2^3$. Každé přirozené složené číslo, které není mocninou prvočísla, lze napsati jako součin mocnin prvočísel, na př. $360 = 2^3 . 3^2 . 5^1$: tato prvočísla se nazývají *prvočinitelé* daného čísla. Tento rozklad je *jednoznačný*, t. j. prvočinitelé i příslušní mocnitelé jsou daným číslem jednoznačně určeni.

Prováděli jste jistě všichni rozklad daného přirozeného čísla v součin mocnin prvočinitelů: užívá se při tom zkoumání dělitelnosti daného čísla prvočísly. Z rozkladu čísla v součin mocnin prvočinitelů vyplývá snadno tato vlastnost dělitelnosti, které budeme v dalším užívati: *je-li x dělitelem čísel a, b, je též dělitelem čísel $a + b$, $a - b$, $a . b$.*

Rozkladu čísla v součin mocnin prvočinitelů se používá při vyhledání *největšího společného dělitele* a *nejmenšího společného násobku* daných čísel. Máme-li na př. vyhledati největšího společného dělitele čísel 84, 264, 360, rozložíme tato čísla: $84 = 2^2 . 3 . 7$, $264 = 2^3 . 3 . 11$, $360 = 2^3 . 3^2 . 5$; vybereme prvočinitele společné všem číslům, a to v nejvyšší mocnině, v které jsou ve *všech* číslech obsaženy. V našem případě dostaneme $2^2, 3^1$; číslo $\delta = 12$ je největší společný dělitel daných tří čísel. Výpočet zapisujeme obyčejně schematicky do tabulky, jak jistě víte:

$$\begin{array}{rrr|ll} 84 & 264 & 360 & 2^2 & \\ 21 & 66 & 90 & 3 & \qquad \delta = 2^2 . 3 \\ 7 & 22 & 30 & & \end{array}$$

Každý jiný dělitel daných čísel je dělitelem jejich největšího společného dělitele δ a je tedy menší než δ. To platí i pro dělitele záporné. Na př. v našem případě jsou takoví společní dělitelé čísla 4, 6.

Největšího společného dělitele dvou přirozených čísel můžeme najíti také cestou postupného dělení; té se sice při zvláštních číslech užívá zřídka, ale má význam pro algebraické výrazy. Probereme si číselný příklad.

Jsou dána dvě čísla přirozená, na př. 252, 858. Dělíme větší číslo menším:

$$\begin{array}{l} 858 : 252 = 3 \\ 102 \end{array}$$

Dělitele 252 dělíme pak zbytkem tohoto dělení, t. j. číslem 102:

$$\begin{array}{l} 252 : 102 = 2 \\ 48 \end{array}$$

Dále dělíme dělitele 102 zbytkem druhého dělení, t. j. číslem 48:

$$\begin{array}{l} 102 : 48 = 2 \\ 6 \end{array}$$

Konečně při dalším dělení

$$\begin{array}{l} 48 : 6 = 8 \\ 0 \end{array}$$

vyjde zbytek 0; tím postupné dělení končí. Poslední nenulový zbytek 6 je největší společný dělitel čísel 252, 858, jak si snadno přímo ověříte.

Uvedené postupné dělení si poznamenáme do tabulky:

$$\begin{array}{rr|l} 858 & 252 & 3 \\ 252 & 102 & 2 \\ 102 & 48 & 2 \\ 48 & 6 & 8 \\ & 0 & \end{array}$$

Každá řádka znamená jedno dělení; vedle sebe jsou napsány dělenec a dělitel, vpravo od svislé čáry podíl, pod dělitele zbytek. V následujícím dělení je dělitel předchozího dělencem, zbytek dělitelem. Této schematické úpravě postupného dělení říkáme *Euklidův algoritmus*.

Nyní je třeba, abychom si obecně ukázali, že postupným dělením, jak bylo naznačeno, dojdeme vždy k největšímu společnému děliteli daných dvou čísel. Přesně vysloveno:

Provedeme-li podle Euklidova algoritmu postupné dělení, vycházejíce ze dvou daných čísel a, b, pak poslední nenulový zbytek je největším společným dělitelem δ čísel a, b a lze ho napsati ve tvaru

$$\delta = a\alpha + b\beta,$$

kde α, β jsou čísla celá (kladná, záporná nebo rovná nule).

Toto tvrzení si dokážeme, uvážíme-li:

1. Zbytky při postupném dělení se stále zmenšují, dojdeme tedy nakonec vždy k zbytku 0.

2. Jednotlivá dělení můžeme zapsat rovnicemi; v číselném příkladě jsou to tyto rovnice:

$$\begin{aligned} 858 &= 252 \,.\, 3 + 102, \\ 252 &= 102 \,.\, 2 + 48, \\ 102 &= 48 \,.\, 2 + 6, \\ 48 &= 6 \,.\, 8 + 0. \end{aligned} \tag{1,1}$$

3. Z čtvrté rovnice (1,1) plyne, že poslední nenulový zbytek 6 je dělitelem předposledního zbytku 48; z třetí rovnice (1,1) plyne, že poslední nenulový zbytek 6 je také dělitelem zbytku 102. Projdeme-li takto rovnicemi (1,1) od poslední k první, dojdeme k závěru, že poslední nenulový zbytek 6 je dělitelem obou daných čísel.

4. Z každé z rovnic (1,1) lze vyjádřit zbytek a postupným dosazováním dostaneme každý zbytek ve tvaru $a\alpha + b\beta$. Tak z první rovnice vyjde:

$$102 = 858 \,.\, 1 - 252 \,.\, 3 \quad (\alpha = +1, \ \beta = -3).$$

Z první a druhé rovnice dostaneme:

$$48 = 252 - 102 \,.\, 2 = -858 \,.\, 2 + 252 \,.\, 5 \quad (\alpha = -2, \ \beta = 5).$$

Z první, druhé a třetí rovnice (1,1) plyne:

$$6 = 102 - 48 \,.\, 2 = 858 \,.\, 5 - 252 \,.\, 17 \quad (\alpha = 5, \ \beta = -17).$$

5. Poslední nenulový zbytek je tedy nejen dělitelem čísel a, b, ale je dělitelný i jejich největším společným dělitelem δ, neboť je ve tvarů $a\alpha + b\beta$. Je tudíž poslední nenulový zbytek právě největším společným dělitelem obou čísel.

6. Důkaz jsme naznačili na číselném příkladě, aby byl konkretní; postup důkazu je však zcela obecný a proto jsme vyslovené tvrzení dokázali obecně.

Pojmu největšího společného dělitele užíváme u libovolných celých čísel tak, že nepřihlížíme k jejich znamením. Tak na př. čísla 28, 60; -28, 60; 28, -60; -28, -60 mají téhož největšího společného dělitele, totiž 4.

Pravíme, že čísla a, b jsou *nesoudělná*, je-li jejich největší společný dělitel 1. Jsou tedy na př. každá dvě prvočísla nesoudělná, ale jsou nesoudělná také složená čísla $24 = 2^3 \,.\, 3$, $175 = 5^2 \,.\, 7$. Podle předcházejícího výkladu *lze určit k nesoudělným číslům a, b celá čísla α, β tak, že platí*:

$$a\alpha + b\beta = 1. \tag{1,2}$$

Obráceně, lze-li k dvěma číslům a, b najíti celá čísla α, β tak, že platí rovnice (1,2), *jsou čísla a, b nesoudělná* (proč?).

V dalších výkladech užijeme vět:

a) *Jsou-li a, b dvě nesoudělná čísla a je-li b dělitelem součinu ac, je b dělitelem čísla c.*

b) *Jsou-li a, b dvě nesoudělná čísla a je-li každé z nich dělitelem čísla c, je také jejich součin dělitelem čísla c.*

c) *Je-li δ největší společný dělitel čísel a, b, jsou celá čísla $\dfrac{a}{\delta}$, $\dfrac{b}{\delta}$ nesoudělná.*

Tvrzení a) dokážeme třeba tak, že znásobíme rovnici (1,2) číslem c; protože je pak b dělitelem obou členů na levé straně, je také dělitelem pravé strany.

Podobně postupujeme při důkazu věty b). V rovnici $ac\alpha + bc\beta = c$ nahradíme v prvním členu $c = kb$, v druhém $c = ma$ a dostaneme $ab \,.\, (k\alpha + m\beta) = c$: odtud je správnost b) patrná.

Při důkaze tvrzení c) vyjdeme z dokázané rovnice

$$a\alpha + b\beta = \delta$$

a dělíme ji číslem δ. Dostaneme rovnici

$$\frac{a}{\delta} \, . \, \alpha + \frac{b}{\delta} \, . \, \beta = 1,$$

která říká, že čísla $\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}$ jsou nesoudělná.

Z rozkladu čísla v součin mocnin prvočinitelů nahlédne čtenář snadno sám větu:

Je-li δ největší společný dělitel čísel a, b, a je-li ε největší společný dělitel čísel c, δ, je ε největší společný dělitel čísel a, b, c.

Uvedené věty si objasníme na příkladě:

Čísla -84, 102 mají největšího společného dělitele 6. Z Euklidova algoritmu vyjde rovnice

$$6 = 5 \, . \, 102 - 6 \, . \, 84.$$

Dělíme-li ji šesti, dostaneme

$$1 = 5 \, . \, 17 - 6 \, . \, 14.$$

Čísla 14, 17 jsou opravdu nesoudělná. Přibereme-li k daným dvěma číslům další číslo 105, pak z rozkladu $-84 = -2^2 \, . \, 3 \, . \, 7$, $102 = 2 \, . \, 3 \, . \, 17$, $105 = 3 \, . \, 5 \, . \, 7$ vyplývá, že největší společný dělitel všech tří čísel je $\varepsilon = 3$. K témuž výsledku dojdeme, vyhledáme-li největšího společného dělitele čísel 6, 105.

Cvičení 1. K dvěma číslům 48, 84 najděte třetí číslo x tak, aby každé číslo z trojice bylo dělitelem součinu ostatních dvou. Kolik má úloha řešení? [*Návod*: rozložte $48 = 12 \, . \, 4$, $84 = 12 \, . \, 7$ a ukažte, že x je násobek čísla $4 \, . \, 7$ nikoli větší než $48 \, . \, 84$.]

2. Pro která x je $y = \dfrac{2x}{x-3}$ celé číslo? [*Návod*: položte $x = 3 + t$.]

3. Pomocí Euklidova algoritmu najděte největšího společného dělitele čísel 420, 1155.

4. Pomocí Euklidova algoritmu najděte největšího společného dělitele mnohočlenů $2x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$, $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. [*Návod*: provede se postupné dělení mnohočlenu mnohočlenem, jako se provádělo při zvláštních číslech.]

5. Dokažte: je-li n číslo celé, je N dělitelné šesti. a) $N = n(n + 1)(2n + 1)$, b) $N = n^3 + 5n$. [*Návod*: v obou případech dokažte nejprve, že N je sudé, a pak, že je dělitelné třemi. K tomu užijte vztahů a) $2n + 1 = 2(n + 2) - 3$, b) $n^2 + 5 = (n + 1)(n + 2) - 3(n - 1)$ a uvažte, že jedno z čísel n, $n + 1$, $n + 2$ je vždy dělitelné třemi.]

2. LINEÁRNÍ ROVNICE O 2 NEZNÁMÝCH

Obrátíme se nyní k vlastnímu úkolu, t. j. k řešení neurčitých rovnic. *Neurčitou čili diofantickou rovnicí* budeme rozuměti algebraickou rovnici, která má nekonečně mnoho řešení. Taková rovnice má jistě aspoň dvě neznámé, ale ne každá rovnice o dvou neznámých je neurčitá. Na př. rovnice $(x^2 - 1)(y + 1) = 0$ není neurčitá (proč?).

Řešením neurčité rovnice budeme rozuměti v dalším toto: *vyhledati všechna celá čísla, která dané rovnici vyhovují.*

V této kapitole si rozřešíme lineární rovnici o dvou neznámých. Napíšeme ji v tvaru

$$ax + by = c; \tag{2,1}$$

při tom budeme předpokládati, že a, b, c jsou čísla celá.

Má-li rovnice (2,1) vůbec nějaké celočíselné řešení x, y, pak největší společný dělitel čísel a, b je dělitelem čísla c. Tato podmínka je tedy *nutná* pro řešitelnost rovnice (2,1); to znamená: není-li splněna, není rovnice (2,1) řešitelná. Na př. rovnice $2x + 4y = 5$ je neřešitelná.

Ale uvedená podmínka také *stačí* k tomu, aby rovnice (2,1) byla řešitelná. Platí totiž: je-li největší společný dělitel δ čísel a, b dělitelem čísla c, má rovnice (2,1) řešení.

Abychom to dokázali, uvážíme, že $\frac{a}{\delta}$, $\frac{b}{\delta}$ jsou čísla nesoudělná. Podle kap. 1 lze určiti celá čísla α, β tak, že

$$\frac{a}{\delta}\,\alpha + \frac{b}{\delta}\,.\,\beta = 1. \tag{2,2}$$

Celá čísla $x = \alpha\,.\,\frac{c}{\delta}$, $y = \beta\,.\,\frac{c}{\delta}$ jsou pak řešením rovnice (2,1), což nahlédneme, znásobíme-li rovnici (2,2) číslem c.

Můžeme tedy vysloviti tento souhrnný výsledek: *nutná a postačující podmínka, aby rovnice* (2,1) (kde a, b, c jsou celá čísla) *byla řešitelná celými čísly, je, aby největší společný dělitel čísel a, b byl dělitelem čísla c.*

Jinak vysloveno: *rovnice* (2,1) *má celočíselné řešení tehdy a jen tehdy, je-li největší společný dělitel čísel a, b dělitelem čísla c.*

Je-li rovnice (2,1) řešitelná, pak nemá jediné řešení, nýbrž — jak uvidíme — nekonečně mnoho řešení. Určíme-li jedno z nich jakýmkoli způsobem (Euklidovým algoritmem nebo zkusmo), dostaneme snadno všechna ostatní. Probereme si zase nejprve číselný příklad. Rovnice

$$9x - 42y = 15 \tag{2,3}$$

je podle předchozího řešitelná, neboť největší společný dělitel čísel 9, 42, totiž 3, je dělitelem čísla 15. Zkrátíme rovnici (2,3) třemi: vyjde

$$3x - 14y = 5. \tag{2,4}$$

Tato rovnice má zřejmě táž řešení jako (2,3). Jedno řešení rovnice (2,4) je $x = 11$, $y = 2$ (určeno zkusmo). Platí totiž

$$3 \,.\, 11 - 14 \,.\, 2 = 5.$$

Odečteme tuto rovnici od rovnice (2,4): dostaneme

$$3(x - 11) - 14(y - 2) = 0,$$

čili

$$3(x - 11) = 14(y - 2). \tag{2,5}$$

Čísla 3, 14 jsou nesoudělná: 3 je dělitelem součinu $14(y - 2)$; podle kap. 1 je tedy 3 dělitelem čísla $y - 2$. Lze tudíž určiti celé číslo t tak, že $y - 2 = 3t$. Dosadíme-li do rovnice (2,5) za $y - 2$ a krátíme třemi, vyjde $x - 11 = 14t$. Každé celočíselné řešení rovnice (2,4) lze tedy napsati v tvaru:

$$\begin{aligned} x &= 11 + 14t, \\ y &= 2 + 3t, \end{aligned} \tag{2,6}$$

kde t je *nějaké* celé číslo. Zvolíme-li za t v těchto dvou rovnicích *libovolné* celé číslo, jsou příslušná x, y celočíselným řešením rovnice (2,4), jak se přesvědčíme dosazením. Rovnice (2,6) nám tedy dávají právě všechna řešení rovnice (2,4).

Podobného postupu užijeme obecně. Rovnici (2,1) krátíme největším společným dělitelem čísel a, b (který musí být dělitelem čísla c). Je-li x_0, y_0 jedno řešení rovnice (2,1), dostaneme všechna ostatní ve tvaru:

$$x = x_0 + \frac{b}{\delta} \cdot t,$$

$$y = y_0 - \frac{a}{\delta} \cdot t,$$

kde t probíhá všecka celá čísla. Odvoďte si podrobně sami!

Nejjednodušším případem neurčité lineární rovnice o dvou neznámých je t. zv. *homogenní rovnice* (s nulovým absolutním členem)

$$ax + by = 0.$$

Tato rovnice je vždy řešitelná (proč?). Napište sami její obecné řešení!

Protože určení jednoho řešení rovnice (2,1) pomocí Euklidova algoritmu nebo zkusmo je někdy zdlouhavé, užíváme v praxi tohoto způsobu:

Rovnici, jejíž řešitelnost jsme zjistili, na př.

$$-17x + 91y = 24,$$

upravíme na tvar

$$17x = -24 + 91y, \tag{2,7}$$

t. j. osamostatníme člen s tou neznámou, jejíž koeficient má menší absolutní hodnotu. Rovnice (2,7) vyjadřuje, že $-24 + 91y$ je číslo dělitelné sedmnácti. To znamená, přičteme-li ke každému členu na pravé straně rovnice (2,7) libovolný násobek sedmnácti, zůstane výsledek dělitelný sedmnácti. Násobky zvolíme tak, aby se absolutní hodnota čísel co nejvíce zmenšila. Přičteme tedy k prvnímu členu -24 číslo $1 \cdot 17$, k druhému $-5 \cdot 17y$. Vyjde $-7 + 6y$, což je jistý násobek sedmnácti: existuje tedy celé číslo u tak, že platí

$$17u = -7 + 6y,$$

čili

$$6y = 7 + 17u. \tag{2,8}$$

Na rovnici (2,8) užijeme téhož postupu jako dříve. Dostaneme:

$$6v = 1 - u,$$

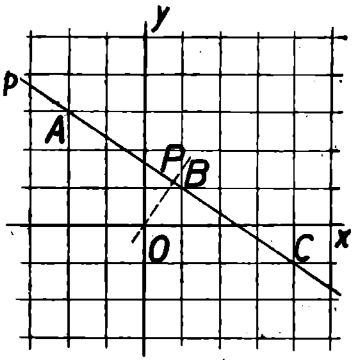
čili $u = -6v + 1$. Za u dosadíme do (2,8), vyjde po úpravě $y = 4 - 17v$. Za y dosadíme do (2,7): vyjde po úpravě $x = -91v + 20$. Každé řešení dané rovnice lze tedy napsati ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= -91v + 20, \\ y &= 4 - 17v, \end{aligned} \tag{2,9}$$

kde v je celé číslo.

Obráceně rovnice (2,9) dávají pro každé celé číslo v celočíselné řešení dané rovnice, jak se přesvědčíme dosazením. Žádáme-li na př. jen kladná řešení, dostaneme z nerovností $x > 0$, $y > 0$ podmínky $v < \frac{20}{91}$, $v < \frac{4}{17}$, t. j. $v = 0, -1, -2, \ldots$.

Promluvíme si ještě o jednoduchém geometrickém významu řešení neurčité lineární rovnice. Jistě víte, jak si graficky znázorňujeme rovnice o dvou proměnných x, y. Vycházíme ze soustavy pravoúhlých souřadnic: poloha bodu v rovině je dána dvojicí reálných čísel x, y — jeho souřadnic. Jsou-li obě souřadnice x, y celá čísla, dostaneme bod, kterému říkáme *mřížový bod* roviny. Všecky mřížové body dostaneme jako průsečíky rovnoběžek s osami souřadnic, vedenými ve vzdálenostech $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (obr. 1).



Obr. 1.

Rovnici $ax + by = c$ vyhovuje nekonečně mnoho dvojic čísel x, y; jejich geometrickým znázorněním je nekonečně mnoho bodů. Tyto body vyplňují přímku a říkáme, že rovnice $ax + by = c$ je její rovnicí. Najíti všecka celočíselná řešení této rovnice znamená tedy geometricky: nalézti na dané přímce všecky mřížové body.

Na obr. 1 je znázorněna přímka p o rovnici $2x + 3y = 5$. Její celočíselná řešení dostaneme známým způsobem ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= 4 - 3u, \\ y &= 2u - 1, \end{aligned} \tag{2,10}$$

dosazujeme-li za u čísla celá. Tím jsou dány i mřížové body na přímce p. Na obr. 1 jsou vyznačeny body $(-2; 3)$, $(1; 1)$, $(4; -1)$, které dostaneme z rovnic (2,10) postupně pro $u = 2, 1, 0$.

Všimněme si ještě, že dosadíme-li do rovnic (2,10) *libovolné* (nikoli celé) číslo za u, dostaneme souřadnice x, y, které vyhovují rovnici

$2x + 3y = 5$ přímky p. Rovnicemi (2,10) jsou tedy vyjádřeny souřadnice všech bodů přímky p pomocí nové proměnné u, t. z. *parametru*: proto se rovnice (2,10) nazývají *parametrické rovnice přímky* p. Čtenáři, kteří se trochu vyznají v základech analytické geometrie, vědí, jak početně určíme bod přímky p nejbližší počátku: je to pata P kolmice vedené počátkem k přímce p. Rovnice této kolmice je — jak známo z analytické geometrie —

$$3x - 2y = 0. \tag{2,11}$$

Parametr u_0 bodu P dostaneme, dosadíme-li za x, y do rovnice (2,11) z rovnic (2,10) a vypočteme u: vyjde $u_0 = \frac{12}{13}$. Mřížový bod přímky p nejbližší počátku tedy určíme, najdeme-li celé číslo u nejbližší hodnotě $u_0 = \frac{12}{13}$. Tím číslem je $u = 1$ a nejbližší mřížový bod je proto (1; 1) v souhlase s obr. 1.

Cvičení 6. Rozřešte úlohu z úvodu.

7. Věk muže a ženy jsou obrácená*) (dvouciferná) čísla a jejich rozdíl je pětina věku ženina. Určete je.

8. Vypočtěte na desítky dkg váhu dvou druhů konserv; menší konserva je lehčí než 1 kg a podařilo se vyvážiti 11 menších konserv šesti většími a kilogramovým závažím.

9. 19 bodů v rovině, z nichž žádné tři nejsou v přímce, spojujeme tak, aby vznikaly trojúhelníky a čtyřúhelníky. Kolik narýsujeme trojúhelníků a kolik čtyřúhelníků, je-li každý bod vrcholem jediného obrazce?

10. Na přímce $5x + 3y = 11$ najděte mřížový bod nejbližší ose x.

11. Několik osob je účastno stejnými podíly na společné koupi. Vzroste-li počet účastníků o 3, klesne velikost podílu o 4 tisíce Kčs. Kolik bylo původně osob a jaký byl podíl?

12. Dopravní podniky mají k disposici pro dopravení 12 000 osob dva druhy souprav: souprava A pojme 90 osob, souprava B 150 osob. Kolik kterých souprav je třeba, aby byl jejich celkový počet co nejmenší. [*Návod*: je-li x počet souprav A, y počet souprav B, sestavíme rovnici a rozřešíme ji: pak vyjádříme $x + y$ pomocí veličiny u a u zvolíme tak, aby $x + y$ bylo minimální.]

13. Sněmovna cizího státu má 253 poslance, kteří náležejí třem stranám: vládní, neutrální a oposici. Vládní strana je největší, ale nemá absolutní většinu: k jejímu dosažení potřebuje právě 28% hlasů strany neutrální. Obě neoposiční strany mají dohromady víc než dvoutřetinovou většinu. Kolik poslanců mají jednotlivé strany? [*Návod*: označte x počet hlasů strany vládní, y počet hlasů strany neutrální: pro řešení užijte omezení $x > y$, $x + y \geq 169$.]

---

*) Obrácená čísla jsou na př. 2374 a 4732.

3. NEURČITÉ ROVNICE I. STUPNĚ O 3 NEZNÁMÝCH

Neurčitou lineární rovnici o 3 neznámých napíšeme v tvaru:

$$ax + by + cz = d \tag{3,1}$$

a předpokládáme, že a, b, c, d jsou čísla celá, a, b, c různá od nuly (proč?). Jako v kap. 2 budeme rozlišovati úlohu, najíti podmínku řešitelnosti rovnice (3,1) od úlohy, rozřešiti tuto rovnici.

a) Rovnici (3,1) si upravíme:

$$ax + by = d - cz. \tag{3,2}$$

Považujeme-li rovnici (3,2) za neurčitou rovnici pro neznámé x, y, pak podle kap. 2 je nutná a postačující podmínka její řešitelnosti, aby největší společný dělitel δ čísel a, b byl dělitelem čísla $d - cz$. Jinak řečeno: podmínkou řešitelnosti rovnice (3,2) je, aby existovalo celé číslo t tak, že

$$\delta t = d - cz.$$

Poslední rovnici upravíme:

$$cz + \delta t = d. \tag{3,3}$$

Rovnice (3,3) je neurčitá rovnice pro neznámé z, t. Můžeme tedy říci: rovnice (3,1), resp. (3,2) je řešitelná tehdy a jen tehdy, je-li řešitelná rovnice (3,3). Podle kap. 2 však víme, že podmínka řešitelnosti rovnice (3,3) je, aby největší společný dělitel ε koeficientů c, δ byl dělitelem čísla d. Podle kap. 1 je ε zároveň největším společným dělitelem čísel a, b, c. Máme tedy tento konečný výsledek:

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti rovnice (3,1) je, aby největší společný dělitel čísel a, b, c byl dělitelem čísla d.

b) Řešení rovnice (3,1) provedeme analogickým způsobem jako při rovnici o dvou neznámých. Budiž dána na př. rovnice

$$18x - 12y + 15z = 6.$$

Podle předchozí věty je tato rovnice řešitelná. Krátíme třemi a osamostatníme člen s koeficientem nejmenší absolutní hodnoty.

$$4y = 6x + 5z - 2. \tag{3,4}$$

Přičtením vhodných násobků čtyř dostaneme

$$4u = 2x + z - 2,$$

čili

$$z = 4u - 2x + 2.$$

Po dosazení za z do rovnice (3,4) vyjde

$$y = -x + 5u + 2.$$

Celočíselná řešení dané rovnice jsou tedy dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= -\ \ x + 5u + 2, \\ z &= -2x + 4u + 2, \end{aligned} \tag{3,5}$$

do nichž dosazujeme za x, u všechna celá čísla.

Požadujme ještě od řešení dané rovnice, aby splňovalo nějakou další podmínku. Hledejme na př. v předchozím příkladě taková celočíselná řešení x, y, z, v nichž y je číslo dělitelné sedmi. Přihlédneme-li k druhé z rovnic (3,5), znamená tato podmínka, že existuje celé číslo v tak, že platí

$$7v = -x + 5u + 2.$$

Z této rovnice dostaneme

$$x = 5u - 7v + 2$$

a po dosazení do rovnic (3,5) vyjde

$$\begin{aligned} y &= 7v, \\ z &= -6u + 14v - 2. \end{aligned}$$

Další podmínka může být dána další lineární rovnicí mezi neznámými x, y, z. Tak dostaneme *neurčitou soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých*, t. j. soustavu, která má nekonečně mnoho řešení. Hledáme opět její celočíselná řešení. Nebudeme odvozovati obecnou podmínku řešitelnosti, která je v tomto případě již poněkud složitější. Ukážeme jen na číselném příkladě, jak se taková soustava řeší.

Mějme tedy na př. soustavu:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 3, \\ 3x + \ \ y + 2z &= 1. \end{aligned} \tag{3,6}$$

Vybereme si tu neznámou, která se vyskytuje v obou rovnicích, v našem příkladě třeba y. (Co by znamenal případ, kdyby se žádná neznámá nevyskytovala v obou rovnicích?) Tuto neznámou vyloučíme z rovnic (3,6) obvyklým způsobem. Není-li levá strana jedné rovnice násobkem levé strany druhé rovnice, nevyloučí se *všechny* neznámé a vyjde neurčitá rovnice pro x, z. V našem případě:

$$-5x - 7z = 1. \tag{3,7}$$

Je-li tato rovnice řešitelná, jako je tomu s rovnicí (3,7), rozřešíme ji známým způsobem. V našem případě vyjde

$$\begin{aligned} x &= -7v - 3, \\ z &= 5v + 2. \end{aligned} \tag{3,8}$$

Z rovnic (3,8) dosadíme do jedné z rovnic (3,6), třeba do druhé: dostaneme neurčitou rovnici pro y, v:

$$-11v + y = 6. \tag{3,9}$$

Je-li rovnice (3,9) řešitelná, jak je tomu v našem případě, rozřešíme ji. Ve zvoleném příkladě dostaneme ihned

$$y = 11v + 6,$$

což dává spolu s rovnicemi (3,8) řešení soustavy (3,6). Je-li některá z rovnic (3,7) nebo (3,9) neřešitelná, je ovšem také soustava (3,6) neřešitelná.

Nejjednodušší, vždy řešitelný případ neurčité lineární rovnice o třech neznámých je *homogenní rovnice* (proč?). Také soustava dvou takových rovnic je řešitelná, a to má řešení různé od triviálního řešení $x = y = z = 0$, jak vyplývá z následující úvahy.

Předem vyloučíme soustavy, kde jedna z rovnic je násobkem druhé (proč?). Soustavu, na př.

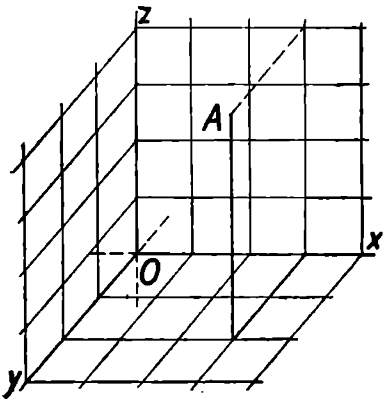
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0, \\ 4x + 2y + 3z &= 0, \end{aligned} \tag{3,10}$$

upravíme tak, že osamostatníme na pravé straně členy s jednou neznámou: tuto neznámou zvolíme tak, aby levé strany výsledných rovnic nebyly jedna násobkem druhé. Taková volba je vždy možná vzhledem k případu, který jsme předem vyloučili. (Soustavu $2x - 3y + z = 0$, $4x - 6y + 3z = 0$ bychom upravili takto: $2x + z = 3y$, $4x + 3z = 6y$.) Soustavu (3,10) upravíme třeba takto:

$$2x - 3y = -\ z,$$
$$4x + 2y = -\ 3z.$$

Tuto soustávu rozřešíme obvyklým způsobem. Vyjde $x = -\frac{11}{16}z$, $y = -\frac{1}{8}z$, čili $x : y : z = 11 : 2 : (-16)$. Soustava (3,10) neurčuje jednoznačně neznámé, nýbrž jen jejich poměr. Celočíselná řešení můžeme napsati v tvaru

$$x = 11u,\ y = 2u,\ z = -\ 16u,$$



Obr. 2.

kde u probíhá všecka celá čísla. Jaké je řešení soustavy uvedené v závorkách?

Všimneme si ještě jednoduchého geometrického významu celočíselného řešení rovnic o třech neznámých.

Jako v kap. 2 vyjdeme ze soustavy pravoúhlých souřadnic, tentokráte ovšem v prostoru, jak ji znáte z deskriptivní geometrie. Zde máme tři osy, po dvou k sobě kolmé, trojice celých čísel, na př. $(-4; 3; 1)$ jsou souřadnice t. zv. *mřížových bodů v prostoru* (obr. 2). Lineární rovnice

$$ax + by + cz = d,$$

kde a, b, c nejsou čísla vesměs rovná nule, je splněna pro nekonečně mnoho trojic čísel x, y, z. Dokazuje se, že příslušné body vyplňují rovinu, která je grafickým znázorněním dané rovnice. Probrané aritmetické úlohy znamenají geometricky: nalézti mřížové body, které leží v dané rovině nebo ve dvou rovinách. Dvě roviny jsou buď rovnoběžné nebo se protínají v přímce. Rovnoběžnost se pozná z jejich rovnic podle toho, že levá strana jedné rovnice je násobkem levé strany druhé. Tento případ jsme však při řešení soustavy vyloučili. Úloha, nalézti celočíselná řešení dvou lineárních rovnic o třech neznámých znamená tedy geometricky: určiti mřížové body, které leží na dané přímce v prostoru.

Na konci kapitoly ještě dvě *poznámky*:

a) Způsob, jak se řeší lineární rovnice o třech neznámých, se velmi snadno rozšíří na lineární rovnici o libovolném počtu neznámých. Také výsledná podmínka je obdobná: řešitelnost takové rovnice závisí na tom, zda největší společný dělitel koeficientů při neznámých je dělitelem absolutního členu či nikoli.

Také soustavy lineárních rovnic o větším počtu neznámých se řeší obdobně jako soustava dvou rovnic o třech neznámých, totiž vylučováním neznámých a snižováním počtu rovnic.

b) Co bylo řečeno o celočíselných řešeních lineárních rovnic s celočíselnými koeficienty, platí i o rovnicích s koeficienty, které jsou racionální čísla (t. j. zlomky obyčejné). Na př. rovnice

$$1{,}7x - \tfrac{3}{2}y = \tfrac{2}{3} \tag{3,11}$$

se převede znásobením třiceti na rovnici s celočíselnými koeficienty

$$51x - 45y = 20. \tag{3,12}$$

Rovnice (3,11) a (3,12) mají táž řešení: rozřešíme tedy rovnici (3,12) a tak dostaneme celočíselná řešení rovnice (3,11).

Cvičení 14. Rozdíl obrácených čísel dvouciferných (tříciferných) je dělitelný sedmi. Najděte je!

15. Řešte rovnici $5x + 6y - 8z = 92$ celými čísly tak, aby řešení x, y, z byla čísla navzájem co nejbližší.

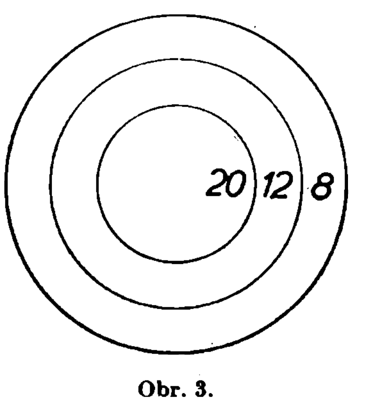
16. Najděte v rovině $3x + 4y - 7z = 1$ mřížový bod, jehož souřadnice jsou si navzájem co nejbližší.

17. K balení kusového zboží jsou k disposici tři druhy beden, které pojmou po 60, 80 a 150 kusech. Kolik beden každého druhu je třeba k zabalení 10 000 kusů, má-li být středních beden co nejméně?

18. Řešte soustavu:

$$2x - 3y + 5z = 4,$$
$$6x + 5y - 7z = 1.$$

19. Chlapci — bylo jich méně než sto — nastoupili do osmistupu a zbyli tři: když nastoupili do pětistupu, zbyli dva, v šestistupu zbyl jen jeden. Kolik jich bylo?



Obr. 3.

20. Bylo vystřeleno několik ran do terče s třemi soustřednými kruhy, označenými čísly 8, 12, 20 (obr. 3). Každá rána byla zásahem a celkový počet bodů byl 168. V středním kruhu bylo tolik zásahů jako v obou ostatních dohromady. Kolik bylo zásahů v jednotlivých kruzích?

21. Řešte soustavu

$$
\begin{aligned}
x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{2}z - 2u &= 1,\\
3x + 2y - \tfrac{3}{4}z + \tfrac{1}{3}u &= \tfrac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

22. Elektrické články s napětím 0,8 V, 1,2 V, 1,5 V, 2 V se mají spojiti za sebou v baterii o napětí 30 V. Nechť je článků všech druhů přibližně týž počet. Kolik je kterých?

23. Je možné naplniti jedním hektolitrem oleje 15 nádob o objemu 5, 6, 8 litrů?

4. NEJJEDNODUŠŠÍ NEURČITÉ ROVNICE 2. STUPNĚ

Při neurčitých rovnicích vyšších stupňů se setkáváme velmi často s pojmem parity. Říkáme, že dvě sudá čísla nebo dvě lichá čísla jsou *téže parity*, dvě celá čísla, z nichž jedno je sudé, druhé liché, jsou *různé parity*. Každé liché číslo můžeme napsati ve tvaru $2n + 1$, kde n je číslo celé, každé sudé číslo pak ve tvaru $2n$ (n celé): připomeňme si, že nula je sudé číslo. Druhá mocnina (čtverec) sudého čísla je $4n^2$, t. j. číslo dělitelné čtyřmi. Čtverec lichého čísla je $4n^2 + 4n + 1$, t. j. číslo, které děleno čtyřmi dá zbytek 1. Sudé číslo, které není dělitelno čtyřmi, na př. 4862, nemůže být čtvercem žádného celého čísla. Totéž platí o lichém čísle, které děleno čtyřmi dá zbytek 3, na př. 56847.

Nejprve se budeme zabývati neurčitou kvadratickou rovnicí o 2 neznámých x, y

$$x^2 - y^2 = c, \tag{4,1}$$

kde c je dané přirozené číslo. Ptejme se, pro která c je rovnice (4,1) řešitelná. Levou stranu rozložíme:

$$(x + y)(x - y) = c. \tag{4,1'}$$

Jsou-li x, y téže parity, jsou čísla $x + y$, $x - y$ sudá, jejich součin, t. j. číslo c, je dělitelné čtyřmi. Jsou-li x, y různé parity, jsou čísla $x + y$, $x - y$ lichá, číslo c je také liché. Ukázali jsme tedy, že je-li rovnice (4,1) řešitelná, je číslo c buď liché nebo dělitelné čtyřmi. Zároveň nám rovnice (4,1') ukazuje cestu, jak řešiti rovnici (4,1): je třeba rozložiti dané číslo c ve dva činitele téže parity: jednoho (většího) z činitelů položíme rovna $x + y$, druhého (menšího) $x - y$ a vypočteme x, y. Jsou-li oba činitelé stejní, t. j. je-li $x + y = x - y$, je $y = 0$, $x^2 = c$. Tímto způsobem je rovnice (4,1) řešitelná jen tehdy, je-li c čtverec přirozeného čísla. Je-li c liché číslo větší než 1 nebo číslo dělitelné čtyřmi větší než 4, lze provést aspoň jeden rozklad ve dva různé činitele, a to pro $c = 2n + 1 = 1 . (2n + 1)$, pro $c = 4n = 2 . 2n$. Máme tedy tento výsledek:

Rovnice (4,1) *je řešitelná celými čísly tehdy a jen tehdy, je-li c číslo liché nebo dělitelné čtyřmi.*

Řešení provedeme popsaným rozkladem čísla c.

Na př. rovnice $x^2 - y^2 = 15$ se rozřeší tak, že rozložíme $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$. Položíme nejprve $x + y = 5$, $x - y = 3$, dostaneme $x = 4$, $y = 1$, pak položíme $x + y = 15$, $x - y = 1$, vyjde $x = 8$, $y = 7$. Rovnici $x^2 - y^2 = 36$ rozřešíme z rozkladů $36 = 2 \cdot 18 = 6 \cdot 6$ (nikoli $3 \cdot 12$ nebo $4 \cdot 9$) a položíme postupně $x + y = 18; 6$, $x - y = 2; 6$; vyjde $x_1 = 10$, $y_1 = 8$, $x_2 = 6$, $y_2 = 0$. Rovnice $x^2 - y^2 = 22$ je neřešitelná.

Uváděli jsme vesměs jen řešení kladná nebo rovná nule. Je patrné, že u každého řešení můžeme připojiti libovolná znamení.

Mezi jednoduché rovnice 2. stupně náleží také t. zv. rovnice *bilineární*:

$$axy + bx + cy + d = 0. \tag{4,2}$$

Budeme předpokládati, že a, b, c, d jsou čísla celá, a mimo to a, c nesoudělná. Z rovnice (4,2) vyjádříme y:

$$y = -\frac{bx + d}{ax + c} \tag{4,3}$$

a budeme řešiti rovnici (4,3). To znamená: určíme celé číslo x tak, aby zlomek v rovnici (4,3) měl celočíselnou hodnotu. Zvláštní případ této úlohy jste řešili v cvičení 2. Nyní ji probereme obecně. Položíme

$$\begin{aligned} u &= bx + d \\ v &= ax + c. \end{aligned} \tag{4,4}$$

Z rovnic (4,4) vyloučíme x: dostaneme

$$au - bv = ad - bc. \tag{4,5}$$

Je-li v dělitel čísla u, je podle (4,5) v také dělitelem čísla $ad - bc$. Obráceně budiž v libovolný dělitel čísla $ad - bc$. Podle (4,5) je $au = (ad - bc) + bv$; odtud vyplývá, že v je dělitelem čísla au. Podle předpokladu jsou a, c čísla nesoudělná. Druhá z rovnic (4,4) ukazuje, že jsou pak též čísla a, v nesoudělná: neboť každý společný dělitel čísel a, v je také dělitelem čísel a, $c = v - ax$. Ježto je tedy v dělitelem čísla au a a, v jsou nesoudělná, je v dělitelem u. Celé číslo x, které vyhovuje rovnici $ax + c = v$, vede k řešení rovnice (4,3).

Řešíme tedy bilineární rovnici, na př.

$$2xy - 4x + 3y + 3 = 0$$

takto: upravíme ji na tvar

$$y = \frac{4x - 3}{2x + 3},$$

vypočteme $ad - bc = -18$: vyhledáme všecky dělitele m čísla -18: $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$: řešíme rovnice

$$2x + 3 = m:$$

pokud jsou kořeny celočíselné, vedou k řešení dané rovnice. V našem případě pro $m = \pm 2, \pm 6, \pm 18$ nedostaneme celočíselné kořeny. Pro $m = \pm 1, \pm 3, \pm 9$ vyjdou kořeny $x = -1; -2; 0; -3; 3; -6$ a příslušné hodnoty y jsou $-7; 11; -1; 5; 1; 3$.

Jsou-li a, c soudělná čísla, na př. v rovnici

$$10xy - 4x + 15y + 3 = 0, \tag{4,6}$$

upravíme (4,3) takto:

$$y = \frac{1}{5} \cdot \frac{4x - 3}{2x + 3}.$$

Rozřešíme známým postupem rovnici

$$y' = \frac{4x - 3}{2x + 3}. \tag{4,7}$$

Řešením rovnice (4,6) je pak jen takové řešení rovnice (4,7), které je dělitelno pěti. V našem případě je (4,7) rovnice dříve řešená: dostaneme tedy jediné řešení rovnice (4,6) $x = -3$, $y = 1$.

V předcházejících úvahách jsme mlčky předpokládali, že $ad - bc \neq 0$. Čtenář si snadno sám rozhodne řešitelnost rovnice v případě, že $ad - bc = 0$.

Kvadratickým rovnicím, o nichž jsme právě jednali, lze přisouditi geometrický význam podobným postupem, jakého jsme užili při neurčitých rovnicích 1. stupně. Tak na př. řešiti rovnici $x^2 - y^2 = c$ pro dané c znamená, určiti mřížové body na dané rovnoosé hyperbole, a pod.

Cvičení **24.** Rozřešte rovnici $x^2 - 4y^2 = 420$.

25. Rozřešte rovnici $y(2x + y) = 65$. [*Návod*: zaveďte místo y novou neznámou $z = x + y$.]

26. Dokažte, že součtem libovolného konečného počtu lichých čísel následujících za sebou je buď číslo liché nebo číslo dělitelné čtyřmi. [*Návod*: sečtěte lichá čísla od $2n_1 + 1$ do $2n_2 + 1$.]

27. Zjistěte, které mřížové body leží na hyperbole $5xy - 2x + 3y + 3 = 0$.

28. Pro která celá čísla x má zlomek $\dfrac{8x - 1}{6x + 9}$ celočíselnou hodnotu?

29. Rozhodněte, zda rovnice $11x - 7y = 9$ má takové celočíselné řešení x, y, aby x bylo dělitelem y.

30. Otec je stár 29 let, syn 4 roky: za kolik let bude otec n-krát tak stár jako syn? (n celé.)

31. Najděte celá čísla, jejichž harmonický průměr je také celé číslo. [Harmonický průměr h čísel a, b je definován vztahem: $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Při řešení úlohy odstraňte v této rovnici nejprve zlomky a pak položte $a + b = x$, $a - b = y$: vyjde $y^2 = kx$ (k celé): volte y^2 a rozkládejte je v součin dvou činitelů k, x, kteří jsou — jak dokážete — téže parity.]

5. PYTHAGOROVA ROVNICE

Nejdůležitější z jednoduchých neurčitých rovnic 2. stupně je rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2; \tag{5,1}$$

její řešení (omezíme se jen na celá kladná čísla) jsou t. zv. ***čísla pythagorejská.*** Geometrický význam řešení rovnice (5,1) je zřejmý: hledáme pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami. Budeme nejprve určovati jen taková řešení rovnice (5,1), kde x, y, z jsou nesoudělná: ostatní z nich snadno dostaneme. Je-li totiž $\delta > 1$ největší společný dělitel čísel x, y, z, můžeme psáti $x = \delta x'$, $y = \delta y'$, $z = \delta z'$, kde x', y', z' jsou nesoudělná. Dosadíme-li do rovnice (5,1) za x, y, z a krátíme δ^2, vyjde $x'^2 + y'^2 = z'^2$, t. j. x', y', z' jsou řešením (5,1) předpokládané vlastnosti.

Po tomto omezení je patrné, že x, y nejsou obě čísla sudá: neboť pak by bylo také z^2 i z číslo sudé a x, y, z by měla proti předpokladu společného dělitele 2. Avšak čísla x, y nemohou být také obě lichá: neboť pak bychom mohli psáti $x = 2\xi + 1$, $y = 2\eta + 1$, $z^2 = x^2 + y^2 = 4(\xi^2 + \eta^2 + \xi + \eta) + 2$: číslo z by bylo sudé, nikoli však dělitelné čtyřmi, což — jak víme — je nemožné.

Čísla x, y jsou tedy různé parity, z je liché. Zvolme si označení tak, aby x bylo sudé, y liché. Rovnici (5,1) upravme na tvar

$$(z + y)(z - y) = x^2. \tag{5,2}$$

Z rovnice (5,2) dostaneme, dělíme-li ji čtyřmi:

$$\tfrac{1}{2}(z + y) \,.\, \tfrac{1}{2}(z - y) = \tfrac{1}{4}x^2. \tag{5,3}$$

Čísla z, y jsou lichá, čísla $\frac{1}{2}(z + y)$, $\frac{1}{2}(z - y)$ jsou celá a nesoudělná. Neboť kdyby tato čísla měla společného prvočinitele p, bylo by $\frac{1}{2}(z + y) = \alpha p$, $\frac{1}{2}(z - y) = \beta p$ (α, β celá), t. j. $z = (\alpha + \beta)\, p$, $y = (\alpha - \beta)\, p$. Měla by tedy čísla z, y a podle rovnice (5,2) i číslo x společného dělitele $p > 1$ proti předpokladu.

Rovnice (5,3) ukazuje, že celé číslo $\frac{1}{4}x^2$ je rozloženo v součin dvou nesoudělných činitelů: to znamená, že každý z těchto dvou činitelů musí být čtverec celého čísla. Neboť je-li na př. q prvočinitel čísla

$\frac{1}{2}(z + y)$, je q také prvočinitelem čísla $\frac{1}{4}x^2$ i $\frac{1}{2}x$. Rovnice (5,3) je dělitelna sudou mocninou čísla q, $\frac{1}{2}(z - y)$ však není dělitelno číslem q, je tedy prvočinitel q v rozkladu čísla $\frac{1}{2}(z + y)$ v sudé mocnině. Tento úsudek platí o všech prvočinitelích čísla $\frac{1}{2}(z + y)$ (a ovšem i $\frac{1}{2}(z - y)$), je proto každé z těchto dvou čísel čtvercem celého čísla.

Položíme tedy $\frac{1}{2}(z + y) = u^2$, $\frac{1}{2}(z - y) = v^2$, pak je $\frac{1}{4}x^2 = u^2v^2$; z těchto vztahů vyjádříme x, y, z. Všecka nesoudělná řešení rovnice (5,1) vyjdou v tvaru

$$x = 2uv,\ y = u^2 - v^2,\ z = u^2 + v^2,$$

kde $u > v$, u, v jsou nesoudělná a téže parity (proč?). *Všechna řešení rovnice* (5,1) *dostaneme pak z rovnic:*

$$x = 2kuv,\ y = k(u^2 - v^2),\ z = k(u^2 + v^2), \qquad (5,4)$$
$$k \text{ celé, } u > v \text{ nesoudělná a téže parity.}$$

Dosazením se snadno přesvědčíme, že obráceně každá trojice čísel x, y, z, která vyjde z rovnic (5,4) při libovolné volbě k, u, v, je řešením rovnice (5,1). Na př. pro $u = 2$, $v = 1$, $k = 1$, vyjde známá trojice $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$, pro $u = 3$, $v = 2$, $k = 1$ trojice 12, 5, 13, a pod.

Obě uvedené trojice čísel náleží do skupiny nejstarších známých řešení, pro něž $z = x + 1$. Z rovnic (5,4) plyne z této podmínky $k(u - v)^2 = 1$, t. j. $u - v = 1$, $k = 1$: pak je $x = 2v(v + 1)$, $y = 2v + 1$, $z = 2v(v + 1) + 1$.

Skupinu dalších úloh si vyslovíme *geometricky*: Hledejme kosoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami tak, aby jedna z výšek, na př. v_c, dělila příslušnou stranu (c) ve dva úseky celočíselných délek. Úloha má smysl i pro tupoúhlé trojúhelníky (viz obr. 4). Vyjádříme podmínku rovnicí:

$$a^2 - c_1^2 = b^2 - c_2^2. \qquad (5,5)$$

Tato rovnice se má řešiti celými čísly. Označíme-li společnou hodnotu obou stran rovnice (5,5) $v_c^2 = t$, pak víme podle kap. 4, že řešení této rovnice dostaneme ze dvou rozkladů čísla t ve dva různé činitele téže parity (kdyby činitelé byli stejní, vyšlo by c_1 nebo c_2 rovné nule a trojúhelník by byl pravoúhlý proti předpokladu). Jsou-li oba rozklady čísla t stejné, vyjde $a = b$, $c_1 = c_2$, trojúhelník je rovnoramenný, jsou-li rozklady různé, je $a \neq b$, trojúhelníky jsou dva: ostroúhlý a tupoúhlý. Při řešení rovnice (5,5) vycházíme vždy z čísla t: na př. pro $t = 15 = 1 . 15 = 3 . 5$ dostaneme $a = 8$, $c_1 = 7$, $b = 4$, $c_2 = 1$: výsledné trojúhelníky mají strany $a = 8$, $b = 4$, $c = 8$ (ostroúhlý), $a' = 8$, $b' = 4$, $c' = 6$ (tupoúhlý). Pro $t = 21 = 1 . 21 = 3 . 7$ vyjdou trojúhelníky 11, 5, 12, a 11, 5, 8.

Na řešení rovnice (5,5) převádíme řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2 + u^2$$

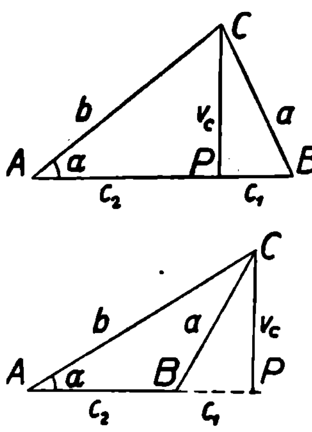
tím, že ji upravíme na tvar $x^2 - z^2 = u^2 - y^2$.

V probrané geometrické úloze jsme nepožadovali, aby výška v_c byla vyjádřena celým číslem. To nastane jen tehdy, je-li $t = v_c^2$ čtverec celého čísla, který rozložíme dvojím způsobem v součin dvou různých činitelů, ovšem téže parity (proč?). Nejmenší číslo t, pro které lze provést dva různé rozklady, je $t = 64 = 2 . 32 = 4 . 16$. Vyjde $a = 17$, $c_1 = 15$, $b = 10$, $c_2 = 6$, t. j. trojúhelník (tupoúhlý) $a = 17$, $b = 10$, $c = 21$, $v_c = 8$. Tento trojúhelník má obsah 84, jsou tedy všechny jeho výšky vyjádřeny racionálními čísly.

Uvedený trojúhelník náleží do zajímavé skupiny trojúhelníků. Z trigonometrie znáte kosinovou větu: je vyjádřena rovnicí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos\alpha$$

a dvěma dalšími vzniklými cyklickou záměnou prvků. Z těchto rovnic je patrné, že v trojúhelníku s celočíselnými stranami jsou kosiny všech úhlů racionální čísla. Je-li mimo to ještě jedna z výšek (na př. v_c) racionální, pak je také obsah vyjádřen racionálním číslem a jsou tedy všecky výšky racionální. Siny všech úhlů trojúhelníku jsou také racionální čísla, neboť na př. $\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$ (obr. 4). Trojúhelník s racionálními stranami, jehož všecky úhly mají racionální siny a kosiny, se nazývá *racionální* čili *Heronův*.



Obr. 4.

Znásobíme-li všecky délky (strany,

výšky, úseky vyťaté na stranách výškami) racionálního trojúhelníka vhodným číslem, dosáhneme toho, že všechny tyto délky budou vyjádřeny celými čísly. Jak takové trojúhelníky vyhledáme, ukázali jsme na hořejším příkladě.

Povšimněme si ještě následujícího: jsou-li kosinus i sinus úhlu α racionální čísla, můžeme psáti $\cos\alpha = \frac{k}{m}$, $\sin\alpha = \frac{l}{m}$, kde k, l, m jsou čísla celá. Ze základní rovnice $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ plyne $k^2 + l^2 = m^2$, t. j. k, l, m jsou (až na znaménka) pythagorejská čísla. V uvedeném příkladě racionálního trojúhelníku $a = 17$, $b = 10$, $c = 21$ je $\sin\alpha = \frac{2P}{bc} = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$,*) $\sin\beta = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{15}{17}$,*) $\sin\gamma = \frac{84}{85}$, $\cos\gamma = \frac{13}{85}$.*)

Cvičení 32. Najděte pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami, jejichž delší odvěsna je aritmetickým průměrem kratší odvěsny a přepony.

33. Dvě protínající se kružnice, jejichž poloměry jsou vyjádřeny celými čísly, mají společnou tětivu délky 30. Určete je tak, aby vzdálenost středu byla co nejmenší.

34. Který racionální trojúhelník má výšku 2,25? [*Návod*: hledejte racionální trojúhelníky s výškou 4 . 2,25 = 9, 8 . 2,25 = 18.]

35. Pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými stranami je racionální. Ukažte, že jeho výška není vyjádřena celým číslem. [*Návod*: vyjádřete $w = \frac{ab}{c} = \frac{2k^2uv(u^2 - v^2)}{u^2 + v^2}$: je-li p prvočinitel čísla u a je-li w celé číslo, je též prvočinitelem čísla v; to však nenastane.]

36. Určete tětivové čtyrúhelníky s celočíselnými stranami a jedním pravým úhlem. [*Návod*: uvažte, že se každý takový čtyrúhelník skládá ze dvou pravoúhlých trojúhelníků se společnou přeponou.]

37. Určete pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami o daném obvodu (na př. $2s = 72$).

38. Řešte rovnici

$$x^2 + 4y^2 = (x + y + z)^2.$$

---

*) Trojúhelník 17, 21, 10 je tupoúhlý, protože platí $21^2 > 10^2 + 17^2$, jsou tedy kosiny i siny všech jeho úhlů až na $\cos\gamma$ *kladná* čísla. Obecně, jak známo platí: trojúhelník, jehož nejdelší strana je c, je ostroúhlý (pravoúhlý, tupoúhlý) podle toho, je-li $c^2 \lesseqgtr a^2 + b^2$.

6. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. $x = 28y$, y probíhá všecky dělitele 144. **2.** $x = -3; 0; 1; 2; 4; 5; 6; 9$. **3.** $\delta = 105$. **4.** $\delta = x^2 + x + 1$. **6.** Počet cvičenců je 47. **7.** 54; 45. **8.** 0,8 kg; 1,3 kg. **9.** a) Počet trojúhelníků 5; 1; počet čtyrúhelníků 1; 4. **10.** (1; 2). **11.** Počet účastníků 3; 6; 9; ...; velikost vkladu 8; 12; 16; ... tisíc Kčs. **12.** $x = 2$, $y = 130$. **13.** $x = 106$, $y = 75$. **14.** 81; 18 — 92; 29 a trojciferná čísla s libovolnou vloženou střední cifrou, na př. 831; 138 — 952; 259 a p. **15.** $x = 32$, $y = 30$, $z = 31$. **16.** $(-1; 1; 0)$. **17.** Střední bedny jsou 2; velkých beden je $x = 2t$, malých $y = 164 - 5t$, kde $0 < t < 33$. **18.** Soustava je neřešitelná. **19.** Počet chlapců je 67. **20.** V kruhu (8) 2 zásahy, v kruhu (12) 6 zásahů, v kruhu (20) 4 zásahy. **21.** $x = 2t$, $y = 12 - 9t - 24v$, $z = 30 + 16t - 68v$, $u = 3 - 9v$; u, v libovolná celá čísla. **22.** Článků je 6 po 0,8 V, 6 po 1,2 V, 4 po 1,5 V, 6 po 2 V. **23.** Úloha má tři řešení:

Počet nádob			
à 5 l	2	4	6
à 6 l	7	4	1
à 8 l	6	7	8

24.

x	106	38	26	22
y	52	16	8	4

25.

x	32	4
y	1	5

27. $(0; -1)$, $(-2; 1)$. **28.** Pro $x = -1; 5$ má zlomek hodnoty $-3; 1$. **29.** Jediné řešení je $x = -3$, $y = -6$. **30.** Před třemi roky byl otec 26krát tak stár jako syn. Za 1 rok (21 let) bude otec 6krát (dvakrát) tak stár jako syn. **31.** Dostaneme tak na př. řešení: $a = 6$, $b = 3$, $h = 4$ nebo $a = 6$, $b = 2$, $h = 3$ atd. **32.** Jsou to jedině trojúhelníky o stranách $3k$, $4k$, $5k$, kde k je celé číslo kladné. **33.** $r_1 = 25$, $r_2 = 17$, $S_1S_2 = 12$. **34.** Takové trojúhelníky jsou na př. 20; 10,25; 10,25 — 6, 3,75; 3,75 — 10,25; 3,75; 13 — 10,25; 3,75; 7. **36.** Vyloučíme-li obdélníky, má nejmenší takový čtyrúhelník strany 1; 5; 5; 7. **37.** Je to trojúhelník o stranách 18; 24; 30. **38.** Řešení jsou: a) $x = k(u^2 - v^2)$, $y = kuv$, $z = kv(2v - u)$, b) $x = 4kuv$, $y = k(u^2 - v^2)$, $z = k(u^2 - 4uv + 3v^2)$, kde $u > v$ jsou nesoudělná čísla různé parity.

OBSAH

Spisovatel	*Jan Vyšín*
Název díla	*Neurčité rovnice*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1949*
V edici	*Brána k vědění, svazek 3*
Za redakce	*V. Jozífka*
Stran	*32*
Obrazců	*4*
Vytiskla	*Knihtisk. Prometheus v nár. správě v Praze VIII.*
Vydání	*první*
Náklad	*5500 výtisků*
Cena	*Kčs 12,—*