Řetězové zlomky

ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

A. J. CHINČIN

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

A. J. CHINČIN

ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ - PRAHA

1952

Z druhého vydání ruského originálu Цепные дроби, který vydalo Gosudarstvennoje izdateľstvo techniko-teoretičeskoj literatury v Moskvě a Leningradě r. 1949, přeložil Dr Karel Rychlík. Obálku navrhl Miloš Hrbas.

PŘEDMLUVA PŘEKLADATELOVA

Chinčinův spis Cepnyje drobi, který předkládám naší veřejnosti v českém překladu (dle 2. vyd. z r. 1949), si klade za cíl podat theorii a některá použití konečných i nekonečných řetězových zlomků (řetězců) tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

kde $a_1, a_2, \ldots$ jsou celá kladná čísla, a_0 pak je libovolné celé číslo. Řetězce tohoto tvaru se obyčejně nazývají pravidelné řetězce.

V Chinčinově spise je vzat zřetel k pracím sovětských matematiků o tomto předmětu. To platí zejména o III. kapitole pojednávající o metrické theorii řetězců. Úvahy zde obsažené jsou skoro vesměs prací sovětských matematiků v čele s Chinčinem samotným. Vyvrcholením je Kuzminův důkaz Gaussovy věty (v metrické formě).

O vyučování nauce o řetězcích by bylo možno opakovat téměř doslova totéž, co praví Chinčin v předmluvě k I. vydání. Stav je u nás tím horší, že nejen není žádná monografie o řetězcích, ale ani literatura učebnicová se jimi nezabývá. Již tím je prokázána užitečnost tohoto překladu.

Při studiu klade pouze III. kapitola značnější požadavky na čtenářovy znalosti, poněvadž vyžaduje, aby čtenář byl obeznámen aspoň se základy theorie míry. Naproti tomu první dvě kapitoly nepředpokládají příliš značných vědomostí. Látka podaná v prvních šesti paragrafech a v 10. paragrafu obsahuje v poněkud rozšířeném podání to, co se kdysi vykládalo o řetězcích na tehdejších středních školách. Tato část může být i nyní zpřístupněna studujícím nejvyšších tříd škol III. stupně a posluchačům prvních semestrů vysokých škol. Abych její porozumění usnadnil, doplnil jsem překlad poznámkami, v nichž jsem uvedl velký počet číselných příkladů, které v Chinčinově spise skoro vůbec nejsou.

Komu by snad činil potíže důkaz věty 10 (§ 3), může ji i s jejím důkazem vynechat a nahradit ji větou, že každý pravidelný řetězec je konvergentní, a důkazem v • § 2 překladatelových poznámek.

Překladatelovy poznámky podávají dále schema pro výpočet sblížených zlomků (• § 1) jako doplněk k § 2. Po krátké stati o neúplném dělení a celé části $[\alpha]$ reálného čísla α (• § 3) následuje • § 4, Euklidův algoritmus, podávající schema pro stanovení prvků řetězce pro racionální čísla. (Je to doplněk • § 5.) Dále je podáno v překladatelových poznámkách řešení lineární diofantické rovnice (• § 6) a lineární kongruence (• § 7) jako doplněk poznámky pod čarou [8]) (§ 8). Je uvedeno, jak rozvinout desetinný zlomek v řetězec (• § 8), a jsou doplněny věty o nejlepším přiblížení (z § 6) s použitím na nejlepší přiblížení pro *číslo* π *(• § 9). • § 10 obsahuje počátky nauky o zobrazení kvadratických irracionál periodickými řetězci (jako doplněk k § 10). Překladatelovy poznámky zakončují • § 11 o geometrickém zobrazení řetězců a • § 12 o zevšeobecněných řetězcích.*

K terminologii podotýkám, že „podchodjaščije drobi" překládám slovy „sblížené zlomky". Termínu se používá v Taftlově algebře pro střední školy (na př. ve 4. vyd., 1892). Při obecnějších řetězcích tyto sblížené zlomky totiž nejsou nutně přibližnými hodnotami. „Promežutočnyje drobi" překládám slovy „zlomky vsunuté". Slovo „rang" (v § 12) překládám „pořadí".

K. Rychlík

Z PŘEDMLUVY K PRVNÍMU VYDÁNÍ

Theorie řetězců se zabývá zvláštním algoritmem, který je jedním z důležitých nástrojů analysy, theorie pravděpodobnosti, mechaniky a zvláště theorie čísel. Tato elementární příručka má za cíl seznámit čtenáře pouze s řetězci tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}},$$

a to hlavně za předpokladu, že všechny prvky a_i $(i \geqq 1)$ jsou celá kladná čísla, kdežto a_0 může být libovolné celé číslo. Tento nejdůležitější a zároveň nejprozkoumanější druh řetězců je základem téměř všech aritmetických a velmi mnohých analytických použití theorie.

Vydání elementární monografie o theorii řetězců považuji za nezbytné, ježto tato theorie tvořila dříve jeden z bodů matematického programu střední školy. Nyní však z tohoto programu byla vypuštěna a v nových příručkách elementární algebry se nevyskytuje. Na druhé straně programy vysokých škol (dokonce matematická oddělení universit) rovněž nepřihlížejí k této theorii, takže nynější nové příručky pro vysoké školy přirozeně o řetězcích nemluví. I odborník, který se setká s nutností ovládat tento elementární aparát, je nucen vyhledávat buď předrevoluční učebnice, nebo zahraniční speciální příručky.

Je tedy mým hlavním cílem vyplnit tuto mezeru v naší učebnicové literatuře, takže předložená monografie musí být nutně elementární a dle možnosti přístupná; tím je ve značné míře dán její sloh. Obsah její však poněkud překračuje meze tohoto minima, které se zdá absolutně nutným pro všechna použití. To platí především o celé poslední kapitole, jež obsahuje základy metrické (neb pravděpodobnostní) theorie řetězců. Je to důležitá nová kapitola, která je skoro celá dílem sovětských učenců. To se vztahuje na celou řadu míst druhé kapitoly, kde jsem se ptal, jak dalece je možno v rámci tak elementárním zdůraznit průkopnickou úlohu aparátu řetězců při zkoumání aritmetické povahy iracionálních čísel. Domníval jsem se, že když se již vydávají základy theorie řetězců jako zvláštní monografie, bylo by škoda nechat bez povšimnutí ty momenty a vztahy theorie, o něž se nejvíce zajímá současné vědecké myšlení".

Pokud jde o uspořádání látky, je třeba vysvětlit, proč byla oddělena do zvláštní předběžné kapitoly „formální" část nauky, t. j. hlavně ta její část, kde se předpokládá o prvcích řetězce, že jsou to libovolná kladná (nikoliv nutně celá) čísla — a často ještě obecněji — že jsou to prostě nezávisle proměnné. Tento postup má tu vadu, že se formální vlastnosti zkoumaného aparátu předkládají čtenáři dříve než jeho předmětný obsah. Tedy bez souvislosti s tímto obsahem, což se s pedagogického hlediska jistě zdá nežádoucí.

Nehledě však ani k tomu, že se takto dojde k větší methodologické jasnosti (neboť čtenář *ihned vidí, které vlastnosti řetězců plynou již ze struktury aparátu a které platí jen za předpokladu celých kladných prvků), dovoluje takové předběžné vytčení formální části rozvinout aritmetickou theorii, tvořící skutečný předmět celé nauky, na hotové formální basi. Tudíž také soustředit všechnu pozornost čtenářovu na předmětný obsah vykládané látky, aniž by se obracela jeho pozornost k ryze formálním úvahám.*

Moskva 12. února 1935 *A. Chinčin*

PŘEDMLUVA K DRUHÉMU VYDÁNÍ

Toto druhé vydání je otiskem prvního bez podstatných změn.

Od doby, kdy vyšlo první vydání, nevyšla v ruském jazyce žádná monografie o řetězcích. Z učebnic číselné theorie obecného rázu, obsahujících počátky nauky o řetězcích, možno připomenout kursy D. A. Graveho, B. A. Venkova a I. V. Arnolda.

V říjnu r. 1949 *A. Chinčin*

KAPITOLA I.

VLASTNOSTI APARÁTU

§ 1. Úvod

Řetězcem budeme nazývat výraz tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} \qquad \text{nekonečný} \tag{1}$$

Zde značí písmena $a_0, a_1, a_2, \dots$ při nejobecnějším pojetí předmětu nezávisle proměnné; je-li třeba, je možno stanovit, že tyto proměnné probíhají hodnoty nějakého oboru. Tak je možno považovat $a_0, a_1, a_2, \dots$ za reálná nebo komplexní čísla, nebo za funkce jedné či několika proměnných atd. V souhlase s cílem naší knihy budeme považovat $a_1, a_2, \dots$ stále za *kladná čísla*; a_0 může být *libovolné* reálné číslo. Tato čísla nazveme *prvky* daného řetězce. Počet prvků může být konečný nebo nekonečný. V prvním případě napíšeme daný řetězec ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}} \qquad \text{konečný} \tag{2}$$

a nazveme jej *konečným* řetězcem, přesněji řetězcem s n členy, nebo n-členným řetězcem (takže n-členný řetězec má $n + 1$ prvků). Ve druhém případě napíšeme řetězec ve tvaru (1) a nazveme jej *nekonečným*.

Každý konečný řetězec je výsledkem konečného počtu racionálních úkonů nad jeho prvky. Za našich předpokladů o prvcích vyjadřuje tudíž konečný řetězec reálné číslo. Jsou-li speciálně všechny prvky řetězce čísla racionální, je i sám řetězec racionálním číslem.

Naproti tomu nekonečnému řetězci nemůžeme bezprostředně přiřadit žádnou číselnou hodnotu. Sám o sobě představuje nanejvýš — neučiníme-li dalších úmluv — pouze formální způsob psaní, podobně jako nekonečná řada, neučiníme-li ustanovení o její konvergenci. Nicméně může být předmětem matematických úvah.

V dalším budeme nekonečný řetězec (1) psát ve tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] \tag{3}$$

a konečný řetězec (2) ve tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]. \tag{4}$$

Bude tedy počet členů konečného řetězce roven počtu symbolů (prvků) za středníkem.

Řetězec

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k],$$

kde $0 \leqq k \leqq n$, nazveme *úsekem* řetězce (4). Podobně nazveme s_k při libovolném $k \geqq 0$ úsekem nekonečného řetězce (3). Libovolný úsek libovolného (konečného neb nekonečného) řetězce je patrně konečný řetězec.

Dále nazveme řetězec

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n]$$

zbytkem konečného řetězce (4). Podobně řetězec

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$$

budeme nazývat zbytkem nekonečného řetězce (3). Všechny zbytky konečného řetězce jsou patrně rovněž konečné řetězce, kdežto zbytky nekonečného řetězce jsou opět nekonečné řetězce.

Pro konečné řetězce platí vztah

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \quad (0 \leqq k \leqq n), \tag{5}$$

jak plyne přímo z definice. Analogický vztah

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \quad (k \geqq 0)$$

pro nekonečné řetězce může mít význam jen jako (triviální) formální způsob psaní, ježto číselná hodnota prvku r_k na pravé straně této rovnice, vyjádřeného nekonečným řetězcem, není (zatím) definována.

§ 2. Sblížené zlomky

Každý konečný řetězec

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

jako výsledek konečného počtu racionálních úkonů nad jeho prvky, je racionální funkcí těchto prvků a dá se tudíž vyjádřit jako podíl dvou mnohočlenů

$$\frac{P(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{Q(a_0, a_1, \ldots, a_n)}$$

v $a_0, a_1, \ldots, a_n$ s celými koeficienty. Nabývají-li prvky číselných hodnot, je řetězec vyjádřen ve tvaru obyčejného zlomku $\frac{p}{q}$; avšak takové vyjádření není patrně jediné. Pro další je důležité, abychom měli nějak definované vyjádření konečného řetězce ve tvaru obyčejného zlomku — vyjádření, které nazveme *kanonické*. Takové vyjádření určíme pomocí indukce.

Pro řetězec $[a_0] = a_0$ s počtem členů 0 zvolíme jako kanonické vyjádření zlomek $\frac{a_0}{1}$.

Nechť je nyní dáno kanonické vyjádření pro řetězce s počtem členů menším než n. V n-členném řetězci $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ můžeme dle vzorce (5) položit

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1};$$

zde

$$r_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

je n — 1-členný řetězec, pro který je tedy kanonické vyjádření již určeno; nechť má tvar

$$r_1 = \frac{p'}{q'};$$

pak

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{q'}{p'} = \frac{a_0 p' + q'}{p'}.$$

Tento zlomek zvolíme za kanonické vyjádření řetězce $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$; položíme-li

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{p}{q},$$

$$r_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_n] = \frac{p'}{q'},$$

dostaneme tudíž pro čitatele a jmenovatele kanonického vyjádření vztahy

$$p = a_0 p' + q', \; q = p'. \tag{6}$$

Zároveň vidíme, že byla takto jednoznačně určena kanonická vyjádření pro konečné řetězce s libovolným počtem členů.

V theorii řetězců mají zvláště důležitou úlohu kanonická vyjádření úseků daného (konečného neb nekonečného) řetězce $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$; kanonické vyjádření úseku

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

onoho řetězce označíme $\frac{p_k}{q_k}$ a nazveme je *sblíženým zlomkem řádu k* daného řetězce α. Pojem je definován zcela jednoznačně pro konečné i nekonečné řetězce α. Rozdíl je pouze v tom, že konečný řetězec má konečný počet sblížených zlomků, kdežto nekonečný řetězec jich má nekonečně mnoho. Pro n-členný řetězec α je patrně

$$\frac{p_n}{q_n} = \alpha;$$

takový řetězec má celkem $n + 1$ sblížených zlomků (řádů $0, 1, 2, \ldots, n$).

Věta 1. (Zákon znázornění sblížených zlomků.) *Pro libovolné $k \geq 2$*

$$\left.\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Důkaz. V případě $k = 2$ se vzorce (7) ověří bezprostředně. Předpokládejme jejich platnost pro všechna $k < n$; všimněme si řetězce

$$[a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

a označme $\frac{p'_r}{q'_r}$ jeho sblížené zlomky řádu r. Podle vzorce (6)

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1},$$
$$q_n = p'_{n-1},$$

a ježto dle našeho předpokladu

$$p'_{n-1} = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3},$$
$$q'_{n-1} = a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}$$

(zde je a_n a nikoliv a_{n-1}, ježto řetězec $[a_1; a_2, \ldots, a_n]$ začíná a_1 a nikoliv a_0), je dle vzorce (6)

$$\begin{aligned} p_n &= a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}) = \\ &= a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3}) = \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Právě stanovené rekurentní vzorce (7), vyjadřující čitatele a jmenovatele sblíženého zlomku řádu n pomocí prvku a_n a pomocí čitatelů a jmenovatelů dvou předcházejících sblížených zlomků, jsou formálním základem celé theorie řetězců.

Poznámka. Někdy je vhodné zavést také sblížený zlomek řádu —1, při čemž se položí $p_{-1} = 1$ a $q_{-1} = 0$. Při této dohodě (a jen při ní) zachovává vzorec (7) platnost i pro $k = 1$.

Věta 2. *Pro všechna $k \geqq 0$*

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \tag{8}$$

Důkaz. Násobíme-li vzorce (7) resp. q_{k-1} a p_{k-1} a odečteme pak první od druhého, najdeme

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}),$$

a ježto

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1,$$

je věta dokázána.

Důsledek. *Pro všechna $k \geqq 1$*

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}. \tag{9}$$

Věta 3. *Pro všechna $k \geqq 1$*

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

Důkaz. Násobíme-li vzorce (7) resp. q_{k-2} a p_{k-2} a odečteme pak první od druhého, dostaneme pomocí věty 2:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k,$$

jak jsme chtěli dokázat.

Důsledek. *Pro všechna* $k \geqq 2$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k\, q_{k-2}}. \tag{10}$$

Řada jednoduchých výsledků, které jsme dostali, dovoluje nám snadno odvodit velmi důležité důsledky o vzájemném rozložení sblížených zlomků daného řetězce. Rovnice (10) totiž ukazuje, že sblížené zlomky sudých řádů tvoří rostoucí posloupnost, kdežto sblížené zlomky lichých řádů tvoří klesající posloupnost (samozřejmě za předpokladu, že všechny prvky počínaje a_1 jsou kladné). Ježto dle rovnice (9) je každý zlomek lichého řádu větší než zlomek sudého řádu bezprostředně následující, je patrně i každý sblížený zlomek lichého řádu nutně větší než libovolný sblížený zlomek sudého řádu, takže docházíme k tomuto závěru:

Věta 4. *Sblížené zlomky sudého řádu tvoří rostoucí posloupnost, kdežto sblížené zlomky lichého řádu tvoří posloupnost klesající. Přitom libovolný sblížený zlomek lichého řádu je větší než libovolný sblížený zlomek sudého řádu.*

Speciálně je patrně pro konečný řetězec α každý sblížený zlomek sudého řádu menší než α, kdežto každý sblížený zlomek lichého řádu je větší než α (ovšem s výjimkou posledního sblíženého zlomku rovného α).

Zakončíme tento paragraf důkazem dvou jednoduchých, avšak velmi důležitých tvrzení, týkajících se čitatelů a jmenovatelů sblížených zlomků.

Věta 5. *Pro všechna* k $(1 \leqq k \leqq n)$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}; \tag{11}$$

(zde p_i, q_i, r_i se vztahuje na řetězec na levé straně rovnice).

Důkaz. Dle vzorce (5)

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k].$$

Řetězec na pravé straně této rovnice má patrně jako sblížené zlomky řádu $k-2$ a $k-1$ resp. zlomek $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Pro jeho sblížený zlomek řádu k, $\frac{p'_k}{q'_k}$, je dle vzorce (7)

$$p'_k = p_{k-1} r_k + p_{k-2}, \quad q'_k = q_{k-1} r_k + q_{k-2}.$$

Ježto

$$\frac{p'_k}{q'_k} = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, r_k] = [a_0, a_1, \ldots, a_n],$$

je věta dokázána.

Věta 6. *Pro každé $k \geq 1$*

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Důkaz. Pro $k = 1$ je tento vztah patrný, ježto nabývá tvaru

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1.$$

Nechť $k > 1$ a nechť je již dokázáno, že

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, \ldots, a_1]. \tag{12}$$

Na základě vztahu (7) máme

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \left[a_k; \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}\right]$$

a odtud na základě vzorců (5) a (12):

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1],$$

jak jsme chtěli dokázat.

§ 3. Nekonečné řetězce

Každému nekonečnému řetězci

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] \tag{13}$$

odpovídá nekonečná posloupnost sblížených zlomků

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}, \ldots \tag{14}$$

Každý sblížený zlomek je reálné číslo. V případě, že posloupnost (14) má limitu α, označíme přirozeně toto číslo stejným znakem α jako řetězec a budeme psát:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

Řetězec (13) se v tomto případě nazývá *konvergentní.* Nemá-li posloupnost (14) limitu, řekneme, že řetězec (13) *diverguje.*

Konvergentní řetězce jsou svými vlastnostmi v mnohém ohledu analogické s konečnými řetězci. Jejich základní vlastnost, dovolující jít velmi daleko v této analogii, je vyjádřena tímto tvrzením:

Věta 7. *Konverguje-li nekonečný řetězec (13), konverguje i každý jeho zbytek; naopak, konverguje-li aspoň jeden ze zbytků řetězce (13), konverguje také řetězec (13).*

Důkaz. Označme $\frac{p_k}{q_k}$ sblížené zlomky daného řetězce (13) a $\frac{p_k'}{q_k'}$ sblížené zlomky libovolného jeho zbytku, na příklad r_n.

Na základě vzorce (11) dostaneme patrně

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n+k}] = \frac{p_{n-1}\dfrac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1}\dfrac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

Odtud plyne bezprostředně, že konverguje-li zbytek r_n, t. j. má-li zlomek $\frac{p'_k}{q'_k}$ při $k \to \infty$ limitu, kterou označíme také r_n, má při tom zlomek $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ limitu, a to α, která je rovna

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}; \tag{16}$$

řešíme-li však vztah (15) vzhledem k $\frac{p'_k}{q'_k}$, přesvědčíme se právě týmž postupem o správnosti opačného závěru, čímž je dovršen důkaz věty 7.

Poznamenáváme, že vzorec (16) stanovený pro konvergentní řetězce je zcela analogický se vzorcem (11), který jsme dříve dokázali pro konečné řetězce; pro konvergentní řetězce platí tedy věta analogická s větou 5 pro konečné řetězce.

Pro konvergentní nekonečné řetězce plyne patrně z věty 4 předešlého paragrafu toto tvrzení:

Věta 8. *Hodnota konvergentního nekonečného řetězce je větší než libovolný sblížený zlomek sudého řádu a menší než libovolný sblížený zlomek lichého řádu.*

Důsledek věty 2 předešlého paragrafu nás vede dále na základě věty 8 k dalšímu výsledku, který má základní význam v aritmetických užitích theorie řetězců.

Věta 9. *Hodnota α konvergentního nekonečného řetězce (13) vyhovuje při libovolném $k \geqq 0$ nerovnosti:*[1])

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

Věta 9 platí i pro konečný řetězec

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

pro všechna $k < n$, při čemž v případě $k = n - 1$ se nerovnost změní v rovnost, ježto $\alpha = \frac{p_n}{q_n}$.

[1]) Poznamenáváme, že za učiněných předpokladů platí $q_k > 0$ pro všechna $k \geqq 0$, neboť $q_0 = 1, q_1 = a_1$ a odtud dle druhého ze vzorců (7) se najde pomocí indukce $q_k > 0$ pro všechna $k > 1$.

Je-li α hodnota konvergentního nekonečného řetězce (13), nazveme prvky tohoto řetězce také *prvky čísla* α; podobně sblížené zlomky, úseky a zbytky řetězce (13) nazveme resp. sblíženými zlomky, úseky a zbytky čísla α. Podle věty 7 všechny zbytky konvergentního řetězce (13) mají určitou reálnou hodnotu.

Pro nekonečné řetězce lze se přirozeně ptát na kriteria konvergence, podobně jako u nekonečných řad; v případě, jímž se zabýváme, t. j., když $a_i > 0$ pro $i \geqq 1$, lze uvést neobyčejně jednoduché a vhodné kriterium konvergence.

Věta 10. *Ke konvergenci řetězce* (13) *je nutné a ~~postačí, aby řada~~*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

byla divergentní.

Důkaz. Podle věty 4 je patrné, že ke konvergenci řetězce je nutné a postačí, aby ty dvě posloupnosti, o nichž se mluví v oné větě, měly tutéž limitu (existence limity pro každou posloupnost zvláště plyne samozřejmě z věty 4 ve všech případech). A to, jak ukazuje vzorec (9), platí tehdy a jen tehdy, když

$$q_k q_{k+1} \to \infty \qquad (k \to \infty). \tag{18}$$

Podmínka (18) je tudíž nutná a postačující ke konvergenci daného řetězce.

Nechť řada (17) konverguje. Podle druhého vzorce (7)

$$q_k > q_{k-2} \qquad (k \geqq 1).$$

Pro libovolné k máme tudíž buď $q_k > q_{k-1}$, nebo $q_{k-1} > q_{k-2}$. V prvním případě druhý ze vzorců (7) dává

$$q_k < a_k q_k + q_{k-2},$$

a odtud při dostatečně velkých k (když $a_k < 1$, což na základě konvergence řady (17) nutně platí pro $k \geqq k_0$),

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1 - a_k};$$

v druhém případě týž vzorec dává pro $a_k < 1$

$$q_k < (1 + a_k)\, q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1 - a_k};$$

pro všechna $k \geqq k_0$ tudíž platí

$$q_k < \frac{1}{1 - a_k} q_l,$$

kde $l < k$. Je-li $l \geqq k_0$, lze na q_l užít téže nerovnosti. Pokračujeme-li v těchto úvahách, dojdeme patrně k nerovnosti

$$q_k < \frac{q_s}{(1 - a_k)(1 - a_l) \ldots (1 - a_r)}, \tag{19}$$

kde $k > l > \ldots > r \geqq k_0$ a $s < k_0$. Avšak na základě předpokládané konvergence řady (17) nekonečný součin

$$\prod_{n=k_0}^{\infty} (1 - a_n)$$

je patrně konvergentní, t. j. má kladnou hodnotu, kterou označíme λ. Patrně

$$(1 - a_k)(1 - a_l) \ldots (1 - a_r) \geqq \prod_{n=k_0}^{\infty}(1 - a_n) = \lambda;$$

označíme-li tudíž Q největší z čísel $q_0, q_1, \ldots, q_{k_0 - 1}$, můžeme na základě nerovnosti (19) soudit, že

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \quad (k \geqq k_0),$$

tudíž

$$q_{k+1}q_k < \frac{Q^2}{\lambda^2} \quad (k \geqq k_0);$$

vztah (18) neplatí, takže je daný řetězec divergentní.

Nechť nyní řada (17) diverguje. Ježto $q_k > q_{k-2}$ pro všechna $k \geqq 2$, tu, označíme-li c menší z čísel q_0, q_1, budeme mít $q_k \geqq c$ pro libovolné $k \geqq 0$; druhý ze vzorců (7) nám tudíž dává

$$q_k \geqq q_{k-2} + ca_k \quad (k \geqq 2).$$

Postupné užití této nerovnosti nám dává

$$q_{2k} \geqq q_0 + c \sum_{n=1}^{k} a_{2n},$$

a

$$q_{2k+1} \geqq q_1 + c \sum_{n=1}^{k} a_{2n+1},$$

odkud

$$q_{2k} + q_{2k+1} > q_0 + q_1 + c \sum_{n=1}^{2k+1} a_n;$$

jinak řečeno, pro všechna k

$$q_k + q_{k-1} > c \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Svrchu jsme dokázali tuto nerovnost pro lichá k, je však patrné, že týmž způsobem ji lze dokázat i pro sudá k.

Odtud však plyne, že v součinu $q_k q_{k-1}$ aspoň jeden z činitelů převyšuje $\frac{1}{2}c \sum_{n=1}^{k} a_n$. Protože druhý činitel v žádném případě není menší než c, dostaneme

$$q_k q_{k-1} > \tfrac{1}{2}c^2 \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Na základě předpokládané divergence řady (17) plyne odtud vztah (18) a tudíž konvergence daného řetězce. Tím je věta 10 dokázána úplně.

§ 4. Řetězce s přirozenými prvky

Počínaje tímto paragrafem až do konce knihy budeme předpokládat, že prvky a_1, $a_2, \ldots$ daného řetězce jsou *přirozená čísla* (t. j. celá kladná čísla). Pokud jde o a_0, budeme předpokládat, že je to rovněž celé číslo, ne však nutně kladné.

Je-li takový řetězec nekonečný, je na základě věty 10 vždy konvergentní. Můžeme tudíž nadále bez dalších výhrad považovat každý nekonečný řetězec za konvergentní a mluvit o jeho „hodnotě" nebo „velikosti".

Je-li takový řetězec konečný a je-li poslední jeho prvek $a_n = 1$, je patrně $r_{n-1} = a_{n-1} + 1$ celé číslo. Tak můžeme v tomto případě napsat daný n-členný řetězec $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, 1]$ ve tvaru $n - 1$-členného řetězce $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} + 1]$, při čemž v tomto novém tvaru je poslední prvek patrně větší než jednotka.

Vzhledem k této poznámce můžeme v dalším vyloučit z úvah konečné řetězce, jejichž poslední prvek je roven 1 (ovšem s výjimkou 0-členného řetězce [1])[2]). Tato poznámka má velký význam při otázce jednoznačnosti znázornění čísel řetězci (viz kap. II, § 5).

Čitatelé a jmenovatelé sblížených zlomků jsou patrně v případě, jímž se zabýváme, čísla celá (pro p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0 je to bezprostředně patrné a pro další to plyne ze vzorců (7)). Mimo to máme toto velmi důležité tvrzení.

Věta 11. *Sblížené zlomky jsou irreducibilní.*[3])

Důkaz plyne bezprostředně ze vzorce (8), ježto každý společný dělitel čísel p_n a q_n je zároveň dělitelem výrazu $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}$.

Druhý ze vzorců (7) ukazuje, že pro každé $k \geqq 2$ platí $q_k > q_{k-1}$; posloupnost

$$q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$$

je tudíž stále rostoucí. O řádu růstu čísel q_k lze dokázat značně silnější tvrzení.

Věta 12. *Pro každé* $k \geqq 2$ [4]) *platí*

$$q_k \geqq 2^{\frac{1}{2}(k-1)}.$$

Důkaz. Pro $k \geqq 2$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geqq q_{k-1} + q_{k-2} \geqq 2q_{k-2};$$

postupné užití této nerovnosti dává

$$q_{2k} \geqq 2^k q_0 = 2^k, \quad q_{2k+1} \geqq 2^k q_1 \geqq 2^k;$$

tyto nerovnosti dokazují patrně větu.

Jmenovatelé sblížených zlomků nerostou tudíž pomaleji než podle zákona geometrické posloupnosti.

---

[2]) • Sr. s tím, co je řečeno v • § 5. •

[3]) • t. j. není možno je zkrátit. •

[4]) Zde a všude v dalším je si ovšem nutno v případě *konečného* řetězce všímat jen těch hodnot k, pro něž má q_k smysl.

Vsunuté zlomky. Nechť je $k \geqq 2$ a i libovolné celé kladné číslo. Rozdíl

$$\frac{p_{k-1}(i+1)+p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}i+p_{k-2}}{q_{k-1}i+q_{k-2}},$$

který je rovný, jak se snadno zjistí,

$$\frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}][q_{k-1}i+q_{k-2}]},$$

má pro všechna $i \geqq 0$ totéž znamení, závislé pouze na paritě čísla k. Z toho plyne, že zlomky

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}, \frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}}, \ldots, \frac{p_{k-2}+a_k p_{k-1}}{q_{k-2}+a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \tag{20}$$

při sudém k vzrůstají, při lichém k klesají (sr. větu 4). Krajní z nich jsou sblížené zlomky stejné parity; členy mezi nimi ležící (existují-li, t. j. je-li $a_k > 1$) nazveme *vsunuté zlomky*. V aritmetickém užití mají tyto vsunuté zlomky značný význam, třebaže ne takový jako zlomky sblížené. Abychom si lépe objasnili jejich vzájemné rozložení a zákon jejich postupného tvoření, je účelné zavést pojem tak zvané *medianty* dvou zlomků.

Mediantou dvou zlomků $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ s kladnými jmenovateli se nazývá zlomek

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Pomocná věta. *Medianta dvou zlomků leží vždy (velikostí) mezi nimi.*

Důkaz. Nechť je $\frac{a}{b} \leqq \frac{c}{d}$; pak je $bc - ad \geqq 0$, a tudíž

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} \geqq 0, \quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{d(b+d)} \leqq 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

Vidíme ihned, že každý ze vsunutých zlomků z posloupnosti (20) je mediantou předcházejícího zlomku a zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, postupujeme-li v posloupnosti (20) tak, že při postupném tvoření mediant jdeme od sblíženého zlomku $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ směrem ke sblíženému zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Konečný krok tohoto postupu nastane, když utvořená medianta splyne s $\frac{p_k}{q_k}$. Tento poslední zlomek leží tedy mezi $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, což již víme z věty 4. Víme rovněž, že hodnota α daného řetězce leží mezi $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$ a že zlomky $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$, jichž řády jsou oba stejné parity, leží na téže straně čísla α. Odtud plyne, že celá posloupnost (20) leží na téže straně čísla α, kdežto zlomek $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ na druhé jeho straně. Zejména zlomky $\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ leží vždy na různých stranách α. Jinak řečeno, hodnota řetězce leží vždy mezi libovolným sblíženým zlomkem a mediantou utvořenou z tohoto zlomku a zlomku předcházejícího. (Doporučujeme čtenáři, aby si udělal schematický náčrtek zobrazující vzájemné rozložení všech těchto čísel.)

Tato poznámka poskytuje jednoduchý způsob, jímž je možno, známe-li sblížené zlomky $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, utvořit další sblížený zlomek $\frac{p_k}{q_k}$, neznáme-li prvek a_k (užijeme-li zato znalosti velikosti řetězce α). Utvoříme totiž nejprve mediantu obou daných zlomků, pak mediantu právě vzniklé medianty s $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ atd., sestrojujíce po každé mediantu právě vzniklé medianty a zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Víme již, že tyto po sobě jdoucí medianty se budou z počátku blížit k α; poslední medianta této posloupnosti, ležící na téže straně od α jako výchozí zlomek $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, je $\frac{p_k}{q_k}$. Víme totiž již, že $\frac{p_k}{q_k}$ bude mezi těmito mediantami a bude ležet na téže straně α jako $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$; zbývá nám pak dokázat pouze, že další medianta bude již ležet na druhé straně α. Avšak další medianta je $\frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$ a ta leží podle výše uvedené poznámky již na druhé straně čísla α.

Další, ještě důležitější důsledek objasněného vzájemného rozložení čísla α a jeho sblížených a vsunutých zlomků se dostane z těchto úvah. Vsunutý zlomek $\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}$, ležící mezi $\frac{p_k}{q_k}$ a α, leží blíže k $\frac{p_k}{q_k}$ než α, t. j.

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \left| \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}$$

(znamení rovnosti zde není možné, ježto by to znamenalo, že

$$\alpha = \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}, \quad a_{k+2} = 1,$$

t. j. α by byl konečný řetězec s posledním prvkem 1; to je případ, který jsme na samém začátku vyloučili z úvah).

Tak přicházíme k tomuto důležitému tvrzení:

Věta 13. *Pro všechna* $k \geq 0$

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} . \tag{21}$$

Nerovnost (21), která poskytuje *dolní* mez pro rozdíl $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$, doplňuje takto nerovnost stanovenou větou 9, poskytující *horní* mez téhož rozdílu.

KAPITOLA II.

ZOBRAZENÍ ČÍSEL ŘETĚZCI

§ 5. Řetězce jako aparát k vyjádření reálných čísel

Věta 14. *Každému reálnému číslu α odpovídá jediný řetězec, který má za hodnotu toto číslo. Tento řetězec je konečný, je-li α číslo racionální; nekonečný, je-li α iracionální.*[5])

Důkaz. Označme a_0 největší celé číslo nepřevyšující α; není-li α celé číslo, pak vztah

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \tag{22}$$

dovoluje určit číslo r_1. Přitom je patrně $r_1 > 1$, ježto

Euklidův algo

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1;$$

obecně, není-li r_n celé číslo, označíme a_n největší celé číslo nepřevyšující r_n a určíme číslo r_{n+1} vztahem:

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}. \tag{23}$$

Tento postup může být patrně opakován, pokud nenastane případ, že r_n je celé číslo; přitom patrně $r_n > 1$ $(n \geqq 1)$.

Vztah (22) ukazuje, že

$$\alpha = [a_0; r_0];$$

nechť dále

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_n]; \tag{24}$$

pak vztah (23) a vzorec (5) z kap. I ukazují, že

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, r_{n+1}]$$

(vzorec (24) platí pro všechna n samozřejmě za předpokladu, že $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ nejsou celá čísla).

Je-li číslo α racionální, jsou patrně i všechna r_n racionální. Snadno nahlédneme, že v tomto případě se náš postup skončí po konečném počtu kroků. Skutečně, je-li na př.

$$r_n = \frac{a}{b}, \text{ pak } r_n - a_n = \frac{a - ba_n}{b} = \frac{c}{b},$$

[5]) Připomínáme, že uvažujeme o řetězcích s celými prvky, při nichž $a_i > 0$ pro $i \geqq 1$ a poslední prvek každého konečného řetězce je různý od jedné. • Sr. • § 5. •

kde $c < b$, ježto $r_n - a_n < 1$. Vztah (23) dává

$$r_{n+1} = \frac{b}{c}$$

(není-li ovšem $c = 0$, t. j., není-li r_n celé číslo; pak by naše tvrzení bylo dokázáno). r_{n+1} má tedy menšího jmenovatele než r_n. Z toho také plyne, že po konečném počtu kroků přijdeme u posloupnosti $r_1, r_2, \ldots$ k celému číslu $r_n = a_n$; tehdy vzorec (24) ukazuje, že číslo α je znázorněno konečným řetězcem, jehož poslední prvek $a_n = r_n > 1$.

Je-li číslo α iracionální, jsou i všechna r_n iracionální a náš postup je nekonečný. Klademe-li

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

(kde je zlomek $\frac{p_n}{q_n}$ irreducibilní a $q_n > 0$), dostaneme na základě vzorce (24) a vzorce (16) kap. I.

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} \quad (n \geqq 2).$$

Na druhé straně je patrně

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}},$$

odkud

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})(r_n - a_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})},$$

a tudíž

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Platí tedy

$$\frac{p_n}{q_n} \to \alpha \text{ pro } n \to \infty;$$

to však patrně také značí, že nekonečný řetězec $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ má za hodnotu dané číslo α.

Dokázali jsme tedy, že číslo α může být vždy vyjádřeno řetězcem. Řetězec je konečný, je-li číslo α racionální; nekonečný, je-li α iracionální. Zbývá nám dokázat jedinost získaného vyjádření. Poznamenejme především, že tato jedinost plyne v podstatě již z úvah v paragrafu 4 I. kap., kde jsme viděli, že známe-li hodnotu řetězce, můžeme postupně určit všechny jeho sblížené zlomky, a tudíž i všechny jeho prvky. Avšak jedinost možno dokázat i mnohem jednodušeji. Skutečně nechť

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0'; a_1', a_2', \ldots],$$

při čemž tyto řetězce mohou být jak konečné, tak nekonečné. Označme obecně $[x]$ největší celé číslo nepřevyšující x. Především je patrně $a_0 = [\alpha]$ a $a_0' = [\alpha]$, odkud plyne $a_0 = a_0'$; dále, jestliže jsme již stanovili, že

$$a_i = a_i' \; (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

je v označení snadno srozumitelném

$$\left.\begin{array}{l} p_i = p_i' \\ q_i = q_i' \end{array}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

a dle vzorce (16) z kap. I

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_n' r_{n+1}' + p_{n-1}'}{q_n' r_{n+1}' + q_{n-1}} = \frac{p_n r_{n+1}' + p_{n-1}}{q_n r_{n+1}' + q_{n-1}},$$

odkud $r_{n+1} = r_{n+1}'$, a ježto $a_{n+1} = [r_{n+1}]$ a $a_{n+1}' = [r_{n+1}']$, také $a_{n+1} = a_{n+1}'$, t. j. dané řetězce jsou totožné, jak jsme chtěli dokázat.

Poznamenejme, že poslední úvaha by byla nemožná, kdybychom připouštěli konečné řetězce s posledním prvkem 1. Je-li totiž na př. $a_{n+1} = 1$ takový poslední prvek, je $r_n = a_n + 1$ a $a_n \neq [r_n]$.

Tak jsme se přesvědčili, že reálná čísla lze jednoznačně vyjádřit řetězci. Hlavní význam takového zobrazení tkví přirozeně v tom, že známe-li řetězec zobrazující reálné číslo, můžeme určit toto číslo s libovolnou předem danou přesností. Podle toho může při zobrazování reálných čísel aparát řetězců aspoň v principu činit nárok na touž úlohu, jako činí na př. i aparát desetinných nebo obecněji systematických zlomků (t. j. zlomků vyjádřených v nějaké číselné soustavě).

Jaké jsou hlavní výhody i nedostatky řetězců jako aparátu k zobrazení reálných čísel v porovnání s daleko rozšířenějšími systematickými zlomky? Abychom odpověděli na tuto otázku, nutno především podat přesný výčet požadavků, jež můžeme a musíme klásti na aparát tohoto druhu. Je patrné, že první a hlavní *theoretický* požadavek je, aby aparát pokud možno úplně vyjadřoval vlastnosti toho čísla, které zobrazuje, tak aby tyto vlastnosti mohly být dle možnosti úplně a jednoduše ukázány, jakmile je dáno zobrazení čísla oním aparátem.

Vzhledem k tomuto prvnímu požadavku mají řetězce nepochybně značnou přednost před zlomky systematickými (zejména desetinnými). O tom se postupně přesvědčíme v průběhu celé příští kapitoly. V jistém stupni je to ovšem patrné i z apriorních úvah. Zatím co je systematický zlomek spojen s určitou číselnou soustavou a tudíž nevyhnutelně v sobě obráží nejen absolutní vlastnosti čísla, jež zobrazuje, nýbrž i vzájemný vztah právě k oné zvolené číselné soustavě — řetězce nejsou ve spojení se žádnou číselnou soustavou a reprodukují dokonale vlastnosti čísel jimi zobrazených. Tak jsme již viděli, že racionálnost nebo iracionálnost vyjádřeného čísla je úplně určena konečností nebo nekonečností příslušného řetězce. Je známo, že pro systematické zlomky je odpovídající vztah značně složitější: konečnost nebo nekonečnost znázorňujícího zlomku závisí zde kromě povahy příslušného čísla i na tom, v jakém vztahu je ono číslo k číselné soustavě.

Avšak kromě hlavního theoretického požadavku, který jsme uvedli, je dlužno přirozeně ukázat u každého aparátu sloužícího k vyjádření čísel i požadavky *praktického* charakteru (některé z nich mohou ovšem mít i theoretický význam). Tak je velmi důležitý požadavek, aby aparát dovolil pokud možno jednoduše určit přibližnou hodnotu vyjádřeného čísla s předem daným stupněm přesnosti. Tomuto požadavku vyhovuje aparát řetězců plnou měrou a jistě lépe než aparát systematických zlomků; nadto brzo seznáme, že přibližné hodnoty poskytované tímto aparátem mají vlastnost *nejlepších přiblížení* v přirozeném, neobyčejně jednoduchém a důležitém smyslu.

Je však druhý ještě podstatnější praktický požadavek, který tento aparát naprosto nesplňuje. Potřeby počtu nutí nás požadovat od každého zobrazujícího aparátu, abychom mohli, známe-li zobrazení některých čísel, nalézt dosti snadno také zobrazení jednodušších funkcí těchto čísel. (Především jejich součtu a součinu.) Krátce řečeno: aparát vhodný v praktickém smyslu musí připouštět dostatečně jednoduchá *pravidla aritmetických úkonů*, bez čehož nemůže sloužit jako nástroj počtu. Je známo, jak vhodné jsou v tomto smyslu systematické zlomky. Naopak pro řetězce neexistují prakticky přijatelná pravidla pro aritmetické úkony. Již úloha určit řetězec pro součet řetězců zobrazujících sčítance je značně složitá a v početní praxi neproveditelná.

Přednosti a nevýhody řetězců, na něž jsme poukázali, při srovnání se systematickými zlomky ve značné míře předurčují i rozhraničení okruhů použití těchto dvou zobrazovacích aparátů. Jako se v početní praxi užívá skoro vesměs systematických zlomků, v theoretických úvahách při zkoumání aritmetických zákonů kontinua a aritmetických vlastností jednotlivých iracionálních čísel se s výhodou užívá aparátu řetězců, který je nejlepším a nenahraditelným nástrojem pro takový druh úvah. Vyšetřování tohoto aparátu v takovém směru je hlavní úlohou všeho dalšího výkladu.

§ 6. Sblížené zlomky jako nejlepší přiblížení

Chceme-li iracionální číslo α vyjádřit s určitým stupněm přesnosti ve tvaru obyčejného racionálního zlomku, můžeme k tomu přirozeně použít sblížených zlomků řetězce zobrazujícího čísla α. Stupeň dosažené přesnosti je stanoven větami 9 a 13 v I. kap.; máme totiž

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Úloha aproximace (přibližného vyjádření) iracionálních čísel pomocí racionálních zlomků se klade v jednodušším svém tvaru obyčejně tak, že se hledá racionální zlomek s nejmenším (kladným) jmenovatelem, lišící se od daného iracionálního čísla nejvýš o nějakou předem danou veličinu. Takto vytčená úloha může mít ostatně smysl i v případě, že dané číslo α je racionální. Tak, je-li α zlomek, jehož čitatel a jmenovatel jsou příliš velká čísla, může vznikat otázka o přibližném vyjádření tohoto čísla pomocí zlomku, jehož čitatel a jmenovatel by byla menší čísla. Z čistě praktického hlediska není mezi těmito dvěma případy (racionálního a iracionálního α) v podstatě rozdílu, neboť v praxi každé číslo je dáno jen s nějakým stupněm přesnosti.

Bezprostředně je patrné, že k řešení této úlohy je aparát systematických zlomků naprosto nevhodný, neboť takto získané aproximující zlomky mají jmenovatele určené výhradně z vybrané soustavy číselné (v případě desetinných zlomků jsou to mocniny čísla 10) a vůbec nezávislé na aritmetické povaze zobrazovaného čísla. Naproti tomu v případě řetězců jmenovatelé sblížených zlomků jsou zcela určeny číslem, znázorňovaným oním zlomkem, a tudíž máme všechny důvody očekávat, že tyto sblížené zlomky, spojené úzce a přirozeně se znázorňovaným číslem, budou též důležité při řešení úlohy o nejlepší aproximaci onoho čísla racionálními zlomky.

Řekneme, že racionální zlomek $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ je *nejlepším přiblížením* reálného čísla α, leží-li každý racionální zlomek s týmž nebo menším jmenovatelem ve větší vzdálenosti od α, jinak řečeno, plyne-li z $0 < d \leqq b$, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ nevyhnutelně

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| > \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|.$$

Věta 15. *Každé nejlepší přiblížení čísla α je jedním ze sblížených neb vsunutých zlomků řetězce zobrazujícího číslo α.*

Předběžná poznámka. Aby toto tvrzení nepřipouštělo výjimek, je nutné zavést sblížené zlomky řádu —1, takže položíme $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$ (jako jsme již učinili v paragrafu 2). Zlomek $\frac{1}{3}$ je totiž na př. — jak se snadno přesvědčíme — nejlepším přiblížením čísla $\frac{1}{4}$, není však mezi jeho sblíženými a vsunutými zlomky, ježto množina těchto zlomků, začneme-li se sblíženým zlomkem řádu 0, je vyčerpána dvěma zlomky $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{4}$; naproti tomu, připojíme-li zlomek $\frac{1}{0}$ jako sblížený zlomek řádu —1, je tímto souhrnem

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

a ten obsahuje zlomek $\frac{1}{3}$.

Důkaz. Nechť je $\frac{a}{b}$ nejlepší přiblížení čísla α; pak je především $\frac{a}{b} \geqq a_0$; v případě $\frac{a}{b} < a_0$ by totiž zlomek $\frac{a_0}{1}$, různý od $\frac{a}{b}$, se jmenovatelem ne větším než b, ležel k α blíže než $\frac{a}{b}$, v důsledku čehož by $\frac{a}{b}$ nebylo nejlepším přiblížením.

Zcela analogickou úvahou můžeme ukázat, že

$$\frac{a}{b} \leqq a_0 + 1.$$

Lze tedy skutečně připustit, že $a_0 < \frac{a}{b} < a_0 + 1$ (v případě $\frac{a}{b} = a_0$ nebo $\frac{a}{b} = a_0 + 1$ by věta byla dokázána, ježto $\frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$ je sblížený a $\frac{a_0 + 1}{1} = \frac{p_0 + p_{-1}}{q_0 + q_{-1}}$ je vsunutý zlomek čísla α).

Nesplývá-li zlomek $\frac{a}{b}$ se žádným sblíženým nebo vsunutým zlomkem čísla α, musí ležet mezi dvěma po sobě jdoucími takovými zlomky, t. j. při vhodně zvolených k a r $(k > 0,\ 0 \leqq r < a_{k+1}$ nebo $k = 0,\ 1 \leqq r < a_1)$ mezi zlomky

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \quad \text{a} \quad \frac{p_k(r+1) + p_{k-1}}{q_k(r+1) + q_{k-1}},$$

v důsledku čehož

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \right| < \left| \frac{p_k(r+1) + p_{k-1}}{q_k(r+1) + q_{k-1}} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\{q_k(r+1) + q_{k-1}\}\,\{q_k r + q_{k-1}\}}.$$

Na druhé straně je však patrně

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \right| = \frac{m}{b(q_k r + q_{k-1})},$$

kde m je nějaké kladné číslo, tedy aspoň rovné 1. Je tudíž

$$\frac{1}{b(q_k r + q_{k-1})} < \frac{1}{\{q_k(r+1) + q_{k-1}\}\,\{q_k r + q_{k-1}\}},$$

odkud

$$q_k(r+1) + q_{k-1} < b.$$

Zlomek

$$\frac{p_k(r+1) + p_{k-1}}{q_k(r+1) + q_{k-1}}, \tag{25}$$

ježto tedy má menšího jmenovatele než zlomek $\frac{a}{b}$, leží blíže čísla α než zlomek

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \tag{26}$$

(neboť všeobecně na základě výsledků paragrafu 4 každý následující vsunutý zlomek leží blíže α než předcházející), tedy pak i blíže než zlomek $\frac{a}{b}$ ležící mezi (25) a (26). To však odporuje definici nejlepšího přiblížení. Tak je věta 15 dokázána.

Při definici pojmu nejlepšího přiblížení, který je podkladem této věty, jsme oceňovali blízkost racionálního zlomku $\frac{a}{b}$ k číslu α malostí rozdílu $\alpha - \frac{a}{b}$ (co do absolutní hodnoty), což je konec konců nejpřirozenější. Avšak v číselné theorii bývá často důležitější a příhodnější všímat si za tím účelem rozdílu $b\alpha - a$, který se liší jen činitelem b od předcházejícího a jehož malost (co do absolutní hodnoty) může tudíž rovněž sloužit jako kriterium blízkosti zlomku $\frac{a}{b}$ k číslu α. Tento přechod od jedné charakteristiky ke druhé se může zdát na první pohled triviálním a skutečně v mnohých případech triviální je, ale není tomu tak vždy, jak se brzy přesvědčíme. Činitel b, rozlišující mezi sebou obě nerovnosti, není totiž stálá veličina, nýbrž je ve vztahu s aproximací zlomku a mění se při její záměně.

Nazveme nyní nejlepší přiblížení, o nichž jsme mluvili ve větě 15, nejlepšími přiblíženími *prvního druhu*; dále nazveme racionální zlomek $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ *nejlepším přiblížením druhého druhu* pro číslo α, plyne-li z $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leqq b$ nevyhnutelně

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|.$$

Nejlepší přiblížení druhého druhu se tudíž definuje pomocí rozdílu $|b\alpha - a|$ docela analogicky jako se definovalo nejlepší přiblížení prvního druhu pomocí rozdílu $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$.

Snadno se dokáže, že *každé nejlepší přiblížení druhého druhu je nutně zároveň nejlepší přiblížení prvního druhu.*

Kdybychom totiž měli

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \leqq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|, \quad \left(\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}, \quad d \leqq b\right),$$

pak násobením první a poslední nerovnosti bychom dostali

$$|d\alpha - c| \leqq |b\alpha - a|;$$

jinými slovy, kdyby zlomek $\frac{a}{b}$ nebyl nejlepším přiblížením prvního druhu, nemohl by být ani nejlepším přiblížením druhého druhu, čímž věta dokázána.

Opačné tvrzení by však bylo nesprávné: nejlepší přiblížení prvního druhu není vždy nejlepším přiblížením druhého druhu. Můžeme se na př. snadno přesvědčit, že zlomek $\frac{1}{3}$ je nejlepším přiblížením prvního druhu pro číslo $\frac{1}{5}$, není však nejlepším přiblížením druhého druhu, což vidíme z nerovnosti

$$|1 \cdot \tfrac{1}{5} - 0| < |3 \cdot \tfrac{1}{5} - 1|, \quad 1 < 3.$$

Z uvedených poznámek a věty 15 plyne, že všechna nejlepší přiblížení druhého druhu jsou dána přibližnými a vsunutými zlomky. Můžeme však — a to je hlavním podkladem úlohy, kterou má pro nejlepší přiblížení druhého druhu aparát řetězců — dokázat mnohem přesnější tvrzení.

Věta 16. *Každé nejlepší přiblížení druhého druhu je dáno sblíženým zlomkem.*

Důkaz. Nechť je zlomek $\frac{a}{b}$ nejlepším přiblížením druhého druhu čísla

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots],$$

jehož sblížené zlomky označíme $\frac{p_k}{q_k}$. Kdyby bylo $\frac{a}{b} < a_0$, měli bychom

$$|1 \cdot \alpha - a_0| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leqq |b\alpha - a|, \quad 1 \leqq b,$$

t. j. $\frac{a}{b}$ by nebylo nejlepším přiblížením druhého druhu; je tedy $\frac{a}{b} \geqq a_0$. V takovém případě zlomek $\frac{a}{b}$, nesplývá-li s žádným ze sblížených zlomků, nutně buď leží mezi dvěma sblíženými zlomky $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ stejné parity, nebo je větší než $\frac{p_1}{q_1}$. V prvním případě

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \geqq \frac{1}{bq_{k-1}}$$

a

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}},$$

odkud

$$b > q_k; \tag{27}$$

na druhé straně

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right| \geqq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-\frac{a}{b}\right| \geqq \frac{1}{bq_{k+1}},$$

a tedy

$$|b\alpha - a| \geqq \frac{1}{q_{k+1}},$$

kdežto

$$|q_k\alpha - p_k| \leqq \frac{1}{q_{k+1}},$$

odkud

$$|q_k\alpha - p_k| \leqq |b\alpha - a|. \tag{28}$$

Vztahy (27) a (28) ukazují, že $\frac{a}{b}$ není nejlepší přiblížení druhého druhu.

Ve druhém případě $\left(\text{t. j., je-li } \frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}\right)$ máme

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1}-\frac{a}{b}\right| \geqq \frac{1}{bq_1},$$

odkud

$$|b\alpha - a| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}.$$

Na druhé straně je patrně

$$|1 \,.\, \alpha - a_0| \leqq \frac{1}{a_1},$$

takže

$$|b\,\alpha - a| > |1 \,.\, \alpha - a_0|, \;1 \leqq b,$$

což znovu odporuje pojmu nejlepšího přiblížení druhého druhu. Tak je věta 16 dokázána úplně.

Všimněme si nyní otázky, je-li možno věty 15 a 16 obrátit. Především, jak lze snadno nahlédnout, větu 15 nelze obrátit: vsunuté zlomky nejsou nutně nejlepšími přiblíženími prvního druhu; tak pro číslo $\alpha = \frac{4}{5}$ je zlomek $\frac{1}{1}$, jak lze snadno nahlédnout, vsunutým zlomkem. Není však nejlepším přiblížením (prvního druhu), neboť

$$|\tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{1}| < |\tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2}|, \;1 < 2.$$

Příkladů podobného druhu lze si představit libovolné množství, o čemž se čtenář může sám bez námahy přesvědčit.

Naproti tomu věta 16 připouští skoro úplné obrácení, což ovšem zvyšuje její mimořádný význam.

Věta 17. *Každý sblížený zlomek je nejlepším přiblížením druhého druhu; jedinou* (triviální) *výjimkou je*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}, \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

Předběžná poznámka. V případě $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ není zlomek $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{a_0}{1}$ skutečně nejlepším přiblížením druhého druhu, neboť

$$|1 \cdot \alpha - (a_0 + 1)| = 1|1 \cdot \alpha - a_0|.$$

Důkaz. Všimněme si formy

$$|y\alpha - x|, \tag{29}$$

kde y probíhá hodnotami $1, 2, \ldots, q_k$ a x může nabývat libovolných celých hodnot. Označíme y_0 tu hodnotu y, při níž forma (29) po příslušném výběru x nabývá nejmenší možné hodnoty. (Je-li takových hodnot y několik, zvolíme za y_0 *nejmenší z nich.*) Tu hodnotu x, při níž $|y_0\alpha - x|$ nabývá onoho minima, označíme x_0. Snadno se přesvědčíme, že tato hodnota je *jediná*. Skutečně, kdybychom měli

$$\left|\alpha - \frac{x_0}{y_0}\right| = \left|\alpha - \frac{x_0'}{y_0}\right| \qquad (x_0 \neq x_0'),$$

bylo by patrně

$$\alpha = \frac{x_0 + x_0'}{2y_0}.$$

Tvrdíme, že tento zlomek je irreducibilní. Kdyby totiž bylo

$$x_0 + x_0' = lp, \ 2y_0 = lq \ (l > 1),$$

bylo by v případě $l > 2$

$$q < y_0, \quad \alpha = \frac{p}{q}, \ |q\alpha - p| = 0,$$

což odporuje definici y_0; je-li $l = 2$, pak $q = y_0$

$$|q\alpha - p| = |y_0\alpha - p| = 0 < |y_0\alpha - x_0|,$$

což odporuje definici x_0.

Rozvineme-li racionální číslo α v řetězec, dostaneme

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n}, \ p_n = x_0 + x_0', \quad q_n = 2y_0 = a_nq_{n-1} + q_{n-2}, \quad a_n \geqq 2.$$

Je-li tedy $a_n > 2$ nebo je-li $a_n = 2$, $n > 1$, budeme mít $q_{n-1} < y_0$. Avšak

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2y_0} \leqq \tfrac{1}{2} \leqq |y_0\alpha - x_0|,$$

což odporuje definici y_0. Je-li však $n = 1$, $a_n = 2$, je $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$ a máme opět případ, který jsme vyloučili.

Hodnoty y_0 a x_0 jsou tedy určeny jediným způsobem danými podmínkami. Z toho plyne bezprostředně, že $\frac{x_0}{y_0}$ je nejlepší přiblížení druhého druhu čísla α, jinak by nerovnosti

$$|b\alpha - a| \leqq |y_0\alpha - x_0| \qquad \left(\frac{a}{b} \neq \frac{x_0}{y_0},\ b \leqq y_0\right),$$

patrně odporovaly definici čísel x_0, y_0. Na základě věty 16 máme pak

$$x_0 = p_s,\ y_0 = q_s \quad (s \leqq k).$$

Je-li $s = k$, je věta dokázána. Bylo-li by však $s < k$, měli bychom

$$|q_s\alpha - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \geqq \frac{1}{q_{k-1} + q_k},$$

$$|q_k\alpha - p_k| \leqq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Ježto pak na základě určení čísel $p_s = x_0$ a $q_s = y_0$ je

$$|q_s\alpha - p_s| \leqq |q_k\alpha - p_k|,$$

platí

$$\frac{1}{q_{k-1} + q_k} < \frac{1}{q_{k+1}},$$

t. j.

$$q_{k+1} < q_k + q_{k-1},$$

a to není možné na základě zákona o tvoření čísel q_k. Tak je věta 17 dokázána.

Ty vlastnosti aparátu řetězců, které jsme našli v tomto paragrafu, byly s historického hlediska prvním podnětem k odkrytí a zkoumání tohoto aparátu. Huygens si vytkl za cíl sestrojit pomocí ozubených kol model sluneční soustavy a byl tak přiveden k úloze stanovit počet zubů ozubených kol tak, aby poměr těchto čísel pro dvě do sebe zasahující kola (rovný poměru časů jejich úplného otočení) byl pokud možno blízký k poměru α časů oběhu daných planet. Zároveň samozřejmě počet zubů z technických důvodů nemohl být příliš velký. Tak vznikla otázka najít takový racionální zlomek, jehož čitatel a jmenovatel by nepřevyšoval danou mez a který by zároveň ležel pokud možno blízko danému číslu α. (Toto číslo může být theoreticky též iracionální, prakticky však je v daném případě dáno racionálním zlomkem, jehož čitatel a jmenovatel jsou čísla příliš veliká.) Viděli jsme již, že theorie řetězců poskytuje možnost úplně rozřešit úlohu takto danou.

§ 7. Řád přiblížení

V předcházejícím paragrafu jsme se zabývali oceněním malosti rozdílu $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ u porovnání s jinými rozdíly podobného typu. Nyní se budeme zajímat o ocenění malosti téhož rozdílu sama o sobě, bez ohledu k jiným rozdílům tohoto tvaru. Přirozená cesta k ocenění, jak malá je velikost $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$, je patrně ta, že srovnáváme onen rozdíl s libovolnou ubývající funkcí argumentu q_k. V tomto směru nás věta 9 kap. I ihned vede k nerovnosti[6])

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2}. \tag{30}$$

Vzniká tudíž především otázka, není-li možno zesílit tuto nerovnost, t. j. zaměnit její pravou stranu jinou funkcí $f(q_k)$ jmenovatele q_k, která by při všech $n \geq 1$ hověla nerovnosti

$$f(n) < \frac{1}{n^2}.$$

Snadno nahlédneme, že chceme-li, aby takto zesílená nerovnost (30) byla splněna pro libovolné α při všech hodnotách k, není možno dosáhnout žádného podstatného zesílení v tomto směru. Přesněji řečeno, ať by bylo $\varepsilon > 0$ jakkoliv malé, lze vždy uvést takový případ, že

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_k^2}.$$

Abychom se o tom přesvědčili, všimneme si čísla

$$\alpha = [0; n, 1, n] = \frac{n+1}{n(n+2)},$$

pro které

$$p_1 = 1,\ q_1 = n,\ p_3 = n+1,\ q_3 = n(n+2),$$

a tudíž

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| = \left|\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1}\right| = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{q_1^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}.$$

Stačí pak jen vybrat n v souhlase s nerovností

$$\frac{1}{1+\frac{2}{n}} > 1-\varepsilon,$$

aby bylo

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_1^2}.$$

Vzdáme-li se však požadavku, aby zesílená nerovnost byla splněna při libovolném α *bez výjimky pro všechny* hodnoty k, lze dojít — jak ihned ukážeme — k řadě zajímavých a důležitých tvrzení.

[6]) V případě $\alpha = \frac{p_k}{q_k}$ (kdy věta 9 je nepoužitelná, ježto neexistuje q_{k+1}), se nerovnost (30) stává triviální.

Věta 18. *Má-li číslo α sblížený zlomek řádu $k > 0$, platí nutně aspoň jedna z obou nerovností*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2q_k^2}, \qquad \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

Důkaz. Ježto α leží mezi $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$, platí

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

(Poslední nerovnost vyjadřuje tu skutečnost, že geometrický střed veličin $\frac{1}{q_k^2}$ a $\frac{1}{q_{k-1}^2}$ je menší než jejich aritmetický střed; rovnost by byla možná jen pro $q_k = q_{k-1}$, což je v našem případě vyloučeno.) Odtud plyne ihned potvrzení věty.

Dokázané tvrzení je zvláště zajímavé proto, že připouští v jistém smyslu obrácení.

Věta 19. *Každý irreducibilní zlomek $\frac{a}{b}$ vyhovující nerovnosti*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

je sblíženým zlomkem čísla α.

Důkaz. Na základě věty 16 stačí ukázat, že zlomek $\frac{a}{b}$ je pro číslo α nejlepším přiblížením druhého druhu. Nechť

$$|d\alpha - c| \leqq |b\alpha - a| < \frac{1}{2b} \qquad \left(d > 0, \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}\right);$$

pak

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2bd}$$

a tudíž

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \leqq \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bd} + \frac{1}{2b^2} = \frac{b+d}{2b^2 d}. \tag{31}$$

Na druhé straně, ježto $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, platí

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \geqq \frac{1}{bd},$$

tudíž nerovnost (31) dává

$$\frac{1}{bd} < \frac{b+d}{2b^2 d},$$

odkud $d > b$. Je tedy zlomek $\frac{a}{b}$ skutečně nejlepší přiblížení druhého druhu čísla α a věta 19 je dokázána.

Dalším zesílením věty 18 je další značně hlubší věta.

Věta 20. *Má-li číslo α sblížený zlomek řádu $k > 1$, platí nutně aspoň jedna z těchto tří nerovností:*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}, \qquad \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2}, \qquad \left|\alpha - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-2}^2}.$$

Důkaz. Pro $k \geqq 1$ položme

$$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \varphi_k, \; \varphi_k + r_k = \psi_k.$$

Pomocná věta. *Je-li* $k \geqq 2$, $\psi_k \leqq \sqrt{5}$, $\psi_{k-1} \leqq \sqrt{5}$, *platí*

$$\varphi_k > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Ježto totiž

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \varphi_n \tag{32}$$

a

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}},$$

platí

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} + \frac{1}{r_{n+1}} = \varphi_n + r_n = \psi_n.$$

Proto podle podmínky pomocné věty

$$\varphi_k + r_k \leqq \sqrt{5}, \frac{1}{\varphi_k} + \frac{1}{r_k} \leqq \sqrt{5},$$

odkud

$$(\sqrt{5} - \varphi_k)\left(\sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_k}\right) \geqq 1,$$

neboli (ježto φ_k je racionální číslo)

$$5 - \sqrt{5}\left(\varphi_k + \frac{1}{\varphi_k}\right) > 0,$$

odkud (ježto je $\varphi_k > 0$) dostaneme

$$(\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \varphi_k)^2 < \tfrac{1}{4},$$

a tudíž

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \varphi_k < \tfrac{1}{2},$$

$$\varphi_k > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

což dokazuje pomocnou větu.

Připusťme nyní, že v rozporu s naším tvrzením

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geqq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} \quad (n = k, k-1, k-2).$$

Dle vzorce (16) kap. I máme

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| =$$

$$= \frac{1}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2(r_{n+1} + \varphi_{n+1})} = \frac{1}{q_n^2 \psi_{n+1}},$$

a tudíž

$$\psi_{n+1} \leqq \sqrt{5} \quad (n = k,\ k-1,\ k-2).$$

Podle pomocné věty soudíme odtud, že

$$\varphi_k > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),\ \varphi_{k+1} > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

a tedy na základě rovnice (32)

$$a_k = \frac{1}{\varphi_{k+1}} - \varphi_k < \frac{2}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1,$$

což není možné. Tento rozpor dokazuje patrně větu 20.

Věty 18 a 20 vzbuzují domněnku, že jsou počátkem řetězu tvrzení, který připouští další pokračování. Avšak tato domněnka je mylná. Všimněme si čísla

$$\alpha = [1;\ 1,\ 1, \ldots].$$

Položíme-li, jako obvykle, $\alpha = 1 + \frac{1}{r_1}$, dostaneme patrně $r_1 = \alpha$, odkud

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha},\ \alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

a tudíž

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Ježto je patrně $r_n = \alpha$ při každém n, platí

$$\alpha = \frac{p_k \alpha + p_{k-1}}{q_k \alpha + q_{k-1}}$$

a tudíž

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k(q_k \alpha + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k^2 \left(\alpha + \frac{q_{k-1}}{q_k} \right)}.$$

Avšak podle věty 6 kap. I máme

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [1;\ 1,\ 1, \ldots,\ 1] \to \alpha \quad (k \to \infty),$$

odkud

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_k = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + \varepsilon_k \,(\varepsilon_k \to 0 \text{ pro } k \to \infty).$$

Je tedy

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2(\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) + \varepsilon_k)} = \frac{1}{q_k^2(\sqrt{5}+\varepsilon_k)}.$$

To ukazuje, že ať je c jakékoliv číslo $< \frac{1}{\sqrt{5}}$, pro dostatečně velké k budeme mít nutně

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c}{q_k^2}.$$

Není tedy možno nahradit konstantu $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ve větě 20 žádnou menší konstantou, chceme-li, aby odpovídající nerovnost byla splněna pro nekonečně mnoho hodnot k při libovolném α. Pro každou menší konstantu lze nalézt takové α (totiž $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$), které může vyhovovat oné nerovnosti jen pro konečný počet hodnot. Zejména je řetěz tvrzení počínající větami 18 a 20 přerušen touto poslední větou a nepřipouští dalšího pokračování.

§ 8. Obecné zákony aproximace

Dosud jsme se speciálně zajímali o přiblížení daná sblíženými zlomky a vysvětlili jsme řadu hlavních otázek spojených s touto úlohou. Ježto však jsme si při tom uvědomili, že sblížené zlomky jsou v jistém smyslu nejlepšími přiblíženími, můžeme počítat s tím, že získané výsledky nám dovolí studovat zevrubně zákony, kterými se řídí přiblížení iracionálních čísel racionálními čísly, nezávisle na libovolném speciálním zobrazujícím aparátu. Obrátíme se nyní k tomuto druhu úloh. V rámci této elementární monografie nemůžeme ovšem podat ani trochu úplný výklad základu příslušné theorie, nejen z nedostatku místa, ale hlavně i proto, že to má jen nepřímý vztah k naší úloze. Přirozeně se omezíme na to, že uvedeme řadu elementárních vět, které samy objasní užití řetězců na nauku o aritmetické povaze iracionálních čísel.

První otázku, jež se zde naskytuje, lze v souvislosti s výsledky předešlého paragrafu formulovat takto: pro která kladná c má nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2} \tag{33}$$

při libovolném reálném α nekonečně mnoho řešení v celých p a $q (q>0)$? Poslední výsledek předešlého paragrafu nás vede snadno k tomuto tvrzení:

Věta 21. *Nerovnost* (33) *má pro libovolné reálné α nekonečně mnoho řešení v celých p a q $(q < 0)$, je-li $c \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Je-li $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, bude mít nerovnost* (33) *při vhodné volbě α jen konečný počet takových řešení.*

První tvrzení je totiž bezprostředním důsledkem věty 20 (v případě, že $\alpha = \frac{a}{b}$ je racionální a tudíž má jen konečný počet sblížených zlomků, lze první tvrzení věty 21

dokázat triviálně, klademe-li $q = nb$, $p = na$, $n = 1, 2, \ldots$). Nechť tedy $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Položíme, jako v paragrafu 7,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = [1; 1, 1, \ldots].$$

Hoví-li celá čísla p a q ($q > 0$) nerovnosti (33), pak dle věty 19 je $\frac{p}{q}$ sblíženým zlomkem čísla α. Ale na konci paragrafu 7 jsme shledali, že mezi těmito sblíženými zlomky je jen konečný počet takových, které hoví nerovnosti (33), předpokládáme-li $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Tak je naše tvrzení úplně dokázáno.

Tudíž všeobecně, t. j. přihlížíme-li ke všem možným reálným číslům α, není možno přestoupit řád přiblížení charakterisovaný veličinou $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$. To však neznamená, že neexistují taková zvláštní iracionální čísla α, pro něž jsou možné aproximace značně vyššího řádu. Naopak jsou možnosti v tomto směru naprosto neomezené, o čemž je se možno přesvědčit především pomocí aparátu řetězců.

Věta 22. *Ať je dána jakákoliv kladná funkce $\varphi(q)$ přirozeného argumentu q, lze nalézt iracionální číslo α, pro něž nerovnost*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varphi(q)$$

má nekonečně mnoho řešení v celých p a q ($q > 0$).

Důkaz. Utvoříme nekonečný řetězec α tak, že budeme vybírat jeho prvky tím způsobem, aby hověly nerovnostem

$$a_{k+1} > \frac{1}{q_k^2\, \varphi(q_k)} \qquad (k \geqq 0),$$

což lze ovšem učinit nekonečně mnoha způsoby (a_0 je možno při tom vybrat libovolně). Pak bude pro libovolné $k \geqq 0$

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{q_k(a_{k+1}\, q_k + q_{k-1})} \leqq \frac{1}{a_{k+1} q_k^2} < \varphi(q_k),$$

což dokazuje větu.

Poznamenejme nyní, že v nejobecnějším případě nerovnosti

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqq \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

neboli, což je totéž,

$$\frac{1}{q_k^2 \left(a_{k+1} + 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k} \right)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqq \frac{1}{q_k^2 \left(a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k} \right)}$$

dávají

$$\frac{1}{q_k^2(a_{k+1}+2)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqq \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}}, \tag{34}$$

odkud je patrné, že při daných $a_0, a_1, \ldots, a_k$ zlomek $\frac{p_k}{q_k}$ tím blíže aproximuje číslo α, čím je větší další prvek; ježto však sblížené zlomky jsou ve všech případech nejlepšími přiblíženími, přicházíme k důsledku, že lepší přiblížení racionálními zlomky připouštějí ta irracionální čísla, mezi jejichž prvky se vyskytují větší čísla. Tato poznámka kvalitativního charakteru je kvantitativně vyjádřena právě nerovnostmi (34). Zvláště budou mít nejslabší řád aproximace irracionální čísla s omezenými prvky. Tak se stává pochopitelným, proč jsme již častěji — ve snaze dostat irracionální číslo, které by nepřipouštělo přiblížení řádu vyššího než je daný — vybrali k tomu číslo

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = [1; 1, 1, \ldots];$$

ze všech irracionálních čísel má toto číslo patrně nejmenší možné prvky (nehledíme-li na a_0, které zde nemá žádnou zvláštní úlohu), a tudíž se nejslaběji aproximuje racionálními zlomky.

Ty specifické zvláštnosti aproximace, které jsou vlastní číslům s ohraničenými prvky, jsou úplně vyjádřeny tímto tvrzením, které po všem, co bylo poznamenáno, je skoro samozřejmé.

Věta 23. *Pro každé irracionální číslo α s omezenými prvky nemá nerovnost*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^2} \tag{33}$$

při dostatečně malém c řešení v celých p a q ($q > 0$). Naproti tomu pro každé číslo α s neomezenou posloupností prvků má nerovnost (33) *nekonečně mnoho takových řešení.*

Jinak řečeno, irracionála s omezenými prvky připouští řád aproximace ne vyšší než $\frac{1}{q^2}$, naproti tomu irracionála s neomezenými prvky připouští libovolně vysoký řád aproximace.

Důkaz. Jsou-li mezi prvky řetězce zobrazujícího α prvky libovolně velké, lze pro libovolné $c > 0$ nalézt nekonečně mnoho hodnot k, při nichž

$$a_{k+1} > \frac{1}{c},$$

a tudíž podle druhé z nerovností (34) budeme mít pro nekonečně mnoho k

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{c}{q_k^2},$$

čímž je dokázáno druhé tvrzení věty.

Existuje-li takové $M > 0$, že

$$a_k < M \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

je podle první z nerovností (34) pro libovolné $k \geqq 0$

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2\,(M+2)}.$$

Z toho dostaneme pro libovolnou dvojici celých čísel p a q ($q > 0$), určíme-li index k nerovnostmi

$$q_{k-1} < q \leqq q_k$$

a uvážíme-li, že všechny sblížené zlomky jsou nejlepšími přiblíženími prvního druhu,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqq \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)} =$$

$$= \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q}{q_k}\right)^2 > \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right)^2 >$$

$$> \frac{1}{q^2(M+2)}\,\frac{1}{(a_k+1)^2} > \frac{1}{(M+2)\,(M+1)^2\,q^2}.$$

Zvolíme-li tudíž

$$c < \frac{1}{(M+2)(M+1)^2},$$

nemůže být nerovnost (33) splněna ani pro jednu z dvojic čísel p a q ($q > 0$). Tím je dokázáno i první tvrzení naší věty.

Dosud jsme oceňovali blízkost aproximace malostí rozdílu $\alpha - \dfrac{p}{q}$. Mohli bychom si však i zde, podobně jako jsme to činili v paragrafu 6, všímat místo toho rozdílu $q\alpha - p$ a ve všech větách námi dokazovaných provést příslušnou změnu formulace. Tato prostá poznámka ihned vede k novému významnému hledisku při problému, který studujeme.

Jednoduchá lineární homogenní rovnice se dvěma neznámými x, y,

$$\alpha x - y = 0, \tag{35}$$

kde α je dané iracionální číslo, nemůže být přesně řešena celými čísly.[7]) Je však možno dát za úlohu přibližné řešení této rovnice, t. j. výběr takových celých čísel x, y, pro něž rozdíl dostihuje určitého stupně malosti. Je patrné, že všechny předešlé věty tohoto paragrafu mohou být vykládány jako věty o zákonitostech řídících přibližná řešení

[7]) Nehledě ovšem k triviálnímu řešení $x = y = 0$.

rovnice (35) celými čísly tohoto druhu. Tak na př. věta 21 ukazuje, že vždy existuje nekonečně mnoho takových celých čísel x a y ($x > 0$), pro něž

$$|\alpha x - y| < \frac{C}{x}, \tag{36}$$

je-li C kladné číslo ne menší než $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

S tohoto nového hlediska je přirozené přejít od homogenní rovnice (35) k nehomogenní rovnici

$$\alpha x - y = \beta, \tag{37}$$

kde β je libovolně dané reálné číslo, a zkoumat možnost i charakter jejího přibližného řešení celými čísly x, y; jinak řečeno zabývat se zákonitostmi vznikajícími při otázce učinit rozdíl $\alpha x - y - \beta$ pokud možno malým při vhodném výběru celých čísel x, y.

Tato otázka byla nejprve položena velikým ruským učencem P. L. Čebyševem, který také podal první hlavní výsledky spojené s touto rovnicí. Později intensivně pokračovalo její zkoumání, hlavně v sovětské aritmetické škole.

První základní zvláštnost odlišující nehomogenní případ od homogenního tkví v tom, že — aby bylo možno učinit veličinu $|\alpha x - y - \beta|$ pro libovolné β libovolně malou vhodným výběrem celých čísel x a y — je podstatným požadavkem, aby číslo α bylo *iracionální* (kdežto v homogenním případě se veličina $|\alpha x - y|$ může stát libovolně malou při *libovolném* α).

Skutečně, je-li $\alpha = \frac{a}{b}$, kde $b > 0$ a a jsou celá čísla, pak — položíme-li $\beta = \frac{1}{2b}$ — budeme při libovolných celých x a y mít

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{2(ax - by) - 1}{2b} \right| \geqq \frac{1}{2b},$$

ježto $|2(ax - by) - 1|$ jako liché celé číslo je aspoň rovno 1.

Budeme tudíž v dalším stále považovat číslo α za iracionální. Při této podmínce, jak se hned přesvědčíme, nejen je možno veličinu $|\alpha x - y - \beta|$ učinit libovolně malou, nýbrž analogie s homogenním případem jde ještě mnohem dále.

Věta 24 (Čebyševova). *Pro libovolné iracionální číslo α a libovolné reálné číslo β má nerovnost*

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{3}{x}$$

nekonečně mnoho řešení celými čísly x a y ($x > 0$).

Předběžná poznámka. Je patrné, že tento výsledek je zcela analogický s odpovídající vlastností homogenní rovnice vyjádřené větou 21. Rozdíl je jen v tom, že místo konstanty $\frac{1}{\sqrt{5}}$ je zde konstanta 3; řád aproximace zůstává týž jako dříve. Poznamenejme ještě, že číslo 3 není zde nejmenší možné a že přesná hodnota dolní meze (infimum) těch čísel, kterými je lze zaměnit bez porušení správnosti věty 24, je podstatně menší.

Důkaz. Nechť je $\frac{p}{q}$ libovolný sblížený zlomek čísla α; pak je

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \qquad (0 < |\delta| < 1). \tag{38}$$

Dále můžeme, ať je β jakékoliv reálné číslo, určit takové celé číslo t, že

$$|q\beta - t| \leqq \tfrac{1}{2},$$

odkud

$$\beta = \frac{t}{q} + \frac{\delta'}{2q} \qquad (|\delta'| \leqq 1). \tag{39}$$

Ježto čísla p a q jsou nesoudělná, existuje dvojice celých čísel x, y hovící vztahům[8])

$$\tfrac{1}{2}q \leqq x < \tfrac{3}{2}q,\; px - qy = t.$$

Avšak v tomto případě budeme mít na základě vztahů (38) a (39)

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{xp}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - y - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{2q} \right| =$$
$$= \left| \frac{x\delta}{q^2} - \frac{\delta'}{2q} \right| < \frac{x}{q^2} + \frac{1}{2q},$$

a ježto

$$q > \tfrac{2}{3}x,$$

bude

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x} = \frac{3}{x}.$$

Protože lze zvolit číslo q libovolně velké a protože platí $x \geqq \frac{1}{2}q$, je také x libovolně velké; tak je patrně věta dokázána.

Avšak úloha o přibližném řešení rovnice (37) celými čísly může být dána ještě v jiném tvaru, snad dokonce trochu přirozenějším. Ježto podstata úlohy tkví v tom, učinit veličinu $|\alpha x - y - \beta|$ pokud možno malou pomocí výběru nepříliš velkých celých čísel x, y, je nejpřirozenější položit úlohu takto. Víme (podle právě dokázané věty 24),

---

[8]) *Důkaz* tohoto tvrzení. Je-li $\frac{r}{s}$ sblížený zlomek čísla α bezprostředně předcházející $\frac{p}{q}$, platí

$$qr - ps = \varepsilon = \pm 1,\; q(\varepsilon rt) - p(\varepsilon st) = t\varepsilon^2 = t$$

a pro libovolné celé k

$$p(kq - \varepsilon st) - q(kp - \varepsilon rt) = t;$$

k lze však zvolit tak, že

$$\tfrac{1}{2}q \leqq x = kq - \varepsilon st < \tfrac{3}{2}q.$$

Srovnej § 6.

že je možno, je-li dáno libovolně velké kladné číslo n, pro libovolné iracionální α a libovolné reálné β stanovit celá čísla $x > 0$, y hovící nerovnosti

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}. \tag{40}$$

Avšak věta 24 nám nedává obecně poučení o tom, v jakých mezích je třeba hledat tato čísla, abychom dosáhli potřebné přesnosti charakterisované velikostí $\frac{1}{n}$. Toho by bylo na př. dosaženo, kdybychom mohli najít číslo N, závislé na n, nezávislé však ani na α ani na β, takové, že nerovnosti (40) bylo by možno vyhovět při doplňující podmínce

$$|x| \leqq N.$$

Je patrné, že nová formulace úlohy se podstatně liší od formulace, jíž jsme se dosud zabývali. Byla-li dříve (jako ve větě 24) přesnost aproximace určena v závislosti na velikosti čísla x, nyní určujeme tuto přesnost předem a tážeme se naopak, jak velké je nutno zvolit číslo x, aby bylo dosaženo oné dané přesnosti. V souhlase s tímto rozdílem ve formulaci úlohy nabývá i odpověď podstatně jiného charakteru; zejména dostaneme různé výsledky pro homogenní a nehomogenní případ.

V případě homogenní rovnice ($\beta = 0$) má vytčená úloha zcela jednoduché řešení.

Věta 25. *Ať jsou $n \geqq 1$ a α jakákoliv reálná čísla, lze nalézt celá čísla x, y hovící nerovnostem*

$$0 < x \leqq n, \quad |\alpha x - y| < \frac{1}{n}.$$

Důkaz. Je-li α racionální, $\alpha = \frac{a}{b}$ a $0 < b \leqq n$, dokáže se věta triviálně, klademe-li $x = b$, $y = a$. Není-li možno α znázornit v takovém tvaru, t. j. je-li α buď iracionální číslo, nebo racionální zlomek se jmenovatelem převyšujícím n, pak, určíme-li index k vztahem

$$q_k \leqq n < q_{k+1}$$

(kde $\frac{p_k}{q_k}$ značí sblížené zlomky čísla α), dostaneme

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k n},$$

tudíž

$$|\alpha q_k - p_k| < \frac{1}{n}, \quad 0 < q_k \leqq n,$$

což dokazuje větu.

Nyní musíme přirozeně položit otázku, není-li možno i v případě nehomogenní rovnice (37) stanovit týž řád aproximace. Jinými slovy, je-li možno dokázat, že pro libovolné iracionální číslo α lze nalézt takové kladné číslo C, že při libovolných reálných číslech $n \geqq 1$ a β existují celá čísla x a y vyhovující nerovnostem

$$0 < x \leqq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}.$$

Přitom patrně potřebujeme dokonce méně než to, co bylo dokázáno pro homogenní případ, ježto připouštíme závislost C na α, kdežto v homogenním případě $C = 1$ je absolutní konstantou.) Není nesnadno uvést některé apriorní úvahy proti možnosti takového předpokladu; především pro racionální α je patrně nesprávný, neboť v tomto případě, jak jsme viděli výše, nemůžeme obecně (t. j. při libovolném β) volit veličinu $|\alpha x - y - \beta|$ libovolně malou. To dovoluje očekávat, že, je-li α iracionální, avšak je aproximováno neobyčejně blízce racionálními čísly, pak veličina $|\alpha x - y - \beta|$, třeba může být dle věty 24 učiněna libovolně malou, vyžaduje k tomu nicméně při vhodně zvoleném β a daném stupni přesnosti značně větších hodnot x a y. Avšak tyto úvahy dovolují dále předpokládat, že přiblížení rozdílu $\alpha x - y$ k libovolnému reálnému číslu β se dosáhne tím snadněji, čím slaběji je číslo α aproximováno racionálními zlomky, t. j. čím nesnadněji se dosáhne přiblížení veličiny $\alpha x - y$ k nule; to však se své strany vyžaduje, jak víme, aby prvky čísla nerostly příliš rychle. Všechny tyto předběžné úvahy jsou nejen potvrzeny, nýbrž i přesněji kvantitativně vyjádřeny větou:

Věta 26. *Aby existovalo reálné číslo C s tou vlastností, že při libovolných reálných $n \geqq 1$ a β lze nalézt dvojici celých čísel x a y $(x > 0)$ hovící nerovnosti*

$$x \leqq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

je nutné a postačí, aby se iracionální číslo α dalo vyjádřit řetězcem s omezenými prvky.

Důkaz. Nechť je

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

a nechť $a_i < M\ (i = 1, 2, \ldots)$; nechť je dále $m \geqq 1$ a β libovolné reálné číslo. Označíme-li $\frac{p_k}{q_k}$ sblížené zlomky čísla α, určíme index k nerovností

$$q_k \leqq m < q_{k+1};$$

pak

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{m q_k},$$

neboli

$$\alpha = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\delta}{m q_k} \quad (|\delta| \leqq 1). \tag{41}$$

Dále zvolíme celé číslo t tak, aby bylo

$$|\beta q_k - t| \leqq \tfrac{1}{2},$$

odkud

$$\beta = \frac{t}{q_k} + \frac{\delta'}{2q_k} \quad (|\delta'| \leqq 1). \tag{42}$$

Konečně, jako při důkazu věty 24, určeme dvojici celých čísel x, y, jež hoví vztahu

$$x p_k - y q_k = t, \quad 0 < x \leqq q_k.$$

Z (41), (42) a (43) plyne

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{xp_k}{q_k} - y - \frac{t}{q_k} + \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k} \right| =$$

$$= \left| \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k} \right| < \frac{x}{mq_k} + \frac{1}{2q_k} \leqq \frac{1}{m} + \frac{1}{2q_{k+1}} \left(\frac{q_{k+1}}{q_k} \right) <$$

$$< \frac{1}{m} + \frac{1}{2m} (a_{k+1} + 1) < \frac{1}{m} + \frac{M+1}{2m} = \frac{M+3}{2m}.$$

Dosud zůstávalo číslo $m \geqq 1$ naprosto libovolné. Položíme-li nyní, při daném $n \geqq 1$, $m = \frac{1}{2}(M+3)\,n$, budeme mít patrně $m \geqq 1$. Tudíž podle předcházejícího, volíme-li x a y, jak bylo naznačeno,

$$0 < x \leqq q_k \leqq m = \tfrac{1}{2}(M+3)\,n,$$

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

čímž je dokázána první část věty.

Abychom dokázali druhou část, připustíme, že mezi prvky a_k čísla α jsou prvky libovolně velké. V takovém případě, jak ukazuje věta 23, ať je ε jakkoliv malé kladné číslo, lze nalézt celá čísla $q > 0$, p hovící nerovnosti

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon^2}{q^2},$$

odkud

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta\varepsilon^2}{q^2} \qquad (|\delta| < 1).$$

Položme nyní $n = \dfrac{q}{\varepsilon}$ a $\beta = \dfrac{1}{2q}$. Pro libovolná celá x, y $(0 < x \leqq Cn)$ pak dostaneme

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{xp}{q} - y - \frac{1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2} \right| = \left| \frac{2(xp - yq) - 1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2} \right| >$$

$$> \frac{|2(xp - yq) - 1|}{2q} - \frac{x\varepsilon^2}{q^2} \geqq \frac{1}{2q} - \frac{C\varepsilon}{q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ať by bylo C jakkoliv velké, pro dostatečně malé ε budeme však mít $\dfrac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} > 1$, a tudíž, pro libovolná celá x, y $(0 < x \leqq Cn)$

$$|\alpha x - y - \beta| > \frac{1}{n},$$

čímž je dokázána i druhá část věty.

Shrňme výsledky, kterých jsme dosáhli. Sledujeme-li přibližná řešení rovnice (37) celými čísly, je dlužno považovat za „normální" případ ten, kdy přesnosti charakterisované veličinou $\dfrac{1}{n}$ může být dostiženo pro libovolné $n \geqq 1$ při některém $x < Cn$, kde C je konstanta (která může záviset na α). Homogenní rovnice (t. j. rovnice, kterou dostaneme pro $\beta = 0$) má vždy normální řešení (věta 25). Věta 26 ukazuje, že obecná (nehomogenní) rovnice připouští normální řešení v tom a jen v tom případě, nemá-li příslušná homogenní rovnice „nadnormální" řešení, t. j. nelze-li ji splnit pro libovolné $\varepsilon > 0$ a vhodně vybrané n s přesností $\frac{1}{n}$ celými čísly $x > 0, y$, z nichž $x < \varepsilon n$. S tohoto hlediska může se výsledek našich úvah považovat za zvláštní případ zákona o řešení lineálních rovnic (algebraických, integrálních, atd.): *nehomogenní rovnice se v obecném případě řeší „normálně", nepřipouští-li homogenní rovnice „nadnormální" řešení.*

Poznamenejme ještě, že ve větě 26 jsme požadovali nezávislost C na β. Bylo by možno zachovat týž výsledek a při tom připustit, že C je funkcí β; toliko důkaz (jeho druhé části) by byl poněkud složitější.

§ 9. Aproximace algebraických irracionálních čísel. Transcendentní čísla Liouvilleova

Nechť je

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \tag{44}$$

mnohočlen stupně n s *celými* koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Číslo α, které je kořenem takového mnohočlenu, se nazývá *algebraickým.* Ježto každé racionální číslo $\alpha = \frac{a}{b}$ může být určeno jako kořen rovnice prvního stupně $bx - a = 0$, je pojem algebraického čísla patrně přirozeným zevšeobecněním pojmu racionálního čísla. Hoví-li dané algebraické číslo rovnici $f(x) = 0$ stupně n a nehoví žádné rovnici nižšího stupně (s celými koeficienty), nazývá se *algebraickým číslem stupně n.* Zejména lze racionální čísla definovat jako algebraická čísla prvního stupně. Číslo $\sqrt{2}$, které je kořenem mnohočlenu $x^2 - 2$, je algebraickým číslem druhého stupně nebo, jak se říká, *kvadratickým iracionálním číslem* (kvadratickou irracionálou). Podobným způsobem se definují irracionální čísla kubická, čtvrtého stupně atd. Všechna čísla nealgebraická se nazývají *transcendentní;* mezi ně patří na př. čísla e a π. Vzhledem k význačné úloze, kterou mají algebraická čísla v současné theorii čísel, bylo věnováno mnoho speciálních úvah otázce jejich vlastností vztahujících se na jejich aproximaci racionálními zlomky. Prvním význačným výsledkem v tomto směru byla tato věta, nazývaná větou Liouvilleovou.

Věta 27. *Pro každé reálné irracionální algebraické číslo α stupně n existuje takové kladné číslo C, že při libovolných celých p a q ($q > 0$) platí*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n}.$$

Důkaz. Nechť je α kořenem mnohočlenu (44). Jak známo z algebry, lze psát

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x), \tag{45}$$

kde $f_1(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$. Přitom lze snadno nahlédnout, že $f_1(\alpha) \neq 0$. Skutečně, v případě $f_1(\alpha) = 0$ by bylo možno mnohočlen $f_1(x)$ dělit (beze zbytku) $x - \alpha$ a mnohočlen $f(x)$ tedy dělit $(x - \alpha)^2$; avšak v takovém případě derivaci $f'(x)$ by bylo možno dělit $x - \alpha$, t. j. bylo by $f'(\alpha) = 0$, což není možné, neboť $f'(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$ s celými koeficienty a α algebraické číslo stupně n. Máme tedy

$$f_1(\alpha) \neq 0,$$

a tudíž lze nalézt takové kladné číslo δ, že

$$f_1(x) \neq 0 \quad (\alpha - \delta \leqq x \leqq \alpha + \delta).$$

Nechť p a q $(q > 0)$ je libovolná dvojice celých čísel. Je-li $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \delta$, je $f_1\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, a tudíž, klademe-li do identity (45) $x = \frac{p}{q}$, najdeme

$$\frac{p}{q} - \alpha = \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{a_0 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)} =$$

$$= \frac{a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \ldots + a_np^n}{q^nf_1\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Čitatel posledního zlomku je celé číslo různé od nuly, ježto jinak by bylo $\alpha = \frac{p}{q}$, kdežto α je dle podmínky vyslovené ve větě iracionální. Tudíž tento čitatel je absolutní hodnotou roven aspoň 1. Označíme-li M horní mez (supremum) funkce $f_1(x)$ v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, dostaneme tudíž z poslední rovnice nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{Mq^n}.$$

V případě však, že

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta,$$

máme tím spíše

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\delta}{q^n};$$

označíme-li tedy C libovolné kladné číslo menší než δ i $\frac{1}{M}$, bude platit ve všech případech (t. j. pro libovolná celá $p, q, q > 0$)

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n},$$

což dokazuje větu 27.

Věta Liouvilleova patrně tvrdí, že algebraická čísla nepřipouštějí takové aproximace racionálními zlomky, která by svou přesností převyšovala nějaký řád závislý v podstatě na stupni daného algebraického čísla. Hlavní historický význam této věty je ten, že ona první umožnila dokázat existenci transcendentních čísel a podala konkretní příklady takových čísel. K tomu, jak shledáme, stačí ustanovit číslo, které je iracionální a dá se neobyčejně blízce aproximovat racionálními čísly. V tom směru, jak známe z věty 22, nejsou naše možnosti nijak ohraničeny.

Konkretně věta 27 ukazuje, že existují-li pro libovolné $C > 0$ a libovolné přirozené n celá čísla p a q ($q > 0$) hovící nerovnosti:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{C}{q^n}, \tag{46}$$

je číslo α transcendentní. Pomocí aparátu řetězců lze však velmi snadno sestrojit taková čísla. K tomu je nutno jen, když už byly vybrány prvky $a_0, a_1, \ldots, a_k$, určit sblížený zlomek $\frac{p_k}{q_k}$ a zvolit

$$a_{k+1} > q_k^{k-1},$$

neboť pak

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}}.$$

V důsledku toho je pak patrně splněna nerovnost (46) pro všechny dostatečně velké hodnoty k při libovolném $C > 0$ a libovolném přirozeném čísle n.

§ 10. Kvadratická irracionální čísla a periodické řetězce

Pro kvadratické irracionály ukazuje věta 27, že existuje takové kladné číslo C (závislé na α), pro něž nemůže mít nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}$$

řešení v celých p a q ($q > 0$). Podle věty 23 plyne odtud, že jsou prvky každé kvadratické irracionály omezeny. Avšak pro kvadratické irracionály již dávno před Liouvillem našel Lagrange mnohem obsažnější vlastnost jich vyjádření řetězci, která nad to je charakteristická. Ukazuje se, že posloupnost prvků kvadratické irracionály je periodická, a že naopak každý periodický řetězec dá se vyjádřit kvadratickou irracionálou. Tento paragraf se bude zabývat důkazem tohoto tvrzení.

Řekneme, že řetězec

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

je *periodický*, existují-li taková celá kladná čísla k_0 a h, že při libovolném $k \geqq k_0$ platí

$$a_{k+h} = a_k;$$

analogicky jako u desetinných zlomků budeme značit takový periodický zlomek takto:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}}]. \tag{47}$$

Věta 28. *Každý periodický řetězec zobrazuje kvadratické iracionální číslo a naopak, každá kvadratická iracionála je zobrazena periodickým řetězcem.*

Důkaz. První tvrzení se dokáže několika slovy. Je totiž patrné, že zbytky periodického řetězce (47) vyhovují vztahu

$$r_{k+h} = r_k \quad (k \geqq k_0).$$

Podle vzorce (16) kap. I máme tedy pro $k \geqq k_0$:

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h} + q_{k+h-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}, \tag{48}$$

odkud

$$\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}.$$

Číslo r_k vyhovuje tedy kvadratické rovnici s celými koeficienty, a je tudíž kvadratickou iracionálou. Pak první z rovnic (48) ukazuje, že také α je kvadratickou iracionálou.

Důkaz obráceného tvrzení je trochu složitější. Nechť číslo α vyhovuje kvadratické rovnici

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{49}$$

s celými koeficienty. Dosadíme-li do této rovnice místo α jeho vyjádření zbytkem řádu n,

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}},$$

vidíme, že r_n vyhovuje rovnici

$$A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0, \tag{50}$$

kde A_n, B_n, C_n jsou celá čísla daná vzorci

$$\left.\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

odkud zejména plyne

$$C_n = A_{n-1}. \tag{52}$$

Pomocí těchto vzorců lze snadno bezprostředně ověřit, že

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})^2 = b^2 - 4ac, \tag{53}$$

t. j. že diskriminant rovnice (50) je pro všechna n týž a je roven diskriminantu rovnice (49).

Dále ježto

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2},$$

platí

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \qquad (|\delta_{n-1}| < 1).$$

První ze vzorců (51) nám tudíž dává

$$A_n = a\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right) q_{n-1} + c q_{n-1}^2 =$$

$$= (a\alpha^2 + b\alpha + c)\, q_{n-1}^2 + 2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}.$$

Odtud podle rovnice (49)

$$|A_n| = \left|2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}\right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|,$$

a dále podle rovnice (52)

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|.$$

Jsou tedy koeficienty A_n a C_n rovnice (50) omezeny co do absolutní hodnoty a tak při změně n mohou nabývat jen konečného počtu hodnot. Podle (53) odtud plyne, že i B_n může nabývat jen konečného počtu různých hodnot.

Můžeme se tudíž při vzrůstu n od 1 do ∞ setkat jen s konečným počtem různých rovnic (50; v takovém případě může r_n nabývat jen konečného počtu různých hodnot, a je tudíž pro vhodně zvolená k a h

$$r_k = r_{k+h}.$$

To ukazuje, že řetězec zobrazující α je periodický. Tím je dokázána i druhá část naší věty.

Pro algebraické iracionály vyšších stupňů nejsou známy vlastnosti jejich zobrazujících řetězců analogické s tím, co právě dokázáno. Vůbec vše, co je známo o aproximaci algebraických iracionál vyšších stupňů racionálními zlomky, je vyčerpáno elementárními důsledky věty Liouvilleovy a některých novějších vět, jež ji zesilují. Nutno říci, že až dosud není znám ani pro jediné algebraické číslo vyššího než druhého stupně rozklad v řetězec. Není známo, může-li mít takový rozklad omezené prvky; rovněž není známo, může-li být naopak posloupnost prvků neomezená atd. Vůbec otázky spojené s rozkladem algebraických čísel vyššího stupně v řetězce jsou mimořádně nesnadné a nebyly dosud zkoumány.

KAPITOLA III.

METRICKÁ THEORIE ŘETĚZCŮ

§ 11. Úvod

V celé předešlé kapitole jsme viděli, že reálná čísla se mohou velmi lišit svými aritmetickými vlastnostmi. Mimo základní rozdělení reálných čísel na racionální a iracionální, na algebraická a transcendentní, je možná řada značně přesnějších dalších rozdělení těchto čísel podle celé řady znaků charakterisujících jejich aritmetickou povahu a především podle charakteru té aproximace racionálními čísly, kterou ona čísla připouštějí. Ve všech takových případech jsme se doposud spokojili prostým stanovením, zda čísla mající nějakou aritmetickou vlastnost skutečně existují. Tak víme, že existují čísla, připouštějící přibližné vyjádření racionálními zlomky $\frac{p}{q}$ jen s přesností, jejíž řád není vyšší než $\frac{1}{q^2}$ (takové jsou na př. všechny kvadratické iracionály). Víme však také, že existují čísla dovolující aproximaci vyššího stupně (věta 22, kap. II). Přirozeně se nám naskýtá otázka, které z obou opačných vlastností je třeba přiznat větší „obecnost", který z oněch dvou typů reálných čísel se „častěji vyskytuje".

Chceme-li dát takto kladené otázce přesnou formulaci, musíme mít na zřeteli, že po každé, když jsme vyslovili nějakou vlastnost reálných čísel (na př. iracionálnost, nebo transcendentnost, nebo vyjádřitelnost s omezenou posloupností prvků atd.), souhrn všech reálných čísel se rozpadá vzhledem k této vlastnosti na dvě množiny: 1. množinu čísel majících danou vlastnost a 2. množinu čísel bez této vlastnosti. Otázka, kterou chceme klást, se převede na úlohu porovnat tyto dvě množiny s cílem stanovit, která z nich obsahuje více čísel a která méně. Množiny reálných čísel lze však spolu srovnávat s různých hledisek a pomocí různých charakteristik. Můžeme klást otázku, jaká je jejich mohutnost, jejich míra i řada různých zevšeobecnění této míry. Nejzajímavější jak svou methodou, tak svými výsledky je *metrická* problematika, zabývající se *mírou* číselných množin, daných různými vlastnostmi čísel, jež se v nich vyskytují. Tato nauka, kterou možno nazvat *metrickou aritmetikou kontinua*, prošla v poslední době značným rozvojem a vedla k mnohým jednoduchým a zajímavým zákonitostem. Jako u každé nauky o aritmetické povaze iracionálních čísel, i zde je aparát řetězců přirozeným a nejlepším nástrojem studia; abychom však vybudovali tento aparát jako nástroj metrické theorie čísel, t. j. abychom ho užili ke studiu míry množin, daných aritmetickými vlastnostmi čísel, jež se v nich vyskytují, musíme patrně především podrobit onen aparát sám podrobné a všestranné metrické analyse; jinými slovy, musíme se naučit *určit míru množin čísel, jejichž rozklad v řetězec má předem dané vlastnosti.* Otázky tohoto druhu mohou mít velmi různý charakter. Můžeme se ptát, jaká je míra množiny čísel, pro něž $a_4 = 2$, nebo pro něž $q_{10} < 1000$, nebo která mají omezenou posloupnost prvků, nebo mezi jejichž prvky nejsou sudá čísla atd., atd. Souhrn method sloužících k řešení úloh podobného druhu tvoří *metrickou theorii řetězců*, jejímž počátkům a elementárnímu použití je věnována tato kapitola. Ježto se přičtením libovolného celého čísla k danému reálnému číslu jeho podstatné aritmetické vlastnosti nemění, omezíme se přitom v dalším na reálná čísla ležící v intervalu (0, 1) (t. j. položíme všude $a_0 = 0$). V metrické theorii je takové omezení na konečný interval ostatně nutné, chceme-li, aby míra množiny nebyla v obecném případě nekonečně velká.

Předpokládáme, že čtenář je obeznámen s hlavními větami theorie míry lineárních množin.[9])

§ 12. Prvky jako funkce zobrazeného čísla

Každé reálné číslo α lze jediným způsobem vyjádřit řetězcem

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

Každý prvek a_n je tudíž jednoznačně určen tím, že je dáno číslo α, t. j. je jednoznačnou funkcí α:

$$a_n = a_n(\alpha).$$

Ke zbudování metrické theorie řetězců je prvním krokem takové zkoumání této funkce, které by nám dovolilo utvořit si aspoň obecnou představu o jejím průběhu. Tomu je věnován tento paragraf.

Jak jsme již poznamenali v paragrafu 11, položíme všude $a_0 = 0$; abychom zkrátili označení, budeme při tom místo

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$$

psát kratčeji

$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots];$$

položíme tudíž

$$[a_1, a_2, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

Všimněme si nejdříve prvního prvku a_1 jako funkce α. Ježto

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}},$$

je patrně $a_1 = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$, t. j. a_1 je největší celé číslo nepřevyšující $\frac{1}{\alpha}$. Je tudíž

[9]) Vědomosti více než dostačující k porozumění této kapitoly jsou obsaženy v knize: P. S. Alexandrov a A. N. Kolmogorov, Vvedenije v teoriju funkcij dejstvitel'nogo peremennogo, 1933, kap. VI. • V české literatuře: Čech. •

$$a_1 = 1 \text{ pro } 1 \leqq \frac{1}{\alpha} < 2, \text{ t. j. } \tfrac{1}{2} < \alpha \leqq 1,$$

$$a_1 = 2 \text{ pro } 2 \leqq \frac{1}{\alpha} < 3, \text{ t. j. } \tfrac{1}{3} < \alpha \leqq \tfrac{1}{2},$$

$$a_1 = 3 \text{ pro } 3 \leqq \frac{1}{\alpha} < 4, \text{ t. j. } \tfrac{1}{4} < \alpha \leqq \tfrac{1}{3}, \text{ atd.};$$

obecně

$$a_1 = k \text{ pro } k \leqq \frac{1}{\alpha} < k + 1, \text{ t. j. } \frac{1}{k+1} < \alpha \leqq \frac{1}{k}.$$

Funkce $a_1 = a_1(\alpha)$ má tedy nespojitost pro všechny ty hodnoty α, při nichž $\frac{1}{\alpha}$ je celé číslo a roste do nekonečna při $\alpha \to \infty$. Její grafické zobrazení je dáno v obr. 1.

Poznamenejme ještě, že a_1 je konstantní v každém z intervalů $\left(\frac{1}{k+1} < \alpha \leqq \frac{1}{k}\right)$, které nazveme intervaly *prvního pořadí*, a že

$$\int_0^1 a_1(\alpha)\, d\alpha = +\infty,$$

ježto tento integrál se dá patrně vyjádřit divergentní řadou

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}.$$

Přejděme nyní ke studiu funkce $a_2(\alpha)$. K tomu si všimněme nejprve libovolného pevného intervalu prvního pořadí

$$\frac{1}{k+1} < \alpha \leqq \frac{1}{k}.$$

V tomto intervalu je však $a_1 = k$, a tudíž

$$\alpha = \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{r_2}},$$

při čemž $1 \leqq r_2 < \infty$ a $a_2 = [r_2]$. Když r_2 roste od 1 do ∞, α roste od $\frac{1}{k+1}$ do $\frac{1}{k}$, probíhá tudíž daný interval prvního pořadí. Přitom je patrné, že

$$a_2 = 1 \text{ pro } 1 \leqq r_2 < 2, \text{ t. j. } \frac{1}{k+1} \leqq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{2}},$$

$$a_2 = 2 \text{ pro } 2 \leqq r_2 < 3, \text{ t. j. } \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \leqq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{3}},$$

$$a_2 = 3 \text{ pro } 3 \leqq r_2 < 4, \text{ t. j. } \frac{1}{k+\frac{1}{3}} \leqq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{4}},$$

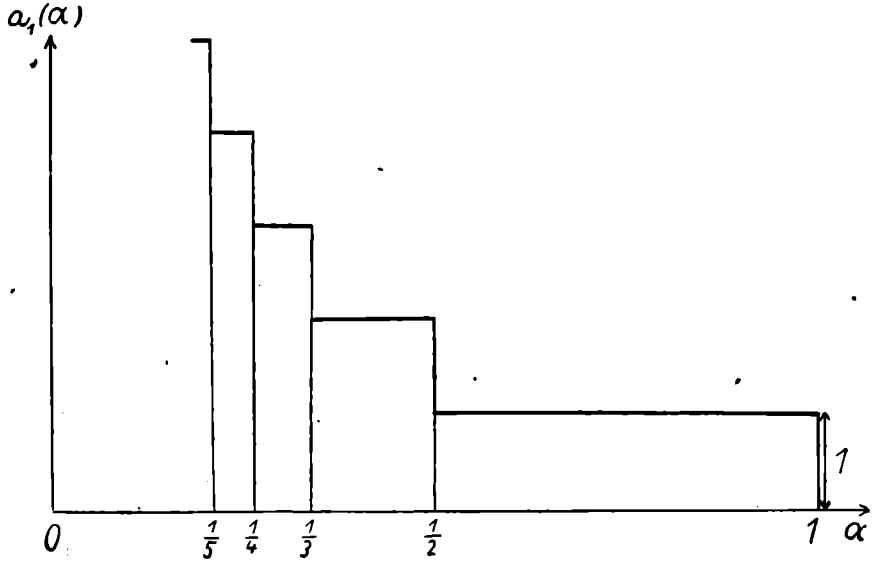
a obecně

$$a_2 = l \text{ pro } l \leqq r_2 < l + 1, \text{ t. j. } \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{l}} \leqq \alpha < \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{l+1}}.$$

V intervalu prvního pořadí $\frac{1}{k+1} < \alpha \leqq \frac{1}{k}$ má tedy grafické znázornění funkce $a_2(\alpha)$ tvar vyobrazený na obr. 2.

Funkce $a_2(\alpha)$ je stálá v každém z intervalů

$$\left(\frac{1}{k+\frac{1}{l}}, \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}\right),$$



Obr. 1.

které nazveme intervaly *druhého pořadí*. Každý interval prvního pořadí se tudíž rozpadá na spočetnou množinu intervalů druhého pořadí jdoucích *zleva napravo* (připomínáme, že intervaly prvního pořadí tvoří posloupnost jdoucí *zprava nalevo*). Množina bodů, v nichž je $a_1 = k$, je jeden interval prvního pořadí; množina bodů, v nichž $a_2 = l$, je spočetná množina intervalů druhého pořadí (po jednom v každém intervalu prvního pořadí). Každý interval prvního pořadí je určen podmínkou tvaru $a_1 = k$; každý interval druhého pořadí podmínkou tvaru $a_1 = k$, $a_2 = l$.

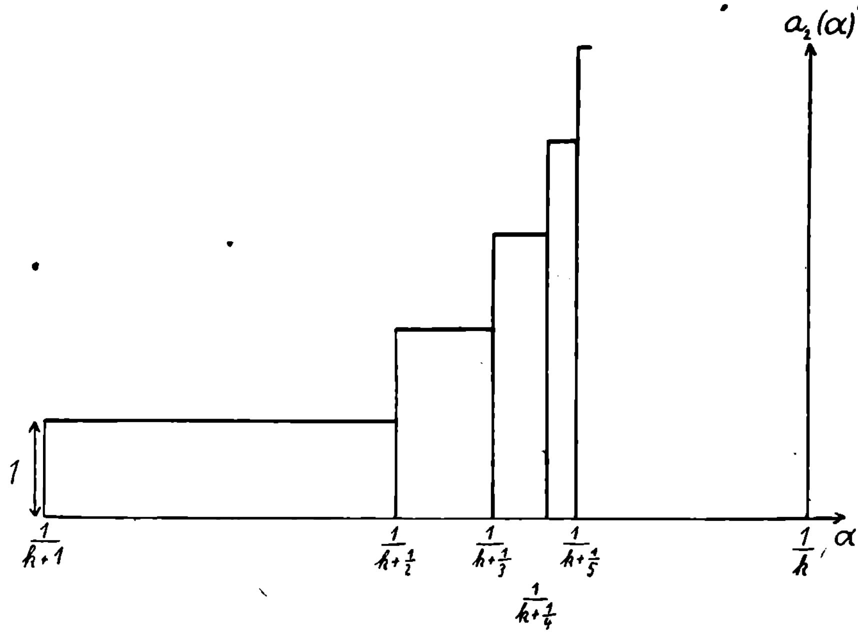
Definujme nyní již obecně interval *pořadí n* a sledujme průběh funkcí $a_1(\alpha), a_2(\alpha), \ldots, a_n(\alpha)$. Každá soustava hodnot

$$a_1 = k_1, a_2 = k_2, \ldots, a_n = k_n \tag{54}$$

určuje interval J_n pořadí n. Abychom mohli sledovat průběh funkce $a_{n+1}(\alpha)$ v intervalu J_n, poznamenejme, že libovolné číslo α tohoto intervalu lze znázornit ve tvaru

$$\alpha = [k_1, k_2, \ldots, k_n, r_{n+1}], \tag{55}$$

kde r_{n+1} nabývá všech možných hodnot od 1 do ∞. Naopak, při libovolném r_{n+1} ($1 < r_{n+1} < \infty$) nám výraz (55) dává číslo α, pro něž jsou splněny podmínky (54) a které tudíž patří do intervalu J_n. Ježto $a_{n+1} = [r_{n+1}]$, vidíme, že uvnitř každého z intervalů



Obr. 2.

pořadí n nabývá $a_{n+1}(\alpha)$ všech celých hodnot od 1 do ∞. Abychom si utvořili přesnější obraz, označíme jako obvykle $\frac{p_k}{q_k}$ sblížený zlomek čísla α. Pak je

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}},$$

při čemž, probíhá-li α daný interval J_n, r_{n+1} roste od 1 do ∞, kdežto p_{n-1}, q_{n-1}, p_n, q_n zůstávají stálými, protože tato čísla jsou určena čísly $a_1, a_2, \ldots, a_n$, která mají pro všechny body z intervalu J_n tytéž hodnoty. Zejména klademe-li $r_{n+1} = 1$ a $r_{n+1} \to \infty$, dostaneme jako koncové body intervalu J_n body

$$\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \text{ a } \frac{p_n}{q_n}.$$

Protože

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})},$$

je α monotonní funkcí r_{n+1} v intervalu $(1, \infty)$. Tedy i naopak r_{n+1} a také a_{n+1} je monotonní funkcí α v intervalu

$$J_n = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Když tedy α probíhá interval J_n, $a_{n+1}(\alpha)$ probíhá postupně hodnoty $1, 2, \ldots$ a rozkládá přitom interval J_n na spočetnou množinu intervalů pořadí $n + 1$. Ty jsou po sobě rozloženy zprava nalevo při sudém n a zleva napravo při lichém n.

Tak je objasněno sestrojení funkce $a_n(\alpha)$ aspoň po kvalitativní stránce. Nazveme interval $(0, 1)$ (jediným) intervalem pořadí 0 a především jej pokryjeme postupně sítí stále jemnějších intervalů, takže do každého již sestrojeného intervalu pořadí n vložíme posloupnost intervalů pořadí $n + 1$.

Posloupnost jde zprava nalevo, je-li n sudé, a zleva napravo, je-li n liché. Funkce $a_{n+1}(\alpha)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ je stálá v každém z těchto intervalů pořadí $n + 1$. Je monotonní a nabývá všech celých hodnot od 1 do ∞ v každém z intervalů pořadí n. Každé soustavě hodnot

$$a_1 = k_1, a_2 = k_2, \ldots, a_n = k_n$$

odpovídá právě jeden interval pořadí n a naopak. Obecnější soustava hodnot

$$a_{m_1} = k_1, a_{m_2} = k_2, \ldots, a_{m_s} = k_s$$

určuje obecně spočetnou množinu intervalů.

První otázka, kterou přirozeně klade metrická theorie řetězců, je určení míry množiny těch bodů bodů úsečky $(0, 1)$, pro něž $a_n = k$. Víme již, že tato množina je vždy tvořena soustavou intervalů. Jde tudíž jen o určení součtu délek těchto intervalů.

Označíme všude v dalším

$$E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_s \\ k_1, k_2, \ldots, k_s \end{pmatrix}$$

množinu bodů intervalu $(0, 1)$, pro něž jsou splněny podmínky

$$a_{n_1} = k_1, a_{n_2} = k_2, \ldots, a_{n_s} = k_s.$$

Zde, jak se samo sebou rozumí, všechna n_i a k_j jsou přirozená čísla, při čemž všechna n_i jsou mezi sebou různá. Již víme, že taková množina je vždy dána soustavou intervalů. Zvláště množina

$$E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

je — jak víme — interval pořadí n, charakterisovaný vztahy

$$a_i = k_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Vždy však máme

$$\sum_{k_l=1}^{\infty} E\begin{pmatrix} n_1, \dots, n_{l-1}, n_l, n_{l+1}, \dots, n_s \\ k_1, \dots, k_{l-1}, k_l, k_{l+1}, \dots, k_s \end{pmatrix} =$$

$$= E\begin{pmatrix} n_1, \dots, n_{l-1}, n_{l+1}, \dots, n_s \\ k_1, \dots, k_{l-1}, k_{l+1}, \dots, k_s \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Konečně označíme $\mathfrak{M}E$ míru množiny E.

Všimněme si nyní libovolného intervalu

$$J_n = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, n \\ k_1, & k_2, & \dots, k_n \end{pmatrix}$$

pořadí n a intervalu v něm obsaženého

$$J_{n+1}^{(s)} = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, n, & n+1 \\ k_1, & k_2, & \dots, k_n, & s \end{pmatrix}$$

pořadí $n + 1$. Víme již, že koncovými body intervalu J_n jsou body

$$\frac{p_n}{q_n} \text{ a } \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}},$$

kde obecně značí $\frac{p_k}{q_k}$ sblížený zlomek řádu k řetězce

$$[k_1, k_2, \dots, k_n].$$

Na druhé straně pro všechny body intervalu $J_{n+1}^{(s)}$ máme

$$a_{n+1} = [r_{n+1}] = s,$$

odkud

$$s \leqq r_{n+1} < s + 1.$$

Budou tudíž ze všech bodů

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

intervalu J_n patřit do intervalu $J_{n+1}^{(s)}$ ty, pro něž $s \leqq r_{n+1} < s + 1$, odkud plyne zejména, že koncovými body intervalu $J_{n+1}^{(s)}$ jsou body

$$\frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} \text{ a } \frac{p_n(s + 1) + p_{n-1}}{q_n(s + 1) + q_{n-1}}.$$

Odtud

$$\mathfrak{M}J_n = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)},$$

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} = \left| \frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} - \frac{p_n(s+1) + p_{n-1}}{q_n(s+1) + q_{n-1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{(q_n s + q_{n-1})(q_n(s+1) + q_{n-1})} =$$

$$= \frac{1}{q_n^2 s^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)},$$

a tudíž

$$\frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} = \frac{1}{s^2} \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)};$$

zde je druhý činitel na pravé straně patrně vždy menší než 2 a větší než $\frac{1}{3}$ (na základě toho, že

$$\frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}} \geqq 1 \quad \text{a} \quad 1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n} < 3).$$

Dostáváme tedy

$$\frac{1}{3s^2} < \frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} < \frac{2}{s^2}. \tag{57}$$

To ukazuje, že v libovolném intervalu pořadí n ten interval pořadí $n + 1$, který je charakterisován hodnotou $a_{n+1} = s$, zaujímá část daného intervalu řádu $\frac{1}{s^2}$. Je velmi důležité, že hranice stanovené nerovnostmi (57) vůbec nezávisí ani na číslech $k_1, k_2, \ldots, k_n$, ani dokonce na pořadí n a jsou určeny jen číslem s. Přepíšeme-li tyto nerovnosti ve tvaru

$$\frac{\mathfrak{M}J_n}{3s^2} < \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} < \frac{2\mathfrak{M}J_n}{s^2},$$

sečteme přes všechny intervaly J_n pořadí n (neboli, což je totéž, přes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ v mezích od 1 do ∞) a poznamenáme nakonec, že je při tom patrně

$$\Sigma\mathfrak{M}J_n = 1 \quad \text{a} \quad \Sigma\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} = \mathfrak{M}E\binom{n+1}{s},$$

najdeme

$$\frac{1}{3s^2} < \mathfrak{M}E\binom{n+1}{s} < \frac{2}{s^2},$$

čímž je v prvním přiblížení řešena také vytčená úloha. Vidíme, že *míra množiny bodů, v nichž některý předem určený prvek má danou hodnotu s, leží vždy mezi $\frac{1}{3s^2}$ a $\frac{2}{s^2}$ (a je to tudíž zejména veličina řádu $\frac{1}{s^2}$).*

§ 13. Metrický odhad vzrůstu prvků

Nyní již máme dostatečné množství látky k řešení úloh o míře množin, v jejichž určení se vyskytuje nekonečný počet prvků. Jako první příklad takové úlohy dokážeme toto jednoduché tvrzení.

Věta 29. *Množina všech čísel intervalu* (0, 1) *s omezenými prvky má míru nulovou.*

Důkaz. Označme E_M množinu čísel intervalu (0, 1), jejichž všechny prvky jsou menší než M. Nechť je J_n libovolný interval pořadí n, jehož body jsou podrobeny podmínkám

$$a_i < M \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{58}$$

Body intervalu J_n vyhovující doplňující podmínce $a_{n+1} = k$ určují interval pořadí $n + 1$, který označíme $J_{n+1}^{(k)}$. Dle první z rovnic (57) je

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3k^2} \mathfrak{M} J_n,$$

odkud

$$\mathfrak{M} \sum_{k \geq M} J_{n+1}^{(k)} > \tfrac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{k \geq M} \frac{1}{k^2} >$$

$$> \tfrac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(M + i)^2} > \tfrac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \int_{M+1}^{\infty} \frac{du}{u^2} =$$

$$= \frac{1}{3(M + 1)} \mathfrak{M} J_n;$$

ježto však

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} = J_n,$$

je tudíž

$$\mathfrak{M} \sum_{k < M} J_{n+1}^{(k)} > \left(1 - \frac{1}{3(M + 1)}\right) \mathfrak{M} J_n = \tau \mathfrak{M} J_n, \tag{59}$$

kde položeno

$$\tau = 1 - \frac{1}{3(M + 1)},$$

při čemž je patrně $\tau < 1$, je-li $M > 0$.

Označíme-li $E_M^{(n)}$ množinu čísel intervalu (0, 1) charakterisovanou podmínkami (58), vidíme z nerovnosti (59), že část množiny $E_M^{(n+1)}$ obsažená v některém z intervalů J_n pořadí n má míru menší než $\tau \mathfrak{M} J_n$. Protože patrně interval pořadí n, který nepatří do množiny $E_M^{(n)}$ (t. j. nevyhovuje podmínkám (58)) nemůže obsahovat ani jeden bod množiny $E_M^{(n+1)}$, dostaneme, sčítáme-li nerovnost (59) přes všechny intervaly pořadí n, které se vyskytují v množině $E_M^{(n)}$,

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau \mathfrak{M} E_M^{(n)}. \tag{60}$$

Postupné užití této nerovnosti nám poskytuje patrně

$$\mathfrak{M}E_M^{(n+1)} < \tau^n \mathfrak{M}E_M^{(1)} \quad (n \geqq 1),$$

odkud

$$\mathfrak{M}E_M^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

ježto $\tau < 1$. Avšak svrchu definovaná množina E_M je patrně obsažena v každé z množin $E_M^{(n)}$, takže

$$\mathfrak{M}E_M = 0.$$

Položíme-li nyní

$$\sum_{M=1}^{\infty} E_M = E,$$

dostaneme

$$\mathfrak{M}E \leqq \sum_{M=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_M = 0.$$

Každé číslo s ohraničenými prvky patří patrně do množiny E_M při dostatečně velkém M, a tedy zřejmě do množiny E, čímž je věta dokázána.

Víme (věta 23, kap. II), že čísla s omezenými prvky jsou taková čísla α, která připouštějí přibližné vyjádření racionálními zlomky ne lepší než dle zákona

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2} \tag{61}$$

(k nimž patří, mezi jiným, všechny kvadratické iracionály). Vidíme nyní, že všechna taková čísla tvoří jen množinu míry 0; jinými slovy, *skoro všechna* (t. j. všechna s vyloučením množiny nulové míry) čísla připouštějí lepší aproximaci racionálními zlomky. Je patrné, že hlavní úlohou metrické theorie aproximací je otázka, jaká je míra množiny čísel připouštějících daný stupeň přiblížení pomocí racionálních zlomků. Zejména, jaký je nejlepší zákon aproximace přípustný pro *skoro všechna* čísla; jinými slovy, v jaké míře může být zlepšen zákon daný nerovnostmi (61), zanedbáme-li množinu čísel α s mírou 0. Řešení této úlohy podáme v příštím paragrafu; zde ještě dokážeme toto tvrzení:

Věta 30. *Nechť je $\varphi(n)$ libovolná kladná funkce přirozeného argumentu n; nerovnost*

$$a_n = a_n(\alpha) \geqq \varphi(n) \tag{62}$$

je splněna pro skoro všechna α v nekonečném počtu případů, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ divergentní; naproti tomu je nerovnost (62) *splněna pro skoro všechna α nanejvýš v konečném počtu případů, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ konvergentní.*

Předběžná poznámka. Položíme-li funkci $\varphi(n)$ rovnou kladné konstantě M, odvodíme z věty 30, že množina E_M, jíž jsme užili při důkazu věty 29, je nulové míry. Tak je možno větu 29 považovat za jeden z jednodušších speciálních případů věty 30.

Důkaz. První tvrzení věty se dokáže zcela analogicky jako věta 29. Nechť je J_{m+n} interval pořadí $m + n$, pro jehož všechny body

$$a_{m+i} < \varphi(m + i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{63}$$

(na $a_1, a_2, \ldots, a_m$ neklademe žádné podmínky). Zachováme-li označení zavedená při důkazu věty 29, najdeme analogicky s nerovností (59)

$$\mathfrak{M} \sum_{k<\varphi(m+n+1)} J^{(k)}_{m+n+1} < \left(1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + n + 1))}\right) \mathfrak{M} J_{m+n}.$$

Sčítáme-li tuto nerovnost přes všechny intervaly pořadí $m + n$ podrobené podmínkám (63) a označíme-li $E_{m,n}$ množinu všech čísel intervalu (0, 1), jež vyhovují těmto podmínkám, najdeme patrně

$$\mathfrak{M} E_{m,n+1} < \left(1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + n + 1))}\right) \mathfrak{M} E_{m,n}.$$

Postupné užití této nerovnosti však dává

$$\mathfrak{M} E_{m,n} < \mathfrak{M} E_{m,1} \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}\right).$$

Diverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$, pak i řada

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}$$

při libovolném m patrně diverguje a odtud plyne, jak známe z theorie nekonečných součinů, že součin

$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}\right)$$

má za limitu 0 při $n \to \infty$. Tudíž při libovolném m máme

$$\mathfrak{M} E_{m,n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Avšak každé číslo α, při němž

$$a_{m+i} < \varphi(m + i) \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

patří patrně do všech množin

$$E_{m,n} = (n = 1, 2, \ldots);$$

má proto množina všech takových čísel, kterou označíme E_m, nutně míru 0. Klademe-li konečně

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_m + \ldots = E,$$

vidíme, že $\mathfrak{M} E = 0$. Avšak každé číslo α, pro něž nerovnost (62) je splněna jen pro konečný počet případů, musí patrně při dosti velkém m patřit do množiny E_m, a tedy i do množiny E. Tak je dokázáno první tvrzení věty.

Nechť nyní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ konverguje. Nechť je J_n jeden z intervalů pořadí n a nechť je $J_{n+1}^{(k)}$ interval pořadí $n + 1$ obsažený v J_n a definovaný doplňující podmínkou $a_{n+1} = k$. Podle druhé z nerovností (57) máme

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(k)} < \frac{2}{k^2}\,\mathfrak{M}J_n,$$

odkud

$$\mathfrak{M} \sum_{k \geqq \varphi n+1} J_{n+1}^{(k)} < 2\mathfrak{M}J_n \sum_{k \geqq \varphi(n+1)} \frac{1}{k^2} \leqq$$

$$\leqq 2\mathfrak{M}J_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\varphi(n+1)+i)^2} <$$

$$< 2\mathfrak{M}J_n \left(\frac{1}{\varphi(n+1)} + \int\limits_{\varphi(n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2}\right) = \frac{4\mathfrak{M}J_n}{\varphi(n+1)}.$$

Označíme-li F_n množinu čísel intervalu (0, 1), pro něž $a_n \geqq \varphi(n)$, a sčítáme-li získanou nerovnost dle všech intervalů J_n pořadí n, najdeme

$$\mathfrak{M}F_{n+1} < \frac{4}{\varphi(n+1)},$$

ježto $\Sigma\mathfrak{M}J_n = 1$. Míry množin $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ tvoří tudíž konvergentní řadu. Označíme-li F množinu takových čísel intervalu (0, 1), která patří do nekonečného počtu množin F_m, budeme mít[10])

$$\mathfrak{M}F = 0.$$

Avšak množina F je patrně právě množinou čísel, pro něž nerovnost (62) je splněna v nekonečně mnoha případech. Tak je dokázáno i druhé tvrzení věty.

§ 14. Metrický odhad vzrůstu jmenovatelů sblížených zlomků. Hlavní věta metrické theorie aproximace

Věta 31. *Existuje taková kladná absolutní konstanta B, že skoro všude platí pro dostatečně velká n*

$$q_n = q_n(\alpha) < e^{Bn}.$$

Předběžná poznámka. V paragrafu 4, kap. I (věta 12) jsme viděli, že jmenovatelé q_n pro *všechna* čísla α vzrůstají, roste-li n, a to ne pomaleji než členy nějaké geometrické posloupnosti s absolutně stálým podílem. Věta 31 ukazuje, že pro *skoro všechna* α jme-

---

[10]) Je to známé tvrzení metrické theorie množin. Zde však je *důkaz*: je zřejmé, že množina F pro libovolné m je obsažena v množině $\sum\limits_{n=m}^{\infty} F_n$, jejíž míra nepřevyšuje $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \mathfrak{M}F_n$, a tudíž při dosti velkém m se může učinit libovolně malou.

novatelé q_n rostou ne rychleji než členy nějaké geometrické posloupnosti rovněž s absolutně stálým podílem.

Tento stav věcí možno vyjádřit také takto: existují takové dvě absolutní konstanty a, A ($1 < a < A$), že pro skoro všechna čísla α z intervalu (0, 1) při dostatečně velkém n platí

$$a < \sqrt[n]{q_n} < A.$$

Skutečně platí značně silnější tvrzení: existuje taková absolutní konstanta γ, že platí skoro všude

$$\sqrt[n]{q_n} \to \gamma \quad (n \to \infty).$$

Avšak důkaz této věty je značně složitější a vyžaduje k provedení těch hlubších pomocných prostředků, se kterými se seznámíme v paragrafech 15 a 16. Bohužel, rámec této knihy nedovoluje v ní umístit tento důkaz. Avšak pro náš bližší hlavní cíl — větu 32 — je vlastnost čísel q_n, o níž mluví věta 31, zcela dostačující.

Důkaz. Označme $E_n(g)$ ($n > 0, g \geqq 1$) množinu čísel intervalu (0, 1), pro něž

$$a_1 a_2 \dots a_n \geqq g.$$

Je patrné, že tato množina představuje soustavu intervalů pořadí n; délka libovolného z těchto intervalů je rovna, jak víme z paragrafu 12,

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1)^2},$$

ježto po sobě jdoucí užití samozřejmé nerovnosti

$$q_n > a_n q_{n-1}$$

dává

$$q_n > a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1.$$

Tudíž

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \sum_{a_1 a_2 \dots a_n \geqq g} \frac{1}{a_n^2 a_{n-1}^2 \dots a_2^2 a_1^2}, \tag{64}$$

kde se sčítání vztahuje na všechny kombinace přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, jež vyhovují nerovnosti $a_1 a_2 \dots a_n \geqq g$. Abychom odhadli tento součet, poznamenejme, že

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{1}{a_i(a_i + 1)} \leqq 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i + 1)} =$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{dx_i}{x_i^2} = 2^n \int_{a_1}^{a_1+1} \int_{a_2}^{a_2+1} \dots \int_{a_n}^{a_n+1} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2},$$

a tudíž

$$\sum_{a_1 a_2 \ldots a_n \geqq g} \left\{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}\right\} \leqq 2^n J_n(g),$$

kde $J_n(g)$ je n-násobný integrál

$$\int\int \ldots \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2},$$

vztahující se na obor

$$x_i \geqq 1 \;\; (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n \geqq g.$$

Při $g \leqq 1$ přejde tento obor patrně v obor $1 \leqq x_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a dostaneme

$$J_n(g) = \left(\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}\right)^n = 1 \;\; (g \leqq 1). \tag{65}$$

Dokážeme nyní, že pro $g > 1$ platí

$$J_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\log g)^i}{i!}; \tag{66}$$

skutečně pro $n = 1$ tato rovnice nabývá tvaru

$$\int_g^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{g},$$

t. j. je správná. Připustíme-li, že tato rovnice platí pro $n = k$, dostaneme

$$J_{k+1}(g) = \int_1^\infty \frac{dx_{k+1}}{x_{k+1}^2} J_k\left(\frac{g}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{g}\int_0^g J_k(u)\, du = \frac{1}{g}\left\{\int_0^1 J_k(u)\, du + \int_1^g J_k(u)\, du\right\}.$$

Vyjádříme-li v prvním integrálu $J_k(u)$ dle vzorce (65) a ve druhém dle vzorce (66), o němž jsme pro $n = k$, $g \geqq 1$ učinili předpoklad, že je dokázán, dostáváme

$$J_{k+1}(g) = \frac{1}{g}\left\{1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\log g)^{i+1}}{(i+1)!}\right\} = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\log g)^i}{i!},$$

což jsme chtěli dokázat. Je tudíž

$$\mathfrak{M}\, E_n(g) < \frac{2^n}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\log g)^i}{i!}.$$

Zvláště klademe-li $g = e^{An}$, kde $A > 1$ je konstanta, dostaneme

$$\mathfrak{M}\, E_n(e^{An}) < e^{n(\log 2 - A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(An)^i}{i!}.$$

V součtu, který dostaneme, je — jak lze snadno nahlédnout — každý člen menší než

$$\frac{(An)^n}{n!}.$$

Užijeme-li proto k odhadu faktoriálů Stirlingova vzorce a označíme-li v dalším C_1, C_2 kladné absolutní konstanty, dostaneme

$$\mathfrak{M}E_n(e^{An}) < e^{n(\log 2 - A)}\, n\, \frac{(An)^n}{n!} < C_1 e^{n(\log 2 - A)} \frac{n(An)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} < C_2\sqrt{n}\, e^{-n(A - \log A - \log 2 - 1)}.$$

Je-li však A dostatečně velké, platí

$$A - \log A - \log 2 - 1 > 1,$$

takže $\mathfrak{M}E_n(e^{An})$ je menší než n-tý člen konvergentní řady. Ježto je tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n(e^{An})$$

konvergentní, leží každé číslo intervalu (0, 1) s vyloučením množiny nulové míry nanejvýš v konečném počtu množin $E_n(e^{An})$. To však značí, že pro skoro všechna čísla intervalu (0, 1) máme nutně pro dostatečně velká n

$$a_1 a_2 \dots a_n < e^{An}.$$

Ježto však

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} < 2a_n q_{n-1},$$

a tudíž

$$q_n < 2^n a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1,$$

je skoro všude při dostatečně velkém n

$$q_n < 2^n e^{An} = e^{Bn},$$

kde klademe $B = A + \log 2$. Tím je věta 31 dokázána.

Získaný výsledek, který je i sám o sobě značně zajímavý, je obzvláště důležitý v daném okamžiku, ježto dovoluje podat jednoduché řešení základní úlohy metrické theorie aproximací vytčené již v předcházejícím paragrafu.

Věta 32. *Nechť je $f(x)$ kladná spojitá funkce kladného argumentu x, při čemž je $xf(x)$ funkce nerostoucí. Pak má nerovnost*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q} \tag{67}$$

pro skoro všechna α nekonečně mnoho řešení v celých číslech p a q ($q > 0$), je-li integrál

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{68}$$

divergentní; naproti tomu má nerovnost (67) *pro skoro všechna α jen konečný počet řešení celými p a q ($q > 0$), je-li integrál* (68) *konvergentní.*

Předběžná poznámka. Zvláště na základě věty 32 má na př. nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \log q}$$

skoro všude nekonečně mnoho řešení, naproti tomu má nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \log^{1+\varepsilon} q}$$

pro každé kladné $\varepsilon > 0$ skoro všude jen konečný počet řešení. Po těchto příkladech si můžeme udělat představu o tom, pokud se změní obecný zákon přiblížení, zanedbáme-li množinu míry nulové.

Důkaz. 1. Nechť integrál (68) diverguje. Položíme

$$\varphi(x) = e^{Bx} f(e^{Bx}),$$

kde B je konstanta vyskytující se ve větě 31. Pak integrál

$$\int_a^A \varphi(x)\, dx = \frac{1}{B} \int_{Ba}^{BA} f(u)\, du,$$

kde $A > a > 0$, roste nade všechny meze při $A \to \infty$, ježto však funkce $\varphi(x)$ dle podmínky věty neroste, řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$$

diverguje. Dle věty 30 z toho soudíme, že nerovnost

$$a_{i+1} \geqq \frac{1}{\varphi(i)}$$

je skoro všude splněna pro nekonečně mnoho hodnot i. Je-li tato nerovnost splněna, máme

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leqq \frac{1}{q_i q_{i+1}} \leqq \frac{1}{a_{i+1} q_i^2} \leqq \frac{\varphi(i)}{q_i^2}. \tag{69}$$

Dle věty 31 máme skoro všude pro dosti velká i

$$q_i < e^{Bi},$$

odkud

$$i > \frac{\log q_i}{B}.$$

Nerovnost (69) tedy skoro všude při dostatečně velkém i vede k nerovnosti

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leqq \frac{\varphi\left(\dfrac{\log q_i}{B}\right)}{q_i^2} = \frac{f(q_i)}{q_i}.$$

Tato poslední nerovnost je splněna tudíž skoro všude pro nekonečně mnoho hodnot i, čímž je dokázáno první tvrzení věty.

2. Připustíme nyní, že integrál (68) a tudíž i řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(n)$$

konverguje. Označíme E_n množinu čísel α v intervalu (0, 1), která při vhodně zvoleném celém k hoví nerovnosti

$$\left|\alpha - \frac{k}{n}\right| < \frac{f(n)}{n}$$

$\Big[$množina E_n je sjednocením intervalů délky $\frac{2f(n)}{n}$ majících středy v bodech $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, intervalů $\left(0, \frac{f(n)}{n}\right)$ a $\left(1 - \frac{f(n)}{n}, 1\right)\Big]$. Máme

$$\mathfrak{M}E_n \leqq 2f(n)$$

(znak $<$ platí v případě $f(n) > \frac{1}{2}$). Tudíž je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$$

konvergentní. Z toho soudíme, jako již vícekrát, že skoro každé číslo intervalu (0, 1) může patřit nanejvýš do konečného počtu množin E_n, a to patrně značí, že skoro všechna čísla α úsečky (0, 1) při dostatečně velkém celém kladném q a libovolném celém p hoví nerovnosti

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{f(q)}{q},$$

čímž je dokázáno i druhé tvrzení věty.

V příštím paragrafu se seznámíme s methodou, která dovoluje řešit značně hlubší úlohy metrické theorie řetězců.

§ 15. Gaussův problém a Kuzminova věta

V tomto paragrafu si všimneme problému, který byl historicky první úlohou metrické theorie řetězců. Tato úloha, položená již Gaussem, byla rozřešena až v roce 1928.

Položíme-li, jako obyčejně,

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots],$$

$$r_n = r_n(\alpha) = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots],$$

pak $z_n = z_n(\alpha)$ nechť značí hodnotu řetězce

$$[0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots],$$

to znamená

$$z_n = r_n - a_n.$$

Z toho plyne, že vždy

$$0 \leqq z_n < 1.$$

Označíme $m_n(x)$ míru množiny čísel α z intervalu (0, 1), pro něž

$$z_n(\alpha) < x.$$

V jednom ze svých dopisů Laplaceovi tvrdil Gauss, že se mu podařil důkaz věty, dle níž

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} \quad (0 \leqq x < 1);$$

tamtéž poukázal na to, že by bylo žádoucí podat odhad řádu malosti rozdílu

$$m_n(x) - \frac{\log(1+x)}{\log 2} \tag{70}$$

při velkých hodnotách n, což se mu, dle jeho slov, zcela nezdařilo. Gaussův důkaz, jak se zdá, nikde nebyl uveřejněn. Jiná řešení tohoto problém rovněž nebyla známa až do roku 1928, kdy vyšel důkaz Gaussova tvrzení nalezený R. O. Kuzminem; zároveň našel R. O. Kuzmin i velmi dobrý odhad pro rozdíl (70). Úlohou tohoto paragrafu je vyložit tyto výsledky R. O. Kuzmina, jakož i některá jejich zevšeobecnění nutná pro další.[11])

Již Gaussovi bylo známo, že posloupnost funkcí

$$m_0(x), m_1(x), m_2(x), \ldots, m_n(x), \ldots$$

vyhovuje funkční rovnici

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1,\ n \geqq 0). \tag{71}$$

Podle zřejmého vztahu

$$z_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}}$$

je totiž splněna nerovnost $z_{n+1} < x$ v tom a jenom v tom případě, jsou-li při vhodně zvoleném celém kladném k splněny nerovnosti

$$\frac{1}{k+x} < z_n \leqq \frac{1}{k}.$$

Protože pak míra množiny těch čísel, která splňují onu nerovnost, je patrně

$$m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right),$$

[11]) R. O. Kuzmin, podobně jako Gauss, formuluje získané výsledky v pojmech theorie pravděpodobnosti, což ovšem nemění jejich metrický obsah.

plyne odtud vztah (71).

Lze si snadno ihned ověřit, že funkce

$$\varphi(x) = C\log(1 + x)$$

vyhovuje při libovolném konstantním C vztahu

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(\frac{1}{k+x}\right)\right\},$$

což pravděpodobně posloužilo také Gaussovi jako pokyn k správnému vyjádření limity funkcí $m_n(x)$ při $n \to \infty$.

Formální derivování vzorce (71) dává

$$m'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\,m'_n\left(\frac{1}{k+x}\right). \tag{72}$$

Snadno se přesvědčíme, že vztah (72) je skutečně splněn. Ježto totiž patrně $z_0(\alpha) = \alpha$, je $m_0(x) = x$ a tudíž $m'_0(x) = 1$. Je-li však obecně při libovolném n funkce $m'_n(x)$ omezená a spojitá, je řada na pravé straně vztahu (72) stejnoměrně konvergentní v intervalu (0, 1). Součet této řady je tudíž také omezený a spojitý a roven $m'_{n+1}(x)$ dle známé věty o derivování řad po členech. Tak se vztah (72) dokáže pomocí indukce.

Rovnice (72) je značně vhodnější pro úvahy než rovnice (71). Na ni se vztahuje hlavní výsledek R. O. Kuzmina, k jehož důkazu nyní přistoupíme.

Věta 33. *Nechť je*

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

posloupnost reálných funkcí definovaných v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, *které v něm vyhovují vztahu*

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}f_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\quad (n \geqq 0). \tag{73}$$

Je-li pro $0 \leqq x \leqq 1$

$$0 < f_0(x) < M \quad a \quad |f'_0(x)| < \mu,$$

pak

$$f_n(x) = \frac{a}{1+x} + \vartheta A e^{-\lambda\sqrt{n}}\quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

kde

$$a = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 f_0(z)\,\mathrm{d}z,\quad |\vartheta| < 1,$$

λ *je absolutní kladná konstanta a* A *kladná konstanta závislá jen na* M *a* μ.

Vzhledem ke složitosti důkazu předešleme několik elementárních pomocných vět.

Pomocná věta 1. *Pro libovolné* $n \geqq 0$

$$f_n(x) = \sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}\right)\frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2}, \tag{74}$$

kde $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ *je libovolný interval pořadí n a kde se sčítání provádí přes všechny intervaly pořadí n (neboli, což je totéž, přes prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v mezích od 1 do ∞).*

Důkaz. Pro $n = 0$ je vztah (74) triviální, ježto v tomto případě je jediný interval $(0, 1)$, při čemž $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$. Předpokládáme-li však, že vztah (74) platí pro nějaké n, dostaneme dle základní rovnice (73)

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \sum^{(n)} f_0 \left(\frac{p_n + \frac{1}{k+x} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1}}\right) \frac{1}{\left(q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1}\right)^2} =$$

$$= \sum^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} f_0 \left(\frac{(p_n k + p_{n-1}) + x p_n}{(q_n k + q_{n-1}) + x q_n}\right) \frac{1}{\{(q_n k + q_{n-1}) + x q_n\}^2} =$$

$$= \sum^{(n+1)} f_0 \left(\frac{p_{n+1} + x p_n}{q_{n+1} + x q_n}\right) \frac{1}{(q_{n+1} + x q_n)^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Pomocná věta 2. *Za podmínek věty* (33) *platí pro* $n \geqq 0$

$$|f'_n(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M.$$

Důkaz. Derivujeme-li po členech vztah (74), dostaneme

$$f'_n(x) = \sum^{(n)} f'_0(u) \frac{(-1)^{n-1}}{(q_n + x q_{n-1})^4} - 2 \sum^{(n)} f_0(u) \frac{q_{n-1}}{(q_n + x q_{n-1})^3},$$

kde je položeno

$$u = \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}$$

a oprávněnost derivování po členech plyne ze stejnoměrné konvergence obou součtů na pravé straně pro $0 \leqq x \leqq 1$. Poznamenáme-li, že

$$\frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2} < \frac{2}{q_n(q_n + q_{n-1})}$$

a že dle věty 12, kap. I

$$q_n(q_n + q_{n-1}) > q_n^2 > 2^{n-1},$$

přihlížíme-li pak ke zřejmému vztahu

$$\sum^{(n)} \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \sum^{(n)} \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = 1,$$

dostaneme na základě podmínek věty (33)

$$|f'_n(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pomocná věta 3. *Je-li*

$$\frac{t}{1+x} < f_n(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

je i

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Důkaz. Za podmínek pomocné věty dává základní vztah (73)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{1+\dfrac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2} < f_{n+1}(x) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{1+\dfrac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2},$$

neboli

$$t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} < f_{n+1}(x) < T\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)},$$

neboli, což je však totéž,

$$t\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) < f_{n+1}(x) < T\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right),$$

neboli konečně

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x},$$

což jsme chtěli dokázat.

Pomocná věta 4.

$$\int_0^1 f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f_0(z)\,\mathrm{d}z \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Důkaz. Dle základního vztahu (73) pro $n > 0$

$$\int_0^1 f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_{n-1}\left(\frac{1}{k+z}\right) \frac{\mathrm{d}z}{(k+z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u,$$

odkud plyne úplnou indukcí tvrzení pomocné věty 4.

Důkaz věty 33. Funkce $f_0(x)$ je dle předpokladu schopná derivace, a tudíž i spojitá pro $0 \leqq x \leqq 1$. Ježto dle předpokladu je kladná v onom intervalu, má v něm i kladné minimum, které označíme m. Z podmínek $m \leqq f_0(x) < M (0 \leqq x \leqq 1)$ plyne patrně

$$\frac{m}{2(1+x)} < f_0(x) < \frac{2M}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

neboli

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

kde je položeno

$$g = \tfrac{1}{2}m, \ G = 2M.$$

Položíme nyní

$$f_n(x) - \frac{g}{1+x} = \varphi_n(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1, \ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dle pomocné věty 3 funkce $F(x) = \dfrac{g}{1+x}$ vyhovuje rovnici

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{k+x}\right) \frac{1}{(k+x)^2}$$

(což se snadno ověří také bezprostředně). Odtud patrně plyne, že posloupnost funkcí

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

vyhovuje rovnici (73), a tudíž pro ni platí i všechny důsledky odvozené z oné rovnice, zvláště vztah (74). Položíme-li tudíž jako dříve pro krátkost

$$u = \frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}},$$

dostaneme

$$\varphi_n(x) = \sum^{(n)} \varphi_0(u) \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2},$$

odkud podle zřejmých nerovností

$$q_n + xq_{n-1} \leqq q_n + q_{n-1} < 2q_n \ \text{ a } \ \varphi_0(u) > 0$$

najdeme

$$\varphi_n(x) > \tfrac{1}{4} \sum^{(n)} \varphi_0(u) \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}. \tag{75}$$

Na druhé straně nám poskytuje věta o střední hodnotě

$$\tfrac{1}{4} \int_0^1 \varphi_0(z)\,dz = \tfrac{1}{4} \sum^{(n)} \varphi_0(u') \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}, \tag{76}$$

kde u' je jeden z bodů intervalu $\left(\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ a $\dfrac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}$ je délka tohoto intervalu. Vztahy (75) a (76) nám dávají

$$\varphi_n(x) - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,\mathrm{d}z > \tfrac{1}{2}\sum^{(n)}((\varphi_0(u) - \varphi_0(u'))\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}. \tag{77}$$

Ježto však patrně

$$|\varphi_0(x)| \leqq |f_0'(x)| + g < \mu + g \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

je i

$$|\varphi_0(u) - \varphi_0(u')| < (\mu + g)|u - u'| < \frac{\mu + g}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{\mu + g}{q_n^2} < \frac{\mu + g}{2^{n-1}},$$

a proto nám nerovnost (77) dává

$$\varphi_n(x) > \tfrac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,\mathrm{d}z - \frac{\mu + g}{2^n} = l - \frac{\mu + g}{2^n},$$

kde je položeno

$$l = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dostaneme tak:

$$f_n(x) > \frac{g}{1 + x} + l - \frac{\mu + g}{2^n} > \frac{g + l - 2^{-n+1}(\mu + g)}{1 + x} = \frac{g_1}{1 + x}.$$

Zcela stejně, všimneme-li si posloupnosti funkcí

$$\psi_n(x) = \frac{G}{1 + x} - f_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

a provedeme-li analogické úsudky, přijdeme k nerovnosti

$$f_n(x) < \frac{G - l' + 2^{-n+1}(\mu + G)}{1 + x} = \frac{G_1}{1 + x},$$

kde klademe

$$l' = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(z)\,\mathrm{d}z.$$

Ježto $l > 0$ a $l' > 0$, je při dostatečně velkém n

$$g < g_1 < G_1 < G$$

a

$$G_1 - g_1 < G - g - (l + l') + 2^{-n+2}(\mu + G).$$

Ježto však

$$l + l' = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{G - g}{1 + z}\,\mathrm{d}z = (G - g)\frac{\log 2}{2},$$

platí

$$G_1 - g_1 < (G - g)\,\delta + 2^{-n+2}(\mu + G),$$

kde

$$\delta = 1 - \frac{\log 2}{2} < 1$$

je kladná absolutní konstanta.

Shrňme výsledek, který jsme získali. *Z podmínek*

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x}, \ |f_0'(x)| < \mu$$

dostaneme, že při dostatečně velkém n platí

$$\frac{g_1}{1+x} < f_n(x) < \frac{G_1}{1+x},$$

kde

$$g < g_1 < G_1 < G, \ G_1 - g_1 < (G - g)\,\delta + 2^{-n+2}(\mu + G).$$

Zvolíme-li nyní jako výchozí funkci $f_n(x)$ místo $f_0(x)$ a opakujeme provedený postup úsudků, přijdeme zřejmě ke vztahu

$$\frac{g_2}{1+x} < f_{2n}(x) < \frac{G_2}{1+x},$$

při čemž

$$g_1 < g_2 < G_2 < G_1,$$
$$G_2 - g_2 < \delta(G_1 - g_1) + 2^{-n+2}(\mu_1 + G_1),$$

kde μ_1 je kladné číslo, pro něž

$$|f_n'(x)| < \mu_1 \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Pokračujíce v tomto postupu, dojdeme obecně ke vztahu

$$\frac{g_r}{1+x} < f_{rn}(x) < \frac{G_r}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1;\ r = 0, 1, 2, \ldots),$$

při čemž pro $r > 0$

$$g_{r-1} < g_r < G_r < G_{r-1},$$
$$G_r - g_r < \delta(G_{r-1} - g_{r-1}) + 2^{-n+2}(\mu_{r-1} + G_{r-1}), \qquad (78)$$

kde μ_{r-1} je kladné číslo, pro něž

$$|f'_{(r-1)n}(x)| < \mu_{r-1} \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Podle pomocné věty 2 můžeme položit

$$\mu_r = \frac{\mu}{2^{rn-3}} + 4M \quad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

a tudíž, bylo-li zvoleno n dostatečně velké,

$$\mu_r < 5M \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Postupné užití nerovnosti (78) pro $r = 1, 2, \ldots, n$ nám tedy dává

$$G_n - g_n < (G - g)\,\delta^n + 2^{-n+2}\{(\mu + 2M)\,\delta^{n-1} + + 7M\delta^{n-2} + 7M\delta^{n-3} + \ldots + 7M\delta + 7M\}.$$

Ježto $\delta < 1$ je absolutní konstanta, plyne odtud patrně

$$G_n - g_n < Be^{-\lambda n},$$

kde $\lambda > 0$ je absolutní konstanta, $B > 0$ však závisí jen na M a μ.

Odtud plyne především, že existuje obecně limita

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} g_n = a$$

a že

$$\left| f_{n^2}(x) - \frac{a}{1+x} \right| < Be^{-\lambda n} \quad (0 \leqq x \leqq 1), \tag{79}$$

odkud zejména

$$\int_0^1 f_{n^2}(z)\,dz \to a \log 2 \quad (n \to \infty),$$

a tudíž dle pomocné věty 4

$$a = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 f_0(z)\,dz.$$

Nechť je konečně $n^2 \leqq N < (n+1)^2$. Protože podle nerovnosti (79) platí

$$\frac{a - 2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_{n^2}(x) < \frac{a + 2Be^{-\lambda n}}{1+x},$$

je na základě pomocné věty 3

$$\frac{a - 2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_N(x) < \frac{a + 2Be^{-\lambda n}}{1+x},$$

neboli

$$\left| f_N(x) - \frac{a}{1+x} \right| < 2Be^{-\lambda n} = Ae^{-\lambda(n+1)} < Ae^{-\lambda\sqrt{N}},$$

kde je položeno $A = 2Be^{\lambda}$. Tuto nerovnost, stanovenou pro dostatečně velká N, je zřejmě možno patřičným zvětšením konstanty A učinit platnou pro všechna $N \geqq 0$, čímž je dokázána věta 33 úplně.

Vrátíme-li se nyní ke Gaussovu problému a položíme-li

$$f_n(x) = m_n'(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

máme $f_0(x) \equiv 1$, čímž jsou všechny podmínky věty 33 splněny. Tak dostaneme

$$\left| m_n'(x) - \frac{1}{(1+x)\log 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqq x \leqq 1), \tag{80}$$

odkud najdeme integrováním

$$\left| m_n(x) - \frac{\log(1+x)}{\log 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

kde A a λ jsou kladné absolutní konstanty. Tak je patrně nejen dokázáno Gaussovo tvrzení, nýbrž je nalezen i dobrý odhad zbytkového členu.

Užijeme nyní tohoto výsledku k odhadu míry množiny bodů, pro něž $a_n = k$, pro velké hodnoty n. Ježto patrně podmínka $a_n = k$ je ekvivalentní s nerovnostmi

$$\frac{1}{k+1} < z_{n-1} \leqq \frac{1}{k},$$

platí

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} = m_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - m_{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} m'_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x,$$

odkud podle nerovnosti (80)

$$\left| \mathfrak{M}E\binom{n}{k} - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)}{\log 2} \right| < \frac{A}{k(k+1)}\, e^{-\lambda\sqrt{n-1}}. \tag{81}$$

Odtud dostáváme nyní speciálně pro veličinu $\mathfrak{M}E\binom{n}{k}$, pro niž jsme stanovili v paragrafu 13 jen dosti hrubé nerovnosti, přesný limitní vztah

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} \to \frac{\log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)}{\log 2} \quad (n \to \infty).$$

Tak na př. míra množiny bodů, pro něž $a_n = 1$, konverguje při $n \to \infty$ k číslu

$$\frac{\log 4 - \log 3}{\log 2}.$$

Avšak věta 33 umožňuje zároveň s důkazem Gaussova tvrzení dostat i obecnější velmi důležitý výsledek. A ten se budeme snažit v dalším odvodit. Označme $M_n(x)$ míru množiny čísel, která jsou z nějakého daného intervalu pořadí k a vyhovují nadto podmínce $z_{k+n} < x$; jinak řečeno, $M_n(x)$ je míra množiny čísel z intervalu (0, 1), jež vyhovují podmínkám

$$a_1 = r_1,\ a_2 = r_2, \ldots, a_k = r_k;\ z_{k+n} < x, \tag{82}$$

kde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ jsou daná přirozená čísla, kdežto $n \geqq 0$ a x $(0 \leqq x \leqq 1)$ se mohou libovolně měnit.

Aby byly splněny podmínky (82), je patrně nutné a postačující, aby byly splněny podmínky

$$a_1 = r_1,\ a_2 = r_2, \ldots, a_k = r_k;\ \frac{1}{r+x} < z_{k+n-1} \leqq \frac{1}{r},$$

kde r je nějaké přirozené číslo. Odtud plyne

$$M_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[M_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right) - M_{n-1}\left(\frac{1}{r+x}\right) \right] \quad (n \geqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1);$$

podle toho posloupnost funkcí

$$M_0'(x),\ M_1'(x),\ \ldots,\ M_n'(x),\ \ldots$$

vyhovuje rovnici (73).

Libovolné číslo α z intervalu $\left(\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}\right)$ lze znázornit ve tvaru

$$\alpha = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}},$$

neboli, ježto

$$z_k = \frac{1}{r_{k+1}},$$

$$\alpha = \frac{p_k + z_k p_{k-1}}{q_k + z_k q_{k-1}}.$$

Pro $z_k < x$ musí číslo α ležet mezi $\frac{p_k}{q_k}$ a $\frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}}$, odkud

$$M_0(x) = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}} \right| = \frac{x}{q_k(q_k + x q_{k-1})}. \tag{83}$$

Položíme-li nyní

$$M_n(x) = \mathfrak{M}\, E \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k \end{pmatrix} \chi_n(x) \quad (n \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 1),$$

dostaneme novou posloupnost funkcí

$$\chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \chi_2(x),\ \ldots,\ \chi_n(x),\ \ldots;$$

přitom patrně funkce $\chi_n'(x)$, které se liší jen konstantním činitelem od příslušných funkcí $M_n'(x)$, rovněž vyhovují rovnici (73). Ježto patrně

$$\mathfrak{M} E \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k \end{pmatrix} = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})},$$

dává nám rovnice (83)

$$\chi_0(x) = \frac{(q_k + q_{k-1})\, x}{q_k + q_{k-1} x},$$

odkud

$$\chi_0'(x) = \frac{q_k(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1} x)^2}$$

a

$$\chi_0''(x) = -\frac{2 q_k q_{k-1}(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1} x)^3};$$

je tudíž

$$\tfrac{1}{2} < \chi_0'(x) < 2, \quad |\chi_0''(x)| < 4 \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

To ukazuje, že lze na posloupnost funkcí $\chi_n'(x)$ užít věty 33, při čemž čísla A a λ jsou absolutními konstantami, t. j. obzvláště nezávislými na $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Tak dostáváme

$$\chi_n'(x) = \frac{M_n'(x)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}} = \frac{1}{(1+x)\log 2} + \vartheta A e^{-\lambda\sqrt{n}}, \quad |\vartheta| < 1.$$

Integrujeme-li však tento vztah v mezích od $\frac{1}{r+1}$ do $\frac{1}{r}$, kde r je libovolné přirozené číslo, dostaneme pro $|\vartheta'| < 1$:

$$\frac{M_n\left(\frac{1}{r}\right) - M_n\left(\frac{1}{r+1}\right)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} + \frac{\vartheta' A}{r(r+1)} e^{-\lambda\sqrt{n}};$$

ježto však patrně

$$M_n\left(\frac{1}{r}\right) - M_n\left(\frac{1}{r+1}\right) = \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k, & r\end{pmatrix},$$

je

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k, & r\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} + \frac{\vartheta' A e^{-\lambda\sqrt{n}}}{r(r+1)}\right) \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}.$$

Konečně můžeme sečíst tento vztah dle některého (libovolného) z čísel $r_1, r_2, \ldots, r_k$ v mezích od 1 do ∞. Ve výsledku takového sčítání odpovídající indexy prostě odpadnou, na obou stranách vztahu, takže místo posloupnosti po sobě jdoucích indexů $1, 2, \ldots, k$ dostaneme posloupnost libovolných indexů $n_1, n_2, \ldots, n_t$, při čemž v ostatních svých rysech zůstane vztah nezměněn. Tak docházíme k tomuto tvrzení:

Věta 34. *Existují takové dvě kladné absolutní konstanty A a λ, že pro $n_1 < n_2 < \ldots < n_t < n_{t+1}$ a pro libovolná celá kladná $r_1, r_2, \ldots, r_t, r$ platí*

$$\left| \frac{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t, & n_{t+1}\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t, & r\end{pmatrix}}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t\end{pmatrix}} - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \right| < \frac{A}{r(r+1)} e^{-\lambda\sqrt{n_{t+1} - n_t - 1}}.$$

Tento výsledek ukazuje, že netoliko míra množiny čísel intervalu $(0, 1)$, pro něž $a_n = r$, má pro $n \to \infty$ určitou limitu, nýbrž že k téže limitě konverguje také poměr

$$\frac{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t, & n_{t+1}\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t, & r\end{pmatrix}}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t\end{pmatrix}}.$$

§ 16. Střední hodnoty

Výsledek předešlého paragrafu nám poskytuje možnost dokázat toto obecnější tvrzení.

Věta 35. *Nechť je $f(r)$ nezáporná funkce přirozeného argumentu r a nechť existují takové kladné konstanty C a δ, že*

$$f(r) < Cr^{\frac{1}{2}-\delta} \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Pak pro všechna čísla z intervalu $(0, 1)$ *— s vyloučením nanejvýše množiny míry nulové — platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2}. \tag{84}$$

Předběžná poznámka. Konvergence řady na pravé straně rovnice (84) vyplývá samozřejmě z podmínky uložené funkci $f(r)$.

Důkaz. Položme

$$\int_0^1 f(a_k)\,\mathrm{d}\alpha = u_k, \quad \int_0^1 (f(a_k) - u_k)^2\,\mathrm{d}\alpha = b_k,$$

$$\int_0^1 (f(a_i) - u_i)(f(a_k) - u_k)\,\mathrm{d}\alpha = g_{ik},$$

$$\sum_{k=1}^{n} (f(a_k) - u_k) = s_n = s_n(\alpha).$$

Existence všech napsaných integrálů plyne snadno z předpokládaných vlastností funkce $f(r)$. Ježto totiž platí

$$\{f(r)\}^2 < C^2 r^{1-2\delta},$$

má smysl

$$\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,\mathrm{d}\alpha = \sum_{r=1}^{\infty} \{f(r)\}^2 \mathfrak{M} E\binom{k}{r} < 2C^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{1-2\delta}}{r^2} = C_1,$$

odkud dle nerovnosti Bunjakovského-Schwarzovy snadno plyne existence i všech výše uvedených integrálů. Zejména odtud plyne, že

$$\left.\begin{aligned} b_k &= \int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,\mathrm{d}\alpha - u_k < C_1, \\ u_k &= \int_0^1 f(a_k)\,\mathrm{d}\alpha < \sqrt{\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,\mathrm{d}\alpha} < \sqrt{C_1}. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Dále máme zřejmě při $k > i$:

$$g_{ik} = \int_0^1 f(a_i) f(a_k)\, d\alpha - u_i u_k = \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s)\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, k \\ r, s \end{pmatrix} - u_i u_k. \tag{86}$$

Avšak dle věty 34 a závěrečných nerovností paragrafu 12

$$\left| \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, k \\ r, s \end{pmatrix} - \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{s(s+2)}\right)}{\lg 2}\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \right| <$$

$$< \frac{Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}}{s(s+1)}\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} < 3Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}, \tag{87}$$

$$\left| \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} - \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{s(s+2)}\right)}{\log 2} \right| < \frac{Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}}{s(s+1)} < 3Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Násobíme-li však nerovnost (88) číslem $\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}$ a srovnáme výsledek s nerovností (87), najdeme

$$\left| \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, k \\ r, s \end{pmatrix} - \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} \right| < 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}.$$

Podle toho dává nám vztah (86):

$$\left| g_{ik} - \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s)\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} + u_i u_k \right| <$$

$$< 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s)\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}.$$

Poznamenáme-li, že

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s)\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix} \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} = u_i u_k$$

a užijeme-li druhé z nerovností (85) k odhadu pravé strany, dostaneme odtud

$$|g_{ik}| < 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} u_i u_k < 6AC_1 e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}. \tag{89}$$

Užijeme-li odhadů (85) a (89), najdeme pro $n > m > 0$:

$$\int_0^1 (s_n - s_m)^2\, d\alpha = \int_0^1 \{\sum_{k=m+1}^{n} (f(a_k) - u_k)\}^2\, d\alpha =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2\, d\alpha + 2\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_i) - u_i\}\{f(a_k)^* - u_k\}\, d\alpha =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} b_k + 2\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} g_{ik} <$$

$$< C_1(n-m) + 12AC_1 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} < C_2(n-m), \tag{90}$$

kde C_2 je nová kladná konstanta.

Označíme e_n množinu čísel intervalu (0, 1), pro něž

$$|s_n| \geqq \varepsilon n,$$

kde ε je libovolně daná kladná konstanta. Patrně je

$$\int_0^1 s_n^2 \,d\alpha \geqq \int_{e_n} s_n^2 \,d\alpha \geqq \varepsilon^2 n^2 \mathfrak{M} e_n,$$

a podle toho nerovnost (90) dává (při $m = 0$)

$$\mathfrak{M} e_n \leqq \frac{\int_0^1 s_n^2 \,d\alpha}{\varepsilon^2 n^2} < \frac{C_2}{\varepsilon^2 n}.$$

Konverguje tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} e_{n^2}$$

a tudíž, jak víme, skoro všechna čísla intervalu (0, 1) patří nanejvýš do konečného počtu množin e_{n^2} ($n = 1, 2, \ldots$). To znamená, že pro skoro všechna čísla intervalu (0, 1) při dostatečně velkém n platí

$$\frac{s_{n^2}}{n^2} < \varepsilon.$$

Protože však ε lze voliti libovolně malé, je skoro všude

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n^2}}{n^2} = 0. \tag{91}$$

Dále pro $n^2 \leqq N < (n+1)^2$ vzorec (90) dává

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2}) \,d\alpha < C_2(N - n^2) < C_2(2n+1) \leqq 3C_2 n.$$

Označíme-li $e_{n^2,N}$ množinu čísel intervalu (0, 1), pro něž $|s_N - s_{n^2}| \geqq \varepsilon n^2$, a klademe-li

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} e_{n^2,N} = E_n,$$

budeme pak mít pro $n^2 \leqq N < (n+1)^2$:

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2})^2 \,d\alpha \geqq \int_{e_{n,N}} (s_N - s_{n^2})^2 \,d\alpha > \varepsilon^2 n^4 \mathfrak{M} e_{n,N},$$

$$\mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3C_2}{\varepsilon^2 n^3},$$

$$\mathfrak{M}E_n \leqq \sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} \mathfrak{M}e_{n,N} < \frac{3C_2(2n+1)}{\varepsilon^2 n^3} \leqq \frac{9C_2}{\varepsilon^2 n^2};$$

proto $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$ konverguje. Skoro každé číslo intervalu $(0, 1)$ patří tudíž, jak víme, nanejvýš do konečného počtu množin E_n, a tedy i nanejvýš do konečného počtu množin $e_{n,N}$. To však značí, že skoro všechna čísla intervalu $(0, 1)$ vyhovují pro dosti velké n a pro $n^2 \leqq N < (n+1)^2$ vztahu

$$|s_N - s_{n^2}| < \varepsilon n^2.$$

Jinak řečeno, skoro všude pro dostatečně velké n a $n^2 \leqq N < (n+1)^2$ platí

$$\frac{|s_N - s_{n^2}|}{n^2} < \varepsilon;$$

a ježto ε je libovolně malé, je skoro všude

$$\frac{s_N}{n^2} - \frac{s_{n^2}}{n^2} \to 0 \quad [n \to \infty, \ n^2 \leqq N < (n+1)^2].$$

Podle vztahu (91) plyne odtud patrně, že je skoro všude

$$\frac{s_N}{n^2} \to 0 \quad [n \to \infty, \ n^2 \leqq N < (n+1)^2],$$

a tedy tím spíše

$$\frac{s_N}{N} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Jinými slovy, je skoro všude

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(a_k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k \to 0 \quad (N \to \infty). \tag{92}$$

Avšak dle vzorce (81) předešlého paragrafu

$$\left| u_k - \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \right| = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \left| \mathfrak{M}E\binom{k}{r} - \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \right| <$$

$$\leqq A e^{-\lambda\sqrt{k-1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{r(r+1)} < A_1 e^{-\lambda\sqrt{k}},$$

kde A_1 je nová kladná konstanta. Proto

$$u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \quad (k \to \infty),$$

a platí tedy také

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \quad (N \to \infty).$$

Vzhledem k tomu vztah (92) nám dává

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2}$$

skoro všude v intervalu (0, 1), čímž je dokázána věta 35.

Dokázané tvrzení dovoluje stanovit celou řadu vlastností řetězců, platných pro skoro všechna iracionální čísla. Položme na příklad

$$f(r) = 1 \text{ pro } r = k \quad \text{a} \quad f(r) = 0 \text{ pro } r \neq k,$$

kde k je (libovolné) přirozené číslo. V tomto případě patrně součet

$$\psi_n(k) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

představuje číslo udávající, kolikrát se vyskytuje číslo k mezi n prvními prvky daného řetězce. Avšak vztah

$$\frac{\psi_n(k)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

nám dává jakoby *hustotu* čísla k mezi prvními n prvky daného řetězce; konečně limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(k)}{n} = d(k),$$

existuje-li, lze přirozeně vyložit jako *hustotu čísla k v celé posloupnosti prvků daného řetězce.*

Ježto námi definovaná funkce $f(r)$ vyhovuje patrně všem podmínkám věty 35, soudíme na základě této věty, že *pro libovolné k tato hustota skoro všude existuje a skoro všude má tutéž hodnotu.* Táž věta nadto dává možnost vypočíst tuto hustotu. Patrně je skoro všude

$$d(1) = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2}, \quad d(2) = \frac{\log 9 - \log 8}{\log 2}, \quad d(3) = \frac{\log 16 - \log 15}{\log 2},$$

atd. Libovolné přirozené číslo vyskytuje se tudíž v průměru stejně často jako prvek při rozvoji skoro všech čísel.

Další zajímavý výsledek dostaneme, klademe-li

$$f(r) = \log r \quad (r = 1, 2, 3, \ldots);$$

všechny podmínky věty 35 jsou při tom splněny; nacházíme tudíž, že skoro všude

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i \to \sum_{r=1}^{\infty} \log r \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \quad (n\to\infty),$$

neboli, což je totéž,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to \prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)^{\frac{\log r}{\log 2}}.$$

Tudíž geometrický průměr prvních n prvků má skoro všude pro $n \to \infty$ za limitu absolutní konstantu

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)^{\frac{\log r}{\log 2}} = 2,6\ \ldots$$

Je patrné, že věta 35 dovoluje stanovit analogické výsledky i pro celou řadu jiných středních hodnot. Pokud však jde o aritmetický průměr

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{93}$$

nelze jej studovat touto methodou, protože příslušná funkce $f(r) = r$ nevyhovuje podmínkám věty 35. Lze však snadno nahlédnout z elementárnějších úvah, že není možno, aby výraz (93) měl skoro všude konečnou limitu. Podle věty 30 (§ 13) máme totiž skoro všude pro nekonečně mnoho hodnot

$$a_n > n \log n,$$

pak tím spíše

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n \log n,$$

odkud

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i > \log n.$$

Je tedy veličina (93) skoro všude neomezená a tudíž, jak jsme tvrdili, nemůže mít konečnou limitu.

POZNÁMKY PŘEKLADATELOVY

§ 1. Schema pro výpočet sblížených zlomků (k § 2)

Při výpočtu sblížených zlomků ze vzorců (7) (§ 2) je výhodné užít schematu

k	-1	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
a_k		a_0	a_1	a_2		a_k	
p_k	p_{-1}	p_0	p_1	p_2		$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$	
q_k	q_{-1}	q_0	q_1	q_2		$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$	

Příklad pro výpočet hodnoty řetězce [2; 3, 2, 1, 4, 2, 3]; dostaneme tak schema:

k	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_k		2	3	2	1	4	2	3
p_k	1	2	7	16	23	108	239	825
q_k	0	1	3	7	10	47	104	359

Zde na př. $239 = 2 . 108 + 23$, $104 = 2 . 47 + 10$.

$$[2; 3, 2, 1, 4, 2, 3] = \frac{825}{359}.$$

§ 2. Konvergence pravidelných řetězců (k § 4)

Snadno můžeme dokázat bez použití věty 10 (§ 3), že každý nekonečný pravidelný řetězec (definici viz v Překladatelově předmluvě) konverguje. Dle § 4 posloupnost $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ je stále rostoucí. Ježto jsou to celá kladná čísla, roste q_k do nekonečna s k. Z věty 4 (§ 2) plyne, že posloupnost sblížených zlomků sudého (lichého) řádu, která je rostoucí (klesající) a omezená shora (zdola), má limitu. Ze vzorce 9 (§ 2) pak plyne rovnost obou těchto limit, ježto $q_k q_{k-1} \to \infty$ (pro $k \to \infty$), tedy $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}} = 0$.

§ 3. Neúplné dělení. Celá část reálného čísla

Libovolné celé číslo a je buď násobkem celého kladného čísla b, nebo padne mezi dva po sobě jdoucí násobky qb a $(q + 1)b$. Lze tedy psát

$$a = qb + r, \tag{1}$$

kde r je jedno z čísel

$$0, 1, 2, \ldots, b - 1. \tag{2}$$

V tomto vyjádření se nazývá q *(neúplným) podílem a* r *nejmenším nezáporným zbytkem.*

Poznamenejme, že jsou-li čísla a a b ($b > 0$) ve vzorci (1) dána, jsou čísla q a r stanovena jednoznačně, takže každé celé číslo a lze psát jediným způsobem ve tvaru $qb + r$, kde r je jedno z čísel (2).

Příklady. Při „neúplném dělení" čísla 321 číslem 74 dostáváme $321 = 4 \cdot 74 + 25$ a při „neúplném dělení" čísla -46 číslem 17 dostáváme $-46 = -3 \cdot 17 + 5$.

Dělíme-li na obou stranách ve vzorci (1) číslem b, vidíme, že jej lze psát též ve tvaru

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b},$$

kde q, neúplný podíl, je největší celé číslo $\leqq \frac{a}{b}$ a $\frac{r}{b}$ je buď 0, neb kladné číslo < 1.

Částečné podíly q se často vyskytují v číselné theorii a bylo pro ně zavedeno označení

$$g = \left[\frac{a}{b}\right].$$

$\left[\frac{a}{b}\right]$ se nazývá *celou částí* zlomku.

Samozřejmě $[n] = n$ pro celé n.

Příklady. $\left[\frac{5}{3}\right] = 1, \left[\frac{1}{3}\right] = 0, \left[-\frac{1}{3}\right] = -1.$

Rozšíříme nyní pojem celé části na reálná čísla. Při reálném α je $[\alpha]$, *celá část* α, největší celé číslo $\leqq \alpha$, tedy celé číslo g, pro něž $g \leqq \alpha < g + 1$. Pro rozdíl $\alpha - [\alpha]$ je tedy $0 \leqq \alpha - [\alpha] < 1$.

Příklady. $[\sqrt{2}] = 1$, $[e] = 2$, $[\pi] = 3$.

Pro $[\alpha]$ platí: $[\alpha + n] = [\alpha] + n$, je-li n celé.

$\left[\frac{\alpha}{k}\right] = \left[\frac{[\alpha]}{k}\right]$ pro celé kladné k.[1])

Příklad 1. $\left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right] = \left[\frac{[1 + \sqrt{5}]}{2}\right] = \left[\frac{1 + [\sqrt{5}]}{2}\right] = \left[\frac{1 + 2}{2}\right] = \left[\frac{1}{2} + 1\right] = 1.$

---

[1]) Viz na př.: Rychlík [*1*, 10]. (Takto se poukazuje na spisy v abecedním seznamu literatury.)

Příklad 2. $\left[\frac{\sqrt{37}+11}{14}\right] = \left[\frac{[\sqrt{37}]+11}{14}\right] = \left[\frac{6+11}{14}\right] = \left[\frac{17}{14}\right] = 1.$

• § 4. Euklidův algoritmus (k § 5)

Nechť značí x_0, x_1 dvě celá čísla, při čemž x_1 je kladné. Proveďme neúplné dělení čísla x_0 číslem x_1 s nejmenším nezáporným zbytkem x_2 a s neúplným podílem a_0, takže

$$x_0 = a_0 x_1 + x_2, \quad 0 \leqq x_2 < x_1.$$

$a_0 = \left[\frac{x_0}{x_1}\right]$ a je $a_0 = 0$ pro $0 \leqq x_0 < x_1$, jinak má a_0 totéž znaménko jako x_0. „Nevyjde-li dělení" (není-li x_0 dělitelné x_1), je tedy $x_2 > 0$; proveďme další neúplné dělení x_1 číslem x_2 s nejmenším nezáporným zbytkem x_3 a neúplným podílem $a_1 = \left[\frac{x_1}{x_2}\right]$, takže

$$x_1 = a_1 x_2 + x_3, \quad 0 \leqq x_3 < x_2;$$

nevyjde-li opět dělení, proveďme neúplné dělení x_2 číslem x_3. Pokračujeme-li v tomto postupu, dostaneme postupně

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 x_1 + x_2, \\ x_1 &= a_1 x_2 + x_3, \\ x_2 &= a_2 x_3 + x_4, \\ &\dots \end{aligned} \tag{1}$$

kde a_k, x_k jsou, počínaje $k = 1$, celá kladná čísla a platí

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots \tag{2}$$

Celá čísla x_k klesají při $k \geqq 1$, jsou však stále $\geqq 0$. Celý postup se tedy skončí po konečném počtu kroků tím, že konečně dělení vyjde, tedy zbytek bude $= 0$. Nechť je to zbytek x_{n+2}; předpokládejme pak, že je $n > 0$, takže první dělení nevyšlo. Pak jsou v (1) poslední dvě rovnice

$$x_{n-1} = a_{n-1} x_n + x_{n+1}, \quad a_{n-1} = \left[\frac{x_{n-1}}{x_n}\right], \tag{1'}$$

$$x_n = a_n x_{n+1}, \quad a_n = \left[\frac{x_n}{x_{n+1}}\right] = \frac{x_n}{x_{n+1}};$$

protože je $n > 0$, je $x_n > x_{n+1}$, takže poslední neúplný podíl x_n je > 1, tedy aspoň roven 2.

Popsaný postup není nic jiného než známý *Euklidův algoritmus*, jehož se užívá k určení největšího společného dělitele čísel x_0 a x_1. Tím je, jak lze snadno nahlédnout, x_{n+1}.[2])

---

[2]) Bližší o této otázce viz na př. Rychlík [*1*, 40].

Položme $\frac{x_0}{x_1} = \alpha, \frac{x_k}{x_{k+1}} = r_k$ pro $k \geqq 1$, takže vzhledem k (2) je vždy $r_k > 1$. Rovnice (1) přecházejí v rovnice

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1}, \qquad a_0 = [\alpha],$$

$$r_1 = a_1 + \frac{1}{r_2}, \qquad a_1 = [r_1],$$

$$\dots$$

$$r_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{r_n}, \qquad a_{n-1} = [r_{n-1}],$$

$$r_n = a_n, \qquad a_n = r_n.$$

Je tedy

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Pro $n = 0$ je α celé číslo, $\alpha = a_0$.

Tak je udán postup, jak rozvinout racionální číslo v pravidelný řetězec.

Euklidův algoritmus poskytuje pro racionální necelé číslo řetězec, jehož poslední prvek je $\geqq 2$. Existuje jediné takové znázornění (§ 5).

Schematicky budeme (1) a (1′) psát

$$\frac{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}}{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n}.$$

Příklad 1. $\alpha = \frac{96}{65}$.

$$\frac{96, 65, 31, 3, 1}{1, 2, 10, 3}$$

$$96 = 1 \,.\, 65 + 31, \; 65 = 2 \,.\, 31 + 3, \; 31 = 10 \,.\, 3 + 1, \; 3 = 3 \,.\, 1.$$

Řetězec pro racionální číslo $\frac{96}{65}$ je [1; 2, 10, 3].

Příklad 2. $\alpha = \frac{1260}{456}$.

$$\frac{1260, 456, 348, 108, 24, 12}{2, 1, 3, 4, 2};$$

zde čísla 1260 a 456 mají největšího společného dělitele 12. Po zkrácení dostáváme

$$\alpha = \frac{105}{38} = [2; 1, 3, 4, 2].$$

§ 5. Pravidelné řetězce (k § 4, 5)

O konečných pravidelných řetězcích pro necelá čísla se ve spise předpokládá, že jejich poslední prvek je $\geqq 2$.

Nebudeme se nyní omezovat na takové řetězce. Pak platí věta, že lze racionální číslo rozvinout, a to jediným způsobem, v pravidelný řetězec, jehož poslední prvek je roven 1. Takový rozvoj dostáváme z řetězce, jehož poslední prvek je $\geqq 2$, podle vzorce

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1].$$

Pro celá racionální čísla platí $a_0 = [a_0 - 1; 1]$; na př. $0 = [-1; 1]$.

Z obou napsaných sobě rovných řetězců má druhý o jeden prvek více než první, takže počet prvků je u jednoho z nich sudý, u druhého lichý. Lze tedy volit za počet prvků jak sudé, tak liché číslo. Platí pak tato věta:

Každé racionální číslo lze rozvinout jediným způsobem v pravidelný řetězec, je-li předepsána parita počtu prvků.

• § 6. Řešení lineární diofantické rovnice $ax-by=c$

Jako důležité použití theorie řetězců uvádíme řešení diofantické rovnice

$$ax \overset{+}{-} by = c; \tag{1}$$

přitom jsou a, b, c daná celá čísla a máme určit neznámé x, y tak, aby to byla celá čísla.

Je-li d největší společný dělitel čísel a, b, je třeba k řešitelnosti, aby c bylo dělitelné d. Pak lze rovnici (1) číslem d krátit a lze tedy předpokládat, že $d = 1$. Možno tedy beze všeho předpokládat, že čísla a, b jsou nesoudělná. Dále je možno předpokládat, že $b > 0$ (dosáhne se toho po případě změnou znaménka v rovnici (1)). Případ $b = 1$ je triviální, takže lze předpokládat, že $b > 1$.

Rozviňme $\frac{a}{b}$ v pravidelný řetězec

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n];$$

označme sblížené zlomky

$$\frac{p_k}{q_k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Pak je

$$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Protože tyto zlomky jsou irreducibilní a mají kladné jmenovatele, je $a = p_n$, $b = q_n$. Je však (věta 2, § 2)

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n, \text{ t. j. } a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

a dále

$$a((-1)^{n-1} q_{n-1} c) \overset{+}{-} b((-1)^{n-1} p_{n-1} c) = c.$$

Je tedy řešením

$$x_0 = (-1)^{n-1} q_{n-1} c, \quad y_0 = (-1)^{n-1} p_{n-1} c. \tag{2}$$

Lze však volit n tak, aby $n - 1$ bylo sudé, t. j. n liché (tedy aby řetězec pro $\frac{a}{b}$ měl lichý počet členů n, t. j. aby počet prvků $a_0, a_1, \ldots, a_n$, který je $n + 1$, byl sudý). Pak je

$$x_0 = q_{n-1}c, \quad y_0 = p_{n-1}c.$$

Když jsme tak pomocí nauky o řetězcích dostali *jedno* řešení x_0, y_0, takže je

$$ax_0 - by_0 = c, \tag{3}$$

lze snadno určit *všechna* řešení. K tomu odečtěme od rovnice (1) rovnici (3). Tak dostaneme

$$a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0,$$

t. j.

$$\frac{a}{b} = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Ježto zlomek $\frac{a}{b}$ je irreducibilní, plyne odtud

$$y - y_0 = ta, \quad x - x_0 = tb \quad (\textit{obecné řešení}),$$

kde t je libovolné celé číslo.

Příklad 1. $5x - 3y = 1$.

$$\frac{5}{3} = [1; 1, 2] = [1; 1, 1, 1].$$

Schema k určení sblížených zlomků je

	1	1	1	1
0	1	2	3	5
1	1	1	2	3

Odtud $x_0 = 2, y_0 = 3$; obecné řešení je pak $x = 2 + 3t, y = 3 + 5t$.
Kladná řešení dostáváme pro $t \geqq 0$.
Kdybychom užili řetězce [1; 1, 2], bylo by příslušné schema

	1	1	2
1	1	2	5
0	1	1	3

a dostali bychom $x_0 = -1, y_0 = -2$; obecné řešení je $x = -1 + 3t, y = -2 + 5t$.
Kladná řešení dostáváme pro $t \geqq 1$.

Příklad 2.

$$96x + 65y = 1000.$$

Pišme tuto rovnici ve tvaru

$$-96x - 65y = -1000.$$

K rozvití $-\frac{96}{65}$ v řetězec užijeme schematu

$$\frac{-96,\ 65,\ 34,\ 31,\ 3,\ 1}{-2,\ 1,\ 1,\ 10,\ 3}$$

Tak dostáváme řetězec pro $-\frac{96}{65}$:

$$-\frac{96}{65} = [-2; 1, 1, 10, 3] = [-2; 1, 1, 10, 2, 1].$$

Schema k určení sblížených zlomků je pak

	—2	1	1	10	2	1
1	—2	—1	—3	—31	—65	—96
0	1	1	2	21	44	65

Je tedy

$$x_0 = 44 \cdot -1000 = -44\,000,\ y_0 = -65 \cdot -1000 = 65\,000.$$

Obecné řešení je

$$x = -44\,000 + 65t,\ y = 65\,000 - 96t.$$

Řešení s kladnými x a y dostaneme pro

$$-44\,000 + 65t > 0,\ 65\,000 - 96t > 0,$$

t. j. při

$$t > \frac{44\,000}{65} \text{ a zároveň } t < \frac{65\,000}{96},$$

neboli

$$\frac{44\,000}{65} < t < \frac{65\,000}{96}.$$

Ježto

$$\left[\frac{44\,000}{65}\right] = 676,\ \left[\frac{65\,000}{96}\right] = 677,$$

jsou tyto nerovnosti splněny jedině pro $t = 677$.

Klademe-li tedy v obecném řešení $t = 677$, dostáváme jediné řešení dané diofantické rovnice kladnými x, y: $x = 5$, $y = 8$.

Obecné řešení lze pak psát ve tvaru

$$x = 5 + 65t',\ y = 8 - 96t'.$$

• § 7. Řešení lineární kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$

Řešení kongruence

$$ax \equiv b \pmod{m}, \tag{1}$$

kde $m > 1$ a a, m jsou nesoudělná čísla, je úkol ekvivalentní s řešením diofantické rovnice

$$ax - my = b. \tag{2}$$

Rozviňme $\frac{a}{m}$ v řetězec, takže $\frac{a}{m} = \frac{p_n}{q_n}$.

Pak podle vzorce (2) předešlého paragrafu je

$$x_0 = (-1)^{n-1} q_{n-1} b, \quad y_0 = (-1)^{n-1} p_{n-1} b$$

řešením diofantické rovnice (2), a tedy vzorec pro x_0 poskytuje řešení kongruence (1).

Rozvineme-li $\frac{a}{m}$ v řetězec se sudým (lichým) počtem prvků při $b > 0$ ($b < 0$), bude b mít totéž znaménko jako $(-1)^{n-1}$, takže bude $(-1)^{n-1} b = |b|$.

Tak dostáváme řešení

$$x \equiv q_{n-1} |b|.$$

Příklad 1.

$$7x \equiv 2 \pmod{11}.$$

Zde $b = 2 > 0$, rozvineme tedy $\frac{7}{11}$ v řetězec se sudým počtem prvků $\frac{7}{11} = [0; 11, 1, 2, 1]$. K určení sblížených zlomků máme schema

	0	1	1	1	2	1
1	0	1	1	2	5	7
0	1	1	2	3	8	11

Bude tedy

$$x \equiv 8 \cdot 2 \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}.$$

Příklad 2.

$$7x \equiv -2 \pmod{11}.$$

Ježto $b = -2 < 0$, rozvineme $\frac{7}{11}$ v řetězec s lichým počtem prvků $\frac{7}{11} = [0; 1, 1, 1, 3]$.

Schema pro výpočet sblížených zlomků je

	0	1	1	1	3
1	0	1	1	2	7
0	1	1	2	3	11

Je tedy řešením

$$x \equiv 3 \cdot |-2| \equiv 6 \pmod{11}.$$

Příklad 3.

$$5x \equiv 7 \pmod{63}.$$

Ježto $b = 7 > 0$, rozvineme v řetězec se sudým počtem prvků

$$\frac{5}{63} = [0; 12, 1, 1, 1, 1].$$

Schema pro výpočet sblížených zlomků je

	0	12	1	1	1	1
1	0	1	1	2	3	5
0	1	12	13	25	38	63

Je tedy

$$x \equiv 38 \cdot 7 \equiv 266 \equiv 14 \pmod{63}.$$

§ 8. Vztahy $\gtrless$ mezi řetězci. Rozvoj desetinného zlomku v řetězec

Všimněme si nyní, který ze dvou neidentických pravidelných řetězců má větší hodnotu. Nechť je

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

konečný řetězec. S ním chceme porovnat řetězec

$$\beta = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots],$$

který může být konečný nebo nekonečný. Označme zbytky prvého řetězce r_n, druhého s_n. Nejprve je $r_n = a_n$;

$$s_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots] > a_n; \text{ tedy } r_n < s_n;$$

z rovnic

$$r_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{r_n}, \quad s_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{s_n},$$

$$r_{n-2} = a_{n-2} + \frac{1}{r_{n-1}}, \quad s_{n-2} = a_{n-2} + \frac{1}{s_{n-1}},$$

plyne pak postupně

$$r_{n-1} > s_{n-1},$$
$$r_{n-2} < s_{n-2},$$

při čemž se znaky $\gtrless$ střídají. Poslední z těchto nerovností je $\alpha > \beta$ nebo $\alpha < \beta$, podle toho, je-li počet prvků $n + 1$ sudý nebo lichý (neboli počet členů řetězce n lichý nebo sudý). Tak dostáváme tuto **větu**.

Připojíme-li ke konečnému řetězci další konečný nebo nekonečný počet prvků, zmenší (resp. zvětší) se jeho hodnota dle toho, byl-li původní počet prvků $n + 1$ sudý (resp. lichý), neboli dle toho, byl-li původní počet členů řetězce n lichý (nebo sudý).

Budeme se dále zabývat řetězci

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots],$$
$$\beta = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_n, \ldots],$$

při čemž nechť je $b_n > a_n$. Je-li pak na př.

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1], \ \beta = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1],$$

víme již (§ 4), že $\alpha = \beta$. Tento případ nyní vyloučíme ze svých úvah. Jsou-li opět r_k, s_k zbytky obou řetězců, je nejprve

$$s_n \geqq b_n \geqq a_n + 1 \geqq r_n;$$

je tedy $s_n \geqq r_n$ a rovnost nastává jen ve vyloučeném případě. Skutečně je tedy $s_n > r_n$ a z toho plyne jako dříve, že $\alpha > \beta$ nebo $\alpha < \beta$, podle toho, je-li $n + 1$ sudé nebo liché. To vede k větě:

Liší-li se dva neidentické pravidelné řetězce jen tak, že jsou tvaru

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1], \ [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1],$$

mají stejnou hodnotu. Jinak mají různé hodnoty a je — značí-li n ($\geqq 0$) počet společných počátečních prvků — větší ten, který při sudém (lichém) n má větší (resp. menší) n-tý člen.

Z toho plyne zejména, že se pravidelný řetězec zvětší, zvětší-li se některý z prvků $a_0, a_2, a_4, \ldots$, aneb zmenší-li se některý z prvků $a_1, a_3, a_5, \ldots$

Dále dostáváme větu:

Souhlasí-li pravidelné řetězce pro reálná čísla β, γ v prvních n prvcích, počíná řetězec pro každé číslo α ležící mezi β a γ rovněž těmito n prvky. Další prvek leží nutně mezi[3]) odpovídajícími si prvky řetězců pro β a γ.

Kdyby tomu tak nebylo, bylo by podle předešlého nutně číslo α buď větší než každé z čísel β a γ, nebo menší než každé z nich; neleželo by tedy α mezi nimi.

Posledné věta má význam, jde-li o to, rozvinout v pravidelný řetězec číslo α, pro něž známe jen několik počátečních desetinných míst. Neboť potom také jsou stanovena dvě racionální čísla, mezi nimiž α leží. Rozvineme-li tato dvě racionální čísla v řetězce a shodují-li se v prvních n prvcích, počíná rozvoj čísla α v řetězec také těmito n prvky. Abychom se vyhnuli zbytečnému počítání, rozvinujeme ovšem obě racionální čísla současně v řetězce a skončíme počet, jakmile se objeví odchylka.

Příklad. Pro Ludolfovo číslo π platí nerovnosti

$$3{,}141\,592\,653\,58 < \pi < 3{,}141\,592\,653\,59.$$

Nalezneme

$$3{,}141\,592\,653\,58 = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 1, \ldots],$$
$$3{,}141\,592\,653\,59 = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \ldots].$$

---

[3]) Včetně hranic.

Ježto se tyto řetězce shodují v prvních osmi prvcích, je též

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \ldots]$$

a zároveň je patrné, že nejbližší prvek je buď 1, nebo 2. Kdybychom vyšli od většího počtu desetinných míst, zjistili bychom, že nejbližší prvek je skutečně 2.

Obecný zákon pro prvky čísla π není znám. Naproti tomu je možno číslo e vyjádřit řetězcem jednoduchého tvaru

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots, 1, 2k, 1, \ldots].$$[4])

• § 9. Nejlepší přiblížení (k § 6)

Dle věty 15 je každý zlomek, který je nejlepším přiblížením (prvního druhu) čísla α, buď sblíženým, nebo vsunutým zlomkem. Sblížené zlomky jsou až na triviální výjimku vesměs nejlepšími přiblíženími (věta 17). O tom, které vsunuté zlomky jsou také nejlepším přiblížením, nás poučuje věta:

Vsunutý zlomek $\dfrac{p_{k-2} + rp_{k-1}}{q_{k-2} + rp_{k-1}}$ *(existující jen pro* $a_k > 1$) *je tehdy a jen tehdy nejlepším přiblížením, je-li* $2r > a_k$, *nebo též, je-li* $2r = a_k$ *a zároveň*

$$[a_k ; a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1] > [a_k ; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots] ;$$

naproti tomu pro $2r < a_k$ *nedostáváme nejlepší přiblížení.*[5])

Vidíme, že ze zlomků vsunutých, ležících mezi $\dfrac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\dfrac{p_k}{q_k}$:

$$\frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}, \frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}}, \ldots, \frac{p_{k-2} + (a_k - 1) p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1) q_{k-1}},$$

poskytuje jen druhá polovina nejlepší přiblížení. Je-li $a_k - 1$ liché, bude střední zlomek nejlepším přiblížením dle toho, platí-li $[a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1] > [a_k, a_{k+1}, \ldots]$ nebo ne.

Tato věta nám umožňuje vypsat posloupnost všech nejlepších přiblížení čísla α, a to tak, že každý další zlomek leží blíže k α než předcházející. Zlomky jsou pak samy sebou uspořádány dle rostoucích jmenovatelů; jsou částečně větší, částečně menší než α. Přechod od větších než α k menším než α a naopak nastává při zlomcích sblížených. Jsou-li $\dfrac{a}{b}$ a $\dfrac{c}{d}$ dva po sobě jdoucí zlomky této posloupnosti, je mezi všemi zlomky, které leží blíže k α než $\dfrac{a}{b}$, právě $\dfrac{c}{d}$ zlomek s nejmenším jmenovatelem.

Příklad. Objasníme si to při Ludolfově čísle π. Nalezli jsme

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots].$$

---

[4]) Jednoduché odvození viz na př.: Perron [*2*, 109—111].
[5]) H. J. Stephen Smith. Viz na př.: Perron [*1*, 60].

Sblížené zlomky jsou tedy

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103\,993}{33\,102}, \frac{104\,348}{33\,215}, \ldots,$$

kdežto vsunuté zlomky mají tvar

$$\frac{3r+1}{r}, \frac{22r'+3}{7r'+1}, \frac{355r''+333}{113r''+106}, \ldots$$

$$1 \leqq r \leqq 6,\ 1 \leqq r' \leqq 14,\ 1 \leqq r''' \leqq 291, \ldots$$

Zlomky tvaru $\frac{333r''+22}{106r''+7}$ odpadají, ježto $a_3 = 1$, takže již pro $r'' = 1$ se dostane zlomek sblížený. Vsunuté zlomky jsou nejlepšími přiblíženími pro

$r = 4, 5, 6$; tedy $\frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}$,

$r' = 8, 9, 10, 11, 13, 14$; tedy $\frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}$,

$r''' = 147, 148, \ldots$; tedy $\frac{52\,518}{16\,717}, \frac{52\,873}{16\,850}, \ldots$

Poskytuje-li již hodnota $r''' = 146$ nejlepší přiblížení, závisí na tom, je-li splněna nerovnost

$$[a_4; a_3, a_2, a_1] > [a_4; a_5; a_6, \ldots];$$

je to však

$$[292; 1, 15, 7] > [292; 1, 1, \ldots].$$

Ona nerovnost je tedy dle § 8 skutečně splněna; je tedy již zlomek $\frac{52\,163}{16\,604}$ vznikající pro $r''' = 146$ nejlepším přiblížením. Tudíž jsou nejlepšími přiblíženími po řadě

$$\underline{\frac{3}{1}}, \overline{\frac{13}{4}}, \overline{\frac{16}{5}}, \overline{\frac{19}{6}}, \overline{\frac{22}{7}},$$

$$\underline{\frac{179}{57}}, \underline{\frac{201}{64}}, \underline{\frac{223}{71}}, \underline{\frac{245}{78}}, \underline{\frac{267}{85}}, \underline{\frac{289}{92}}, \underline{\frac{311}{99}}, \underline{\frac{333}{106}},$$

$$\overline{\frac{355}{113}}, \underline{\frac{52\,163}{16\,604}}, \underline{\frac{52\,518}{16\,717}}, \underline{\frac{52\,873}{16\,830}}, \ldots$$

při čemž čára pod zlomky značí, že jsou menší než π, čára nad zlomky, že jsou větší než π. Mezi těmito zlomky si zaslouží pozornosti jako obzvláště příznivé přiblížení zlomek $\frac{22}{7}$; neboť abychom se hodnotě π ještě více přiblížili, je třeba jmenovatele značně zvětšit, ze 7 na 57. Obzvláště výborným přiblížením je však zlomek $\frac{355}{113}$; zde jmenovatel není příliš veliký, abychom se však více přiblížili číslu π, nutno provést značné zvětšení jmenovatele, až na 16 604, a přitom je zisk nepatrný; neboť chyba se tím, jak dále uvedená tabulka ukazuje, zmenší jen asi o $2^0/_{00}$. Naproti tomu je zlomek $\frac{333}{106}$, ač je to „nejlepší přiblížení" a dokonce sblížený zlomek, dosti nepříznivý. Neboť se malým zvětšením jmenovatele, na 113, chyba značně zmenší. Vidíme, že dostaneme obzvláště příznivé aproximace při velikých prvcích a_k, zde při 15 a 292.

$$\frac{22}{7} = 3{,}142\,857, \text{ chyba } \pi - \frac{22}{7} = -0{,}001;$$

$$\frac{223}{71} = 3{,}140\,845, \text{ chyba} = +0{,}000\,7;$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}141\,509\,4, \text{ chyba} = +0{,}000\,08;$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}141\,592\,920\,35, \text{ chyba} = -0{,}000\,000\,266\,76;$$

$$\frac{52\,163}{16\,604} = 3{,}141\,592\,387\,376, \text{ chyba} = +0{,}000\,000\,266\,21.$$

Je zajímavé, že některé z těchto zlomků byly známy jako dobré aproximace pro π již dříve, než byly studovány řetězce. Tak Archimedes našel, že π leží mezi $\frac{22}{7}$ a $\frac{223}{71}$. Adrián Metius (1571—1635) zná zlomky $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$.

§ 10. Kvadratické irracionály (k § 10)

1. Při $k_0 = 0$ se řetězec nazývá *ryze periodický*. Jinak při $k_0 > 0$ se nazývá *neryze periodický*. Prvky a_0; $a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}$ tvoří *předperiodí* a $a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}$ *periodu*.

Ryze periodický řetězec má tvar $[\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}}]$, takže předperiodí odpadá. Ryze periodický zlomek můžeme považovat za neryze periodický a neryze periodický za neryze periodický s delším předperiodím. Je patrně na př.

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}}] =$$
$$= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, a_{k_0}, \overline{a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}, a_{k_0}}].$$

2. Jsou-li k_0 a h malá čísla, je možno stanovit kvadratickou rovnici pro hodnotu periodického řetězce přímo, bez užití theorie řetězců.

Příklad 1.

$$\alpha = [\overline{2; 3}].$$

Pak je

$$\alpha = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\alpha}} = 2 + \frac{\alpha}{3\alpha + 1} = \frac{7\alpha + 2}{3\alpha + 1},$$

takže α je kořenem kvadratické rovnice

$$x(3x + 1) = 7x + 2, \text{ t. j. } 3x^2 - 6x - 2 = 0.$$

Je tedy $[\overline{2; 3}] = \frac{1}{3}(3 + \sqrt{15})$; druhý kořen této rovnice je záporný, takže nevyhovuje.

Příklad 2.

$$\alpha = [1; \overline{1, 3}].$$

Pak je

$$\alpha - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}},$$

t. j.

$$\frac{1}{\alpha - 1} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \dots}} = 1 + \frac{1}{3 + (\alpha - 1)} = 1 + \frac{1}{\alpha + 2} = \frac{\alpha + 3}{\alpha + 2}.$$

Je tedy α kořenem kvadratické rovnice

$$x + 2 = (x - 1)(x + 3), \text{ t. j. } x^2 + x - 5 = 0;$$

tak dostáváme $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{21})$, ježto $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{21}) < 0$.

3. Pro ryze periodický zlomek je $\alpha = r_0 = r_h$, takže dle vzorce (48) (§ 10) je

$$\alpha = \frac{p_{h-1}\alpha + p_{h-2}}{q_{h-1}\alpha + q_{h-2}}.$$

α je tedy kořenem kvadratické rovnice

$$q_{h-1}x^2 + (q_{h-2} - p_{h-1})\,x - p_{h-2} = 0.$$

Příklad.

$$\alpha = [\overline{1; 2, 3, 4}].$$

Zde je $h = 4$ a rovnice pro α je

$$q_3x^2 + (q_2 - p_3)\,x - p_2 = 0.$$

Potřebné sblížené hodnoty dává schema:

k	-1	0	1	2	3
a_k		1	2	3	4
p_k	1	1	3	10	43
q_k	0	1	2	7	30

Kvadratická rovnice pro α je tedy $30x^2 - 36x - 10 = 0$ a po zkrácení dvěma

$$15x^2 - 18x - 5 = 0.$$

Odtud vypočteme

$$\alpha = \frac{9 + 2\sqrt{39}}{15}.$$

4. **Pro neryze periodický zlomek je**

$$\alpha = \frac{p_{k_0-1}r_{k_0} + p_{k_0-2}}{q_{k_0-1}r_{k_0} + q_{k_0-2}},$$

kde r_{k_0} je ryze periodický zlomek

$$r_{k_0} = [a_{k_0}; a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}],$$

který již dovedeme vypočíst.

Příklad.

$$\alpha = [2; 3, \overline{10, 1, 1, 1}].$$

Zde je

$$\alpha = \frac{p_1 r_2 + p_0}{q_1 r_2 + q_0} = \frac{7r_2 + 2}{3r_2 + 1},$$

kde r_2 je ryze periodický řetězec $r_2 = [\overline{10; 1, 1, 1}]$.

Zde je $h = 4$; prvky řetězce r_2 označme $a_k^{(2)}$ a čitatele a jmenovatele jeho sblížených zlomků $p_k^{(2)}$, $q_k^{(2)}$.

Pro r_2 máme kvadratickou rovnici

$$q_3^{(2)}x^2 + (q_2^{(2)} - p_3^{(2)})\,x - p_2^{(2)} = 0.$$

Určeme potřebné sblížené hodnoty pomocí schematu:

k	—1	0	1	2	3
$a_k^{(2)}$		10	1	1	1
$p_k^{(2)}$	1	10	11	21	32
$q_k^{(2)}$	0	1	1	2	3

Kvadratická rovnice pro r_2 je tedy $3x^2 - 30x - 21 = 0$ nebo po zkrácení třemi

$$x^2 - 10x - 7 = 0.$$

Odtud plyne

$$r_2 = 5 + \sqrt{32} = 5 + 4\sqrt{2}.$$

Dosazením do vzorce pro α dostáváme

$$\alpha = [2; 3, \overline{10, 1, 1, 1}] = \frac{35 + 28\sqrt{2} + 2}{25 + 12\sqrt{2} + 1} = \frac{20 - \sqrt{2}}{8}.$$

5. **Zobrazení kvadratické iracionály řetězcem ukážeme na příkladech.**

Příklad 1. $\sqrt{59}$.

$$\alpha = \sqrt{59} = 7 + (\sqrt{59} - 7), \ ([\sqrt{59}] = 7),$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{10} = 1 + \frac{\sqrt{59}-3}{10}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{59}+7}{10}\right] = 1\right)^{6)},$$

$$r_2 = \frac{10}{\sqrt{59}-3} = \frac{\sqrt{59}+3}{5} = 2 + \frac{\sqrt{59}-7}{5}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{59}+3}{5}\right] = 2\right),$$

$$r_3 = \frac{5}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{2} = 7 + \frac{\sqrt{59}-7}{2}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{59}+7}{2}\right] = 7\right),$$

$$r_4 = \frac{2}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{5} = 2 + \frac{\sqrt{59}-3}{5}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{59}+7}{5}\right] = 2\right),$$

$$r_5 = \frac{5}{\sqrt{59}-3} = \frac{\sqrt{59}+3}{10} = 1 + \frac{\sqrt{59}-7}{10}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{59}+3}{10}\right] = 1\right),$$

$$r_6 = \frac{10}{\sqrt{59}-7} = \sqrt{59} + 7 = 14 + (\sqrt{59} - 7), \ ([\sqrt{59} + 7] = 14),$$

$$r_7 = \frac{1}{\sqrt{59}-7} = r_1.$$

$$\sqrt{59} = [7; \overline{1, 2, 7, 2, 1, 14}].$$

Zde je šestičlenná perioda 1, 2, 7, 2, 1, 14 a předperiodí o jednom čísle 7.

Příklad 2.

$$\alpha = \frac{11 + \sqrt{37}}{14} = 1 + \frac{\sqrt{37} - 3}{14}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{37} + 11}{14}\right] = 1\right)^{7)}.$$

$$r_1 = \frac{14}{\sqrt{37}-3} = \frac{\sqrt{37}+3}{2} = 4 + \frac{\sqrt{37}-5}{2}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{37}+3}{2}\right] = 4\right),$$

$$r_2 = \frac{2}{\sqrt{37}-5} = \frac{\sqrt{37}+5}{6} = 1 + \frac{\sqrt{37}-1}{6}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{37}+5}{6}\right] = 1\right),$$

$$r_3 = \frac{6}{\sqrt{37}-1} = \frac{\sqrt{37}+1}{6} = 1 + \frac{\sqrt{37}-5}{6}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{37}+1}{6}\right] = 1\right),$$

$$r_4 = \frac{6}{\sqrt{37}-5} = \frac{\sqrt{37}+5}{2} = 5 + \frac{\sqrt{37}-5}{2}, \ \left(\left[\frac{\sqrt{37}+5}{2}\right] = 5\right),$$

$$r_5 = \frac{2}{\sqrt{37}-5} = \frac{\sqrt{37}+5}{6} = r_2.$$

---

6) Viz • § 3.
7) Viz • § 3.

Je tedy

$$\alpha = \frac{11 + \sqrt{37}}{14} = [1; 4, \overline{1, 1, 5}].$$

Pro kvadratickou irracionálu konjugovanou s α, $\alpha' = \frac{11 - \sqrt{37}}{14}$, která s α je kořenem kvadratické rovnice s celými koeficienty

$$7x^2 - 11x + 3 = 0,$$

platí

$$\alpha' = \frac{-\sqrt{37} + 11}{14} = 0 + \frac{-\sqrt{37} + 11}{14},$$

$$r_1' = \frac{14}{-\sqrt{37} + 11} = \frac{\sqrt{37} + 11}{6} = 2 + \frac{\sqrt{37} - 1}{6},$$

$$r_2' = \frac{6}{\sqrt{37} - 1} = \frac{\sqrt{37} + 1}{6} = r_3 = [\overline{1, 5, 1}].$$

Je tedy $\alpha' = [0; 2, \overline{1, 5, 1}]$, což však můžeme psát též v tvaru $\alpha' = [0; 2, 1, \overline{5, 1, 1}]$. Perioda kvadratické irracionály konjugované α' je složena z týchž čísel jako perioda irracionály α, ale v obráceném pořádku. (Platí pro kvadratické irracionály obecně.)[8])

§ 11. Geometrické zobrazení řetězců

Body v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice jsou celá čísla, tvoří *bodovou mříž.* Budeme si všímat jen mřížových bodů v horní polorovině. Reálné číslo α zobrazíme polopřímkou $p(\alpha)$ s rovnicí $x = \alpha y$, procházející počátkem a ležící v horní polorovině ($y \geqq 0$). Je-li α racionální číslo dané irreducibilním zlomkem $\alpha = \frac{a}{b}$ (a, b nesoudělná, $b > 0$), lze α zobrazit též mřížovým bodem (a, b). Je to první bod (horní poloroviny) různý od počátku, který leží na polopřímce $p(\alpha)$.

Takové racionální číslo lze též zobrazit vektorem, jehož počátečním bodem je bod O a koncovým bodem bod (a, b).

Nechť je α číslo reálné s rozvojem v pravidelný řetězec $[a_0; a_1, a_2, \dots]$. Hledejme body odpovídající sblíženým zlomkům. Označme A_k bod zobrazující sblížený zlomek $\frac{p_k}{q_k}$, t. j. bod o souřadnicích (p_k, q_k).

---

[8]) Výpočet možno ještě zkrátit pomocí vět z theorie periodických pravidelných řetězců. Z rozsáhlé literatury o těchto otázkách budiž uvedeno: Bieberbach-Bauer, Cahen, Dickson, Kraitchik, Perron *I*, Petr, Serret, Sierpiński, W. Weber, Wertheim.

Existují tabulky pravidelných řetězců pro $\sqrt{D}$, kde D je celé kladné číslo (Patz, kde je uvedena starší literatura o tabulkách podobného druhu).

Mimo sblížený zlomek $\frac{p_{-1}}{q_{-1}}$ připojíme ještě sblížený zlomek $\frac{p_{-2}}{q_{-2}}$ s $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1$.

Pak je

$$\left.\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-2} + q_{k-2}. \end{aligned}\right\} \quad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{1}$$

(Vzorce (7) § 2.) Tyto dvě rovnice lze psát jako jedinou vektorovou rovnici

$$\overrightarrow{OA_k} = a_k \,.\, \overrightarrow{OA}_{k-1} + \overrightarrow{OA}_{k-2}, \tag{1'}$$

značí-li $\overrightarrow{OA_k}$ vektor s počátečním bodem O a koncovým bodem A_k. Ježto $\overrightarrow{A_{k-2}A_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA}_{k-2} = a_k\overrightarrow{OA}_{k-1}$, je vektor $\overrightarrow{A_{k-2}A_k}$ rovnoběžný s vektorem $\overrightarrow{OA}_{k-1}$ a při $k \geq 1$ stejného smyslu.

Zlomky vsunuté mají čitatele $ip_{k-1} + p_{k-2}$ a jmenovatele $iq_{k-1} + q_{k-2}$ s $0 < i < a_k$, takže zobrazující vektory jsou $i\overrightarrow{OA}_{k-1} + \overrightarrow{OA}_{k-2}$. Zobrazující body vsunutých zlomků jsou mřížové body ležící uvnitř úsečky $A_{k-2}A_k$.

Konstrukce A_k pomocí vzorce (1′) vyžaduje znalost a_k, má však také tento význam: koncový bod vektoru $a_k\overrightarrow{OA}_{k-1} + \overrightarrow{OA}_{k-2}$ padá ještě na tutéž stranu polopřímky $p(\alpha)$ jako bod A_{k-2}, kdežto koncový bod vektoru $(a_k + 1)\overrightarrow{OA}_{k-1} + \overrightarrow{OA}_{k-2}$ je již na druhé straně polopřímky $p(\alpha)$. (Srovnej § 4.)

Polopřímka $p(\alpha)$ dělí polorovinu ve dvě části. V každé z nich vznikne lomená čára, konvexní vzhledem k $p(\alpha)$. Rohy obou těchto čar jsou body zobrazující sblížené zlomky řetězce pro α; dolní (resp. horní) lomená čára počíná v bodě A_{-2} (resp. A_{-1}) a má za rohy body zobrazující sblížené zlomky se sudými (resp. lichými) indexy. Vsunuté zlomky jsou znázorněny mřížovými body, které leží uvnitř stran obou lomených čar. Mezi oběma lomenými čarami neleží další mřížové body. Je-li α iracionální, jsou obě lomené čáry nekonečné. Pro racionální α lze zvolit jako koncový bod buď dolní, nebo horní lomené čáry bod zobrazující α (α je vyjádřeno ireducibilním zlomkem s kladným jmenovatelem), dle toho, jak zvolíme paritu počtu prvků řetězce pro α.[9])

§ 12. Zevšeobecněné řetězce

Lze také zkoumat výrazy

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}, \tag{1}$$

[9]) 1. Tato geometrická theorie řetězců byla vyvinuta Kleinem. Viz též Cahen, Rychlík [2]. Další literaturu viz Koksma [38].

2. Od Humberta pochází geometrická theorie řetězců, která užívá modulového obrazce. Literaturu viz Koksma [30 až 43].

3. Jiné geometrické znázornění řetězců: Lettenmeyer.

které se nazývají konečnými zevšeobecněnými řetězci a píší se ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}, \tag{2}$$

nebo stručněji

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \ldots + \frac{b_n|}{|a_n}. \tag{3}$$

Položíme-li

$$\left.\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & q_{-1} &= 0, \\ p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{k+1} &= a_{k+1}p_k + b_{k+1}p_{k-1} \\ q_{k+1} &= a_{k+1}q_k + b_{k+1}q_{k-1} \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

bude

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \ldots + \frac{b_k|}{|a_k} = \frac{p_k}{q_k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Tak možno určit obyčejný zlomek rovný danému řetězci. Vzorci (8) (§ 2) odpovídá

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}\, b_1 b_2 \ldots b_k,$$

vzorci (9) (§ 2) pak

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = (-1)^{k-1}\, \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{q_k q_{k-1}}.$$

Nekonečné zevšeobecněné řetězce a jejich konvergenci lze definovat podobně jako v § 3.[10])

[10]) Viz Koksma (hlavně literatura), Perron, Wall (s rozsáhlým seznamem literatury). Úvod do této theorie viz též Cahen.

LITERATURA

Abecední seznam.

Paul Bachmann,
1. Grundlehren der neueren Zahlentheorie, 2. vyd., 1921.
2. Niedere Zahlentheorie I, 1921.

L. Bieberbach-G. Bauer, Vorlesungen über Algebra, 5. vyd., 1933.

Eugène Cahen, Théorie des nombres I, 1914, II, 1924.

P. L. Čebyšev (Tchebychef, Tschebyschev), Lit. Koksma [151].

Eduard Čech, Bodové množiny, 1936.

L. E. Dickson, History of the theory of numbers I, 1939, II, 1920, III, 1923.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, 1900—1904 (Encyklop.).

A. J. Chinčin (Khintchine),
1. Lit. Matem. v SSSR [79—80].
2. Lit. Koksma [138].
3. Zur metrischen Kettenbruchtheorie, Compositio mathematica, *3*, 1936, 276—285.

J. F. Koksma, Diophantische Approximationen (Ergebn. d. Mathem. u. ihrer Grenzgebiete, IV, 4) (1936).

M. Kraitchik, Théorie des nombres I, 1922, II, 1926.

R. O. Kuzmin,
1. Lit. Matem. v SSSR [74].
2. Lit. Koksma [1939].
3. Sur un problème de Gauss, Atti Congresso intern., Bologna, 1928, VI, 83—89.

F. Lettenmeyer, Eine geom. Entwickelung der Lehre von regelmässigen Kettenbrüchen, Deutsche Mathem., *3* (1938), 65—88.

Paul Lévy, Sur le développement en fractíons continues, Compositio mathematica, (1936), 286—303.

Matematika v SSSR za tridcať let 1917—1947, 1948 (Matem. v SSSR).

W. Patz, Tafel der regelmässigen Kettenbrüche für die Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen ven 1 bis 10 000, 1941.

Oskar Perron,
1. Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1913, 2. vyd., 1929.
2. Irrationalzahlen, 1921.

Karel Petr, O rovnici Pellově, Časopis *56* (1927), 57—66.

Karel Rychlík,
1. Úvod do elementární číselné theorie, 2. vyd., 1950.
2. Geom. znázornění řetězců, Časopis *40* (1911), 225—236.

J. A. Serret, Cours d'algèbre superieure I; něm. překlad Wertheim I, 1878.

Wacław Sierpiński, Teoria liczb, 3. vyd., 1950.

H. S. Wall, Analytic Theory of Continued Fractions, 1948.

I. M. Vinogradov, Osnovy teorii čísel, 3. vyd., 1940, 5. vyd., 1949.

Werner Weber, Die Pellsche Gleichung, Deutsche Mathem., *1*. Beiheft, 1938.

G. Wertheim, Anfangsgründe der Zahlenlehre, 1902.

Poznámky k literatuře.

O všech otázkách, jimiž se Chinčinův spis zabývá, podává referáty s hojnými literárními odkazy Koksma.

Mnohé z problémů, jimiž se zabývají první dvě kapitoly Chinčinova spisu, jsou obšírně probrány s uvedením starší literatury ve spise Perronově [1].

Referáty o téže látce, opět s hojnou literaturou, podává Encyklop.

Referáty o pracích sovětských autorů s obšírnými seznamy literatury podává spis Matem. v SSSR.

Theorie míry je vyložena ve spise Čechově.

Otázkami v III. kap. se zabývá ve formulaci theorie pravděpodobnosti pojednání Lévyho.

Kuzminovo pojednání o Gaussově problému vyšlo též francouzsky [Kuzmin, 3].

Důkaz Chinčinovy věty, o níž je zmínka na začátku paragrafu 14, je obsažen v pojednání [Chinčin, 3].

ABECEDNÍ SEZNAM VĚCNÝ[11])

Algoritmus Euklidův 83^{2}, 83_{3}
aproximace iracionálních čísel řetězci 22_{14}
aritmetika, metrická kontinua 47_{7}

Část celá reálného čísla 82_{7}
— — zlomku 82_{10}
číslo algebraické 42^{16}
— — stupně n 42_{15}
— iracionální (= iracionála)
— — kvadratické 42_{12}
— přirozené 16^{8}
— transcendentní 42_{11}
— — Liouvilleovo 42^{12}, 44^{9}
člen: řetězec s n členy, řetězec n-členný 7_{15}

Dělení neúplné 82^{1}, 82^{11}

Hodnota řetězce 16^{7}
— střední 75^{1}
hustota čísla v posloupnosti prvků řetězce 79_{14}

Interval pořadí 0 52^{11}
— — prvního 49^{9}
— — druhého 50_{11}
— — n 50_{4}
iracionála (= iracionální číslo)
— kvadratická 42_{13}
— — konjugovaná 97^{3}

Kongruence lineární $ax = b \pmod{m}$ 88^{1}

Medianta 17^{12}
mříž nodová 97_{11}

Odhad metrický vzrůstu prvků 55^{1}
— — — jmenovatelů sblížených zlomků 58_{8}

Perioda řetězce 93_{12}
podíl neúplný (při dělení) 82^{7}
pořadí intervalu viz interval pořadí
problém Gaussův 63_{8}
prvek čísla reálného 14^{2}
— řetězce 7^{10}
předperiodí 93_{13}
přiblížení, nejlepší, prvního druhu 23^{4}, 24_{8}
— — druhého druhu 24_{2}

Rovnice, diofantická lineární $ax - by = c$ 85^{10}

Řád přiblížení 28_{4}
řešení diofantické rovnice $ax - by = c$ řetězci 85^{10}
— kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$ řetězci 88^{1}
— nadnormální 42^{3}
— normální 41_{3}
— obecné (diefantické rovnice $ax - by = c$) 86^{11}
řetězec s n-členy, n-členný (= s $n + 1$ prvky) 7_{15}
— divergentní 12_{8}
— konečný 7_{15}
— konvergentní 12_{9}
— nekonečný 7_{13}
— periodický 44_{5}
— — neryze 93_{13}
— — ryze 93_{13}
— pravidelný 3^{7}
— zevšeobecněný 99^{1}

Schema pro Euklidův algoritmus 81^{3}
— pro výpočet sblížených zlomků 84^{13}

Theorie, metrická řetězců 48^{5}

Úsek čísla reálného 8^{4}
— řetězce 14^{2}

Velikost řetězce 16^{7}
věta Čebyševova 37_{8}
— hlavní metrické theorie aproximace 58_{7}
— Kuzminova 74_{6}
— Liouvilleova 42_{7}
vyjádření kanonické řetězce 8_{3}

Zákon znázornění sblížených zlomků 9_{6}
zbytek, nejmenší nezáporný (při neúplném dělení) 82^{7}
— čísla reálného 14^{2}
— řetězce 8^{9}
zlomek ireducibilní 16_{15}
— řetězový (= řetězec) 3^{4}
— sblížený (čísla reálného) 14^{3}
— — (řetězce) 9_{12}
— vsunutý 17^{9}
zobrazení, geometrické řetězců 97_{12}

[11]) p^{n} značí str. p řádek n shora, p_{d} str. p řádek d zdola.

OBSAH

Předmluva překladatelova 3
Z předmluvy k prvnímu vydání 5
Předmluva k druhému vydání 6

Kapitola I: Vlastnosti aparátu.

§ 1. Úvod 7
§ 2. Sblížené zlomky 8
§ 3. Nekonečné řetězce 12
§ 4. Řetězce s přirozenými prvky 16

Kapitola II. Zobrazení čísel řetězci.

§ 5. Řetězce jako aparát k vyjádření reálných čísel 19
§ 6. Sblížené zlomky jako nejlepší přiblížení 22
§ 7. Řád přiblížení 28
§ 8. Obecné zákony aproximace 33
§ 9. Aproximace algebraických iracionálních čísel. Transcendentní čísla Liouvilleova 42
§ 10. Kvadratická iracionální čísla a periodické řetězce 44

Kapitola III. Metrická theorie řetězců.

§ 11. Úvod 47
§ 12. Prvky jako funkce zobrazeného čísla 48
§ 13. Metrický odhad vzrůstu prvků 55
§ 14. Metrický odhad vzrůstu jmenovatelů sblížených zlomků. Hlavní věta metrické theorie aproximace 58
§ 15. Gaussův problém a Kuzminova věta 63
§ 16. Střední hodnoty 75

Poznámky překladatelovy.

- § 1. Schema pro výpočet sblížených zlomků 81
- § 2. Konvergence pravidelných řetězců 81
- § 3. Neúplné dělení. Celá část reálného čísla 82
- § 4. Euklidův algoritmus 83
- § 5. Pravidelné řetězce 84
- § 6. Řešení lineární diofantické rovnice $ax - by = c$ 85

• § 7. Řešení lineární kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$ 88
• § 8. Vztahy $\gtrless$ mezi řetězci. Rozvoj desetinného zlomku v řetězec 89
• § 9. Nejlepší přiblížení 91
• § 10. Kvadratické iracionály 93
• § 11. Geometrické zobrazení řetězců 97
• § 12. Zevšeobecněné řetězce 98

Literatura

Abecední seznam 100
Poznámky k literatuře 101

Abecední seznam věcný 102

KRUH
sv. 37

A. J. Chinčin

ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952
Hlavní redaktor Ladislav Mach, redaktorka Zora Knichalová, literární redaktorka Marta Střídová. — Z nové sazby písmem Bodoni vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 05 (Prometheus), Praha VIII. — 1. vydání, náklad 2200 výtisků — 301 03/2 — 65928/51/1/III/1 — 170 — 1% — Sazba 14. 1. 1952, tisk 18. 8. 1952 — 6,5 plánovacích archů, 5,00 autorských archů, 5,14 vydavatelských archů — 104 strany, 2 obrazce. — Papír 222-17, formát 61 × 86 cm, 80 g.

Cena brož. 82 Kčs

DT 511

K R U H

Svazek 37

Cena brož. 82 Kčs
301 03 2
DT 511

29. IX.