Cyklografie

JČ
m+f

Ladislav Seifert

CYKLOGRAFIE

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

CYKLOGRAFIE

CYKLOGRAFIE

NAPSAL

PROF. Dr LADISLAV SEIFERT

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

PŘEDMLUVA

Deskriptivní geometrií se rozumí obyčejně ona část konstruktivní geometrie, kde prostorové útvary se zobrazují na rovinu užitím projekce ortogonální, kosoúhlé nebo centrální. Methody tyto záleží v tom, že množství bodů v prostoru se zobrazí na množství dvojin bodových v rovině, při čemž tato dvojina je určitým způsobem orientována, na př. jako první a druhý průmět. Považujeme-li přímku za základní element, zobrazíme ji opět na dvojinu bodovou, jak jest na př. obvyklé v centrální projekci stopníkem a úběžníkem. Do deskriptivní geometrie však dlužno zařaditi i každé jiné zobrazení, jen když je lze konstruktivně sledovati. Jeden způsob takového zobrazení, různý od způsobů výše uvedených a také nejstarší, je cyklografie.

Cyklografie je zobrazení kružnic v rovině na body v prostoru a naopak. Základní myšlenka je již stará. Počátky nalézáme u Cousineryho (Géometrie perspective 1828), ve formě analytické u Drückenmüllera (Die Übertragungsprincipien der analytischen Geometrie, Trier, 1812). Poněkud jiný způsob zvaný minimální projekce nacházíme u Chaslesa, Möbia, Cayleye, Darbouxa a S. Liea (Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, díl I., 1896). W. Fiedler byl však prvý, který soustavně zpracoval zobrazení kružnic v rovině na body v prostoru (Cyklographie oder Construktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln, Leipzig, 1882). Toto dílo, které je základním dílem o cyklografii, zabývá se konstruktivními úlohami o kružnici a kouli s použitím hlavně centrální projekce. Nejnovější systematické dílo o cyklografii jest Müller-Krames, Die Zyklographie (Leipzig-Wien, 1929), jež vyšlo jako druhý díl přednášek Müllerových na vídeňské technice. Od Fiedlerova díla se liší tím, že místo centrální projekce používá převážně ortogonální projekce na jednu průmětnu, ale především tím, že zavádí orientované elementy, přímky a kružnice dle vzoru Laguerrova, což znamená značný pokrok po stránce methodické. Záslohou tohoto díla jest, že si všímá i vztahů k ostatním odvětvím matematiky a uvádí četné poznámky o příslušné literatuře. Za zmínku stojí také velmi informativní spisek ECKHARDT, Konstruktive Abbildungsverfahren, Vídeň 1926. V české literatuře je o základech cyklografie jednáno v díle SOBOTKA, Deskriptivní geometrie promítání paralelního (Sborník Jednoty českých matematiků, sv. X, 1906) na str. 56—73 asi v duchu, v jakém je psáno dílo Fiedlerovo.

Methodická a didaktická cena cyklografie je nesporná. Máme zde jednotnou methodu k řešení četných úloh a napořád se uplatňuje velmi názorným způsobem „princip zobrazovací", který hraje v moderní matematice tak důležitou úlohu.

Považuji zejména za žádoucí, aby kandidáti středoškolského učitelství byli s cyklografií obeznámeni, neboť její vztah ke školské geometrii jest skutečně mnohostranný. Pro jejich potřebu byla knížka především napsána. Podání je pokud možno elementární, takže je přístupno každému, kdo ovládá matematiku a zejména deskriptivní geometrii v rozsahu středoškolském. Ostatně je málokterá partie geometrická tak vhodná k samostatnému studiu jako cyklografie a také se zdá, že je zde pole otevřené, na kterém možno ještě mnoho vykonati.

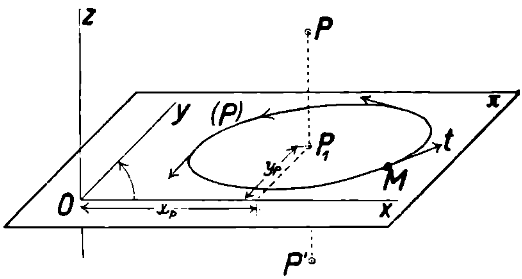
Dnes, kdy konečně dochází k vydání tohoto spisku dlouho již připraveného, vzdávám dík všem, kteří mi byli nápomocni. Na prvém místě byl to zesnulý profesor brněnské techniky Dr J. KLÍMA a dále prof. pražské university Dr V. HLAVATÝ, kteří přečetli rukopis a v mnohém mi poradili, dále můj asistent p. Dr K. SVOBODA, který pomáhal při konečné úpravě. Konečně vzdávám dík Jednotě československých matematiků a fysiků za pěkné vypravení a vydání tohoto spisku.

V Brně 10. dubna 1949.

SEIFERT.

I. ÚVOD

1,1. Cyklický průmět bodu. Bodu v prostoru přiřaďme v dané vodorovné rovině kružnici s určitým smyslem otáčení následujícím způsobem. Buď π vodorovná rovina čili *průmětna*, P bod v prostoru mimo ni. Spusťme z bodu P kolmici na rovinu π a označme její patu, t. j. *kolmý průmět* bodu P čili jeho *půdorys* P_1; kolem bodu P_1 opišme kružnici poloměrem $\overline{P_1P}$. Zaveďme obvyklé určení bodu v prostoru pravoúhlými souřadnicemi. V průmětně π volme osy x, y a kolmo k ní osu z tak, aby trojhran tvořený kladnými směry těchto os byl *pravotočivý* (palec, ukazovák a prostřední prst pravé ruky, jak ukazuje obr. 1.). Pak bod P_1 má v průmětně π souřadnice x, y a délka $\overline{P_1P}$ sluje *kóta* (souřadnice z) bodu P. Tím způsobem je bodu v prostoru přiřaděna jediná kružnice v π, obráceně však kružnici v π patří dva body na kolmici vztyčené v jejím středu P_1 ve vzdálenosti rovné poloměru, jeden nad a druhý (P') pod průmětnou, položené symetricky dle průmětny. Abychom tuto dvojznačnost odstranili, přisuzujeme kružnici určitý smysl čili *orientujeme* ji. Je-li P nad průmětnou (z kladné), ať je onen smysl kladný, je-li P pod průmětnou, ať je záporný. Kladný smysl otáčení v průmětně π jest dán otočením kladné části osy x do kladné části osy y (proti pohybu ručiček hodinových, díváme-li se shora dolů) anebo také tímto pravidlem: *Kráčí-li chodec po kružnici v průmětně π a má-li střed její po své levé straně, jest smysl otáčení kladný*, jinak je záporný. Tím je dvojznačnost odstraněna. Orientovanou kružnici zoveme *cykl* a smysl otáčení značíme šipkou. *Bodu v prostoru je tedy přiřaděn cykl a naopak*, přiřadění obou množství,



Obr. 1.

množství bodů v prostoru (bodů vlastních, t. j. v konečnu ležících) a množství cyklů v rovině π je jedno-jednoznačné. Také je možno mluviti o znaménku poloměru. Cykl kladný, jemuž je přiřaděn bod s kladnou souřadnicí z, má kladný poloměr, cykl záporný, jemuž je přiřaděn bod se zápornou kótou, má poloměr záporný. *Kružnice je nositelkou dvou cyklů.*

Na toto přiřadění bodů a cyklů lze se dívati také takto: P jest vrchol rotační kuželové plochy, jejíž přímky mají od průmětny π odchylku 45°. Stopa je cykl příslušný bodu P. Všechny tyto plochy kuželové jsou shodné a vzájemně rovnoběžné, mají tedy společnou kuželosečku v rovině nevlastní ω (v nekonečnu). Označme tuto kuželosečku C a nazývejme ji *základní kuželosečkou.* Její rovnice v pravoúhlých homogenních souřadnicích jsou

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad t = 0 \text{ (rovnice roviny nevlastní).}$$

Základní kuželosečka C a bod $P(x_1, y_1, z_1)$ určují kužel

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (z - z_1)^2 = 0$$

a jeho stopa na π $(z = 0)$ jest kružnice

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - z_1^2 = 0,$$

nositelka přiřaděného cyklu.

Zaveďme následující označení. Cykl přiřaděný bodu P neboli *cyklický průmět bodu P* označme (P), příslušnou kuželovou plochu $P(P)$. Není-li třeba šetřiti smyslu a možno-li mluviti o kružnici a nikoli o cyklu, označujme ji $[P]$. Pro cykl užíváme tedy okrouhlých, pro kružnici lomených závorek. Kružnici jsou přiřaděny dva body P, P' položené symetricky dle π.

Bodu v průmětně $P(x_1, y_1, 0)$ přiřaďujme pravidlem tento bod sám jako cykl o poloměru nulovém

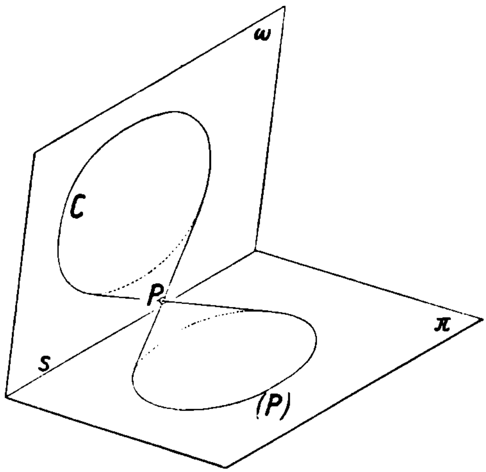
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0.$$

Ten lze ovšem také považovati za dvojinu isotropických přímek s reálným průsečíkem

$$[y - y_1 + \mathrm{i}(x - x_1)] \cdot [y - y_1 - \mathrm{i}(x - x_1)] = 0.$$

Tento způsob přiřadění bodů v prostoru a cyklů v průmětně se nazývá *cyklické promítání.**) Nauka o cyklickém promítání sluje *cyklografie.*

Vidíme také, že naše cyklické promítání lze snadno zobecniti projektivně. Buď dána rovina ω (obr. 2) v konečnu a v ní kuželosečka C (*základní*). Bodu P v prostoru přiřaďme v průmětně π stopu kužele s vrcholem P a řídící křivkou C. Tato stopní kuželosečka (P) má s C společné dva body na průsečnici $s \equiv (\omega, \pi)$. Obráceně taková kuželosečka v π, jež má s C dva společné body na s, jest obrazem dvou bodů, není-li jiné úmluvy (neboť dvěma kuželosečkami o dvou společných bodech jdou dvě kuželové plochy).



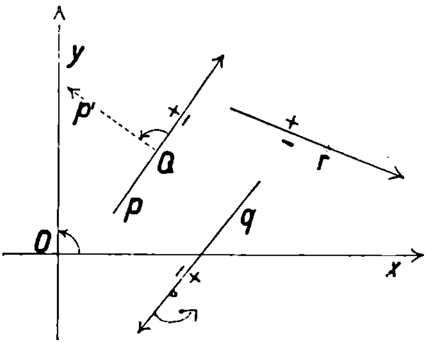
Obr. 2.

V našich úvahách hrají stále důležitou úlohu přímky, které sekou základní kuželosečku C v nevlastní rovině ω (v nekonečnu), a také roviny, které se této kuželosečky dotýkají. Nazývejme je „*isotropické přímky*“ a „*isotropické roviny*“.

I,2. Orientovaná přímka čili paprsek. Úhel dvou paprsků. Buď M bod na cyklu (P), t jeho tečna (obr. 1). Této tečně jest nutno přisouditi smysl, který v bodě M souhlasí se smyslem příslušného elementu na cyklu a je označen šipkou. Nyní se ukazuje nutnost zavésti také orientovanou přímku. Na přímce jsou dva smysly. *Přímce s určitým smyslem* označeným obyčejně šipkou říkejme *orientovaná přímka* nebo pro krátkost *paprsek*. V následujícím budeme slovem paprsek rozuměti vždy přímku s určitým směrem. V přímce leží tedy dva paprsky opač-

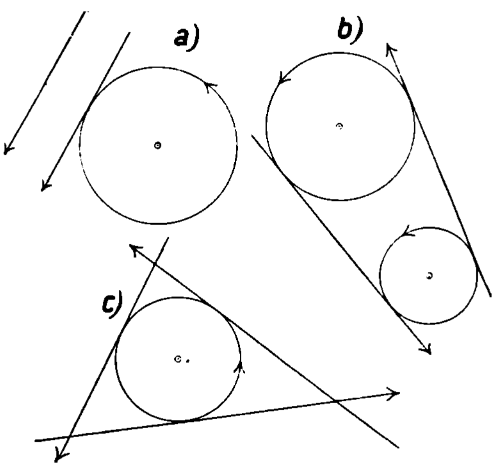
*) J. Sobotka užívá také názvu *kruhový průmět a kruhové promítání* (Deskriptivní geometrie promítání paralelního, str. 56). Jenže u něho šetření smyslu nehraje ještě tak podstatnou úlohu.

ných smyslů. Paprsek rozděluje rovinu π ve dvě části dle následující úmluvy, jež je ve shodě s předchozí úmluvou o cyklech. Volili jsme v π soustavu pravoúhlých os jak ukazuje obr. 1 neb obr. 3, takže kladný smysl osy Ox se otočí do kladného smyslu osy Oy ve smyslu, jenž byl označen jako kladný (proti smyslu otáčení ručiček hodinových). Je-li dán paprsek p, volme na p libovolný bod Q a otočme p kolem Q ve smyslu kladném o úhel 90° do polohy p'. Stranu, do které nyní padnou body, jež se na původním paprsku nacházely ve smyslu paprsku před Q, zoveme kladnou. *Paprsek dělí tedy průmětnu* π *v část kladnou a zápornou.* Dle toho jsou v obr. 3 označeny strany znaménkem + neb — u paprsků p, q, r.



Obr. 3.

Paprsku v π lze také přiřaditi určitou „isotropickou" rovinu. Přímkou p v průmětně π jdou dvě tečné roviny ku C (s odchylkou 45° od π) a každá je přímkou p rozdělena v část kladnou (nad π) a zápornou (pod π). *Je-li přímka orientována, přiřaďme jí onu z těchto dvou rovin, jejíž kladná část má průmět v kladné straně paprsku.* Tím je získán vzájemně jednoznačný vztah mezi paprsky v rovině π a „isotropickými" rovinami.

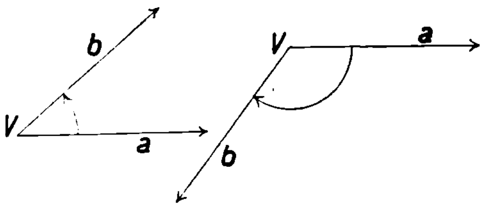


Obr. 4.

Chceme-li důsledně šetřiti zavedeného smyslu cyklů a smyslu paprsků, musíme opraviti mnohé věty geometrie elementární, na př.: „K danému cyklu jde jen jeden tečný paprsek rovnoběžný s daným paprskem" (obr. 4a), nebo: „Dva cykly mají společné dva tečné paprsky" (obr. 4b), „Tří paprsků se dotýká jediný cykl" (obr. 4c) atd.

Úhlem paprsků a, b, jejž značíme $\widehat{ab}$, rozumíme úhel, který povstane, otočíme-li kolem průsečíku V paprsek a do b. To jest sice možno dvojím způsobem, není-li však jinak řečeno, volíme ten, kde úhel je absolutně menší nežli 180° (obr. 5), nejvýše roven 180°. Má tedy úhel vždy určitý smysl, kladný nebo záporný. Úhly $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ jsou stejné ($\widehat{ab} = \widehat{cd}$), lze-li pohybem v rovině (pošinutím a otočením kolem bodu) převésti jeden do druhého, takže a se pokryje s c, b se pokryje s d. Symetrie dle osy změní smysl úhlu.

Úhly $\widehat{ab}$ a $\widehat{ba}$ liší se znaménkem, mají však stejný kosinus. *K danému kosinu patří dva úhly různé znaménkem.* Určení úhlu kosinem bude se v dalším často vyskytovati.



Obr. 5.

Dva rovnoběžné paprsky téhož smyslu svírají úhel rovný nule, dva rovnoběžné paprsky opačného smyslu svírají úhel 180°.

Zavedení orientovaných elementů lze také analyticky vystihnouti, užijeme-li t. zv. *nadbytečných* souřadnic. Ukažme to nejprve na přímce. V pravoúhlé soustavě jest její rovnice

$$ux + vy + 1 = 0; \tag{1}$$

u, v slují souřadnice přímky a jejich geometrický význam je znám $\left(\text{úseky na osách jsou } -\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}\right)$.

Vzdálenost bodu $M(x, y)$ od přímky uvedené jest

$$\varrho = \frac{ux + vy + 1}{\pm\sqrt{u^2 + v^2}}. \tag{2}$$

Znaménko vzdálenosti ϱ závisí na znaménku druhé odmocniny ve jmenovateli. Volíme-li určité znaménko, pak všechny body na jedné straně přímky mají znaménko $+$, na druhé znaménko $-$. Volbou znaménka jsme tedy rozhodli, která strana je kladná a která záporná. Dvojí možné orientaci odpovídá tedy volba znaménka veličiny $\sqrt{u^2+v^2}$. Označme jednu z těchto hodnot w a nazývejme veličiny u, v, w souřadnice paprsku. Pak na hořejší přímce jsou dva paprsky: $p'(u, v, w)$, $p''(u, v, -w)$. Tyto souřadnice jsou však vázány vztahem

$$u^2 + v^2 - w^2 = 0.$$

Vzdálenost bodu $M(x, y)$ od paprsku $p(u, v, w)$ jest tedy

$$\varrho = \frac{ux + vy + 1}{w}. \tag{3}$$

Vzdálenost počátku $O(0,0)$ od tohoto paprsku jest $\frac{1}{w}$. Při $w > 0$ leží tedy O na kladné, při $w < 0$ na záporné straně paprsku. Pata kolmice spuštěné z počátku O na paprsek má souřadnice $\left(-\frac{u}{w^2}, -\frac{v}{w^2}\right)$.

Pro úhel osy x s paprskem p dostaneme snadno

$$\cos\widehat{xp} = \frac{v}{w}, \ \sin\widehat{xp} = -\frac{u}{w}, \ \operatorname{tg}\frac{\widehat{xp}}{2} = \frac{w - v}{u} = \frac{u}{v + w}. \tag{4}$$

Pro úhel paprsků (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) jde

$$\widehat{p_1p_2} = \widehat{xp_2} - \widehat{xp_1},$$

z čehož

$$\cos\widehat{p_1p_2} = \cos\widehat{xp_2} \,.\, \cos\widehat{xp_1} + \sin\widehat{xp_2} \,.\, \sin\widehat{xp_1},$$

$$\cos\widehat{p_1p_2} = \frac{u_1u_2 + v_1v_2}{w_1w_2}, \ \sin\widehat{p_1p_2} = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{w_1w_2}. \tag{5}$$

Pro paprsky rovnoběžné jest $\sin\widehat{p_1p_2} = 0$, $\cos\widehat{p_1p_2} = 1$, tedy

$$u_1 : u_2 = v_1 : v_2, \qquad u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2 = 0$$

nebo, je-li k libovolný činitel,

$$u_2 = ku_1, \qquad v_2 = kv_1, \qquad w_2 = kw_1. \tag{6}$$

Jsou-li paprsky kolmé, jest

$$u_1u_2 + v_1v_2 = 0. \tag{7}$$

Rovnice (3), kde ϱ je konstantní, vyjadřuje podmínku, aby paprsek (u, v, w) měl od bodu (x, y) konstantní vzdálenost. Jest tedy rovnice cyklu, jejž považujeme za obálku paprsků a který má střed (x_0, y_0) a poloměr ϱ,

$$ux_0 + vy_0 + 1 - \varrho w = 0. \tag{8}$$

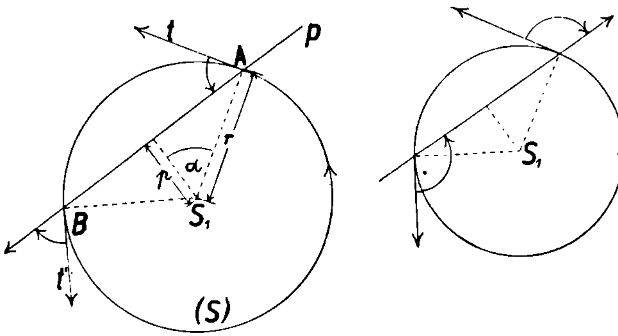
Je zřejmě lineární v souřadnicích paprskových.

Veličiny x_0, y_0, ϱ nazývejme souřadnice cyklu. Tento cykl leží s cyklem $(x_0, y_0, -\varrho)$ o rovnici

$$ux_0 + vy_0 + 1 + \varrho w = 0$$

na téže kružnici

$$\varrho^2 w^2 - (ux_0 + vy_0 + 1)^2 = 0.$$



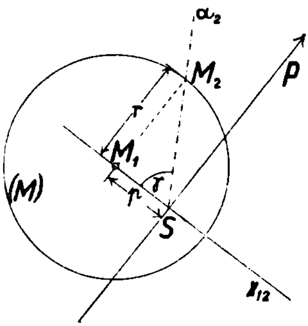
Obr. 6.

1,3. Úhel cyklu s paprskem. Úhel cyklu (S) s paprskem p jest jeden nebo druhý z úhlů $\widehat{tp}$ neb $\widehat{t'p}$, jejž svírají tečné paprsky cyklu v průsečících A, B s paprskem p, jak ukazují obrazy 6, které se liší od sebe změnou směru paprsku p. Z obrazu je vidno, že

$$\cos\alpha = \frac{p}{r}, \tag{1}$$

kde p a r jsou vzaty s náležitým znaménkem. V obrazu po levé straně jest S_1 na kladné straně paprsku, vzdálenost p tedy kladná a úhel α ostrý. Úhly $\widehat{tp}$, $\widehat{t'p}$ mající stejný kosinus liší se jen znaménkem. V obraze na pravé straně jest p záporná, úhel α tupý. Jak se změní úhly, provedeme-li změnu smyslu u cyklu?

Kosinus úhlu cyklu s paprskem jest roven poměru mezi vzdáleností paprsku od středu a poloměrem.



Obr. 7.

Tuto rovnici béřeme za definici úhlu cyklu s paprskem, i když se nesekou v reálných bodech, tedy když $|p| > |r|$; kosinus je větší jedné a úhel imaginární.*)

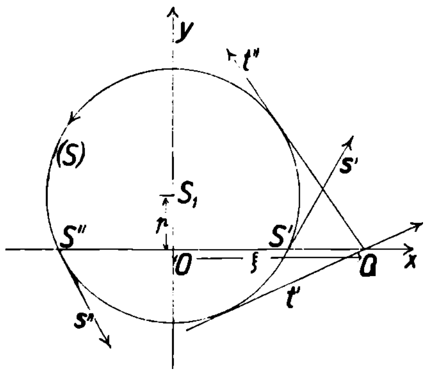
Úhel cyklu s paprskem souvisí velmi jednoduše s odchylkou roviny určené tímto paprskem a bodem, jehož cyklografický průmět je daný cykl. Mějme cykl (M) o středu M_1 a paprsek p (obr. 7). Volme rovinu jdoucí bodem M kolmo ku p za novou průmětnu (druhou) a sklopme kolem osy x_{12} do průmětny π, takže M přijde do M_2. $\alpha_2 \equiv SM_2$ je druhý obraz roviny $\alpha \equiv (Mp)$ a také druhý obraz spádové přímky, γ odchylka roviny od průmětny π. Zřejmě jest

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{p}{r}. \qquad (2)$$

Srovnáme-li s (1), máme

$$\operatorname{cotg}\gamma = \cos\alpha. \qquad (3)$$

Kosinus úhlu, jejž svírá cykl s paprskem rovná se kotangentě odchylky roviny určené bodem příslušným danému cyklu a paprskem.



Obr. 8.

1,4. Mocnost paprsku k cyklu. V elementární geometrii hraje

---

*) Řada

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

konverguje jak známo v celé rovině komplexní proměnné pro jakékoli x. Položme $x = \varphi_1 + i\varphi_2$ a vidíme snadno, že $\cos x$ jest hodnota komplexní pokud φ_1, φ_2 jsou od nuly různé. Pro $x = i\varphi$, jest reálná a zřejmě větší nežli 1.

důležitou úlohu mocnost bodu ke kružnici. V geometrii orientovaných elementů hraje podobnou úlohu *mocnost paprsku k cyklu,* již lze následovně definovati. Buď dán cykl (S) a paprsek p. Volme osy souřadnicové jak ukazuje obr. 8 a na Ox bod Q. Z něho jdou dva tečné paprsky t', t''. Rovnice cyklu (S) o středu $S_1(0, p)$ a poloměru ϱ jest dle rov. (8) odst. 1,2

$$vp + 1 - \varrho w = 0,$$

rovnice bodu Q, t. j. cyklu o středu $(\xi, 0)$, poloměru $\varrho = 0$, jest

$$u\xi + 1 = 0.$$

Dosadíme-li za u, v do rovnice $u^2 + v^2 - w^2 = 0$, dostaneme

$$w^2 - \frac{2\varrho}{\varrho^2 - p^2} w + \frac{p^2 + \xi^2}{\xi^2(\varrho^2 - p^2)} = 0;$$

označme kořeny w_1, w_2, i jest

$$w_1 + w_2 = \frac{2\varrho}{\varrho^2 - p^2}, \quad w_1 w_2 = \frac{p^2 + \xi^2}{\xi^2(\varrho^2 - p^2)}.$$

Utvořme součin (viz rov. (4) odst. 1,2)

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\widehat{xt'} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\widehat{xt''} = \frac{v_1 - w_1}{u_1} \,.\, \frac{v_2 - w_2}{u_2}.$$

Po jednoduchém výpočtu dostaneme s použitím předchozích rovnic

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{xt'} \,.\, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{xt''} = \frac{\varrho - p}{\varrho + p}.$$

Tento výraz je tedy nezávislý na poloze bodu Q na paprsku p a sluje *mocnost paprsku p k cyklu* (S). Přijde-li bod Q do jednoho neb druhého průsečíku S', S'', splynou tečné paprsky a uvedená mocnost se rovná

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{xs'} = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{xs''}.$$

1,5. Úhel dvou cyklů. Dotyk cyklů. Úhlem cyklů (A), (B) rozumíme úhel tečných paprsků v průsečících M, N obou cyklů. Úhly jsou dva $\widehat{t_A t_B}$, $\widehat{t'_A t'_B}$, jak ukazuje obr. 9, liší se jen znaménkem, mají tedy stejný kosinus.

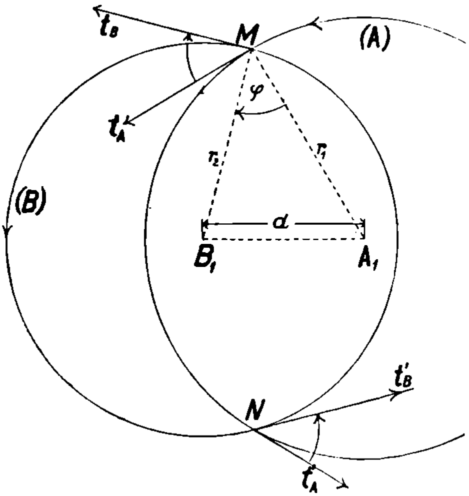
Otočíme-li současně paprsky t_A, t_B v kladném smyslu o úhel 90°, přejdou tečné paprsky v poloměry MA_1, MB_1 a úhel tečných paprsků rovná se úhlu A_1MB_1. Z trojúhelníka A_1MB_1 plyne dle kosinové věty, je-li $\overline{A_1B_1} = d$,

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi$$

a odtud

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Tuto rovnici béřeme za *definici úhlu dvou cyklů*, i když se reálně neprotínají.



Obr. 9.

Jak se změní $\cos\varphi$, změní-li se znaménko jednoho cyklu a tím i znaménko poloměru?

Dotýkají-li se dva cykly, jest rozeznávati dva různé způsoby, ***dotyk vlastní*** a *nevlastní*. V prvém případě — obr. 9*a* — mají oba cykly v dotykovém bodě tentýž tečný paprsek, úhel sevřený jest roven nule, jeho kosinus roven + 1, tedy

$$r_1^2 + r_2^2 - d^2 = 2r_1r_2,$$

čili

$$(r_1 - r_2)^2 = d^2,$$

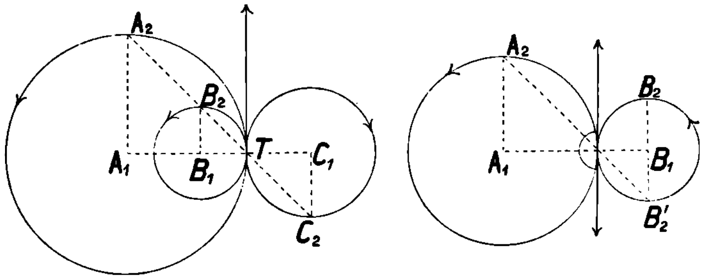
kde ovšem poloměry jest bráti s příslušným znaménkem. Na př. cykly (A), (B) jsou oba kladné, d se rovná rozdílu, dotyk je vnitřní, cykly (A), (C) jsou různě orientované, dotyk je vnější a d je rovno součtu absolutních hodnot poloměrů.

Při dotyku nevlastním — obr. 9*b* — úhel tečných paprsků v bodě dotyku jest 180°, $\cos\varphi = -1$ a vychází

$$(r_1 + r_2)^2 = d^2.$$

Vraťme se k dotyku vlastnímu (obr. 9*a*) a všimněme si příslušných bodů v prostoru A, B, C. Vidíme okamžitě, že jsou na přímce, která má stopník T a má odchylku od průmětny 45°. Při dotyku nevlastním (obr. 9*b*) není tomu tak, pak bod B' symetricky položený s B dle π spojen s A dává přímku s odchylkou 45°.

Odtud je také patrno: *Geometrické místo bodů, kterým přísluší cykly dotýkající se cyklu* (P), *jest kuželová plocha* $P(P)$, *kterou nazýváme „isotropický" kužel s vrcholem* P.



Obr. 9a, b.

Jsou-li dva cykly k sobě kolmé čili sekou se ortogonálně, jest $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$ a $d^2 = r_1^2 + r_2^2$.

1,6. Tečnová vzdálenost dvou cyklů. Dva cykly mají společné dva tečné paprsky. *Vzdálenost dotykových bodů sluje tečnová vzdálenost cyklů.* Jak ukazuje obr. 10 plyne z trojúhelníka A_1B_1Q

$$t^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2,$$

kde poloměry jsou ovšem vzaty s příslušnými znaménky. Tuto rovnici béřeme opět za *definici tečnové vzdálenosti* i v případech, kdy délka t není reálná.

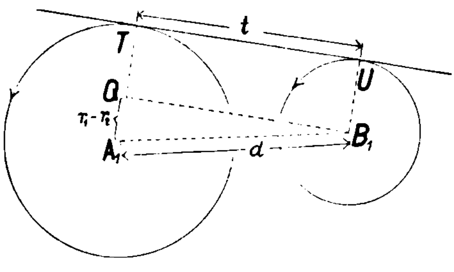
Tečnová vzdálenost hraje v dalších úvahách zajímavou a důležitou úlohu. Všimněme si některých zvláštních případů. Mají-li dva cykly vlastní dotyk, pak $|d| = |r_1 - r_2|$ a $t = 0$; při dotyku nevlastním $|d| = |r_1 + r_2|$ a $|t| = 2\sqrt{r_1r_2}$. Jsou-li dva cykly soustředné, je $d = 0$, $t = \pm\, \mathrm{i}(r_1 - r_2)$. Přejde-li jeden cykl v bod $(r_2 = 0)$, pak $t^2 = d^2 - r_1^2$ je mocnost bodu ke kružnici.

Z hořejšího vzorce plyne $r_1^2 + r_2^2 - d^2 = 2r_1r_2 - t^2$. Dosadíme-li do vzorce pro $\cos\varphi$, dostaneme snadno vztah mezi úhlem a tečnovou vzdáleností ve tvaru

$$t^2 = 2r_1r_2(1 - \cos\varphi) = 4r_1r_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

1,7. Imaginární kružnice. V následujících úvahách budeme často mluviti o kružnici *s reálným středem a poloměrem ryze imaginárním*. Je-li střed v počátku pravoúhlé soustavy souřadnicové a poloměr ri, jest její rovnice

$$x^2 + y^2 + r^2 = 0.$$



Obr. 10.

Kružnice má reálnou rovnici, ale nehoví jí žádná reálná dvojice x, y (pokud $r \gtrless 0$), nemá tedy reálného bodu. Říkejme jí *imaginární kružnice*. Narýsujeme-li reálnou kružnici

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

jejíž poloměr se rovná absolutní hodnotě poloměru prvé, nazýváme tuto kružnici *zástupkyní* prvé a používáme jí při konstrukci. V obecné poloze jest rovnice imaginární kružnice o středu $O(a, b)$ a poloměru ri

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + r^2 = 0.$$

Lze ovšem také mluviti o imaginární kružnici tenkrát, jsou-li a, b, r veličiny komplexní, ale tyto kružnice v našich úvahách nepřicházejí.

Imaginární kružnici námi definované přísluší v prostoru dva body imaginární $(a, b, \pm ri)$ na reálné kolmici k průmětně π v bodě (a, b) vztyčené.

Všechny dříve uvedené definice zůstávají v platnosti. Tak pro úhel reálného paprsku s imaginární kružnicí dostáváme

$$\cos\varphi = \frac{p}{ri} = -\frac{p}{r}\,\mathrm{i},$$

kde p je vzdálenost paprsku od středu.

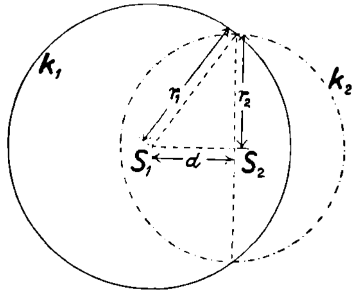
Právě tak platí vzorce pro kosinus úhlu dvou cyklů (kružnic) a pro tečnovou vzdálenost.

Pro nás jsou důležité vztahy kolmosti. Pro kolmost dvou cyklů (kružnic) jsme našli

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2.$$

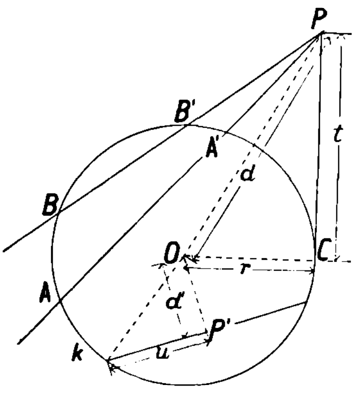
Jsou-li obě kružnice imaginární s poloměry $r_1 i$, $r_2 i$, nelze při reálném d hořejší rovnici vyhověti. Dvě imaginární kružnice nejsou tedy nikdy k sobě kolmé. Je-li jedna kružnice reálná s poloměrem r_1, druhá imaginární s poloměrem $r_2 i$, jest podmínka kolmosti

$$r_1^2 - r_2^2 = d^2.$$



Obr. 11.

Pak ukazuje obr. 11, kde k_2 je zástupkyně imaginární kružnice, že k_1 seče k_2 v bodech diametrálně protilehlých, čili půlí ji. Poznamenejme ještě, že soustředné kružnice o poloměrech r, ri sluší považovati za kolmé ($d = 0$).



Obr. 12.

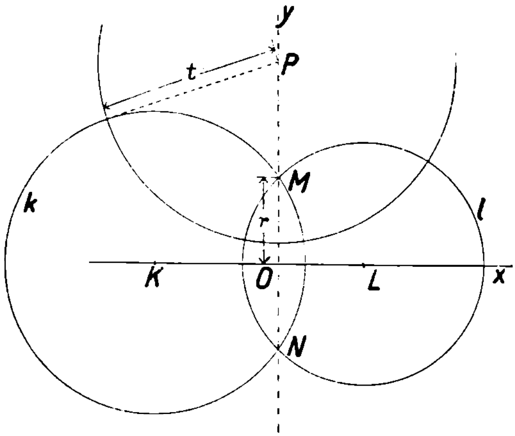
1,8. Mocnost bodu ke kružnici, svazek kružnic a chordála, trs kružnic. Z elementární geometrie je známo, že součin obou úseků na sečně jdoucí bodem P ke kružnici k je stálý, tedy $\overline{PA} \,.\, \overline{PA'} = \overline{PB} \,.\, \overline{PB'} = \overline{PC}^2$ a nazývá se mocnost bodu P ke kružnici k. Je-li P vně kružnice, je součin kladný a roven čtverci tečny $t^2 = d^2 - r^2$ (obr. 12). Je-li P' uvnitř, je mocnost záporná a rovná se záporně vzaté druhé mocnině poloviční tětivy kolmé k $P'O$ ($u^2 = r^2 - d'^2$). Analyticky se dostane mocnost bodu ke kružnici, dosadíme-li souřadnice bodu do normálního tvaru rovnice kružnice (koeficienty při x^2, y^2 jsou rovny jedné), tedy mocnost bodu $P(x_0, y_0)$ ke kružnici

$$k \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0$$

jest

$$M(P) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + p.$$

Dvě kružnice k, l (obr. 13) určují svazek kružnic (množství všech kružnic, které jdou jejich společnými reálnými nebo imaginárními body M, N). Jedna se rozpadne ve společnou sečnu MN, již zoveme *chordála*, a přímku nevlastní. *Bod P chordály má tutéž mocnost ke kružnicím k, l a ke každé kružnici svazku*, čili je středem kružnice, jež kolmo seče k, l a všechny kružnice svazku. Tyto kolmé kružnice tvoří nový svazek, říkáme mu *doplňkový* k prvému, a středná prvého svazku je jeho chordálou. Vztah obou svazků je vzájemný. Volme střednou prvého svazku za osu Ox, chordálu za Oy. Pak rovnice prvého svazku při proměnném λ jest



Obr. 13.

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2\lambda x = 0 \text{ [střed } (\lambda, 0)\text{, poloměr } \sqrt{r^2 + \lambda^2}\text{]},$$

základní body svazku jsou $M(0, r)$, $N(0, -r)$ a ve svazku jsou dvě kružnice s poloměrem nula, jež odpovídají hodnotám $\lambda = \pm ri$. Doplňkový svazek má rovnici

$$x^2 + y^2 + r^2 - 2\mu y = 0 \text{ [střed } (0, \mu), \text{ poloměr } \sqrt{\mu^2 - r^2}].$$

Dvě kružnice tohoto svazku mají poloměr rovný nule ($\mu = \pm r$) a středy v základních bodech M, N prvého svazku. Nulové kružnice prvého svazku $M'(ri, 0)$, $N'(-ri, 0)$ jsou ovšem základními body svazku druhého.

Ke třem kružnicím l, m, n patří *bod stejné mocnosti*, ve kterém se sekou všechny tři chordály ch_{lm}, ch_{ln}, ch_{mn}. Tento bod je středem kružnice reálné neb imaginárné, která seče kolmo všechny tři kružnice dané.

Kružnice, které protínají kolmo kružnici k, tvoří *trs*; každý bod v rovině je středem jedné kružnice trsu. Dvě kružnice trsu určují svazek, jenž je celý obsažen v trsu; jeho chordála jde bodem O.

Jsou-li kružnice k_1, k_2, k_3 dány rovnicemi

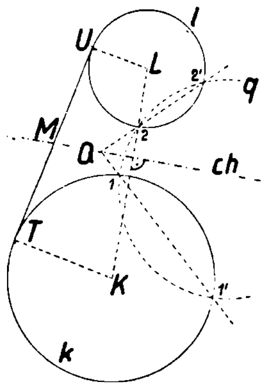
$$k_i \equiv (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2 = 0, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

jest rovnice obecné kružnice trsu tvaru

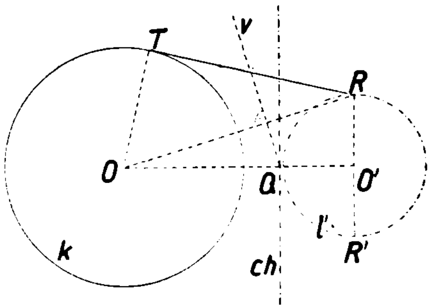
$$k_1 + \lambda k_2 + \mu k_3 = 0,$$

kde λ, μ jsou libovolné hodnoty.

V následujícím budeme často potřebovati konstrukci chordály; proberme proto různé případy.



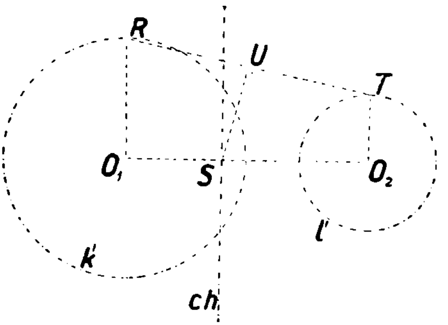
Obr. 14.



Obr. 14a.

Sekou-li se kružnice v reálných bodech, jest jejich spojnice chordálou. Nesekou-li se dvě reálné kružnice k, l, pak jest možno sestrojiti jednu společnou tečnu vnější nebo vnitřní, na př. TU a půlící její bod M (obr. 14). Kolmice spuštěná na střednou je chordála ch. Jinak lze získati jeden bod chordály, protneme-li obě kružnice pomocnou třetí kružnicí q. Chordály $11'$, $22'$ sekou se v bodě Q, kterým jde i chordála ch.

Je-li k reálná, l imaginárná, označme l' reálnou zástupkyni této (obr. 14a). Chordála hledaná je místem středů kružnic, které sekou kolmo k a půlí l'. Průsečík Q chordály se střednou OO' najdeme takto: Buď R bod na l', při čemž $O'R \perp OO'$. Najděme chordálu v kružnice k a kružnice o nulovém poloměru a středu R. Ta jde půlícím bodem tečny RT kolmo ku OR. Její bod Q (na OO') je středem kružnice, jež kolmo seče k a jde body R, R', je tedy na hledané chordále.



Obr. 14b.

Jsou-li k, l obě imaginárné, k', l' jejich zástupkyně, učiňme $O_1R \perp O_1O_2$, $O_2T \perp O_1O_2$ (obr. 14b), sestrojme půlící bod U úsečky RT a $US \perp RT$. S je středem kružnice, jež půlí k', l' a je tedy kolmá ku k, l. Chordála ch jde bodem S kolmo ku středné O_1O_2.

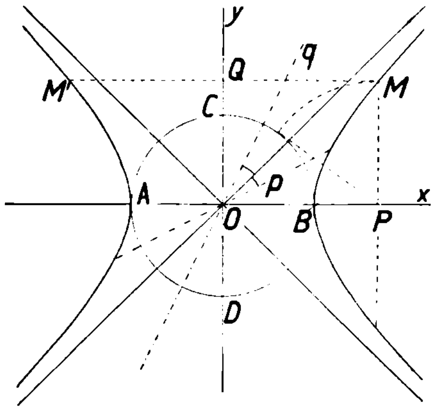
1,9. Rovnoosá hyperbola. V následujícím se stále vyskytují různé konstrukce s rovnoosou hyperbolou, které zde uvádíme. Buď její rovnice

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{1}$$

Střed je O (obr. 15), poloosa reálná (hlavní) $\overline{OA} = \overline{OB} = a$, poloosa imaginárná (vedlejší) $\overline{OC} = \overline{OD}$ má rovněž délku a (imaginární vrcholy jsou ve vzdálenosti ai). Z rovnice plyne hned pohodlná konstrukce jednotlivých bodů. Pořadnice $\overline{PM} = \sqrt{x^2 - a^2}$ rovná se délce tečny vedené z bodu P ke kružnici opsané nad hlavní osou AB. Také lze sestrojovati body na rovnoběžkách s osou Ox, nanášíme-li $\overline{QM} = \overline{QM'} = \overline{QB}$, neboť z rovnice hyperboly vychází $x^2 = a^2 + y^2$.

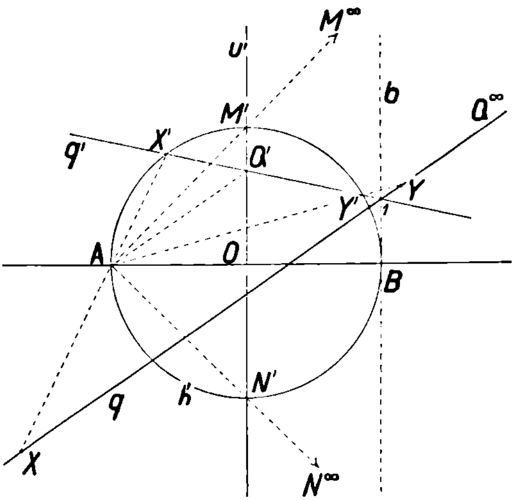
Asymptoty jsou k sobě kolmé a půlí úhel os. K libovolnému průměru p patří vždy průměr sdružený q a oba tvoří s asymptotami harmonickou čtveřinu. Poněvadž asymptoty jsou k sobě kolmé, půlí úhel sdružených průměrů.

Nejčastěji se vyskytuje úloha: *Dána jest rovnoosá hyperbola osami* (délka reálné poloosy a). *Jest sestrojiti průsečíky s přímkou.* Řešení ve zvláštních případech plyne z hořejšího. Je-li přímka kolmá k reálné ose v bodě P (obr. 15), jest $\overline{PM} = \overline{PM'}$ a rovno délce tečny z bodu P ke kružnici opsané nad $\overline{AB}$. Je-li přímka rovnoběžná s reálnou osou a seče vedlejší v bodě Q, jest třeba nanésti $\overline{QM} = \overline{QM'} = \overline{QA}$.



Obr. 15.

Nechť má přímka q obecnou polohu. Pak je možno použíti centrální kolineace. Kružnice h' nad reálnou osou (obr. 15a) je s rovnoosou hyperbolou h kolineární. A je střed kolineace, vrcholová tečna b je osou kolineace. Nevlastním bodům M_∞, N_∞ na hyperbole patří na kružnici body M', N'. Osa $u' \equiv M'N'$ odpovídá tedy nevlastní přímce u_∞. Přímce q v rovinném poli hyperboly patří přímka q' v rovinném poli kružnice. Vytkněme na q body 1, Q_∞. Prvý je samodružný, neboť leží na ose kolineace, druhému odpovídá Q' na u'. Je tedy $q' \equiv 1Q'$, přímka q' seče kružnici h' v bodech X', Y' a jim odpovídají v kolineaci na q body X, Y.



Obr. 15a.

Poznámka. Dvě rovnoosé hyperboly s rovnoběžnými asymptotami určují svazek. Základní body svazku jsou nevlastní body asymptot M_∞, N_∞ a dva body v konečnu P, Q. Svazek sestává ze samých rovnoosých hyperbol s asymptotami rovnoběžnými. Středy jejich leží na přímce. Jsou-li dané hyperboly

$$h_1 \equiv (x - \alpha_1)^2 - (y - \beta_1)^2 - a_1^2 = 0,$$
$$h_2 \equiv (x - \alpha_2)^2 - (y - \beta_2)^2 - a_2^2 = 0,$$

jest hyperbola svazku dána rovnicí

$$h_\lambda \equiv h_1 - \lambda h_2 = 0,$$

kde λ může nabývati jakékoli hodnoty. Snadno zjistíme, že střed má souřadnice

$$x_\lambda = \frac{\alpha_1 - \lambda\alpha_2}{1 - \lambda}, \quad y_\lambda = \frac{\beta_1 - \lambda\beta_2}{1 - \lambda},$$

opisuje tedy přímku. Ve svazku jsou tři hyperboly zvrhlé ve dvojice přímek. Jedna odpovídá hodnotě $\lambda = 1$ a sestává z přímky nevlastní a spojnice PQ, jež má rovnici

$$2(\alpha_2 - \alpha_1)\, x + 2(\beta_1 - \beta_2)\, y - (a_1^2 - a_2^2) = 0,$$

ostatní dvě jsou dvojice přímek k sobě kolmých. P, Q se jeví jako protější vrcholy obdélníka se stranami svírajícími s osou x úhel 45°. Další dva protější vrcholy T, U jsou středy těchto zvrhlých hyperbol (obraz nechť si čtenář laskavě zhotoví).

Jsou-li dány směry os rovnoosé hyperboly x, y a dva body P, Q, při čemž úhel přímky PQ s osami je různý od 45°, je určen celý svazek. Jak najdeme přímku středů? Jak je tomu, je-li dána tečna s bodem dotykovým?

II. LINEÁRNÍ ŘADA CYKLŮ. CYKLICKÉ POLE

Bodům prostorové křivky nebo bodům rovinné křivky nalézající se v prostoru mimo průmětnu π odpovídá v průmětně řada cyklů (∞^1), bodům plochy odpovídá kongruence (∞^2) cyklů. Nejjednodušším útvarům přímce a rovině odpovídají *lineární řada cyklů* a *lineární kongruence* čili *cyklické pole.**)

2,1. Lineární řada cyklů. Souhrn cyklů, jež odpovídají bodům přímky, nazýváme *lineární řada.* Buď přímka v prostoru p, její průmět p_1. Na p_1 se nalézají středy všech cyklů řady. Jeden má střed ve stopníku $P \equiv P_1$, poloměr nula a sluje *nulový cykl řady* (obr. 16*a*) čili její *stopa.*

Volme promítací rovinu přímky p za novou (druhou) průmětnu a sklopme kolem p_1 do π ($p_1 \equiv x_{12}$). p přejde do p_2. Bodům A, B na p přísluší cykly (A), (B), oba kladné, ježto A, B byly voleny nad průmětnou. Body A_2, B_2 jsou na p_2. K těmto dvěma cyklům patří společné tečné paprsky p', p'', jež se dotýkají současně všech cyklů řady. To jsou stopy rovin α, β, jež jdou přímkou p, mají od π odchylku 45° a dotýkají se kuželů, jež jsou určeny body na p jako vrcholy a jdou kuželosečkou C. Jsou to obě „isotropické" roviny procházející přímkou p a sekou nevlastní rovinu v tečnách vedených z nevlastního bodu U_∞ přímky p k základní kuželosečce C.

Stopník P, střed nulového cyklu, je středem podobnosti cyklů (A), (B). *Dva cykly mají jediný střed podobnosti.* (Dvě kružnice mají dva středy podobnosti, vnější a vnitřní).

Paprsek vedený středem podobnosti seče všechny cykly řady v úhlu s týmž kosinem a má tutéž mocnost ke všem cyklům řady.

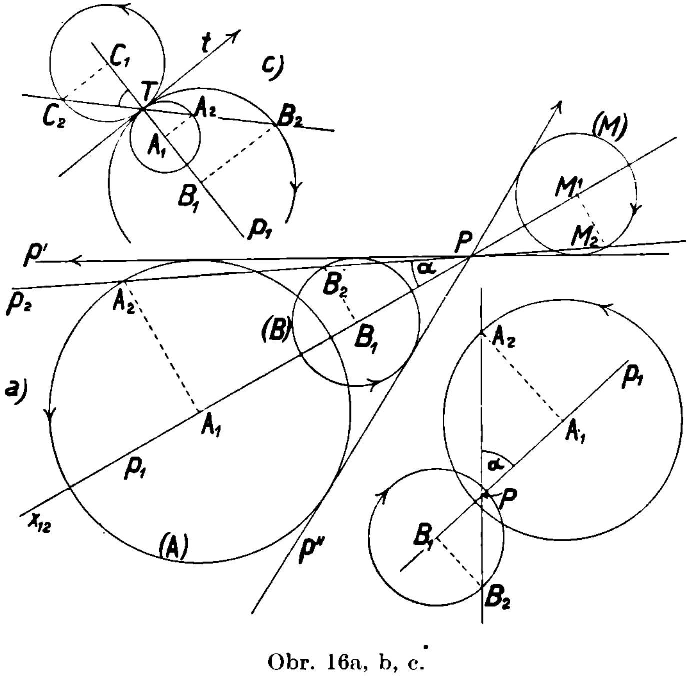
Obr. 16*b* odpovídá případu, kdy odchylka α přímky p od první průmětny je větší než 45°. Pak stopník P padne dovnitř všech cyklů a společné tečné paprsky nejsou reálné. P jest opět společným středem podobnosti.

---

*) Toto pojmenování zavedl u nás J. Sobotka v díle „Deskriptivní geometrie promítání paralelního", Praha 1906.

Dva cykly určují lineární řadu.

Rozeznávejme lineární řadu *eliptickou* a *hyperbolickou* dle toho, jsou-li společné tečné paprsky imaginární neb reálné. Případ přechodný je ten, kdy přímka p má odchylku 45°. Pak všechny cykly řady jdou stopou P a všechny mají tentýž dotykový paprsek t. Taková řada je pak zřejmě určena paprskem t s dotykovým bodem T (obr. 16c) čili *tečným elementem.*



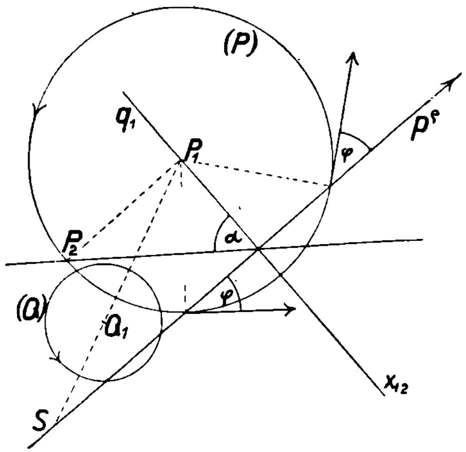
Obr. 16a, b, c.

Teď lze také snadno nahlédnouti, jaký je krajní případ cyklu, vzdaluje-li se bod na p do nekonečna a blíží se nevlastnímu bodu U_∞. Označme a_∞, b_∞ tečny z U_∞ ku C, jež leží v rovině nevlastní, A_∞, B_∞, jejich stopy na π, t. j. nevlastní body společných tečných paprsků p', p''. Považujeme-li obecný cykl (A) za obálku paprsků, které jsou stopami tečných rovin kužele $A(A)$, t. j. rovin, které jdou bodem A a dotýkají se kuželosečky C, pak vidíme, že roviny jdoucí bodem U_∞

a dotýkající se kuželosečky C tvoří dva svazky rovin s osami a_∞, b_∞, stopy na průmětně π tvoří tedy dvě osnovy přímek s vrcholy A_∞, B_∞. Dvojici těchto bodů se všemi přímkami, které jimi jdou, jest tedy považovati za cykl odpovídající nevlastnímu bodu U_∞. Jak jest to, je-li p „isotropická" přímka?

2,2. Cyklické pole. Bodům roviny ϱ patří cykly, jež tvoří cyklické pole čili lineární kongruenci cyklů. Dva body v rovině určují přímku, jejíž všechny body jsou v rovině, tedy dva cykly cyklického pole určují lineární řadu cyklů v poli obsaženou. Tři body neležící na přímce určují rovinu, tři cykly nepatřící lineární řadě, určují cyklické pole. Jeho nulové cykly vyplňují stopu p^ϱ roviny ϱ, již budeme nazývati *osou* cyklického pole. Střed podobnosti kterýchkoli dvou cyklů pole leží na p^ϱ. Tři cykly pole, jež nepatří téže lineární řadě, mají tři středy podobnosti na ose p^ϱ.

Tři cykly určují tři středy podobnosti položené na přímce, již zoveme jejich osou podobnosti.



Obr. 17.

Teď se jeví také záhodno orientovati osu p^ϱ (viz odst. 1,2), takže kladná strana osy p^ϱ je ta, na které se nachází půdorys kladné části roviny ϱ, t. j. části, jíž odpovídají cykly kladné.

Buď q spádová přímka roviny ϱ (obr. 17) vedená bodem P, α její odchylka od průmětny π a tedy i odchylka roviny ϱ, φ úhel cyklu (P) s osou p^ϱ; pak jest (1,3)

$$\cos\varphi = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Všechny cykly cyklického pole sekou jeho osu v úhlu, jehož kosinus je konstantní a rovný kotangentě odchylky roviny.

Osa má tutéž mocnost ke všem cyklům pole (1,4).

Cyklické pole je dáno osou (orientovanou) a kosinem úhlu φ. (Jinak však osa neorientovaná a úhel φ určují dvě pole).

Jest rozeznávati tři druhy cyklických polí dle toho, je-li odchylka roviny ϱ větší, menší nebo rovna 45°.

a) *Cyklické pole hyperbolické.* $\alpha > 45°$, $\cos\varphi < 1$. Jeho cykly sekou osu ve dvou reálných bodech. Bodem v rovině ϱ jdou dvě přímky, jež mají odchylku 45° a celé v ní leží, tedy každým cyklem pole jdou dvě řady parabolické. Pole obsahuje řady eliptické i hyperbolické.

b) *Cyklické pole eliptické.* $\alpha < 45°$, $\cos\varphi > 1$. Jeho cykly sekou osu ve dvou imaginárních sdružených bodech. ϱ neobsahuje přímek a odchylkou 45°. Všechny řady obsažené v poli jsou hyperbolické.

c) *Cyklické pole parabolické.* $\alpha = 45°$, $\cos\varphi = 1$. Všechny jeho cykly se dotýkají osy p^ϱ. Parabolické pole tedy sestává z cyklů, jež se téhož paprsku dotýkají.

Poznámky. Tři cykly mají jedinou osu podobnosti, stopu lineární kongruence jimi určené, na níž leží středy podobnosti vždy dvou a dvou z cyklů. Na kružnici jsou však dva cykly a těm patří v prostoru body symetricky položené dle průmětny π, na př. A, A'; B, B'; C, C', kde A, B, C jsou nad, A', B', C' pod průmětnou. Těmito body je určeno osm rovin, po dvou jsou symetricky položené dle π a mají tedy tutéž stopu. Pišme je pod sebou

$$
\begin{array}{llll}
ABC & ABC' & AB'C & A'BC \\
A'B'C' & A'B'C & A'BC' & AB'C'.
\end{array}
$$

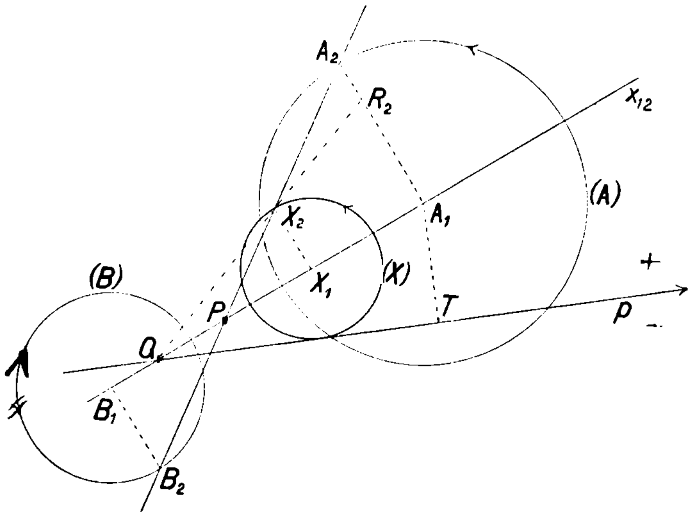
Dvě kružnice mají, jak známo, dva středy podobnosti, vnější a vnitřní. Jest zde tedy celkem šest středů podobnosti a vždy tři leží na jedné ose podobnosti (všechny vnější nebo dva vnitřní a jeden vnější). Osy podobnosti tvoří úplný čtyrstran a středy podobnosti jsou jeho vrcholy.

Jaká cyklická pole patří a) rovině rovnoběžné s π?, b) rovině π?, c) rovině kolmé ku π?

2,3. Úlohy o řadách a cyklických polích. Zde buď na několika příkladech ukázáno, jak různé úlohy o cyklech lze převésti na úlohy o bodech, přímkách a rovinách v prostoru, a také obráceně, jak vztahům mezi body, přímkami a rovinami v prostoru odpovídají v rovině vztahy mezi cykly.

Úloha 1. *Dána je řada dvěma cykly* (A), (B). *Jest sestrojiti cykl, který se dotýká paprsku* p.

Rozbor. Řadě cyklů odpovídá v prostoru přímka AB. Cykly dotýkající se paprsku p tvoří parabolické cyklické pole a v prostoru mu patří rovina ϱ se stopou p a odchylkou 45° a to tak, že část nad průmětnou π je po kladné straně paprsku p. Hledaný cykl odpovídá průsečíku ϱ s AB.



Obr. 18.

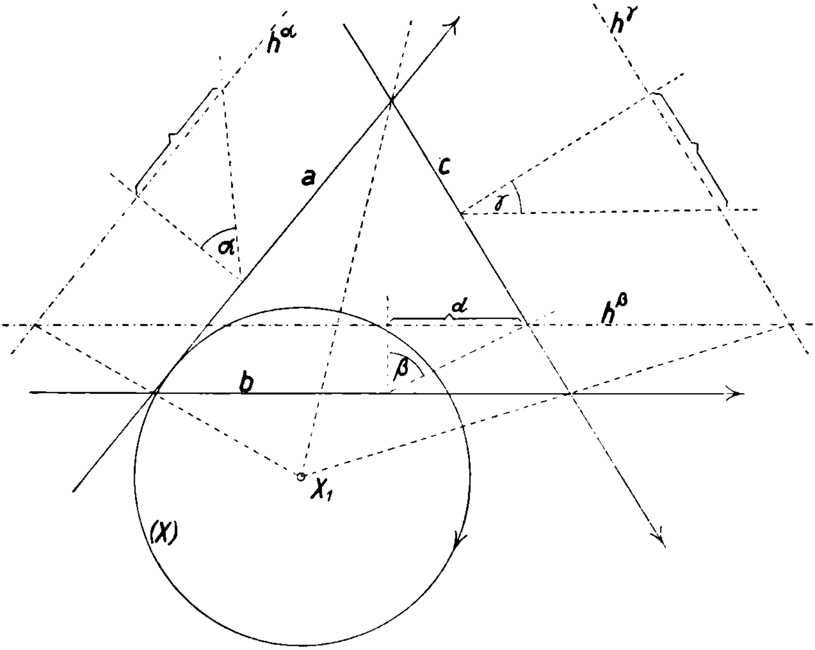
Provedení (obr. 18). Promítací rovinu přímky AB volme za průmětnu druhou a sklopme kolem $x_{12} \equiv A_1B_1$ do průmětny. A_2B_2 je obraz přímky AB. Stopa roviny ϱ na druhé průmětně je určena bodem Q a bodem R, kde $\overline{A_1R_2} = \overline{A_1T}$, $A_1T \perp p$. A_2B_2 a QR_2 určují průsečík X_2 . X_1 je střed hledaného cyklu o poloměru X_1X_2.

Úloha 2. *Sestrojte cykl, který se dotýká paprsku* a, *seče paprsek* b *v úhlu* $\varphi(\cos\varphi = \frac{1}{2})$ a *paprsek* c *v úhlu* ψ $(\cos\psi = \frac{5}{3})$.

Rozbor. Cyklům, jež se dotknou paprsku a přísluší body v rovině α (s odchylkou 45°), cyklům, jež sekou b pod úhlem φ patří rovina β

s odchylkou β, pro niž $\cotg \beta = \frac{1}{2}$. Cyklům, jež sekou c pod úhlem ψ, patří body v rovině γ s odchylkou γ, kde $\cotg \gamma = \frac{5}{3}$. Průsečíku těchto tří rovin patří hledaný cykl.

Provedení je v obr. 19. V každé rovině je sestrojena hlavní přímka rovnoběžná s průmětnou v téže výšce d pomocí odchylek α, β, γ.



Obr. 19.

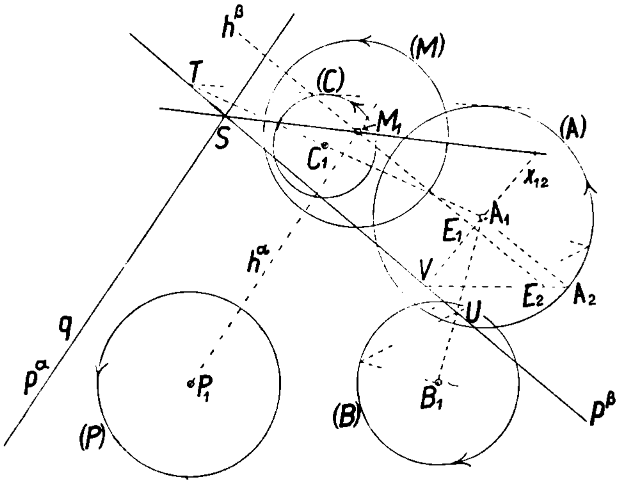
Tyto hlavní přímky h^{α}, h^{β}, h^{γ} tvoří trojúhelník stejnolehlý s trojúhelníkem stop a, b, c. Střed stejnolehlosti X_1 je středem hledaného cyklu.

Poznámka. Dáme-li v textu předešlé úlohy slovo přímka (neorientovaná) místo paprsek a slovo cykl nahradíme slovem kružnice, pak musíme v prostoru uvažovati ke každé rovině i rovinu symetrickou dle průmětny π, tedy celkem šest rovin: α, α'; β, β'; γ, γ' a příslušné průsečíky. Body symetrické dávají však tutéž kružnici, stačí tedy uvážiti na př. kombinace

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta, \gamma; \quad \alpha, \beta', \gamma; \quad \alpha, \beta, \gamma'$$

a dostaneme celkem čtyři řešení.

Úloha 3. *Sestrojte lineární řadu cyklů společnou dvěma cyklickým polím. První je dáno osou q a cyklem (P), druhé je dáno třemi cykly (A), (B), (C).*

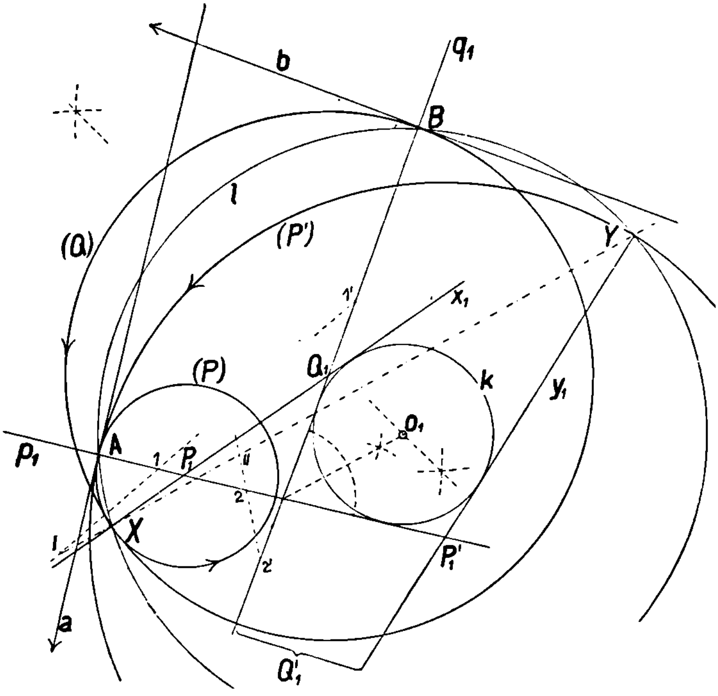


Obr. 20.

Rozbor. Prvnímu poli patří v prostoru rovina $\alpha \equiv (q, P)$, druhému rovina $\beta \equiv (A, B, C)$. Hledaná řada odpovídá průsečnici obou rovin.

Sestrojení. V obr. 20 jest $q \equiv p^\alpha$, p^β sestrojeno jako spojnice středu podobnosti T cyklů (A), (C) se středem podobnosti U cyklů (A), (B). Stopy obou rovin se sekou v S. Abychom našli ještě jeden bod průsečnice, hledejme v obou rovinách hlavní přímky h^α, h^β ve stejné výši nad průmětnou. Volme ji rovnou kótě bodu P. h^α jde tedy bodem P_1 rovnoběžně s q, bod E na h^β jest sestrojen na odchylkové přímce AV roviny β, kde $E_1E_2 = z_P$. Obě hlavní přímky sekou se pak v bodě M, jemuž patří cykl shodný s (P). Hledaná řada je určena stopníkem S a cyklem (M).

Úloha 4. *Dán jest paprsek a s bodem A (tečný element), paprsek b s bodem B. Jest sestrojiti dva cykly, které se dotýkají navzájem a z nichž jeden dotkne se paprsku a v A, druhý paprsku b v B. Mimo to ať jsou jejich poloměry v poměru 1 : 3.*



Obr. 21.

Rozbor. Mají-li se dva cykly dotýkati, musí příslušné body ležeti na „isotropickém" paprsku. Parabolické řadě cyklů, jež se dotýkají paprsku a v bodě A patří přímka p, podobně druhé řadě cyklů, které se v B dotýkají paprsku b patří přímka q. Je-li m přímka „isotropická", která seče p, q v bodech P, Q a má stopník S, pak bodům P, Q patří cykly (P), (Q), které mají vlastní dotyk v bodě S a s paprskem a dotyk v A, s paprskem b dotyk v B. Přímky m vyplňují hyperboloid a ježto mají ku π týž sklon 45°, rotační jednodílný hyperboloid obsahující přímky p, q. Jeho stopa na π jest kružnice l obsahující body A, B. Jest tedy nekonečně mnoho dvojic cyklů hledané vlastnosti a místo bodů dotyku S jest kružnice. Druhá podmínka žádá, aby kóty bodů dotyku P, Q byly v poměru 1 : 3. Tím vznikají na přímkách p, q řady podobné a spojnice přidružených bodů vyplní hyperbolický paraboloid obsahující přímky p, q. Tento má s prvým hyperboloidem společné mimo p, q ještě přímky x, y druhé soustavy, jež dávají na p, q body hovící úloze.

Sestrojení. V obr. 21 byly sestrojeny přímky p, q. Střed O_1, půdorys osy rotačního hyperboloidu, je průsečík osy symetrie bodů A, B s osou úhlu $\widehat{p_1q_1}$. Obrys hyperboloidu je kružnice k o středu O_1, která se dotýká přímek p_1, q_1, stopa je soustředná kružnice l body A, B. Abychom sestrojili stopu hyperbolického paraboloidu, vezměme body 1, 1′, kde $\overline{B1'} = 3 \,.\, \overline{A1}$, a body $2, 2'$, kde $\overline{B2'} = 3 \,.\, \overline{A2}$. Stopy přímek $11'$, $22'$ jsou I, II, kde $\overline{1'I} = 3 \,.\, \overline{1I}$, $\overline{2'II} = 3 \,.\, \overline{2II}$. Přímka $I\,II$ seče l v bodech X, Y a jimi jdou povrchové přímky hyperboloidu x, y. Na nich leží středy hledaných cyklů P, Q, resp. P', Q'. (Cykl (Q') není v obraze narýsován).

Cvičení 2,1. Dána je řada cyklů dvěma cykly (A), (B) a cyklické pole třemi cykly (M), (N), (P). Sestrojte společný cykl.

2,2. Dána jsou dvě cyklická pole, prvé osou p^α a cyklem (P), druhé osou p^β a cyklem (Q). Jest sestrojiti společný cykl o daném poloměru r.

2,3. Bodem P v prostoru jde ke dvěma přímkám a, b jediná příčka, t. j. přímka, která obě seče. Jaký význam má tato věta v geometrii cyklů? Podobně uvažujte o příčce rovnoběžné s daným směrem.

2,4. Jaký je cyklografický význam věty, že ke čtyřem přímkám existují dvě společné příčky?

2,5. Dány jsou v průmětně paprsky a, b a cykl (P). Sestrojte cykl (X), který se dotkne paprsku a, seče b v úhlu daném ($\cos\varphi = \frac{3}{4}$), takže společné tečné paprsky cyklu (P) a (X) svírají daný úhel (30°). (*Návod*: Určete odchylku přímky $p \equiv PX$. Je-li tato α a $\varphi = \widehat{p'p''}$ úhel společných tečných paprsků, je $\sin\frac{1}{2}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$).

2,6. Dány jsou tři dotykové elementy (tečna s bodem dotyku) $a(A)$, $b(B)$, $c(C)$. Jim odpovídají v prostoru tři „isotropické“ přímky p, q, r. Je-li m

jedna z příček těchto tří přímek, M její stopník, jaký význam mají cykly příslušné průsečíkům (m, p), (m, q), (m, r)? Sestrojte m tak, aby tyto tři cykly se opět v bodě M dotýkaly!

2,7. Jsou dány cykly (A), (B), (C). Sestrojte cykl (X) tak, aby společné tečné paprsky cyklů (A), (X) svíraly úhel daný φ_1, podobně pro (B), (X) úhel φ_2 a pro (C), (X) úhel φ_3. Zvláště uvažte případ $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ (viz úl. 5).

2,8. Jsou dány dvě lineární řady cyklů. Ke každému cyklu jedné řady přiřaďme cykl druhé řady, který se ho dotýká. Jaké je geom. místo bodů dotyku? (*Návod*: „Isotropické" přímky, které sekou dvě přímky v prostoru tvoří přímkovou plochu čtvrtého stupně. Viz KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ: Deskriptivní geometrie, II, str. 697).

2,9. Jaké je geom. místo bodů v prostoru, kterým přísluší cykly sekoucí paprsky a, b v úhlech φ_1, φ_2 s podmínkou $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 = k_1 : k_2$? Jaké je g. m. bodů, kterým přísluší cykly, jež sekou paprsky a, b, c v úhlech, pro které $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_3 = k_1 : k_2 : k_3$ (na př. $\frac{1}{2} : -2 : 3$)?

2,10. V prostoru jsou dány dvě projektivní řady bodové, kterým odpovídají dvě projektivní řady cyklů. Dva přiřaděné cykly určují novou řadu. Jaké je g. m. nulových cyklů těchto řad? Jaká je obálka společných paprsků tečných?

2,11. Dány jsou cykly (A), (B), (C), (D). Sestrojte cykl (X) tak, aby společné tečné paprsky cyklů $(A)(X)$, $(B)(X)$ atd. svíraly stejné úhly. (Viz článek E. MÜLLERA v Archiv für Matematik u. Physik r. 1913 a práci J. SOBOTKOVU: „O zvláštním způsobu určení kuželů a několik příslušných úloh cyklografických", Rozpravy České akademie, r. XXIII, č. 36).

III. CYKLOGRAFICKÉ KUŽELE A CYKLOGRAFICKÉ KRUŽNICE

Doposud jsme studovali cyklické zobrazení přímky a roviny. Přistupme k útvarům kvadratickým, t. j. ke kuželosečce a k ploše druhého stupně. Obecná a v prostoru obecně položená kuželosečka jest rovinou sečena ve dvou bodech, cyklický obraz kuželosečky je tedy řada cyklů, jež s cyklickým polem má společné dva cykly, tedy řada kvadratická. Podobně plocha druhého stupně má s přímkou společné dva body, cyklický obraz plochy druhého stupně je tedy kvadratická kongruence. Nás však zajímají především plochy druhého stupně, jež jdou základní kuželosečkou C, a kuželosečky, které tuto základní kuželosečku sekou ve dvou bodech, neboť jejich zobrazení je nejjednodušší a vede k cyklografickému řešení klasických problémů elementární geometrie. Budeme kuželosečky, které sekou základní kuželosečku C ve dvou bodech, nazývati *cyklografické kružnice*, kužele, které jdou křivkou C, *cyklografické kužele*, a jiné plochy druhého stupně (hyperboloidy) jdoucí křivkou C *cyklografické koule.*

3,1. Cyklografická kružnice. Mějme cyklografický kužel. Osa jeho buď v ose OZ_∞ pravoúhlé soustavy, vrchol V měj souřadnice $(0, 0, r)$. Rovnice jeho jest

$$x^2 + y^2 - (z - r)^2 = 0. \tag{1}$$

Průsek tohoto kužele s rovinou ϱ, jež neprochází vrcholem V, jest cyklografická kružnice k; jest to elipsa, hyperbola neb parabola. Její kolmý průmět je kuželosečka k_1, jež má průmět vrcholu V_1 za ohnisko. Skutečně, je-li rovina ϱ dána rovnicí

$$z = mx + n \tag{2}$$

a vyloučíme-li z z rovnice (1) a (2), dostaneme

$$x^2 + y^2 - (mx + n - r)^2 = 0 \tag{3}$$

jako rovnici průmětu k_1. Značí-li $v = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzdálenost bodu (x, y)

od ohniska V_1, $d = \dfrac{r - n}{m} - x$ vzdálenost od přímky $q \equiv mx + n - r = 0$, lze rovnici (3) napsati

$$v^2 - m^2 d^2 = 0 \quad \text{čili} \quad v = \pm\, m \,.\, d,$$

t. j. poměr vzdálenosti bodu na křivce k_1 od V_1 a od q je stálý, V_1 je tedy ohnisko, q řídící přímka kuželosečky k_1. Obráceně lze ukázati, že každou kuželosečku v π lze považovati za průmět cyklografické kružnice.

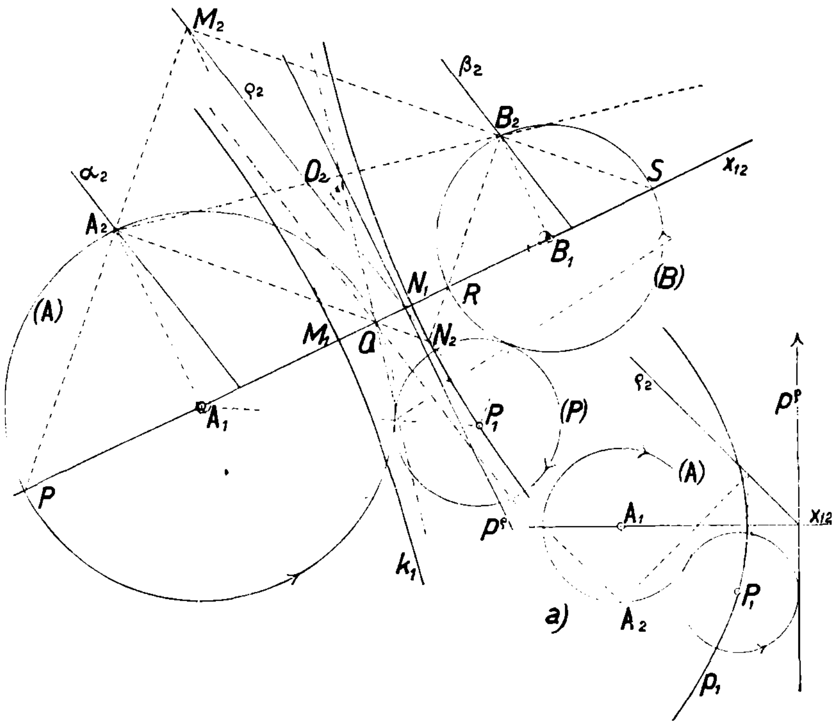
Cyklografickou kružnicí se dvěma různými body v nekonečnu (elipsou nebo hyperbolou) *jdou dva cyklografické kužele.* Obecně dvěma kuželosečkami v prostoru, jež mají dva různé body společné, jde svazek ploch druhého stupně, mezi nimiž jsou dva kužele. V našem případě jsou tyto kuželosečky k a C, tedy oba kužele jsou cyklografické. Obráceně *dva cyklografické kužele* v obecné poloze *mají mimo C ještě společnou cyklografickou kružnici.*

Buďte A, B vrcholy cyklografických kuželů (obr. 22), (A), (B) příslušné cykly. Volme promítací rovinu přímky AB za druhou průmětnu a otočme kolem $x_{12} \equiv A_1B_1$ do π. Ve sklopení dostáváme osové řezy A_2P, A_2Q, resp. B_2R, B_2S, jež vytvořují obdélník $A_2M_2B_2N_2$. $\varrho_2 \equiv M_2N_2$ jest průmět roviny ϱ, v níž leží průsečná kuželosečka k. M, N jsou vrcholy, střed obdélníka O je středem kuželosečky. Stopa p^ϱ je chordála kružnic $[A]$, $[B]$, neboť spojuje jejich společné body. Uvažme, že všechny plochy svazku (C, k) se dotýkají v nevlastních bodech V_∞, W_∞ křivky k společných oběma kuželosečkám, společné tečné roviny jdou přímkou AB a mají za stopy společné tečné paprsky m, n cyklů (A), (B). Přímkou $V_\infty W_\infty$ jde rovina ϱ a polární roviny α, β přímky AB k oběma kuželům $(\alpha_2 \parallel \beta_2 \parallel \varrho_2)$.

Je-li P bod na kuželi $A(A)$, pak cykl (P) má s cyklem (A) vlastní dotyk. Je-li P na křivce k, má cyklus (P) dotyk s cykly (A) i (B). *k_1 je tedy geom. místo středů všech cyklů, které se dotýkají cyklů* (A), (B). V našem obraze je to hyperbola k_1 s vrcholy M_1, N_1, ohnisky A_1, B_1 a asymptotami kolmými ke společným tečným paprskům m, n obou cyklů (v obraze nejsou zakresleny). Ostatně, jsou-li r_1, r_2 poloměry cyklů (A), (B), r poloměr pohyblivého cyklu, je zřejmě $|\overline{A_1P_1}| = |r_1 - r|$, $|\overline{B_1P_1}| = |r_2 - r|$, tedy rozdíl průvodičů $|\overline{A_1P_1} - \overline{B_1P_1}| = |r_1 - r_2|$

je konstantní. Spojnice dotykových bodů cyklu (P) s pevnými cykly je stopa roviny (ABP) a prochází jejich středem podobnosti.

Má-li rovina ϱ odchylku $45°$ od průmětny, pak průsek s cyklografickým kuželem je parabola; touto parabolou prochází jediný cyklografický kužel. Obr. 22*a* ukazuje průsek takové roviny ϱ s kuželem



Obr. 22 a 22a.

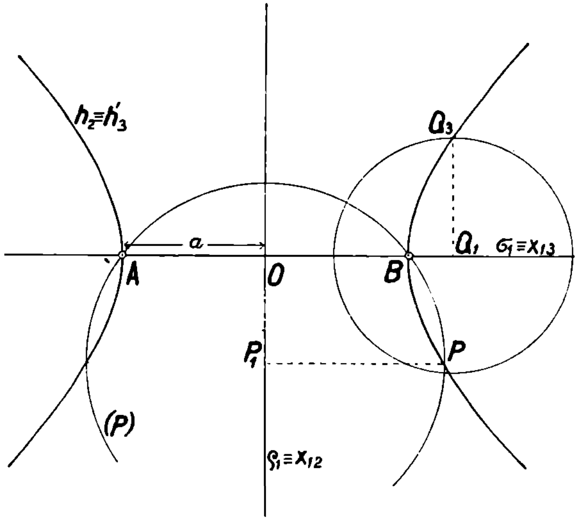
$A(A)$. Průmět p_1 je parabola s ohniskem A_1, jež je geom. místo středů cyklů, které se dotknou paprsku p^ϱ a cyklu (A).

Tím jsme dospěli k těmto větám:

Geom. místo středů cyklů, které se dotýkají dvou cyklů, je elipsa nebo hyperbola, jež má středy daných cyklů za ohniska.

Geom. místo středů cyklů, jež se dotýkají cyklu a paprsku, jest parabola, jež má střed daného cyklu za ohnisko.

Poznámka. Nahraďme v obr. 22 jeden cykl, na př. (B) cyklem doplňkovým, kužel $B(B)$ tedy kuželem symetrickým dle π s vrcholem B'. Dostaneme ovšem jinou průsečnou kuželosečku, ohniska průmětu jsou opět A_1, B_1. Možno tedy říci: *Středy kružnic, jež se dotýkají kružnic* $[A]$, $[B]$ *vyplňují dvě kuželosečky konfokální.*



Obr. 23.

Podobně, nahradíme-li v obr. 22*a* cyklus (A) doplňkovým, dostaneme parabolu konfokální s p_1. *Středy kružnic, jež se dotýkají kružnice a přímky, vyplňují dvě konfokální paraboly.*

3,2. Svazek kružnic v rovině a příslušný prostorový útvar. Věnujme pozornost případu, kdy vrcholy cyklografických kuželů A, B jsou v průmětně. ϱ jest pak rovina symetrie bodů A, B kolmá k průmětně a průsek obou kuželů je rovnoosá hyperbola v rovině ϱ se středem O a jednou osou v průmětně (v obr. 23 jest zobrazena ve sklopení kolem $x_{12} \equiv \varrho_1$). Cyklografické obrazy bodů této hyperboly jsou cykly jdoucí body A, B, kladné pro větev nad průmětnou a záporné pro větev pod průmětnou, tedy *svazek kružnic*. Volme O za počátek pravoúhlé soustavy souřadnic v prostoru, σ_1, ϱ_1 za osy x, y a označme délku $\overline{OA} = \overline{OB} = a$, pak jsou rovnice kuželů

$$(x - a)^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad (x + a)^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

průsečná křivka je dána rovnicemi

$$x = 0, \qquad z^2 - y^2 = a^2.$$

Je-li tedy $P(0, \eta, \pm \zeta = \pm \sqrt{a^2 + \eta^2})$ bod této hyperboly, je rovnice příslušné kružnice

$$x^2 + (y - \eta)^2 = a^2 + \eta^2.$$

Jsou-li základní body svazku A, B imaginární o souřadnicích $(\pm ai, 0, 0)$, dostáváme dva imaginární sdružené kužele, průsečná křivka je však reálná o rovnicích

$$x = 0, \qquad y^2 - z^2 = a^2$$

Je-li $(0, \eta, \zeta = \pm \sqrt{\eta^2 - a^2})$ bod této hyperboly, má přidružená kružnice rovnici

$$x^2 + (y - \eta)^2 = \eta^2 - a^2.$$

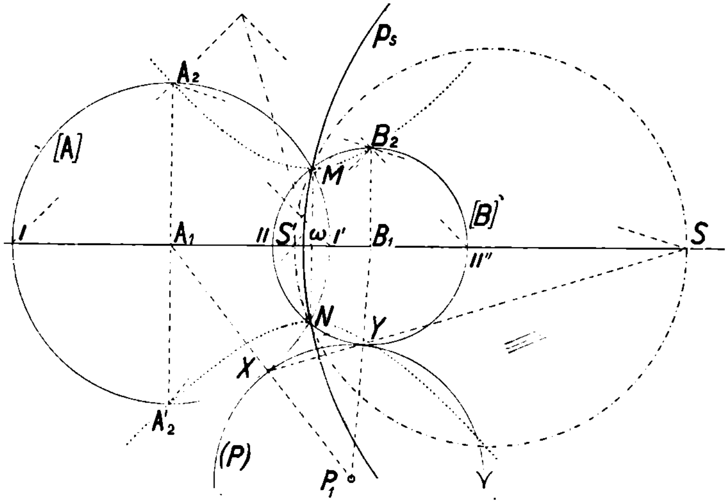
V prvém případě měla hyperbola v průmětně osu vedlejší, v druhém osu hlavní a seče tedy průmětnu ve dvou reálných bodech $M(0, a, 0)$, $N(0, -a, 0)$. To jsou středy kružnic s poloměrem nula, jež jdou imaginárními základními body. Máme tedy výsledek:

Rovnoosá hyperbola v rovině kolmé k průmětně a s jednou osou v této průmětně má za cyklografický obraz svazek kružnic. Leží-li v průmětně vedlejší osa, má svazek dva reálné základní body, leží-li v průmětně reálná osa, má svazek dva imaginárné základní body.

Splynou-li oba základní body, máme v rovině svazek kružnic, jež v bodě T se dotýkají přímky t. V prostoru jim odpovídají dvě „isotropické" přímky v rovině kolmé ku t.

K uvažovanému svazku kružnic o základních bodech A, B patří *doplňkový svazek* (1, 8) se základními body imaginárními na ϱ_1, jehož kružnice jsou kolmé ke kružnicím prvého svazku. Příslušná hyperbola h' je v rovině $\sigma(\sigma_1 \equiv AB)$ a je v obraze 23 otočena kolem $x_{13} = AB$ do průmětny. Při tom $h'_3 = h_2$. A, B jsou nulové kružnice druhého svazku.

Poznámky. Buď dán svazek kružnic dvěma kružnicemi $[A]$, $[B]$ (obr. 23a). Body A, B nad průmětnou je určena rovnoosá hyperbola s osou v průmětně π o středu ω. V obraze je vyznačena tečkovaně ve sklopení kolem A_1B_1. A_2B_2 je jedna úhlopříčka obdélníka, jehož strany mají sklon 45°; druhá úhlopříčka obsahuje středy rovnoosých hyperbol, které jdou body A, B a na ní leží ω (viz odst. 1,9). Buďte S, S' středy podobnosti obou kružnic. Pak kružnice nad průměrem SS' patří také svazku. Skutečně čtyrroh $A_2B_2A_2'\,B_2'$, kde $A_2'B_2'$ jsou symetrické s A_2, B_2, je do hyperboly vepsán, body S, S' a nevlastní bod ve směru

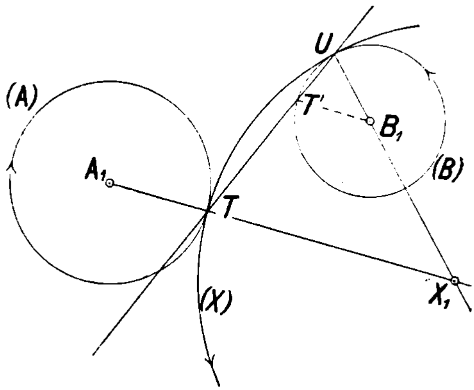


Obr. 23a.

kolmém ku SS' tvoří polární trojúhelník hyperboly, S,S' jsou tedy k ní sdružené. Průsečíky hyperboly s A_1B_1 jsou nulové kružnice uvažovaného svazku, dvojice SS' patří tedy také involuci vyťaté svazkem kružnic. Kružnice nad průměrem SS' sluje *kružnice podobnosti* (v obraze čárka-tečka). Z elementární geometrie je známo, že je místem bodů, z nichž se obě kružnice jeví pod týmž úhlem.

Ke dvěma cyklům lze přiřaditi t. zv. *potenční* čili *Steinerovu kružnici*, která má střed ve středu podobnosti a jde společnými body. Mějme na zřeteli dva kladné cykly (A), (B) (obr. 23a) se středem podobnosti S. Potenční kružnici označme p_s. Buď (P) cykl, který se dotýká cyklů (A), (B) v bodech X, Y. Tyto dva body a S jsou na přímce, což je stopa roviny (ABP). Bod P je na cyklografické kružnici k, ve které se sekou kužele $A(A)$, $B(B)$, P_1 je na jejím průmětu k_1, který má ohniska A_1, B_1. Tečna bodu P_1 půlí úhel $\widehat{A_1P_1B_1}$ čili je kolmá ku XY. Ve společném bodě M neb N splývá s tečnou potenční kružnice (je kolmá k SM nebo SN). Tedy kružnice p_s a křivka k_1 se v bodech M, N dotýkají, jinak *potenční kružnice půlí úhel kružnic* $[A]$, $[B]$. V dalším bude ukázáno, že kružnice p_s je kolmá ke všem cyklům (P) a že bod S je střed kruhové inverse, která převádí kružnici $[A]$ v kružnici $[B]$ a naopak.

3,3. Úlohy o dotyku. Teď můžeme řešiti úlohy o cyklech a kružnicích, jsou-li dány jednoduchými podmínkami jako jsou, že má procházeti bodem, dotýkati se daného paprsku (přímky) nebo dotýkati se daného cyklu (kružnice).



Obr. 24.

Úloha 1. *Sestrojte cykl, který se dotýká cyklu (A) v bodě T a dotýká se současně cyklu (B).*

Rozbor. Bod, kterému odpovídá hledaný cykl, je na površce AT kuželu $A(A)$ a na kuželi $B(B)$. Přímka AT je však rovnoběžná s jednou přímkou kužele druhého, seče jej tedy ještě v jednom bodě X.

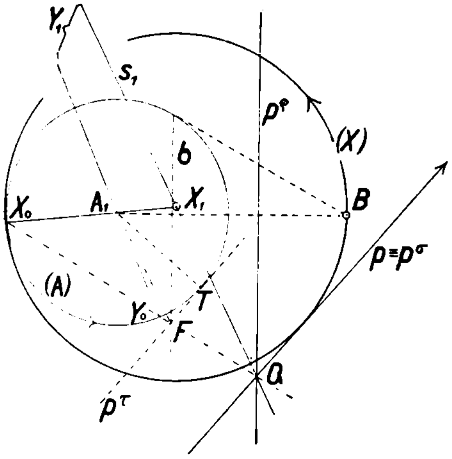
Sestrojení je v obr. 24. Na kuželi $B(B)$ je sestrojena přímka $BT' \parallel AT$. Rovina (BAT) má stopu TT' a seče kužel $B(B)$ v přímce UB, na níž leží průsečík X. X_1 je střed hledaného cyklu (X).

Kolik řešení má tato úloha, mluví-li se o kružnicích místo o cyklech?

Úloha 2. *Sestrojte cykl, který se dotýká cyklu (A), dotýká se paprsku p a jde bodem B.*

Rozbor. Body, kterým odpovídají hledané cykly, jsou na cyklogr. kuželi $A(A)$, na cyklografickém kuželi s vrcholem B v průmětně a v „isotropické" rovině přímkou p. Oba kužele mají společnou cyklografickou kružnici v rovině ϱ. „Isotropickou“ rovinu paprskem p označme σ. ϱ a σ mají průsečnici s a její průsečíky s kuželem $A(A)$ jsou hledané body.

Sestrojení je v obr. 25. Rovina σ je rovnoběžná s tečnou rovinou kužele $A(A)$ podél přímky AT, jež má stopu $p^\tau \parallel p^\sigma$. Rovina ϱ má za stopu p^ϱ chordálu kružnice $[A]$ a kružnice o středu B a poloměru nula a je rovnoběžná s rovinou danou středem A a přímkou b, kde b je polára bodu B ke kružnici $[A]$. p^τ, b mají průsečík F, AF je tedy rovnoběžná s průsečnicí $s \equiv (\varrho, \sigma)$, jejíž stopník je $Q \equiv (p, p^\varrho)$. Tedy s_1 jde bodem Q rovnoběžně s A_1F. Rovina (As) má stopu QF a ta seče cykl (A) v bodech X_0, Y_0. Na přímkách AX_0, AY_0 leží hledané průsečíky X, Y a jejich průměty X_1, Y_1 jsou středy hledaných cyklů. Úloha má dvě řešení. V obraze narýsován pouze cykl (X).



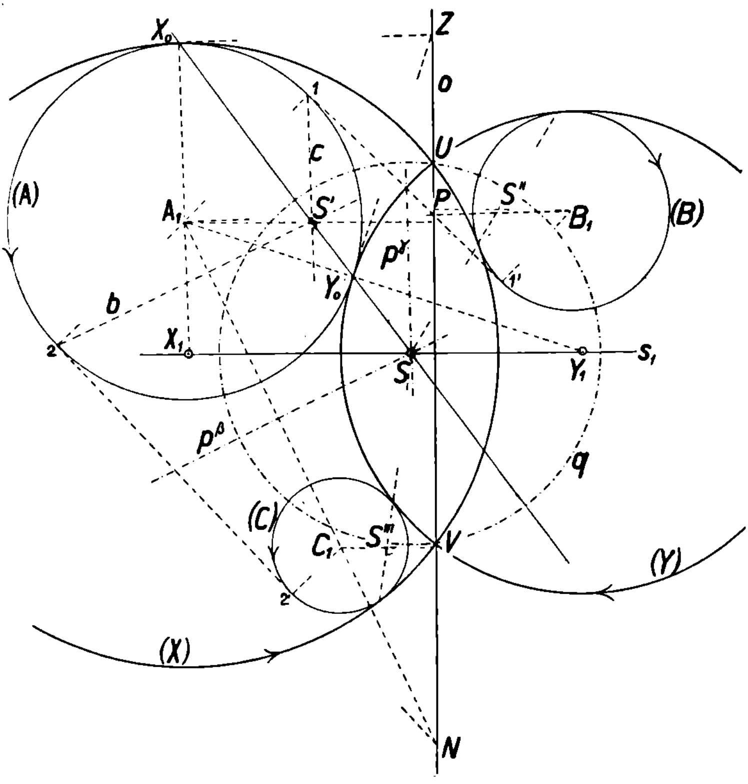
Obr. 25.

Kdyby byla v úloze řeč o kružnici a přímce (neorientované), bylo by třeba přidati ještě řešení, jež vzniknou změnou orientace jednoho útvaru, buď paprsku p nebo cyklu (A). Kolik řešení je pak celkem?

Úloha 3. *Sestrojte cykl, který se dotýká tří daných cyklů (Apolloniova úloha).*

Rozbor. Cykly označme (A), (B), (C). Kužele $A(A)$, $B(B)$, $C(C)$ mají mimo kuželosečku v rovině nevlastní C ještě dva body společné v konečnu X, Y, neboť kužele $A(A)$, $B(B)$ sekou se v cyklografické kružnici, jež seče kužel $C(C)$ ve dvou bodech nevlastních a tedy ještě ve dvou bodech v konečnu, jež leží na všech třech kuželích. Spojnicí $s \equiv XY$ jdou roviny α, β, γ, ve kterých leží křivka společná vždy dvěma kuželům, na př. v α křivka kuželů $B(B)$, $C(C)$ atd.

Sestrojení je v obr. 26. p^γ je chordála kružnic $[A]$, $[B]$ a je sestrojena užitím půlícího bodu společné tečny *11'*. Podobně p^β, chordála kružnic $[A]$, $[C]$, byla sestrojena užitím půlícího bodu tečny *22'*. Průsečík S je stopa přímky s; jím jde i třetí chordála p^α. S je bod stejných mocností ke všem třem kružnicím. Nechť b jest polára středu podobnosti N



Obr. 26.

cyklů (A), (C) vzhledem k cyklu (A), c polára středu podobnosti P cyklů (A), (B) k cyklu (A); pak roviny (Ab), (Ac) jsou rovnoběžné s rovinami β, γ a průsečík S' je stopník přímky AS' rovnoběžné s průsečnicí s. Pak jest $s_1 \parallel A_1S'$. SS' je stopa roviny vrcholové (As), jež vytíná površky AX_0, AY_0, na kterých jsou hledané průsečíky X, Y přímky s s kuželem $A(A)$. Úloha má dvě řešení. Body dotyku hledaných cyklů s cyklem (A) jsou X_0, Y_0 a jejich spojnice jde bodem S', ve kterém se sekou poláry b, c bodů N, P na ose podobnosti o všech tří cyklů. S' je tedy pólem přímky o k cyklu (A). Podobně ovšem to platí o cyklech (B), (C). Odtud jde jednoduché planimetrické řešení dané úlohy: Sestrojme osu podobnosti daných tří cyklů a její póly S', S'', S''' k těmto cyklům. Dále sestrojme bod stejných mocností S. Spojnice SS', SS'', SS''' vytínají body, ve kterých se hledané cykly dotýkají daných cyklů.

Snadno lze zjistiti, že cykly (X), (Y) se protínají na ose podobnosti o a že tomuto svazku patří také kružnice q, která má střed v bodě S a kolmo seče kružnice $[A]$, $[B]$, $[C]$, jinými slovy kružnice $[X]$, $[Y]$, q patří témuž svazku s chordálou o. Skutečně všimněme si promítací roviny přímky s. Ona seče kužele $A(A)$, $B(B)$, $C(C)$ v rovnoosých hyperbolách, které vedle obou bodů v nekonečnu mají společné body X, Y; jejich středy jsou na přímce (1,9), což je průsečnice roviny (ABC) s promítací rovinou přímky s, jež je k ní kolmá, neboť středy uvedených tří hyperbol jsou na kolmicích z vrcholů k průsečné rovině. Ve svazku těchto hyperbol je jedna, která má střed v průsečíku (o, s_1) a osu v průmětně. Jejím bodům odpovídá svazek kružnic s chordálou o, mezi nimiž jsou i kružnice $[X]$, $[Y]$. Jejich průsečíky buďte U, V. Poněvadž přímka X_0Y_0 jde pólem S' osy o, jest její pól Z na o a Z je středem kružnice $[Z]$, jež kolmo seče kružnice $[A]$, $[X]$, $[Y]$. Kružnice q seče kolmo kružnici $[A]$ i $[Z]$, neboť její střed S je na chordále X_0Y_0. Podobně zjistíme další dvě kružnice se středem na o sekoucí kolmo $[X]$, $[Y]$ a patřící tedy svazku doplňkovému s oním o základních bodech U, V. Kružnice q je však ke všem třem kolmá, patří tedy i ona tomuto svazku a jde body U, V.

Poznámka. Původní Apolloniův problém žádá sestrojení kružnic, jež se daných tří kružnic dotýkají. Každá kružnice je nositelkou dvou cyklů. Označíme-li příslušné body v prostoru dle π symetricky položené A, A'; B, B'; C, C', pak skupiny na př. ABC a $A'B'C'$ nebo ABC', $A'B'C$ vedou k témuž řešení a všechna řešení dostaneme na př. z kombinací

$$ABC,\ A'BC,\ AB'C,\ ABC'.$$

Problém má celkem osm řešení, jež ovšem z části mohou být imaginární.

Cvičení 3,1. Problém Apolloniův má následující zvláštní případy, přejde-li některá kružnice v bod nebo přímku: Sestrojte kružnici, jsou-li dány a) tři její body, b) dva body a přímka, c) dva body a kružnice, d) bod, přímka a kružnice, e) dvě přímky a kružnice, f) tři přímky. Proveďte řešení orientujíce vždy přímku a kružnici a udejte celkový počet řešení.

3,2. Pappusovy úlohy jsou zvláštní případ předešlých, když bod leží na přímce neb na kružnici. Jsou to: Sestrojiti jest kružnici, která a) dotýká se přímky a v bodě A a jde bodem B, b) dotýká se přímky a v bodě A a dotýká se přímky b, c) dotýká se přímky a v bodě A a dotýká se kružnice $[B]$, d) dotýká se kružnice $[A]$ v bodě M a jde bodem N, e) dotýká se kružnice $[A]$ v bodě M a přímky n, f) dotýká se kružnice $[A]$ v bodě M a dotýká se kružnice $[B]$. Proveďte cyklografické řešení orientujíce opět přímku a kružnici a udejte celkový počet řešení.

3,3. Dány jsou tři cykly se středy na téže přímce. Sestrojte cykly, které se jich dotýkají.

3,4. Dány jsou tři cykly, které se dotýkají téhož paprsku. Sestrojte cykl další, který se všech tří dotýká.

3,5. Dán jest svazek kružnic jednou reálnou a jednou imaginární kružnicí. Sestrojte hyperbolu, jejímž bodům jsou přiřazeny kružnice svazku, a hyperbolu, která patří svazku doplňkovému.

3,6. Ve svazku daném dvěma kružnicemi sestrojte ony, které daný paprsek sekou v úhlu 45° (30°).

3,7. Tři kružnice se po dvou dotýkají. Sestrojte kružnice, jež se dotýkají všech tří daných kružnic.

IV. CYKLOGRAFICKÉ KOULE

Koule v *euklidovském* prostoru je plocha druhého stupně, jež prochází absolutní kuželosečkou v rovině nevlastní danou v pravoúhlých homogenních souřadnicích rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0.$$

Podobně nazývejme *cyklografickou koulí* plochu druhého stupně, jež jde základní kuželosečkou C danou rovnicemi

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad t = 0.$$

Rovnice plochy má tedy tvar

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (z - c)^2 = \pm r^2$$

nebo

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2ax - 2by + 2cz + d = 0, \quad (d = a^2 + b^2 - c^2 \mp r^2).$$

Jest to rotační hyperboloid s osou kolmou k průmětně π, jednodílný neb dvoudílný. Střed je $S(a, b, c)$, poloměr hrdlové kružnice v rovině $z = c$ jest r neb ri. Nazýváme jej *poloměrem* cyklografické koule.

4,1. Cyklografické koule se středem v průmětně π. Prostudujme nejprve případ, kdy střed koule je v průmětně. Volme jej za počátek O soustavy souřadnic. Plocha má pak rovnici

$$(H) \qquad x^2 + y^2 - z^2 = r^2 \text{ (neb } - r^2\text{)}.$$

Buď $P(\xi, \eta, \zeta)$ bod této plochy. Jemu odpovídá v π kružnice

$$[P] \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \zeta^2, \quad (\zeta^2 = \xi^2 + \eta^2 - r^2);$$

mocnost středu O k tomuto kruhu jest konstantní a rovna $r^2(= \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2)$. Sekou tedy kružnice $[P]$ kolmo stopu cyklografické koule.

Cyklografický obraz rovnoosého hyperboloidu se středem v π a osou kolmou k π (cyklografické koule) je trs kružnic (1, 8), *které sekou kolmo jeho hrdlovou kružnici.*

Je-li hyperboloid dvoudílný, stopní kružnice imaginární o poloměru ri, pak soustředná kružnice k' o poloměru r, jíž používáme ke konstrukcím, jest reálnou kružnicí trsu proťata ve dvou diametrálně ležících bodech, čili jest jí půlena (1, 7).

Vrcholy uvažovaného hyperboloidu rozumíme jeho průsečíky s osou plochy. Je-li stopa reálná kružnice o poloměru r, jsou vrcholy na ose ve vzdálenosti $\pm\, ri$ od středu. Je-li stopa imaginárná, jsou vrcholy reálné ve vzdálenosti $\pm\, r$.

Velmi snadno jsou patrny věty:

Trs kružnic obsahuje nekonečně mnoho (∞^2) *svazků*. Každá rovina kolmá ku π seče cyklografickou kouli se středem v π v rovnoosé hyperbole, jíž patří svazek obsažený v trsu.

Dvě kružnice trsu určují svazek obsažený v trsu.

Tři body v prostoru určují jedinou cyklografickou kouli se středem v π. V rovině *tři kružnice určují trs*; kružnice kolmá ke všem třem je hrdlová kružnice cyklografické koule.

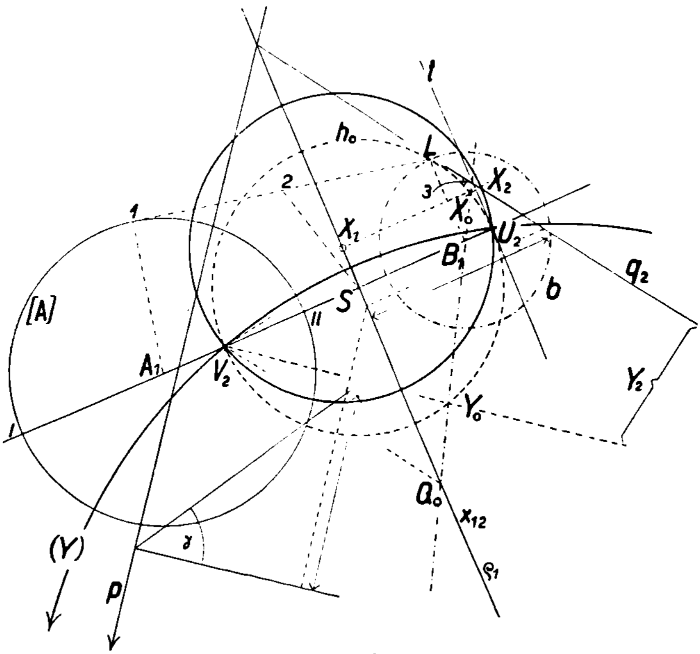
Zvláštní případ trsu je souhrn kružnic, které jdou jedním bodem; hyperboloid přešel zde v cyklografický kužel. Jiný zvláštní případ jsou kružnice se středem na přímce.

Dvě cyklografické koule o středu v průmětně π mají mimo kuželosečku C v nevlastní rovině ještě společnou hyperbolu v rovině kolmé ku π a kolmé k rovině obou os, v cyklografické projekci tedy *dva trsy mají společný svazek*, t. j. souhrn kružnic kolmých ke dvěma stopním kružnicím. Středy jejich jsou na chordále stopních kružnic.

4,2. Úlohy o kolmosti cyklů a kružnic. Úloha. *Sestrojte cykl, který seče kolmo kružnice* [A], [B] *a paprsek* p *v úhlu* $\varphi = 30°$.

Rozbor. Body, kterým přísluší žádané cykly nalézají se na cyklografických koulích s hrdlovými kružnicemi [A], [B] a v rovině α se stopou p. Prvé dvě plochy mají společnou rovnoosou hyperbolu v rovině ϱ kolmé ku π. α seče ϱ v přímce q. Jedná se tedy o průsečíky přímky s rovnoosou hyperbolou.

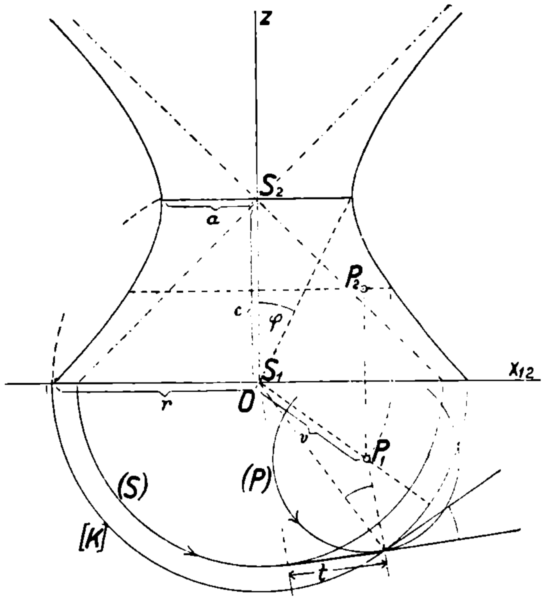
Sestrojení je v obr. 27. [A] buď reálná, [B] imaginární a zastoupena reálnou kružnicí b o středu B_1 . ϱ_1 je chordála obou kružnic a sestrojena jest dle (1,7) : $B_1L \perp A_1B_1$, z L vedena tečna $L1$ ku [A] a rozpůlena bodem *2*. Pak $2S \perp A_1L$. Bodem S jde $\varrho_1 \perp A_1B_1$. ϱ seče oba hyperboloidy v hyperbole h. Vrcholy U, V jsou průsečíky vertikály vztyčené v bodě S s jedním neb druhým hyperboloidem. Abychom je sestrojili, použijme promítací roviny přímky AB. Ta seče první hyperboloid v hyperbole s osou I II. Tedy kóta bodu $U(V)$ rovná se délce tečny vedené z S ke kružnici $[A]$ (1,9) a rovná se také SL. Sklopme rovinu ϱ



Obr. 27.

kolem $\varrho_1 \equiv x_{12}$ do π. Vrcholy U, V přijdou do U_2V_2 a tím je určena hyperbola h_2. Dále je určena odchylka γ roviny $\varkappa$. Jest $\cotg \gamma = \cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sestrojení průsečnice $q(q_2)$ je patrno z obrázku. Abychom určili průsečíky q_2 s h_2, použijme kolineace (1,9). Střed kolineace buď V_2, osa tečna t hyperboly v bodě U_2. Hyperbole h_2 odpovídá v kolineaci kružnice h_0 nad průměrem U_2V_2, ϱ_1 je úběžnice. q_2 seče t v bodě *3*, rovnoběžka s q_2 středem V_2 seče úběžnici v bodě Q_0. $3Q_0 \equiv q_0$ odpovídá v kolineaci přímce q_2 a seče kružnici h_0 v bodech $X_0 Y_0$. Jim nazpět odpovídají body X_2, Y_2, z nichž jsou odvozeny $X_1 Y_1$. Nalezené cykly se protnou v U_2, V_2 (3,2).

Cvičení 4,2,1. Sestrojte cykl, který seče kolmo kružnici $[A]$ a dotýká se paprsků p, q.



Obr. 28.

4,2,2. Sestrojte kružnici o daném poloměru, která seče kolmo kružnici $[A]$ a půlí kružnici $[B]$.

4,2,3. Sestrojte cykl, který seče kružnici $[A]$ v diametrálně protilehlých bodech a paprsky p, q v úhlech s danými kosiny (na př. $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}$).

4,2,4. Dány jsou cykly (A), (B), (C). Sestrojte cykl, který a) seče (A) kolmo a dotýká se (B) a (C), b) půlí (A), kolmo seče (B) a dotýká se (C).

4,3. Cyklografické koule v obecné poloze. Rovnoosý rotační hyperboloid s osou kolmou ku průmětně π a středem mimo průmětnu (obr. 28) jest dán rovnicí

$$x^2 + y^2 - (z - c)^2 = a^2;$$

a je reálné neb ryze imaginárné a hyperboloid pak jednodílný nebo dvoudílný.

Souřadnice středu S jsou $(0, 0, c)$, poloměr hrdlové kružnice a. Stopní kružnice $[K]$ jest dána rovnicemi

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{kde} \quad r = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Obrazem středu S je cykl (S) o poloměru c, říkejme mu *středový cykl.*

Cyklický obraz bodu $P(\xi, \eta, \zeta)$ na uvažované ploše jest cykl (P) na kružnici

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \zeta^2.$$

Pro bod P platí

$$\xi^2 + \eta^2 - (\zeta - c)^2 = a^2;$$

levá strana této rovnice jest však čtverec společné tečny t (1,6) cyklů (S) a (P), a tedy $t^2 = a^2$.

Cyklický obraz cyklografické koule v obecné poloze jest kongruence cyklů, jež od středového cyklu (S) mají konstantní tečnovou vzdálenost rovnou poloměru hrdlové kružnice.

Jiný význam této kongruence dostaneme, vyjádříme-li kosinus úhlu stopní kružnice $[K]$ o středu O a poloměru r s kružnicí $[P]$, jež odpovídá obecně položenému bodu cyklografické koule. Buď $\overline{OP_1} = v$, úhel kružnic φ, pak jest (1,5)

$$v^2 = r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta\cos\varphi.$$

Dosaďme za v^2 a r^2; dostaneme

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 - c^2 - a^2 + 2r\zeta\cos\varphi = 0.$$

Uvážíme-li, že P leží na cyklografické kouli, máme

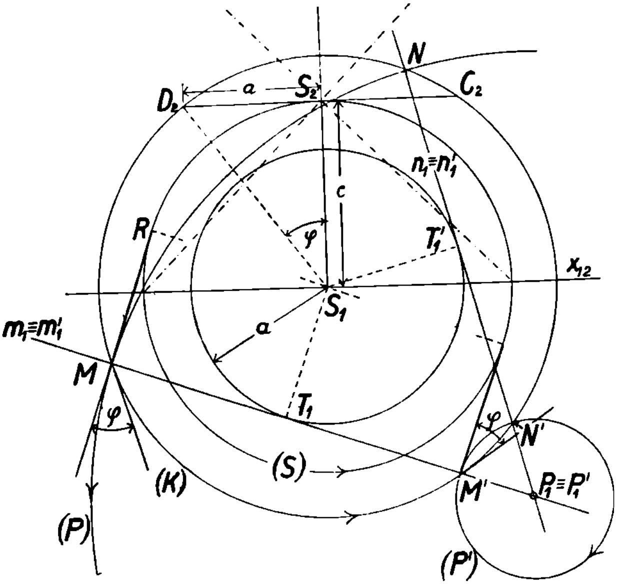
$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 - c^2 - a^2 + 2\zeta c = 0,$$

odkud

$$r\cos\varphi = c, \quad \cos\varphi = \frac{c}{r}.$$

Veličina c má určité znaménko; jestliže orientujeme také stopní kružnici, říkejme pak *stopní cykl,* má i r určité znaménko a vidíme:

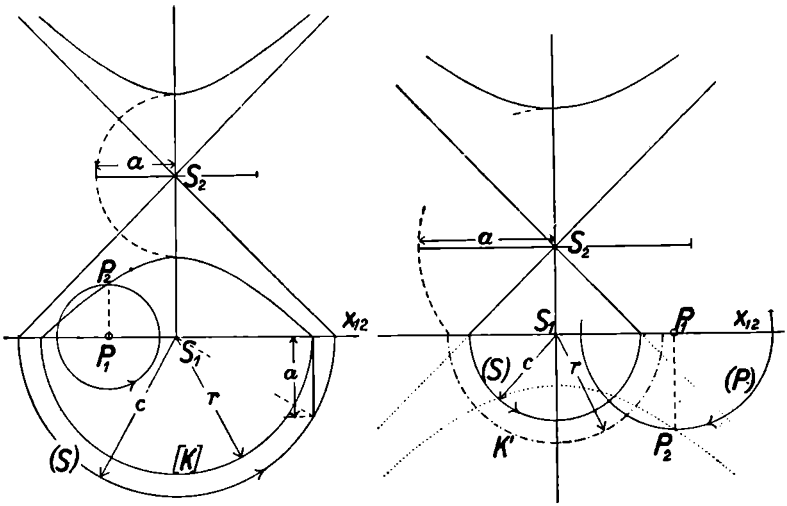
Uvažovaná kongruence je souhrn cyklů, které stopní cykl (K) *sekou v úhlu, jehož kosinus je konstantní a roven* $\frac{c}{r}$, *kde* c *je poloměr středového,* r *poloměr stopního cyklu.* Je tedy tato kongruence *isogonální kongruence* se základním cyklem (K).



Obr. 29.

Cyklografická koule je určena středem S a poloměrem a hrdlové kružnice (poloměrem cyklografické koule) anebo cyklem (S) a stopním cyklem (K), což se pro účely konstruktivní nejlépe hodí. Proberme různé případy tohoto určení.

a) Stopní cykl (K) je reálný a vně středového cyklu (S) (obr. 29). Cyklografická koule je jednodílný hyperboloid. Druhá průmětna je volena osou cyklografické koule, sestrojeno S_2 a asymptoty meridiánu. Ve sklopení leží koncové body C_2, D_2 reálné osy na kružnici [K] dle vztahu $r^2 = a^2 + c^2$. Obrys v půdorysně je kružnice s poloměrem a. Bod P_1 v průmětně je půdorysem dvou bodů na cyklografické kouli, bodů P a P'; prvním jdou přímky m, n, druhým m', n'. V obraze jeví se jako tečny obrysové kružnice, takže $m_1 \equiv m_1'$, $n_1 \equiv n_1'$. Vertikální roviny (mm'), (nn') jsou tečné roviny v bodech T, T' hrdlové kružnice. Povrchové přímky mají ovšem odchylku půdorysnou 45°. Bodu P na hořejší polovině patří cykl (P), který jde stopníky M, N přímek m, n; bodu P' na dolejší polovině patří cykl (P') jdoucí body M', N'.



Obr. 29a, b.

Tečnová vzdálenost cyklu (S) od jednoho nebo druhého cyklu jest v obraze silněji vyznačena. Rovněž tak vyznačen úhel φ cyklu (K) s prvým neb druhým cyklem.

Pohybuje-li se bod P po površce m, opíše cykl (P) parabolický svazek. Všechny se v bodě M dotýkají tečny MR cyklu (S). Tato tečna je cykl zvrhlý patřící bodu nevlastnímu přímky m. Tečné paprsky cyklu (S) patří také uvažované kongruenci cyklů a jsou obrazy nevlastních bodů cyklogr. koule.

b) $[K]$ je reálné a uvnitř (S) (obr. 29a). Volme druhou průmětnu jako dříve. Jedná se o sestrojení meridiánu z asymptot a jednoho bodu. Z rovnice $a^2 = c^2 - r^2$ je patrno sestrojení úsečky a. Hrdlová kružnice má poloměr ai, cyklografická koule je dvoudílný hyperboloid. Tečnová vzdálenost je imaginární ai; pro úhel φ máme $\cos\varphi = \frac{c}{r} > 1$, tedy úhel je také imaginární (1,3). Cykl kongruence leží uvnitř cyklu (S) i (K) nebo je objímá, pokud poloměr je různý od nuly.

Je-li $r = 0$, přejde $[K]$ v bod, $\cos\varphi$ roste do nekonečna, úhel φ je neurčitý, tečnová vzdálenost cyklu kongruence od cyklu (S) jest ai.

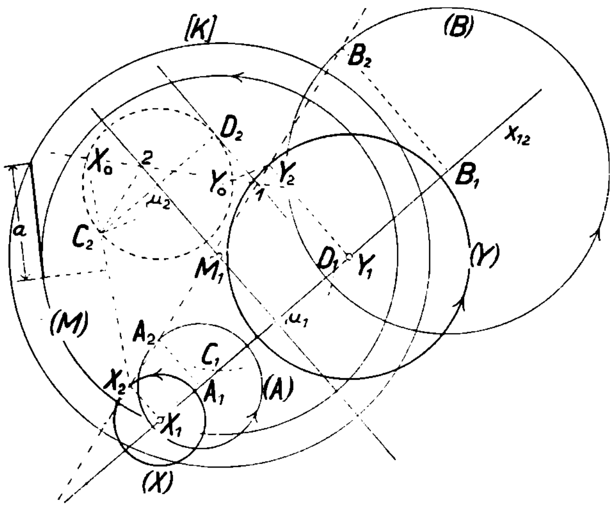
c) $[K]$ jest imaginární (obr. 29b). Její zástupkyní jest reálná kružnice K' o poloměru r. Při téže volbě druhé průmětny jako v případech předešlých jest rovnice meridiánu $(z - c)^2 - x^2 = a^2$ a hoví mu bod $(\pm ri, 0,0)$, tedy $c^2 + r^2 = a^2$, z čehož ihned plyne konstrukce délky a. Hyperboloid je dvoudílný, tečnová vzdálenost od cyklu (S) imaginární ai (ač kružnice mohou mít společné reálné vnější tečny), kosinus úhlu φ je rovněž imaginární $\frac{c}{ri}$.

4,4. Body společné dvěma neb třem cykl. koulím. Dvě cyklografické koule H, L o středech A, B mají obecně mimo základní kuželosečku C v nevlastní rovině společnou ještě cyklografickou kružnici r v rovině ϱ. Obě kuželosečky se sekou v nevlastních bodech U, V na průsečnici roviny ϱ s rovinou nevlastní. V těchto bodech se obě plochy dotýkají a tečné roviny společné jsou současně tečnými rovinami obou asymptotických kuželů a sekou se tedy ve spojnici středů AB obou ploch. Přímky UV, AB jsou reciproké poláry obou ploch. Průsečná kuželosečka r má tedy střed na AB. Její rovina ϱ má za stopu na průmětně π chordálu stopních kružnic $[H]$, $[L]$, jež spojuje jejich společné body, a je rovnoběžná s rovinou ϱ', ve které leží průsečná křivka asymptotických kuželů. Ostatně víme, že obě tyto roviny jsou rovnoběžny s polární rovinou přímky AB k jednomu i druhému kuželu (3,3).

Tři cyklografické koule H, L, M mají mimo C jen dva body obecně v konečnu společné. Neboť na př. prvé dvě mají společnou cyklografickou kružnici, která s třetí plochou má mimo dva body v nevlastní rovině na C ještě dva další X, Y v konečnu, jež současně leží na všech třech plochách. Přímkou XY jdou roviny všech tří kuželoseček společných vždy dvěma z ploch H, L, M.

Úloha 1. *Lineární řada cyklů je dána dvěma cykly* (A), (B). *Sestrojte cykl této řady,* a) *který od daného cyklu* (M) *má tečnovou vzdálenost* a, b) *který seče cykl* (K) *v úhlu* φ($\cos\varphi = \frac{2}{3}$).

a) *Rozbor.* Lineární řadě cyklů patří v prostoru přímka AB. Kongruenci cyklů, které mají od cyklu (M) tečnovou vzdálenost a, patří cyklografická koule o středu M. Stopní kružnice $[K]$ má poloměr $r = \sqrt{a^2 + c^2}$, kde $c = z_M$. Hledané cykly odpovídají průsečíkům přímky AB s touto cykl. koulí.



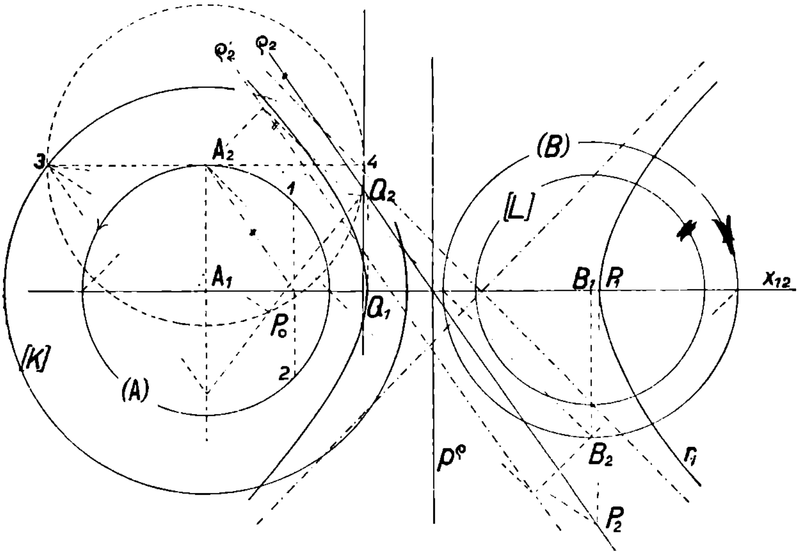
Obr. 30.

Sestrojení je v obr. 30. Poloměr r kružnice $[K]$ sestrojen jak z obrázku patrno. Abychom sestrojili průsečíky přímky AB s cykl. koulí, volme promítací rovinu této přímky za druhou průmětnu a otočme kol $x_{12} \equiv A_1B_1$ do průmětny. Tato rovina seče cykl. kouli v rovnoosé hyperbole. Střed μ je na kolmici spuštěné z bodu M k rovině hyperboly, hlavní osa $\overline{CD} = \overline{C_1D_1}$ je určena průsečíky s hrdlovou kružnicí o středu M a poloměru a. Teď jest určiti průsečíky přímky A_2B_2 s hyperbolou. To provedeno užitím kolineace hyperboly s kružnicí nad průměrem C_2D_2 (1,9). C_2 je střed kolineace, tečna v D_2 je osa kolineace. Přímce A_2B_2 odpovídá přímka *12*, jež dává průsečíky X_0, Y_0. Z nich odvozeno X_2, Y_2 a konečně X_1, Y_1.

b) *Rozbor.* Příslušná cyklografická koule má stopní cykl (K) s poloměrem r. Poloměr středového cyklu vychází ze vztahu $c = r\cos\varphi = \frac{4}{5}r$.

Sestrojení přenecháváme čtenáři.

Úloha 2. *Dána je cyklografická koule K stopní kružnicí $[K]$ a středovým cyklem (A), podobně druhá L stopní kružnicí $[L]$ a středovým cyklem (B). Sestrojiti jest průsečnou cyklografickou kružnici.*

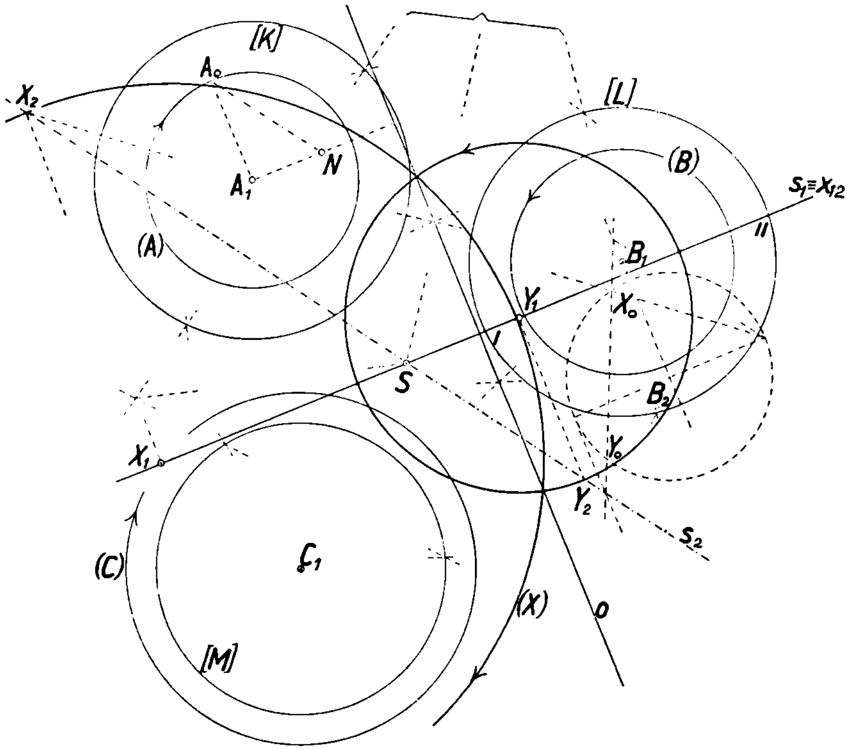


Obr. 31.

Sestrojení vyplývá z výkladu odstavce předchozího (obr. 31). Buď průsečná křivka r, její rovina ϱ, ϱ' rovina s ní rovnoběžná, ve které leží společná křivka kuželů $A(A)$, $B(B)$. Volme promítací rovinu přímky AB za druhou průmětnu a sdružme s prvou. Známým způsobem vychází ϱ_2' . p^ϱ je chordála kružnic $[K]$, $[L]$, ϱ_2 je rovnoběžno s ϱ_2'. Rovina bodem A rovnoběžná s ϱ (polární rov. přímky AB ke kuželu) seče cykl (A) v bodech *1*, *2*. *A1*, *A2* jsou rovnoběžny s asymptotami křivky r. Koncové body reálné osy P, Q jsou průsečíky ϱ_2 s meridiánem plochy K ležícím v druhé průmětně, jenž je určen středem A_2 a reálnou osou *3*, *4*, a sestrojeny způsobem známým (Q_0 není v obrazu označeno).

Poznámky. Půdorys r_1 jest geom. místem středů všech cyklů, které od cyklů (A), (B) mají konstantní tečnové vzdálenosti rovné poloměrům hrdlových kružnic. Jsou-li stopní kružnice orientovány, sekou je cykly uvedené řady v úhlech s konstantními kosiny.

Průsečná křivka r je elipsa, hyperbola nebo parabola dle toho, jsou-li body dotyku obou cykl. koulí U, V imaginárné, reálné nebo



Obr. 32.

splývající čili spojnice středů AB uvnitř obou asymptotických kuželů, vně anebo dotýkají-li se podél celé přímky.

Úloha 3. *Sestrojte průsečíky tří cyklografických koulí* K, L, M. *Stopní kružnice buďte* $[K]$, $[L]$, $[M]$, *středové cykly* (A), (B), (C).

Rozbor. Dle předcházejícího výkladu jsou společné body X, Y na přímce s, ve které se sekou tři roviny obsahující průsečnou kuželosečku vždy dvou a dvou z daných ploch, označme je ϱ_{KL}, ϱ_{KM}, ϱ_{LM}. Ale na př. ϱ_{KL} je rovnoběžno s polární rovinou přímky AB ke kuželu $A(A)$, ϱ_{KM} je rovnoběžno s polární rovinou přímky AC k témuž kuželi, tedy s je rovnoběžno s polárou roviny (ABC) ke kuželu $A(A)$. Odtud plyne velmi jednoduchá konstrukce.

Sestrojení je provedeno v obr. 32. S je bod stejných mocností kružnic $[K]$, $[L]$, $[M]$, o je osa podobnosti cyklů (A), (B), (C) čili stopa roviny (ABC), N její pól ke kružnici $[A]$, AN tedy polární přímka roviny (ABC) ke kuželu $A(A)$. Přímka s jde bodem S rovnoběžně s AN. Konečně jsou sestrojeny průsečíky X, Y přímky s s cykl. koulí L.

Úloha 4. *Jsou dány cykly* (K), (L), (M). *Sestrojte cykl, který seče prvý v úhlu* φ_1, *druhý v úhlu* φ_2 *a třetí v úhlu* φ_3. (*Volme* $\cos\varphi_1 = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi_2 = -\frac{3}{2}$, $\cos\varphi_3 = \frac{2}{3}$).

Hledané cykly jsou společné třem isogonálním kongruencím určeným danými cykly a příslušnými kosiny. Jim jsou v prostoru přiřaděny tři cyklografické koule K, L, M, jež mají společné dva body; těm odpovídají hledané cykly.

Sestrojení přenecháváme čtenáři.

Poloměry cyklů středových čili kóty středů cykl. koulí plynou ze známého vzorce: $a = r_1\cos\varphi_1 = \frac{3}{5}r_1$, $b = r_2\cos\varphi_2 = -\frac{3}{2}r_2$, $c = r_3\cos\varphi_3 = \frac{2}{3}r_3$. Cykl (A) je tedy stejnosměrný s (K), (B) opačného smyslu s (L) a (C) téhož smyslu jako (M). Dále nutno sestrojiti bod S stejných mocností kružnic $[K]$, $[L]$, $[M]$ a osu podobnosti cyklů (A), (B), (C). Další konstrukce jako v předešlé úloze.

Cvičení 4,4,1. Dán jest cykl (K) a paprsek p a na něm bod P. Sestrojte cykl, který seče cykl (K) v úhlu $\pm 30°$ a dotýká se paprsku p v bodě P.

4,4,2. Dány jsou paprsky a, b a cykl (M). Sestrojte cykl, který seče a, b v úhlech s danými kosiny (na př. $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$) a mimo to a) má od cyklu (M) danou tečnovou vzdálenost (na př. ai), b) seče cykl (M) v úhlu s daným kosinem (na př. $\frac{3}{2}$).

4,4,3. Sestrojte cykl, který seče tři cykly v úhlech s danými kosiny (na př. $\sqrt{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$). Volte některý cykl imaginární nebo některý kosinus imaginární (na př. $\frac{1}{2}i$).

4,4,4. Sestrojte cykl, který a) má od cyklu (A) tečnovou vzdálenost a, od cyklu (B) teč. vzdálenost b a půlí kružnici $[C]$, b) dotýká se cyklů (A), (B)

a seče cykl (C) v daném úhlu, c) půlí kružnici $[A]$, seče kolmo kružnici $[B]$ a seče cykl (C) v daném úhlu.

4,4,5. Dány jsou cykly (A), (B). Co tvoří cykly, jež mají od obou stejné tečnové vzdálenosti? [*Návod*: Dvě cyklografické koule o stejném poloměru hrdlové kružnice mají rovnice

$$(x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 - (z - \gamma_i)^2 - t^2 = 0, \quad (i = 1,2),$$

kde α_i, β_i, γ_i jsou souřadnice středu. Odečtením dostaneme rovnici roviny ϱ společné kuželosečky

$$2x(\alpha_1 - \alpha_2) + 2y(\beta_1 - \beta_2) - 2z(\gamma_1 - \gamma_2) + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \ldots = 0.$$

Tato je nezávislá na t a leží v ní i společná křivka obou cyklografických kuželů $A(A)$, $B(B)$. Jde tedy půlícím bodem úsečky $\overline{AB}$ a polárou nevlastního bodu přímky AB k základní kuželosečce C. Hledané cykly tvoří tedy cyklické pole. Nalezená rovina ϱ (zobecnění roviny symetrie dvou bodů) je geom. místem středu cyklografické koule, která jde body A, B.

4,4,6. Co tvoří cykly, které mají od tří cyklů stejné tečnové vzdálenosti?

4,4,7. Sestrojte cykl, který má od čtyř cyklů rovné tečnové vzdálenosti. Příslušný bod v prostoru je střed cyklografické koule, jež jde danými čtyřmi body. (Srovnej úlohu: čtyřmi body sestrojiti jest kouli).

4,4,8. Sestrojte cykl, který má stejné tečnové vzdálenosti od cyklů (A) a (B), právě tak od cyklů (C) a (D) a od (E) a (F) (Viz cvičení 4, 4,5).

4,5. Svazek cyklografických koulí. Buďte dány dvě cyklografické koule v obecné poloze

$$\begin{aligned} H &\equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - (z - c_1)^2 - m^2 = 0, \\ K &\equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - (z - c_2)^2 - n^2 = 0; \end{aligned} \tag{1}$$

stopní kružnice buďte $[H]$, $[K]$, středy S_H, S_K. Jimi je určen svazek ploch $H + \lambda K = 0$, kde λ probíhá všechny hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$. Basis svazku jsou dvě kuželosečky, základní kuželosečka C v rovině nevlastní a průsečná cyklografická kružnice r ploch H, K v rovině ϱ. Obecná plocha svazku je opět cyklografická koule. Její střed jest

$$S_\lambda \left(\frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda}, \ \frac{b_1 + \lambda b_2}{1 + \lambda}, \ \frac{c_1 + \lambda c_2}{1 + \lambda} \right);$$

stopa na průmětně $(z = 0)$

$$\begin{aligned} &(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2 - m^2 + \\ &+ \lambda[(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2 - n^2] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Středy cyklografických koulí svazku vyplňují přímku $s(\equiv AB)$, *cyklické obrazy středů vyplňují lineární řadu cyklů. Stopní kružnice tvoří svazek.* Bod přímky s je středem jedné plochy svazku, kružnice svazku je stopou také jen jedné plochy svazku. Mezi plochami svazku jsou dva cyklografické kužele (pokud r není parabola) a jedna plocha rozpadlá ve dvojinu rovin, t. j. ϱ a rovinu nevlastní ($\lambda = -1$). Jedna plocha svazku má střed S v průmětně π; S je stopa přímky s.

Cyklografická kružnice r určuje svazek cyklografických koulí.

Z těchto prostorových vztahů vyplývá cyklografickou projekcí řada vět pro geometrii cyklů v rovině. Orientujme stopní kružnice a mluvme o stopních cyklech. Ploše H odpovídá kongruence cyklů, které sekou stopní cykl (H) v konstantním úhlu $\varphi_1(\pm)$, ploše K odpovídá kongruence cyklů, které sekou (K) v konstantním úhlu φ_2, křivce r patří tedy řada cyklů, jež sekou (H) v úhlu φ_1 a současně (K) v úhlu φ_2. Ale křivkou r jde svazek cyklografických koulí a je-li L jedna z nich, pak jí v průmětně π odpovídá kongruence, jež obsahuje i řadu r a jejíž cykly sekou stopní cykl (L) v konstantním úhlu φ_3. Tedy:

Cykly, které sekou dva dané cykly (H), (K) v konstantních úhlech φ_1, φ_2, sekou libovolný cykl svazku jimi určeného také v konstantním úhlu φ_3.

Máme-li na mysli tečnové vzdálenosti, lze říci:

Cykly, které mají od cyklů (S_H), (S_K) tečnové vzdálenosti konstantní (m, n), mají konstantní tečnovou vzdálenost od každého cyklu lineární řady jimi určené.

Ploše svazku cykl. koulí se středem S v π patří trs cyklů kolmých ke stopní kružnici, tedy:

Cykly, které sekou (H), (K) v konstantních úhlech φ_1, φ_2, sekou kolmo jednu kružnici svazku; její střed je středem podobnosti cyklů (S_H), (S_K). (Viz 3,2, poznámka).

Ve svazku ploch $H \,.\, K$ jsou dva kužele a jedna dvojice rovin (zahrnující rovinu nevlastní), tedy:

Cykly, které sekou cykly (H), (K) v konstantních úhlech φ_1, φ_2, dotýkají se dvou cyklů svazku a sekou také chordálu v konstantním úhlu.

Uvedené dva cykly jsou společné řadě středových a svazku stopních cyklů.

Jinak lze uvedené věty shrnouti takto:

Cykly, které se dotýkají dvou cyklů (M), (N), *jsou protaty každým cyklem svazku v konstantním úhlu a jsou kolmo protaty kružnicí tohoto svazku, jež má střed ve středu podobnosti daných cyklů.*

Tato kružnice sluje *potenční* čili *Steinerova* kružnice svazku (3,2).

Střed podobnosti cyklů S_H, S_K o poloměrech c_1, c_2 nesplývá obecně se středem podobnosti stopních kružnic, jež mají poloměry $\sqrt{c_1^2 + m^2}$, $\sqrt{c_2^2 + m^2}$. Podmínka, aby oba středy splynuly, jest $c_1 : c_2 = \sqrt{c_1^2 + m^2} : \sqrt{c_2^2 + m^2}$, neb dle (4,3) $r_H \cos\varphi_1 : r_K \cos\varphi_2 = r_H : r_K$, t. j. $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$.

Cykly protínající cykly (H), (K) v témž úhlu φ sekou kolmo potenční (Steinerovu) kružnici svazku $(H) . (K)$. Také obráceně cykly kolmé k této kružnici sekou cykly (H), (K) v úhlech o stejném kosinu. Píšeme-li v rovnici (1)

$$c_1 = r_H \cos\varphi, \quad c_2 = r_K \cos\varphi, \quad m = r_H \sin\varphi, \quad n = r_K \sin\varphi,$$

dostaneme

$$H \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - z^2 - r_H^2 + 2r_H\, z \sin\varphi = 0,$$
$$K \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - z^2 - r_K^2 + 2r_K\, z \sin\varphi = 0.$$

Při proměnném φ máme dva projektivní svazky cyklografických koulí. Vyloučením veličiny $\sin\varphi$ dostáváme rovnici

$$r_K H - r_H K = 0,$$

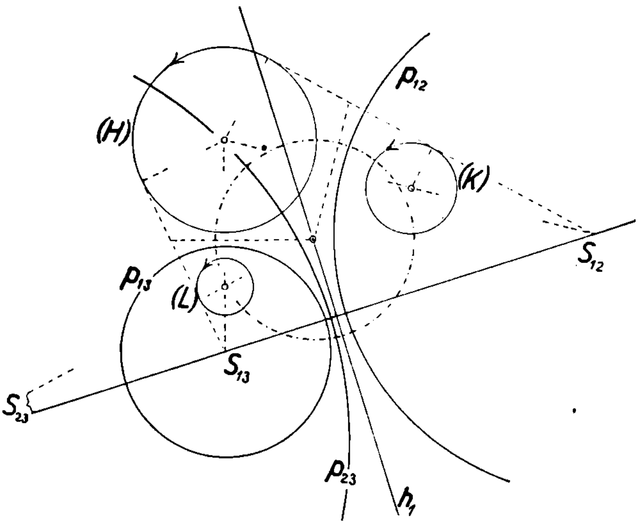
jež patří cyklografické kouli svazku $H . K$ a má střed

$$\left(\frac{a_1 r_K - a_2 r_H}{r_K - r_H}, \frac{b_1 r_K - b_2 r_H}{r_K - r_H}, 0\right)$$

ve středu podobnosti cyklů (H), (K).

Cykly, které sekou dva dané v úhlu o témž kosinu, tvoří trs. Jeho základní kružnice je potenční kružnice daných cyklů.

Teď můžeme zodpověděti otázku, co tvoří cykly, jež sekou tři dané cykly (H), (K), (L) v úhlech o témž kosinu. Cykly, které sekou cykly (H), (K) v úhlu o témž kosinu, tvoří trs a jemu v prostoru patří cyklogr. koule M_{12} se středem ve středu podobnosti S_{12} obou cyklů. Stopa její je potenční kružnice p_{12} (obr. 33). Podobně k cyklům (H), (L) patří cyklogr. koule M_{13} se středem S_{13} a potenční kružnicí p_{13} jako stopou. Plochy M_{12}, M_{13} sekou se v hyperbole h, jež leží v rovině kolmé k průmětně a má osu v průmětně. Jí odpovídá svazek kružnic, jež sekou všechny tři cykly v úhlech s týmiž kosiny. Hyperbolou h jde zřejmě i třetí hyperboloid M_{23} se středem S_{23} a hrdlovou kružnicí p_{23}. Máme tedy větu:



Obr. 33.

Potenční kružnice p_{12}, p_{13}, p_{23}, jež přísluší po dvou daným třem cyklům, tvoří svazek. Cykly, které sekou dané tři cykly v úhlech s týmiž kosiny, tvoří svazek s ním doplňkový (se středy na h_1).

Mezi těmito cykly jsou také soumístné cykly na kružnici, jež seče všechny tři kolmo, a také cykly, které se všech tří dotýkají. Je tedy znovu potvrzena věta, že tří cyklů se dotýkají dva cykly, jež s ortogonální kružnicí tvoří svazek, jehož chordálou je osa podobnosti daných cyklů (3,3).

4,6. Trs cyklografických koulí. Buďte dány tři cyklografické koule H, K, L o středech S_H, S_K, S_L rovnicemi

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - (z - c_i)^2 - m_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Píšeme-li jejich rovnice zkráceně $H = 0$, $K = 0$, $L = 0$, jest rovnice jedné koule trsu

$$H + \lambda K + \mu L = 0,$$

kde λ, μ nabývají libovolných hodnot. *Střed této plochy* jest

$$x = \frac{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3}{1 + \lambda + \mu}, \quad y = \frac{b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3}{1 + \lambda + \mu}, \quad z = \frac{c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3}{1 + \lambda + \mu}$$

a *vyplní tedy rovinu* σ, jejíž stopa je osou cyklického pole daného cykly (S_H), (S_K), (S_L). *Stopní kružnice* $[H]$, $[K]$, $[L]$ dané rovnicemi

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - c_i^2 - m_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

tvoří trs

$$[H] + \lambda[K] + \mu[L] = 0$$

a jsou všechny kolmé k téže kružnici, jejíž střed je bod stejné mocnosti kružnic $[H]$, $[K]$, $[L]$ (1,8).

Všechny plochy trsu jdou dvěma body X, Y, jež jsou společné třem daným plochám.

Bod roviny σ je středem jedné plochy trsu; opisuje-li bod přímku v rovině σ, opisuje příslušná plocha svazek a její stopa opisuje svazek kružnic. Bodům na stopě p^σ patří svazek cyklografických koulí, jež všechny jdou rovnoosou hyperbolou h ležící v rovině kolmé k průmětně π se středem a jednou osou v π. Příslušné věty v cyklické projekci zní:

Jsou-li dány cykly (H), (K), (L), pak existují dva cykly (X), (Y), jež je sekou v daných úhlech φ_1, φ_2, φ_3. Potom však každý cykl trsu $(H \,.\, K \,.\, L)$ seče cykly (X), (Y) v témž úhlu φ_4.

Jinak také:

Jsou-li dány cykly (S_H), (S_K), (S_L), existují dva cykly (X), (Y), jež mají od nich předepsané tečnové vzdálenosti. Potom však každý cykl cyklického pole $(S_H \,.\, S_K \,.\, S_L)$ má od obou tutéž tečnovou vzdálenost.

Body na p^σ jsou středy cyklografických koulí, které tvoří svazek a procházejí hyperbolou h, jež ovšem také jde body X, Y. Křivce h patří svazek kružnic obsahující kružnice $[X]$, $[Y]$; stopy uvažovaných cyklografických koulí se středy na p^σ tvoří svazek kružnic doplňkový s prvým se střednou p^σ. Tedy:

Cykly (X), (Y) *mají stopu* p^σ *za chordálu.*

Jako zvláštní případ dostaneme: Jsou-li H, K, L cyklografické kužele, (X), (Y) tedy cykly, které se dotýkají cyklů (H), (K), (L), pak se tyto cykly sekou na ose podobnosti cyklů (H), (K), (L).

Cvičení 4,6,1. Dány jsou cykly (A), (B) a jimi řada cyklů, jež seče (A) v úhlu $\varphi_1(\cos\varphi_1 = \frac{1}{2})$, (B) v úhlu $\varphi_2(\cos\varphi_2 = \frac{2}{3})$. Sestrojte kružnici kolmou ke všem cyklům řady a oba cykly, jež se dotýkají všech cyklů řady.

4,6,2. Řešte Apolloniův problém užitím potenčních kružnic. (*Návod:* Potenční kružnice p_{12}, p_{13}, p_{23} tvoří svazek a hledané cykly patří doplňkovému svazku).

4,6,3. Sestrojte cykl, který seče cykly (A), (B), (C) ve stejném úhlu, cykl (D) v úhlu daném ($\cos\varphi = \frac{3}{4}$ nebo 2).

4,6,4. Dokažte: Cykly, které sekou dva cykly (A), (B) v úhlech φ_1, φ_2, pro něž platí $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 =$ konst., tvoří trs a základní jeho kružnice patří svazku (A), (B). Dle toho řešte úlohu: Dány jsou čtyři cykly; sestrojte cykl, který je seče v úhlech, pro něž platí $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_3 : \cos\varphi_4 = 2 : 3 : 4 : 5$.

4,6,5. Dokažte: Cykly, které mají od cyklů (A), (B) tečnové vzdálenosti a, b s podmínkou $a^2 - b^2 = k^2$, vytvoří cyklické pole. Osa jeho je chordála kružnice $[B]$ a kružnice equitangenciální s $[A]$ ve vzdálenosti k.

4,6,6. Isogonální kongruence je dána čtyřmi cykly. Sestrojte základní kružnici, t. j. kružnici, jež všechny čtyři seče ve stejných úhlech. (Prostorové a planimetrické řešení!)

4,6,7. Jaké je geom. místo bodu dotyku dvou kružnic, které se dotýkají navzájem a dotýkají se současně kružnic $[A]$, $[B]$. (Návod: Orientujte dané kružnice a uvažujte i dotyk nevlastní).

V. CYKLICKÉ ZOBRAZENÍ BODOVÝCH TRANSFORMACÍ

Každé prostorové transformaci, kde bodu odpovídá bod, přísluší v průmětně π transformace, při které cyklu odpovídá cykl. Je-li prostorová transformace kolineace, pak přímce odpovídá přímka, rovině rovina, což se v π jeví tak, že lineární řadě cyklů odpovídá lineární řada a cyklickému poli opět cyklické pole. Nás zajímají transformace, které vedou k novým vztahům v geometrii cyklů a to jsou zřejmě ty, které nechávají nezměněnu základní kuželosečku C v rovině nevlastní. Grupa těchto *automorfních kolineací křivky C* tvoří obdobu tak zvané *hlavní grupy* euklidovské geometrie.

Hlavní grupa euklidovské geometrie v prostoru obsahuje ∞^7 afinních transformací (t. j. transformace závisí na sedmi parametrech), jež nechávají v klidu absolutní kuželosečku J danou v pravoúhlé soustavě rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0.$$

Útvar geometrický je obecnou transformací této grupy převeden v podobný. Tato hlavní grupa obsahuje jako podgrupu *grupu pohybovou*, jež obsahuje ∞^6 transformací, které nechávají nezměněné (invariantní) i délky, převádějí tedy útvar v útvar shodný. Hlavní grupu lze složiti z pohybů a podobností centrálních. Zajímavou úlohu v prostoru hraje *pravoúhlá symetrie dle roviny*. Pohyb (přemístění útvaru v prostoru) lze vytvořiti sudým počtem symetrií po sobě jdoucích. Lichý počet symetrií dává *překlopení* (shodnost se změnou smyslu). *Pohyby* a *překlopení* tvoří *smíšenou grupu*. Nejjednodušší pohyby jsou: *Translace* čili *posouvání*, při kterém celá nevlastní rovina zůstává v klidu, *rotace* kolem přímky a *pohyb šroubový*.*)

Nahraďme nyní absolutní kuželosečku reálnou kuželosečkou C v rovině nevlastní ω. Místo euklidovské geometrie dostáváme *pseudogeometrii* a její hlavní grupa L_7 sestává ze všech reálných afinních

*) KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ: Deskriptivní geometrie, II, str. 912.

transformací, pro které křivka C je invariantní. Každá taková transformace indukuje na C projektivnost. Omezíme se jen na dvě nejjednodušší transformace a to ty, jež odpovídají posouvání a symetrii dle roviny v euklidovském prostoru.

5,1. Dilatace. Pošinutí čili translace je pohyb, při kterém současně všechny body opisují dráhy rovnoběžné a stejně dlouhé. Pošinutí je dáno vektorem, jehož počáteční bod je původní poloha jednoho bodu, koncový bod jeho poloha výslední. Pošinutí lze vždy rozložiti v pošinutí rovnoběžné s průmětnou π a pošinutí kolmé ku π. Prvému odpovídá pošinutí cyklů v průmětně a nemá zajímavosti. Pošinutí ve směru kolmém k průmětně vede k transformaci cyklů, jíž zoveme *dilatací*. Je-li vektor (úsečka daná délkou i znaménkem) udávající pošinutí ve směru osy OZ d, pak bod $A(x, y, z)$ přejde v $A'(x, y, z + d)$ a příslušný cykl (A) o poloměru z přejde v cykl o poloměru $z + d$. Bod v průmětně přejde v cykl o poloměru d. Jsou-li A, B body na „isotropické" přímce, mají cykly (A), (B) vlastní dotyk a přejdou dilatací v cykly (A'), (B'), které se opět dotýkají. Dilatace je *dotyková transformace*. Tečnová vzdálenost cyklů (A), (B), kterým v prostoru patří body $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, jest dána výrazem (1,6)

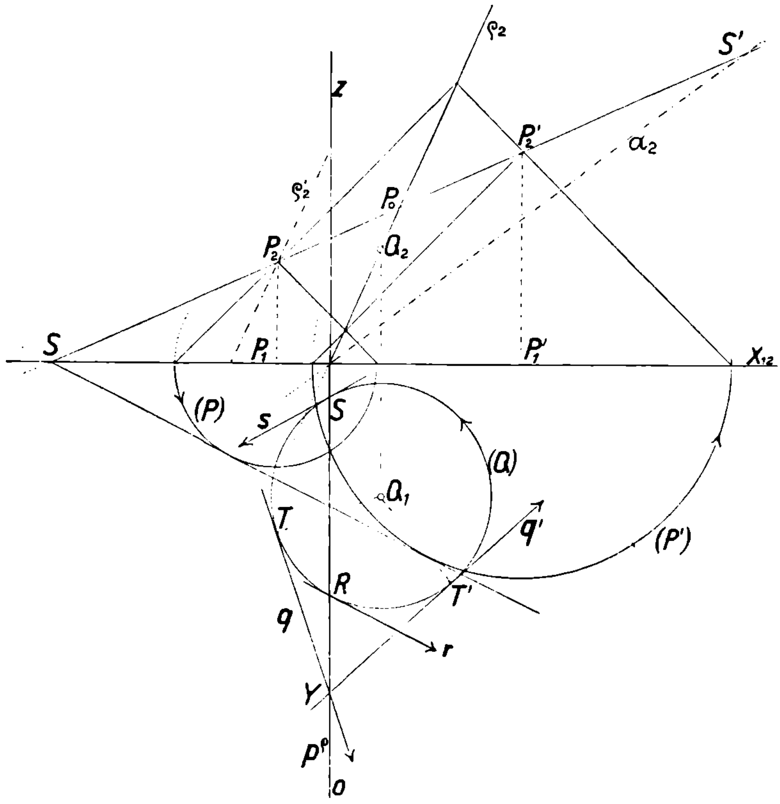
$$t^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2,$$

který transformací $z' = z + d$ se nemění. *Tečnová vzdálenost dvou cyklů je tedy při dilataci invariantem.*

5,2. Laguerrova inverse. Uvažujeme o transformaci, jež v naší pseudogeometrii tvoří obdobu euklidovské symetrie dle roviny ϱ.

V *euklidovské* symetrii je bodu P přiřaděn bod P', takže PP' je kolmé k rovině ϱ čili nevlastní bod P_∞ přímky PP' a nevlastní přímka r_∞ roviny ϱ jsou polárně sdruženy k absolutní kuželosečce J v rovině nevlastní. Dále jest $\overline{PP_0} = \overline{P_0P'}$, kde P_0 je průsečík přímky PP' s rovinou ϱ.

Buď nyní dána v naší *pseudogeometrii* opět rovina ϱ s nevlastní přímkou r_∞ a buď R_∞ pól přímky r_∞ k základní kuželosečce C. Bodu P přiřaďme P', takže PP' jde bodem R_∞ a $\overline{PP_0} = \overline{P_0P'}$, kde P_0 je opět průsečík PP' s ϱ. Máme tedy *perspektivní afinitu* se samodružnou rovinou ϱ a směrem R_∞ neboli *šikmou symetrii*, jež v naší pseudogeometrii hraje tutéž úlohu jako kolmá symetrie v geometrii euklidovské. Jak se jeví tato „symetrie“ v cyklickém zobrazení? Volme promítací rovinu přímky PP' za druhou průmětnu (obr. 34). PP' je polární přímka kuželu $P(P)$ k rovině $\varrho' \parallel \varrho$. Z obrázku je ihned patrno, že kužele $P(P)$ a $P'(P')$ sekou ϱ v téže kuželosečce. Přidružené cykly



Obr. 34.

(P), (P') mají stopu p^{ϱ} za chordálu. V uvažované afinitě odpovídá přímce bodem P přímka bodem P', která se s ní seče na ϱ, speciálně přímce na kuželi $P(P)$ přímka kuželu $P'(P')$. *Komplex přímek sekoucích základní kuželosečku C jest při této transformaci invariantní*, jinak řečeno „*isotropická*“ *přímka přechází opět v přímku* „*isotropickou*“.

Společné tečné paprsky cyklů (P), (P') jako stopy rovin s odchylkou $45°$ jdoucích přímkou PP' *mají stálý směr*, poněvadž paprsky afinity PP', QQ' atd. jsou spolu rovnoběžné. Je-li Q bod roviny ϱ, splývá s Q', tedy *cykly cyklického pole* (ϱ) *odpovídají samy sobě*; paprsek afinity bodem Q má za stopník pól přímky p^ϱ ku (Q), tečny r, s v průsečících p^ϱ s (Q) udávají směr společných tečných paprsků přidružených cyklů.

Jsou-li body A, B na přímce „isotropické", t. j. sekoucí C, přejdou afinitou v body A', B', které jsou opět na jiné přímce sekoucí C. Cykly (A), (B) se dotýkaly, také se dotýkají cykly (A'), (B'). Naše transformace zachovává dotyk, je to *dotyková transformace.*

Cykl (P) může přejíti v bod, padne-li P' do π. Místo bodů P, kterým odpovídají body P' v π je rovina α, jež v uvažované afinitě odpovídá rovině π (v obraze $\overline{SP_0} = \overline{P_0S'}$).

Chceme-li uvažovanou afinitu vyjádřiti analyticky, volme osy pravoúhlé soustavy jak ukazuje obr. 34. Pak rovina ϱ má rovnici $z = \frac{x}{\lambda}$ a směr paprsků afinity je $z = \lambda x$.*) Jsou-li dva přiřazené body $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ jest dle toho

$$y = y', \quad \frac{z' + z}{x' + x} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{z' - z}{x' - x} = \lambda.$$

Z těchto rovnic snadno vypočteme

$$x' = -\frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} x + \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} z, \; y' = y, \; z' = -\frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} x + \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} z$$

nebo, píšeme-li $\lambda = \operatorname{cotg} \alpha$,

$$x' = \frac{x}{\cos 2\alpha} - z \operatorname{tg} 2\alpha, \; y' = y, \; z' = x \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{z}{\cos 2\alpha}.$$

Buďte $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ dva body a $A'(x_1', y_1', z_1')$, $B'(x_2', y_2', z_2')$ body jim odpovídající; pak ukazuje snadný výpočet, že

$$(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 - (z_1' - z_2')^2 =$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2,$$

tedy výraz

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

je *absolutní invariant.* Nazývejme d cyklografickou vzdáleností bodů

*) Je-li $\lambda = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \alpha)$, jest $1 : \lambda = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \alpha)$.

A, B. V průmětně π jí odpovídá tečnová vzdálenost cyklů (A), (B). *V Laguerrově inversi je tečnová vzdálenost invariantní.*

Uvažovanou transformaci v průmětně π lze také považovati za transformaci, jež převádí paprsek v jiný paprsek. Buď α rovina v prostoru, α' rovina přiřaděná v kosoúhlé symetrii. Obě se sekou v přímce a na samodružné rovině ϱ. Dotýká-li se rovina α křivky C, dotýká se i rovina α' křivky C a průsečnici a odpovídá řada cyklů o společných tečných paprscích a', a''. Tímto způsobem je paprsku a' přiřaděn paprsek a'', neboť a' je stopa jediné „isotropické“ roviny α (1,2), která seče rovinu ϱ v přímce a a touto prochází ještě druhá „isotropická“ rovina α'' se stopou a''. Máme tedy v průmětně π involuční paprskovou transformaci. Přiřaděné paprsky se sekou na stopě p^{ϱ}, rovnoběžným paprskům odpovídají opět paprsky rovnoběžné.

Je-li odchylka roviny ϱ větší než 45°, pak jsou v ϱ dvě osnovy paprsků a s odchylkou 45°. Pro takový paprsek splývají stopy „isotropických“ rovin, $a' \equiv a'' \perp a_1$, a máme tedy v π dvě osnovy paprsků samodružných. Je-li Q bod v ϱ, seče cykl (Q) stopu $o \equiv p^{\varrho}$ ve dvou reálných bodech R, S a jejich tečné paprsky r, s jsou samodružné (obr. 34). Libovolnému jinému tečnému paprsku q cyklu (Q) patří tečný paprsek q' téhož cyklu a seče se s ním na stopě p^{ϱ}. Tečné paprsky cyklu (Q) si tedy navzájem odpovídají a tvoří involuci s osou o.

Ještě jednu vlastnost naší transformace nutno uvésti. Buď (Q) samodružný cykl q, q' pár korespondujících paprsků. Dle (1,4) jest

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{oq} \,.\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{oq'} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{or} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{os}$$

a tento stálý součin sluje mocnost paprsku o k cyklům kongruence (ϱ).

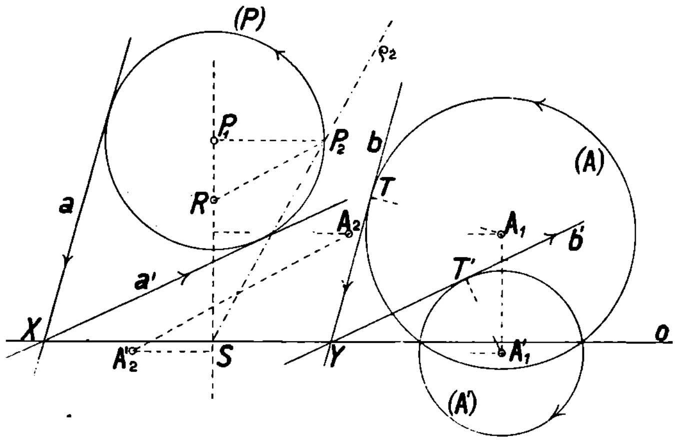
Teď vidíme, že uvažovaná transformace tvoří duální obdobu ke kruhové inversi. Je-li totiž bod O střed základní kružnice inverse, r její poloměr, pak spojnice inversních bodů A, A' jde středem O a jest $\overline{OA} \,.\, \overline{OA'} = r^2$. Duálně v naší transformaci paprsky přiřazené q, q' sekou se na ose $o \equiv p^{\varrho}$ a součin $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\widehat{oq} \,.\, \mathrm{tg}\frac{1}{2}\widehat{oq'}$ je konstantní.

Tuto transformaci poprvé uvádí LAGUERRE*) nezávisle na cyklografii; název *Laguerrova inverse* zavedl W. BLASCHKE**).

*) Oeuvres de Laguerre, sv. 2, str. 604—670.

**) Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene, Monatsh. Math. Phys. 21 (1910).

Všimněme si ještě jednou tečnové vzdálenosti, jejíž absolutní délka je ovšem invariant Laguerrovy inverse. Ona sama však mění smysl. Na př. v obr. 34 jest TY tečnová vzdálenost cyklu (Q) a cyklu (Y) s nulovým poloměrem. Její smysl se shoduje se smyslem paprsku q. Odpovídající tečnová vzdálenost $T'Y$ má však smysl protivný smyslu přidruženého paprsku q'. Tato poznámka je pro následující konstrukci důležitá.



Obr. 35.

Úloha. *Jest dána Laguerrova inverse osou o a samodružným cyklem* (P). *K cyklu* (A) *sestrojte přidružený cykl* (A') (obr. 35).

Osa o je stopou roviny ϱ, která jde bodem P. ϱ je základní rovina prostorové afinity a její směr jest dán přímkou PR, kde R je pól přímky o k cyklu (P). V obraze je volena rovina promítací odchylkové přímky PS za druhou průmětnu a sestrojeno ϱ_2. Cyklu (A) patří v prostoru bod A, jím veden paprsek afinity rovnoběžný s PR a sestrojen bod šikmo symetrický A', jemuž odpovídá hledaný cykl (A').

Konstrukci lze však rychle provésti i bez užití prostoru, užijeme-li vlastností L. inverse. Body A_1, A_1' jsou na normále k ose o, jež je chordálou cyklů (A), (A'). Sestrojme k cyklu (P) dva paprsky přidružené a, a', jež se sekou v X na ose o. Buď b paprsek rovnoběžný s a, který se dotýká cyklu (A); přidružený b' seče se s ním na o v Y a dotýká se cyklu (A'). Délky tečen z Y jsou stejné, tedy $\overline{TY} = \overline{YT'}$

(tyto délky jsou také tečnové vzdálenosti cyklu (A) a nulového cyklu (Y) a cyklu (A') a (Y), při čemž TY souhlasí se smyslem paprsku b, $T'Y$ je protivného smyslu s b'.) Tím je (A') určeno. Seče-li (P) osu o v reálných bodech, jsou paprsky tečné v nich r, s samodružné a rovnoběžné se společnými tečnými paprsky cyklů (A), (A').

Cvičení 5,2,1. Dána je Laguerrova inverse osou o a samodružným cyklem (P), který a) seče osu o v reálných bodech, b) neseče osu o v reálných bodech. Sestrojte: a) k danému cyklu v různých polohách cykl přidružený, b) k danému bodu cykl přidružený, c) k danému paprsku přidružený paprsek.

5,2,2. Dokažte: Dvě rovinná pole α, β, jež současně sekou C ve dvou reálných různých bodech nebo ve dvou bodech imaginárních, lze převésti v sebe dvojí „symetrií“ (pozorujte projektivnost na C). Dotýkají-li se obě roviny křivky C, lze to provésti nekonečně mnoha způsoby. Jaké věty z toho plynou pro cyklická pole?

5,2,3. Dokažte: Hyperbolické cyklické pole lze vždy L. inversí převésti v cyklické pole se středy na přímce.

5,2,4. Sledujte L. inversi, je-li rovina ϱ identická s průmětnou π (změna orientace), je-li rovnoběžna s π, neb kolmá ku π.

5,2,5. Jsou dány cykly (A), (B), (C). Sestrojte L. inversi, jež je převádí a) v cykly o témž poloměru, b) v cykly, které jdou daným bodem (kdy má úloha reálná řešení?).

5,2,6. Dány jsou cykly (A), (B), (C) a nechť osa podobnosti je neseče v reálných bodech. Sestrojte cykly, které se všech tří dotknou. (*Návod*: Sestrojte psymetrii“, při které rovina (ABC) přejde v π, dané cykly tedy v body. Konstrukci lze provésti snadno i bez použití prostoru, uvážíme-li na př., že je-li X střed „odobnosti cyklů (A), (B), kružnice která má střed X a seče cykl (A) kolmo, jde i bodem A', neboť délka tečny cyklů (X), (A) se nemění).

5,2,7. Dány jsou tři cykly jako v předešlé úloze. Sestrojte cykl, který od těchto tří daných cyklů má předepsané tečnové vzdálenosti t_1, t_2, t_3 (reálné nebo imag.). (*Návod*: Převeďte cykly v body a pak jest sestrojiti kružnici kolmou ke kružnicím o poloměrech t_1, t_2, t_3).

5,2,8. Sestrojte L. inversi, která převádí dva různé cykly (A), (B) ve dva cykly na téže kružnici (jen znaménkem různé). Kdy je úloha řešitelná?

5,3. Kruhová inverse. V geometrii kružnice (neorientované) čili t. zv. *Möbiusově geometrii* hraje důležitou úlohu kruhová inverse. Zodpovězme otázku, co odpovídá této transformaci v prostoru, přiřadíme-li kružnicím čili soumístným cyklům příslušné body v prostoru.

Kruhová inverse v rovině je dána rovnicemi

$$x' = k\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = k\frac{y}{x^2 + y^2}$$

a je to transformace involutorní: Patří-li bodu $P(x, y)$ bod $P'(x', y')$, patří obráceně bodu P' opět bod P. Poněvadž $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$, leží přidružené body na paprscích svazku $O(0, 0)$. Označíme-li

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varrho' = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

ukazují hořejší formule, že

$$\varrho \cdot \varrho' = k,$$

součin vzdáleností přidružených bodů od středu inverse O jest konstantní. k sluje mocnost inverse. Body samodružné vyplňují reálnou neb imaginární kružnici

$$x^2 + y^2 = k.$$

Singulární body této transformace, t. j. body, kterým neodpovídá jeden, ale nekonečně mnoho (∞^1) bodů, jsou zřejmě střed O a oba kruhové body v nekonečnu.

Přímce odpovídá kružnice jdoucí středem inverse O, křivce stupně n odpovídá obecně křivka stupně $2n$. Tento stupeň se ovšem sníží, prochází-li prvá křivka singulárními body. Tak kružnici odpovídá opět kružnice. Buď daná kružnice

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - r^2 = 0.$$

Dosadíme-li za x', y' a vypustíme faktor $x^2 + y^2$, dostaneme

$$(x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - 2k(\alpha x + \beta y) + k^2 = 0.$$

Označíme-li souřadnice středu a poloměr nové kružnice α', β', r', pak jsou tyto elementy s původními vázány vztahy

$$\alpha' = \frac{k\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}, \quad \beta' = \frac{k\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}, \quad r' = \frac{kr}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}.$$

Přiřadíme-li prvé kružnici bod ($x = \alpha$, $y = \beta$, $z = r$), druhé bod ($x' = \alpha'$, $y' = \beta'$, $z' = r'$) způsobem obvyklým, pak odpovídá kruhové inversi v rovině následující transformace prostorová

$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2 - z^2}, \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2 - z^2}, \quad z' = \frac{kz}{x^2 + y^2 - r^2}.$$

To není ovšem kolineace, ale kvadratická transformace, jež má opět jednoduchý geometrický význam. Buďte P, P' dva přiřaděné body. Pak spojnice PP' jde bodem O. Jsou-li dále

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}, \qquad \varrho' = \sqrt{x'^2 + y'^2 - z'^2}$$

cyklografické vzdálenosti bodů P, P' od středu O, jest

$$\varrho \,.\, \varrho' = k.$$

Body samodružné ($x' = x, y' = y, z' = z$) vyplní základní cyklografickou kouli

$$x^2 + y^2 - z^2 = k.$$

Přidružené body P, P' jsou k této ploše polárně sdružené, neboť jest

$$xx' + yy' - zz' = \frac{k(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2 - z^2} = k.$$

Uvedená prostorová transformace tvoří obdobu kulové inverse euklidovské geometrie. Nebudeme se jí dále zabývati, ani případem obecnějším, kde střed cyklografické koule je mimo průmětnu, neboť methoda Fiedlerovy cyklografie není vhodná pro úlohy spadající svou povahou do geometrie Möbiusovy, ve které se jedná o vlastnosti invariantní při kruhových inversích.

5,4. Pseudogeometrie (C-geometrie) a její vztah k cyklografii. Dle t. zv. stanoviska Kleinova *je euklidovská geometrie v prostoru studium invariantů vzhledem k transformacím hlavní grupy.* Taková vlastnost je na př. poměr hrany a poloměru koule opsané pravidelnému tělesu; nemění se při pohybech a podobnostních transformacích, je tedy invariantem. Studium takových vlastností je úkolem euklidovské geometrie.

Tento úkol lze zobecniti. Dána jest grupa prostorových transformací. Studujme vlastnosti a vztahy geometrických útvarů, které se nemění transformacemi této grupy. Vezměme grupu prostorových transformací, jež nechávají nezměněnu kuželosečku C

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad t = 0,$$

čili grupu *automorfních transformací* této kuželosečky. Omezme se jen na transformace, pro které je invariantní výraz

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

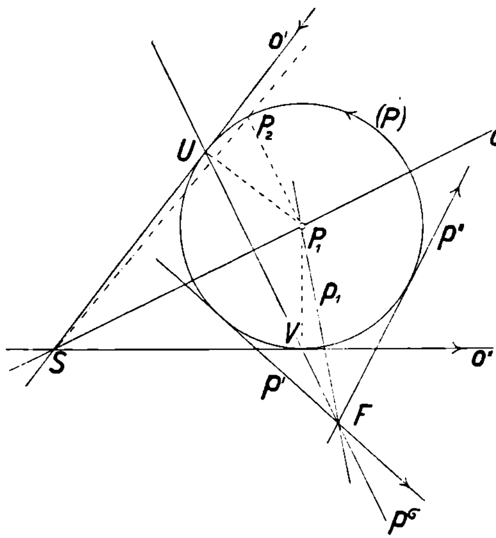
a jež tvoří tedy obdobu pohybové a smíšené grupy geometrie euklidovské. Nazývejme tuto pseudogeometrii *C-geometrií.* Výraz d^2 nazývejme *cyklografická vzdálenost* bodů $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

V předešlém odstavci byla probrána afinní transformace, jež jest obdobou kolmé symetrie dle roviny a má za obraz Laguerrovu inversi. Dvě euklidovské symetrie po sobě jdoucí dle rovin ϱ, σ dávají rotaci kolem průsečnice o o úhel rovný dvojnásobné odchylce obou rovin. Tři po sobě jdoucí symetrie dle rovin ϱ, σ, τ dávají otočení kolem jejich průsečíku. V C-geometrii hraje úlohu symetrie uvedená afinní transformace. Dvě „*symetrie*" po sobě provedené dávají „*rotaci*". Jsou-li roviny ϱ, σ k sobě „kolmé", t. j. sdružené dle C, pak máme „symetrii" dle osy $o \equiv (\varrho, \sigma)$. Bodu P patří P', při čemž PP' seče osu o a současně poláru o' jejího nevlastního bodu O^∞ vzhledem ku C a $\overline{PM} = \overline{MP'}$, kde M je průsečík s o.

„*Symetrie*" dle roviny, dle osy nebo středu jsou *involuční* transformace. „Symetrii" dle roviny odpovídá v π Laguerrova inverse. „Symetrii osové" odpovídá v π transformace, kterou lze také snadno sledovati. Paprsky „kolmé" k ose o odpovídají samy sobě a tvoří lineární kongruenci; všechny sekou o a poláru o'_∞ bodu O^∞ ku C. Obrazem této kongruence je paprsková transformace v průmětně π. Buď a' paprsek v π, jím jde jedna „isotropická" rovina, jež obsahuje jeden paprsek kongruence a, který seče o a o'_∞, tím jde ještě jedna „isotropická" rovina, jež má stopu a''.

Buď dána osa o průmětem o_1 (obr. 36), stopou S a oběma paprsky o', o''. Buď P bod na o, (P) jeho cyklografický průmět. Bodem P jde celý svazek paprsků kongruence v rovině σ „kolmé" ku o; její stopa p^σ je polára bodu S ku (P). Přímce $p \equiv PF$ svazku s vrcholem P v rovině σ je přiřaděn pár paprsků p', p'' tečných ku (P), svazku patří tedy paprsková involuce. V uvažované kongruenci jsou dvě osnovy „isotropických" paprsků obsažené v rovinách (oo'), (oo''). Vrcholy jsou průsečíky přímky o'_∞ s C, tedy nevlastní body přímek PU, PV. Jak se k danému cyklu neb danému paprsku sestrojí přidružený, přenecháváme čtenáři.

Při transformacích hlavní neb smíšené grupy euklidovské geometrie jsou dva základní invarianty: délka a úhel. Obdobné invarianty v C-geometrii jsou „délka“ definovaná výrazem d^2 dříve uvedeným a „úhel“. V euklidovské geometrii mějme přímky p, q s průsečíkem



Obr. 36.

S a v rovině jimi určené ať jdou bodem S isotropické přímky i_1, i_2. Pak úhel $\omega = \widehat{pq}$ souvisí s dvojpoměrem oněch čtyř přímek formulkou Laguerrovou

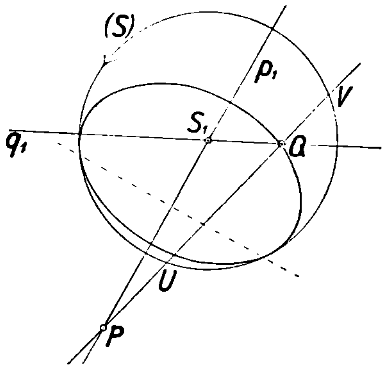
$$\omega = \tfrac{1}{2}\mathrm{i} \log(p, q, i_1, i_2)$$

Tato formulka béře se za definici úhlu v umělých geometriích. Jsou-li P_∞, Q_∞ nevlastní body přímek p, q, $U_{1\infty}, U_{2\infty}$ průsečíky roviny (pq) s C, pak „*úhel*“ jest dán vzorcem

$$\omega = \tfrac{1}{2}\mathrm{i} \log(P_\infty, Q_\infty, U_{1\infty}, U_{2\infty}).$$

Zde ovšem nutno rozeznávati případy, kdy průsečíky $U_{1\infty}, U_{2\infty}$ jsou reálné a kdy imaginárné.

Jak se jeví tyto invarianty v cyklografickém průmětu? „Vzdálenost“ bodů v prostoru jeví se jako tečnová vzdálenost příslušných cyklů. Připomenouti ještě dlužno, že poměr dvou „vzdáleností“ na téže přímce nebo na přímkách rovnoběžných rovná se poměru příslušných vzdáleností euklidovských. „Úhel“ nemá v obraze tak jednoduchý význam. Uveďme jen následující jednoduchý případ. Nechť přímka q „se otáčí“ kolem přímky p, kterou protíná v bodě S a vytvořuje tedy „*rotační kužel*“. V obraze 37 jest cykl (S) obrazem bodu S, P, Q buďte stopníky přímek p, q. Dvojpoměr $(PQUV)$ buď konstantní a P pevné. Q opíše kuželosečku, která se kružnice $[S]$ dotýká ve dvou bodech na poláře bodu P.*) Geom. místo přímky q, „rotační kužel“, dotýká se tedy kužele $S(S)$ podél dvou přímek, jinak řečeno dotýká se křivky C dvakrát, podobně jako v euklidovské geometrii se rotační kužel a soustředný isotropický kužel dotýkají podél dvou povrchových přímek v rovině kolmé k ose kužele.



Obr. 37.

---

*) Dokážeme snadno takto: Buď

$$x^2 + y^2 = r^2$$

rovnice kružnice a $P(x_0, y_0)$ bod pevný, $Q(\xi, \eta)$ bod pohyblivý. Bod na spojnici PQ má souřadnice

$$x = \frac{x_0 - \lambda\xi}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_0 - \lambda\eta}{1 - \lambda},$$

při čemž λ je dělící poměr bodu (x, y) k bodům P, Q. Dosazením do rovnic kružnice dostaneme pro dělící poměr bodů U, V rovnici

$$\lambda^2(\xi^2 + \eta^2 - r^2) - 2\lambda(x_0\xi + y_0\eta - r^2) + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Jsou-li λ_1, λ_2 kořeny této rovnice, jest

$$(PQUV) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} =$$

$$= \frac{x_0\xi + y_0\eta - r^2 + \sqrt{(x_0\xi + y_0\eta - r^2)^2 - (\xi^2 + \eta^2 - r^2)(x_0^2 + y_0^2 - r^2)}}{x_0\xi + y_0\eta - r^2 - \sqrt{(x_0\xi + y_0\eta - r^2)^2 - (\xi^2 + \eta^2 - r^2)(x_0^2 + y_0^2 - r^2)}}.$$

Položme tento výraz rovný k a dostaneme po snadné úpravě rovnici

$$(1 + k)^2(x_0^2 + y_0^2 - r^2)(\xi^2 + \eta^2 - r^2) - 4k(x_0\xi + y_0\eta - r^2)^2 = 0;$$

bod $Q(\xi, \eta)$ vyplňuje tedy kuželosečku, jež s danou kružnicí má dotyk dvojnásobný v bodech na poláře bodu P.

Cvičení 5,4,1. Jak se jeví „otáčení“ kolem osy o kolmé ku π? Jak kolem osy ležící v π? Jaké jsou dráhy jednotlivých bodů v každém případě a jaké v případě obecném?

5,4,2. Dáno je cyklické pole osou p^ϱ a cyklem (Q). Mimo to cykl (M). Jak se jeví v π „vzdálenost“ bodu M od ϱ? („Kolmice“ spojuje M s pólem roviny ϱ ku C.)

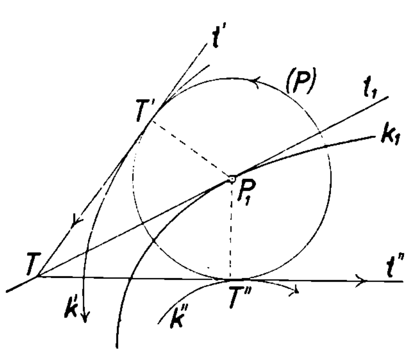
5,4,3. Dány jsou lineární řady cyklů (p), (q). Sestrojte „nejkratší vzdálenost“ („osu“) mimoběžek p, q. Jak se jeví v cykl. projekci?

5,4,4. Proveďte předešlou úlohu, jsou-li p, q „isotropické“ přímky.

5,4,5. Dány jsou cykly (A), (B) a jejich tečnová vzdálenost buď t. V lineární řadě jimi určené měj cykl (C) střed C_1 ve středu úsečky A_1B_1 (střední cykl). Ukažte, že tento má od všech cyklů, které s (A), (B) mají vlastní dotyk, tutéž tečnovou vzdálenost s, kde $s^2 = -\frac{1}{4}t^2$. (*Návod*: Najděte rovnici cykl. koule svazku určeného kužel. plochami s vrcholy A, B, jež má střed C, a její cykl. poloměr!)

VI. CYKLICKÝ OBRAZ KŘIVKY

6,1. Obecné úvahy. Buď K křivka v prostoru. Jejímu bodu P je v průmětně přiřaděn cykl (P), cyklický obraz křivky K je tedy řada cyklů. Geometrické místo jejich středů je pravoúhlý průmět K_1 křivky K. Spojitá řada cyklů má obálku. Nechť P, Q jsou dva blízké body křivky K, (P), (Q) příslušné cykly, T stopa sečny PQ, t', t'' společné tečné paprsky obou cyklů. Blíží-li se Q bodu P, přejde sečna PQ v tečnu křivky K, T je její stopník, t', t'' tečné paprsky cyklu (P) z bodu T (obr. 38). Jejich dotyčné body T', T'' jsou limitní polohy průsečíků obou cyklů čili *charakteristické* body cyklu (P), ve kterých se dotýká obálky. Obálka se pravidelně skládá ze dvou větví k', k'' (orientovaných), jež opisují body T', T''; t', t'' jsou tečny v těchto bodech.



Obr. 38.

Jen bodům, kde sklon tečny je menší než 45°, přísluší reálné body obálky, bodu, kde $\alpha = 45°$, přísluší vrchol (přidružený cykl má s obálkou dotyk čtyřbodový). Bodu P, kde tečna je kolmá k průmětně a P_1 tedy bod vratu křivky K_1, přísluší cykl (P), při čemž t', t'' jsou imaginární tečny jdoucí jeho středem P_1 a dotykové body jsou tedy imaginární kruhové body v nekonečnu. P_1 je *singulární ohnisko* obálky. Je-li t tečna obratu, jsou i t', t'' tečny obratu.

Je-li P dvojný bod na K, přísluší mu jeden cykl (P), ale dvě různé sečny dotyku, je-li P bod vratu, jsou i T', T'' body vratu. Průsečíku K s π přísluší dvojný bod a má-li tečna odchylku menší než 45°, jsou jeho tečny reálné. Bodu P_∞ odpovídají nevlastní body T'_∞, T''_∞, asymptotě p tedy asymptoty t', t'' obou větví.

Přímky t', t'' jsou stopy rovin, jež jdou tečnou t a dotýkají se křivky C. Roviny, které se dotknou křivek K a C tvoří rozvinutelnou plochu. *Charakteristiky* (průsečnice dvou sousedních rovin) jsou PT', PT''. Plochu lze také považovati za obálku cyklografických kuželů $P(P)$. *Cyklický obraz křivky K jest tedy stopa rozvinutelné plochy* (K, C). K jest *dvojná* křivka plochy, vedle toho může býti ještě jiná křivka dvojná. K rozvinutelné ploše (K, C) patří *hrana vratu* σ, charakteristiky jsou tečny této hrany. Bodům na charakteristikách PT', PT'' patří cykly, jež se obálky dotýkají v bodech T', T''; bodu na hraně vratu patří *cykl oskulační.* σ_1 se jeví jako místo středů oskulačních kružnic, je to *evoluta* obálky.

Tečné roviny plochy (K, C) mají půdorysnou odchylku 45°, obalují tedy plochu stejné odchylky čili *plochu stejného spádu.* Charakteristiky jsou „isotropické“ paprsky.

Hrana vratu σ je tedy křivka, jejíž tečny mají od π stejnou odchylku (45°) či stejný sklon nebo spád. Takové křivky slují *obecné šroubovice.* Buď P bod na křivce σ, T' stopník příslušné tečny. Cykl (P) je oskulační cykl obálky (T') v bodě T'. (T') je evolventa křivky σ_1, t. j. ortogonální trajektorie tečen této křivky. Obráceně křivce (T) v průmětně patří evoluta σ_1 (obálka normál) a na válci kolmém k průmětně se základnou σ_1 lze sestrojiti křivku σ s konstantním sklonem 45°. Stopa její plochy tečen jest (T) a cyklografický obraz křivky σ jest řada oskulačních cyklů křivky (T).

6,2. Cyklický obraz kuželosečky. Nechť středová kuželosečka k má obecnou polohu v prostoru. Křivky k a C určují rozvinutelnou plochu, na níž k a C jsou *dvojné* a jejíž stopa na π jest obálka cyklů přiřaděných bodům křivky k (k_1 je g. místo jejich středů). Duální útvar k tomuto útvaru jest průsečná křivka dvou kuželů s příslušnou plochou tečen.*) Dva kužele druhého stupně určují však celý svazek ploch druhého stupně; mezi nimi jsou obecně čtyři kužele a vrcholy jejich tvoří společný polární čtyřstěn všech ploch svazku. Duálně tedy v uvažovaném případě má plocha rozvinutelná (k, C) ještě dvě dvojné kuželosečky l, m a roviny $\varkappa$, λ, μ kuželoseček k, l, m s rovinou nevlastní tvoří společný polární čtyřstěn všech ploch vepsaných

*) KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ: Deskriptivní geometrie II., 478.

do (k, C), jež tvoří řadu. Každá z uvedených čtyř rovin je ostatními třemi proťata v trojúhelníku polárním příslušné dvojné kuželosečky.

Stupeň plochy (k, C) se určí korespondenčním principem nebo také jde z toho, že na př. průsek s rovinou kuželosečky k sestává z této dvakrát počítané a čtyř površek, totiž tečen vedených ku k z bodů, v nichž C seče rovinu křivky k. Stupeň je tedy 8, třída 4. Průsek plochy (k, C) s π je tedy křivka (T) stupně 8, třídy 4 s osmi dvojnými body v průsečících s C, k, l, m. (T) *jeví se jako společná obálka tří řad cyklů se středy na kuželosečkách* k_1, l_1, m_1. Tečnou kterékoli z křivek k, l, m, C jdou dvě tečné roviny plochy, jež se tedy dotýkají ostatních tří kuželoseček. Buď S_∞ bod v nekonečnu ve směru kolmém k π. Z něho jdou ku C dvě tečny, které jdou i body kruhovými J_1, J_2 v rovině π. Přímkami $S_\infty J_1$, $S_\infty J_2$ jde tedy po dvou rovinách, které se dotýkají křivek k, l, m. V průmětu pravoúhlém do π mají tedy k_1, l_1, m_1 čtyři společné tečny, jež jdou kruhovými body J_1, J_2, čili k_1, l_1, m_1 *jsou konfokální.*

Póly roviny k řadě ploch vepsaných do (k, C) vyplňují přímku. Roviny π dotýká se jedna plocha řady, seče tedy π ve dvou přímkách p, q a to jsou *dvojné tečny* křivky (T), neboť rovina na př. přímkou p, jež se dotýká i C, jakožto tečná rovina dvou ploch řady, je tečnou rovinou plochy (k, C) podél jisté přímky. Přímkou p jdou dvě tečné roviny k C, tedy p se dotkne (T) ve dvou různých bodech.

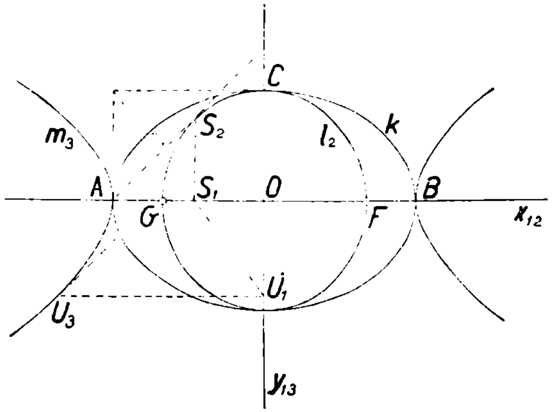
Cyklické pole lze dvojím způsobem převésti v jiné Laguerrovou inversí (5,2, cvič. 5,2,2 a 5,2,3). V prostoru tomu odpovídají „symetrie", jež převádějí na př. rovinu π do λ. Dle toho jsou tři páry Laguerrových inversí, jež převádějí uvažovanou obálku cyklů v kuželosečku. Jen jeden pár je reálný.

6,3. Kružnice dotýkající se dvakrát dané kuželosečky (bitangenciální). Buď k středová kuželosečka v π. Rozvinutelná plocha (k, C) má roviny λ, μ, jež jdou osami kuželosečky k kolmo ku π, za roviny symetrie a v nich leží dvojné kuželosečky l, m. Společný polární čtyřstěn všech ploch vepsaných je tvořen rovinami π, λ, μ a rovinou nevlastní, mají tedy všechny plochy společný střed O (ve středu kuželosečky k) a tytéž roviny symetrie.*) *Cyklické obrazy křivek l, m jsou řady kružnic, jež mají středy na jedné neb druhé ose a dvakrát se dotknou křivky k.*

*) Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskriptivní geometrie II., str. 545.

Je-li k parabola, pak plocha (k, C) má mimo π jen jednu rovinu symetrie, která osou paraboly jde kolmo ku π. Ostatní dvě stěny společného polárního čtyřstěnu splývají s rovinou nevlastní.

V obr. 39 buď k elipsa s osami x, y. Kuželosečka l v rovině λ jdoucí osou x zobrazena je ve sklopení do π kol osy x. l_2 má vrcholy jedné osy v ohniskách křivky k (bitangenciální kružnice s poloměrem nulovým).



Obr. 39.

Bodu P na l přísluší kružnice, jež se k dotkne ve dvou bodech reálných neb imaginárních, extrémní případ odpovídá bodu S, kde S_1 je střed křivosti ve vrcholu A. S_2 je tedy bod na l_2, kde tečna má sklon 45°.

Podobně jest druhá dvojná kuželosečka otočena kolem y do m_3. Jedna osa splývá s AB, druhá je imaginární a vrcholy jsou v imaginárních ohniskách na y ve vzdálenosti $\pm$ ei od středu čili vedlejší osa hyperboly m_3 má délku $2e$. Kružnici křivosti ve vrcholu C odpovídá bod U na m.

Hrana vratu plochy (k, C), je-li k středová kuželosečka, jest prostorová křivka stupně 12 s 16 body vratu, jež jsou po čtyřech na dvojných kuželosečkách. Tato prostorová křivka se promítá jako evoluta křivky k, stupně 6, třídy 4, jež má po dvou bodech vratu na x, y a na přímce v nekonečnu a ještě 4 dvojné body.

6,4. Jaké prostorové křivce odpovídá v rovině cykloida, epi- a hypocykloida?

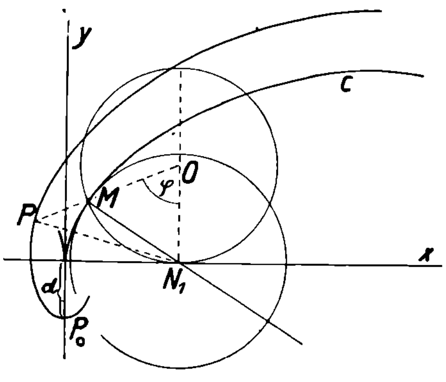
Rovnice prosté *cykloidy c* jsou

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi) \quad \text{(obr. 40)}.$$

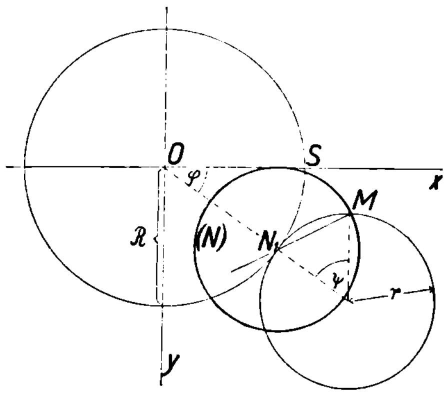
Normála bodu M prochází bodem dotyku N_1 pohyblivé kružnice s osou Ox. Lze tedy cykloidu považovati za obálku kružnic, jež mají střed v N_1 a poloměr $\overline{N_1M} = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi$, jak patrno z obrázku 40. Bod N v prostoru má tedy souřadnice

$$x = r\varphi, \quad y = 0, \quad z = 2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi;$$

to jsou rovnice příslušné křivky v prostoru.



Obr. 40.



Obr. 41.

Jedná-li se o cykloidu prodlouženou, již opisuje bod P na prodloužení poloměru OM, prochází ovšem normála opět bodem N_1, poloměr kružnice dotyku je N_1P a rovná se kotě bodu N, jež se vypočte z rovnice (ΔPON_1):

$$z^2 = r^2 + (r + d)^2 - 2r(r + d)\cos\varphi.$$

Podobně pro cykloidu zkrácenou.

Ovšem takové rovinné křivce patří mimo uvedenou křivku v prostoru ještě jiné křivky, totiž další dvojné křivky rozvinutelné plochy určené danou křivkou a křivkou C. Mimoto cykly odpovídající jejím bodům mají ještě jinou obálku. V našem případě obyčejné cykloidy je to cykloida symetrická dle Ox.

Epicykloidu opisuje bod M na kružnici o poloměru r, jež se kotálí po vnější straně kružnice o středu O a poloměru R. V obr. 41 je základní poloha volena tak, že M splývá s S na ose Ox. Oblouk $\widehat{SN_1}$ rovná se oblouku $\widehat{MN_1}$ na hybné kružnici, tedy $R\varphi = r\psi$, z čeho $\psi = \frac{R}{r}\varphi$. Normála bodu M jde bodem N_1 (okamžitým středem otáčení), lze tedy epicykloidu pokládati za obálku kružnic o středu N_1 a poloměru MN_1. Bod N v prostoru, jemuž patří cykl (N), má souřadnice:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = \overline{N_1M} = 2r\sin\tfrac{1}{2}\psi.$$

Označme $\frac{R}{r} = n$; pak křivka v prostoru jest dána rovnicemi

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = 2\frac{R}{n}\sin\tfrac{1}{2}n\varphi.$$

Proberme některé případy.

Pro $n = 1$ jest prostorová křivka

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi;$$

leží tedy na válcích

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad z^2 = 2R(R - x)$$

a na kuželu cyklografickém

$$(x - R)^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Je to známá *hypopéda*. Každý cykl přidružený bodu křivky jde bodem $S(R, 0, 0)$. Druhý charakteristický bod T je symetricky položen s bodem S dle tečny bodu N_1 a opisuje zřejmě *kardioidu* (srdcovku).

Pro $n = 2$ jest v prostoru křivka

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = R\sin\varphi,$$

tedy elipsa na rotačním válci s osou Oz a poloměru R vyťatá rovinou $\frac{z}{y} = 1$. Příslušná epicykloida má bod vratu S a bod S' diametrálně protilehlý. Všechny cykly se dotýkají osy Ox.

Pro $n = 4$ jest

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}R\sin 2\varphi,$$

tedy prostorová křivka je na plochách

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad zR = xy.$$

a má dvojný bod Z_∞. Mimo rotační válec je ve svazku ploch takto určeném ještě dvojice válců parabolických

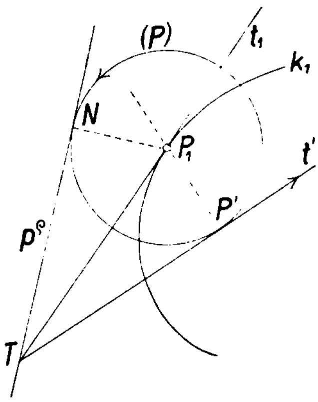
$$(x \pm y)^2 - R(R \pm 2z) = 0.$$

Průmět kolmý na některou z rovin $x \pm y = 0$ je parabola a křivku lze snadno sestrojiti.

Obálka cyklů se zde rozpadá v epicykloidu na vnější straně pevné kružnice a *asteroidu* na straně vnitřní. Společné body vratu jsou v bodech $(\pm R, 0, 0)$, $(0, \pm R, 0)$.

Podobné úvahy lze udělati i pro hypocykloidy.*)

6,5. Cyklický obraz křivky v rovině „isotropické". Mějme křivku k v rovině „isotropické" ϱ. Stopa roviny buď p^ϱ, průmět křivky k_1 (obr. 42), P bod na k, (P) přidružený cykl. Cykl se dotýká stopy p^ϱ v bodě N, p^ϱ je jedna část obálky. Druhý charakteristický bod dostaneme, sestrojíme-li z bodu T, jenž je stopníkem tečny t křivky v bodě P, druhou tečnu t' k (P). Dotykový bod P' patří obálce a t' je jeho tečna. Výtvarný zákon této křivky k' lze tedy vysloviti také takto: *Sestrojíme-li dle každé tečny t_1 křivky k_1 symetrickou přímku s p^ϱ, obaluje tato přímka křivku k'.*



Obr. 42.

$P'P_1$ je normála obálky k' v bodě P'; přímky P_1P' a P_1N svírají s tečnou t_1 stejné úhly. Je-li NP_1 směr světla, je P_1P' paprsek odražený na křivce k_1 a k' ortogonální trajektorie těchto paprsků (*antikaustika*). Obráceně lze říci:

Antikaustika rovinné křivky k_1 pro rovnoběžné paprsky jest cyklický obraz průsečné křivky válce, který má k_1 za řídící křivku a je kolmý

*) Podrobněji o této otázce jedná W. BLASCHKE: Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien, Monatshefte Math. Phys. 19 (1908), S. 188.

k průmětně, s rovinou „isotropickou", jejíž stopa je kolmá k paprsku světelnému. Každé z těchto rovin patří jedna křivka k' a všechny jsou spolu rovnoběžné.

Cvičení 6,5,1. Jest dána parabola p v rovině ε s odchylkou 45°. p a C určí rozvinutelnou plochu a její hrana vratu je prostorová křivka třetího stupně (šroubovice). Uvažujte duální útvar! Stopa plochy tečen je cirkulární křivka st. 4 a třídy 3.

6,5,2. Dána jest rovina ε stopou a odchylkou a v ní ležící kuželosečka k; její průmět buď elipsa k_1 daná osami. Další dvojné kuželosečky plochy buďte l, m. Sestrojte jejich roviny a určete průměty l_1, m_1. Dále určete dvojné body a dvojné tečny křivky (T).

6,5,3. Dána je hyperbola h v průmětně π. Sestrojte kuželosečky l, m, jejichž obrazy jsou řady bitangenciálních kružnic křivky h. Totéž pro parabolu.

6,5,4. Dána jest kuželosečka. Sestrojte bitangenciální kružnice, které hoví některé z následujících podmínek: a) jdou daným bodem, b) dotýkají se přímky, c) dotýkají se dané kružnice, d) sekou danou kružnici kolmo nebo v daném úhlu, e) dané dva cykly sekou ve stejných úhlech.

6,5,5. Jsou dány tři cykly se středy na téže přímce. Sestrojte kuželosečku, jež se každého z nich dotkne ve dvou bodech.

6,5,6. Jsou dány dvě kružnice. Sestrojte parabolu, jež se každé dotkne ve dvou bodech.

6,5,7. Sestrojte kuželosečku, jež se dané kružnice dotkne ve dvou daných bodech a jde daným bodem nebo se dotýká dané přímky.

6,5,8. Jaké prostorové křivce odpovídá v průmětně π bicirkulární křivka čtvrtého stupně? (Pozn.: Tuto křivku lze považovati čtverým způsobem za obálku kružnic, jež mají středy na kuželosečce a sekou kolmo tutéž kružnici).

6,5,9. Sestrojte plochu o sklonu 45°, která má za stopu parabolu $y^2 = x$. Ukažte, že je stupně 6 a hrana vratu má rovnice

$$x = 3t^2 + \tfrac{1}{2}, \qquad y = 4t^3, \qquad z = \pm\, \tfrac{1}{2}(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

Ohledně literatury viz Schilling, Zeitschrift für ang. Mathematik u. Mechanik 3 (1923), Mathematische Zeitschrift 34 (1932). V poslední práci ukazuje, že tato plocha může být považována za „diskriminantní plochu" rovnice

$$t^4 + \lambda t^2 + \mu t + \nu = 0.$$

Hledáme-li průsečíky křivek

$$y^2 = x, \qquad (x - p)^2 + (y - q)^2 = \varrho^2,$$

dostaneme

$$y^4 + (1 - 2p)\, y^2 - 2qy + (p^2 + q^2 - \varrho^2) = 0;$$

každé poloze bodu (p, q, ϱ) odpovídá rovnice uvedeného typu.

VII. CYKLICKÉ ZOBRAZENÍ PLOCH

7,1. Koule, rotační kužel, hyperbolický válec. Bodům na ploše přísluší cykly, jež tvoří kongruenci. Mimo roviny, cyklografické kužele a koule můžeme uvésti několik příkladů, které mají význam pro řešení elementárních úloh o cyklech a kružnicích.

1. Mějme kouli se středem v průmětně π. Pišme její rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Její stopní kružnice má střed O a poloměr r. Bodu na kouli $P(\xi, \eta, \zeta)$ je přiřaděna kružnice $[P]$ daná rovnicí

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2 - \xi^2 - \eta^2.$$

Chordála této a stopní kružnice jest

$$\xi x + \eta y - \xi^2 - \eta^2 = 0$$

a vidíme hned, že jde bodem (ξ, η), t. j. středem kružnice $[P]$.

Bodům koule se středem v průmětně π jsou přiřaděny kružnice, jež jsou stopní kružnicí půleny.

Je-li střed koule mimo průmětnu, změní se poloměry všech cyklů o konstantní délku, nová kongruence povstane dilatací z původní.

2. Buď dán rotační kužel s vrcholem O v π a osou kolmou ku π

$$x^2 + y^2 - kz^2 = 0.$$

Bodu $P(\xi, \eta, \zeta)$ na kuželu je přiřaděna kružnice $[P]$ o rovnici

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \frac{1}{k}(\xi^2 + \eta^2)$$

tedy kružnice, jejíž střed má od O vzdálenost $OS = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, poloměr $r = \dfrac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{k}}$, tedy poměr $\dfrac{r}{OS} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ je konstantní. Je-li φ úhel tečen vedených z O ke kružnici, pak tedy $\sin\frac{1}{2}\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Cyklografický obraz rotačního kužele s vrcholem O v průmětně π a osou kolmou ku π je kongruence kružnic, jež z vrcholu O se jeví v úhlu konstantním.

Je-li vrchol mimo π, osa kolmá ku π, pak seče kužel průmětnu π v kružnici o středu S, poloměru ϱ a poznáme snadno, že z dřívější kongruence povstane dilatací nová, jejíž cykly mají tu vlastnost, že tečné paprsky společné jednomu cyklu kongruence a stopnímu cyklu (S, ϱ) svírají konstantní úhel.

3. Mějme válec s osou v průmětně π, jehož kolmý průsek je rovnostranná hyperbola s osou v průmětně, tedy válec o rovnici

$$V \equiv z^2 - y^2 = k^2.$$

Bodu (ξ, η, ζ) je přiřaděna kružnice

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \eta^2 + k^2$$

čili

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2y\eta + \xi^2 - k^2 = 0.$$

Průsečíky s osou $y = 0$ jsou $x_{12} = \xi \pm k$ a tedy úsek vyťatý na přímce Ox je konstantní a rovný $x_1 - x_2 = 2k$.

Bodům válce V jsou přiřaděny kružnice, jež na ose vytínají úsečky konstantní délky. (Kdy je tento úsek imaginární?).

Cvičení. 7,1,1. Sestrojte cykl, který je danou kružnicí rozpůlen, dotýká se jiného cyklu a paprsku.

7,1,2. Dány jsou kružnice $[A]$, $[B]$, $[C]$. Sestrojte kružnici, která všechny tři půlí.

7,1,3. Sestrojte kružnici, jež z bodu M se jeví v úhlu α, z bodu N v úhlu β a mimo to a) dotýká se dané přímky, b) má střed na dané kružnici.

7,1,4. Dány jsou cykly (A), (B), (C). Sestrojte cykl (X) tak, aby společné tečné paprsky cyklů (A), (X) svíraly úhel α, společné tečné paprsky cyklů (B), (X) úhel β a spol. teč. paprsky cyklů (C), (X) úhel γ.

7,1,5. Dána je lineární řada cyklů a přímka. Sestrojte cykly řady, jež na přímce vytínají úsečku dané délky d (nebo di).

7,1,6. V daném svazku kružnic sestrojte kružnici, jež na dané přímce vytíná úsečku délky d.

7,1,7. Jaké je g. m. středů kružnic, které na daných přímkách p, q vytínají úsečky délek a, b?

7,1,8. Kolik je kružnic, jež přímky p, q, r sekou v úsečkách délek a, b, c?

7,1,9. Prostudujte kongruenci kružnic, jež s danou kružnicí mají tětivu dané délky d: Jaká je příslušná plocha v prostoru? Řešte pak úlohy: a) V lineární řadě cyklů jest nalézti cykl, který z dané kružnice vytíná tětivu délky d. b) Sestrojte kružnici, která tři dané kružnice seče v tětivách délek a, b, c.

7,1,10. Jaké je g. m. středu kružnice, jež jde bodem A a z dané kružnice vytíná tětivu délky d?

7,1,11. Sestrojte cykl, který danou kružnici seče v tětivě délky d a mimo to a) jde dvěma body, b) dotkne se daného cyklu v daném bodě.

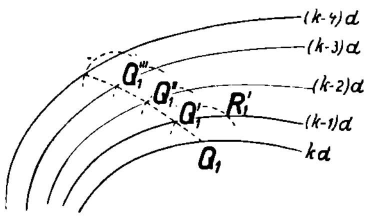
7,1,12. Na přímce je dána kvadratická involuce s páry AA', BB' atd. Kružnice, které vytínají tyto páry tvoří kongruenci. Najděte příslušnou plochu v prostoru a zvláště, je-li daná involuce symetrická. Jak je to, je-li involuce na kružnici nebo na kuželosečce?

7,1,13. Dány jsou přímky a, b. Jaké je g. místo bodů v prostoru, mají-li kružnice jemu přidružené jeden koncový bod průměru na a, druhý na b?

7,2. Cyklické zobrazení obecné plochy. Cykly přiřaděné bodům plochy Φ tvoří *kongruenci cyklů*; je-li plocha symetrická dle π možno mluviti o *kongruenci kružnic.* Křivce k na ploše Φ odpovídá řada cyklů, kterou označíme (k) a jejíž obálka se zpravidla skládá ze dvou větví k', k''. Tyto větve splývají, pakli tečny křivky k sekou základní křivku C; pak řada (k) je řada oskulačních cyklů (6,1). Na ploše Φ jsou obecně dva systémy křivek, jejichž tečny sekou C, říkejme jim „*isotropické*“ křivky a značme je z. Tvoří obdobu minimálních křivek euklidovské geometrie. Pak (z) je řada oskulačních cyklů a jejich středy vyplňují křivku z_1.

Buď P bod na Φ, τ jeho tečná rovina. Tato seče křivku C ve dvou bodech M', M'' a PM', PM'' jsou tečny „isotropických“ křivek ${}^1z$, ${}^2z$, jež jdou bodem P. Jsou reálné a různé ovšem jen pro body, kde půdorysná odchylka tečné roviny je větší než 45°, splývají v bodech, kde odchylka ta je rovna 45°. Tyto body vyplní *meznou* křivku m. Podél m se dotýká plochy Φ rozvinutelná plocha určená společnými tečnými rovinami plochy Φ a křivky C. Dle toho tedy kongruence cyklů obsahuje obecně dva systemy oskulačních řad $({}^1z)$, $({}^2z)$. Cykl kongruence (P) je obecně obsažen v jedné řadě jednoho a jedné druhého systému.

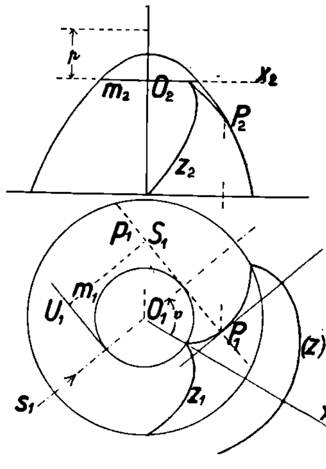
Obráceně, máme-li v průmětně π systém orientovaných křivek $({}^1z)$, závislý na jednom parametru, tvoří oskulační cykly těchto křivek kongruenci, jíž v prostoru patří plocha Φ. Na Φ k systému ${}^1z$ lze sestrojiti přidružený ${}^2z$ a jemu opět v rovině patří druhý systém $({}^2z)$ orientovaných křivek obalený cykly kongruence.



Obr. 43.

Přibližně lze narýsovati křivky z na dané ploše následující methodou. Zjednejme si vrstevnice ve výšce d, $2d$, $3d$... nad i pod průmětnou, kde d je dosti malé. Buď Q bod na vrstevnici kd (obr. 43). Q je vrchol cyklografického kuželu, který seče rovinu vrstevnice $(k - 1)d$ v kružnici o poloměru d a ta dává na této vrstevnici body Q', R'. Od Q' přejdeme podobně ku Q'' na vrstevnici $(k - 2)d$ atd. Body Q_1, Q_1', Q_1'' dávají přibližný průmět křivky z.

Jiného způsobu lze použíti, jsme-li s to nalézti půdorys meze vlastního stínu plochy pro paprsky rovnoběžné s půdorysnou odchylkou 45°. Nechme otáčeti půdorys paprsku s_1 o malý úhel stejnoměrně do poloh s_1', s_1'', s_1'''..., sestrojme příslušné meze vlastního stínu m_1, m_1', m_1'', m_1''', ... Půdorys křivky z dostaneme, sestrojíme-li křivku, jež v průsečíku s m_1 má tečnu rovnoběžnou s s_1, v průsečíku s m_1' tečnu rovnoběžnou s s_1' atd.



Obr. 44.

Omezíme se jen na velmi jednoduché případy.

Buď dán rotační paraboloid s osou kolmou k rovině π (obr. 44). Mezní čára je zde kružnice m v rovině ohniskem jdoucí a kolmá k ose, podél které se dotýká paraboloidu cyklografický kužel. Čáru z_1 lze najíti elementární úvahou. Nechť plocha je osvětlena rovnoběžnými paprsky s první odchylkou 45°; mez vlastního stínu je, jak známo, parabola p v rovině kolmé ku π, takže $p_1 \perp s_1$. Buď P bod této meze, P_1 jeho půdorys a t_1 půdorys světelného paprsku bodem P, který má odchylku 45°. Jest $t_1 \perp p_1$ a to pro každý bod na p pro všechny směry s_1. p_1 obaluje kružnici m_1 o poloměru p, kde p je parametr meridiánu, a půdorys z_1 hledané křivky jeví se tedy jako ortogonální trajektorie tečen kružnice. Jest to evolventa její. *Křivka z jest pak průsek paraboloidu s válcem kolmým k π, jehož podstavou je evolventa kruhu.*

Uvedeme nejdůležitější vlastnosti prostorové křivky z. Volme počátek pravoúhlé soustavy O v ohnisku, Oz v ose rotace, při čemž kladná část směřuje dolů. Pak jest rovnice paraboloidu

$$x^2 + y^2 = 2pz + p^2. \tag{1}$$

Rovnice evolventy lze psáti

$$x = p(\cos v + v \sin v), \quad y = p(\sin v - v \cos v). \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) vychází

$$z = \tfrac{1}{2}pv^2. \tag{3}$$

Rovnice (2) a (3) jsou parametrické rovnice křivky z.

Pro směr tečny vychází $\cos v : \sin v : 1$; přímka, jež spojuje bod (v) s ohniskem paraboloidu O, má kosiny směrové $\frac{x}{r} : \frac{y}{r} : \frac{z}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Snadným výpočtem dostaneme pro úhel obou přímek $\cos\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \omega = 45°$. *Strany kužele s vrcholem O protínají tedy křivku pod stálým úhlem a týmž jako strany vertikálního válce. Křivka* z je *konická spirála.**) Tato vlastnost přísluší obecněji šroubovicím na rotačních plochách druhého stupně.**)

Zajímavá je dále vlastnost hrany vratu polární plochy (g. místo středu oskulační koule). Rovina normální bodu (v), jak snadno propočteme, má rovnici

$$X \cos v + Y \sin v + Z - p - \tfrac{1}{2}pv^2 = 0; \tag{4}$$

její charakteristika (polára) hoví rovnici vzniklé derivováním dle v

$$-X \sin v + Y \cos v - pv = 0, \tag{5}$$

*) PIRONDINI, CRELLE J., sv. 118, p. 61.
**) Poprvé na tuto vlastnost poukázal M. LERCH. Viz jeho článek: O některých čarách prostorových. Časopis r. 44.

bod hrany vratu mimo to rovnici vzniklé dalším derivováním

$$X \cos v + Y \sin v + p = 0. \tag{6}$$

Z rovnic (4), (5), (6) vychází pro bod hrany vratu

$$X_u = -p(v\sin v + \cos v), \quad Y_u = p(v\cos v - \sin v), \quad Z_u = \tfrac{1}{2}p(4+v^2). \tag{7}$$

Snadno zjistíme, že tato čára leží na paraboloidu

$$x^2 + y^2 = p^2\left(\frac{2z}{p} - 3\right) \tag{8}$$

a její půdorys je opět evolventa kruhu o poloměru p (dle rov. (5) a (6)).

Hlavní normála křivky z je

$$X \cos v + Y \sin v = p, \quad Z = z; \tag{9}$$

střed křivosti S dají rovnice (4), (5), (9) a vychází

$$X_s = p(\cos v - v \sin v), \quad Y_s = p(\sin v + v \cos v), \quad Z_s = z = \tfrac{1}{2}pv^2. \tag{10}$$

Z toho snadno dostaneme $\overline{P_1S_1} = 2pv$.

Z rovnice (7) a (10) jde

$$X_s - X_u = 2p \cos v, \quad Y_s - Y_u = 2p \sin v, \quad Z_s - Z_u = -2p,$$

tedy průmět *vektoru mezi středem křivosti S čáry z a příslušným středem oskulační koule U je konstantní a roven* $2p$, *vektor sám má stálou délku* $2p\sqrt{2}$.

Ještě uvažme, že hlavní normála (9) se dotýká válce $x^2 + y^2 = p^2$ v křivce

$$x = p \cos v, \quad y = p \sin v, \quad z = \tfrac{1}{2}pv^2,$$

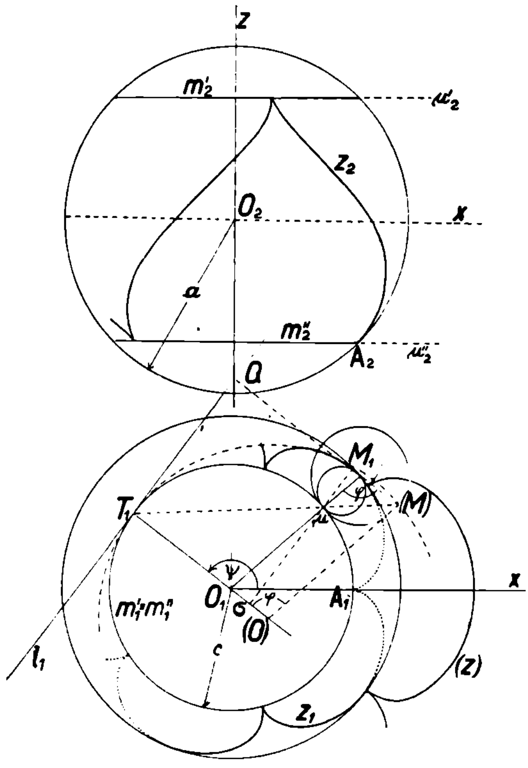
která po rozvinutí kruhového válce dává parabolu $s^2 = 2pz$, kde s je oblouk základny válce.

Poněvadž uvažovaná plocha je rotační, dostanou se z jedné čáry z všechny ostatní rotací kolem osy paraboloidu neb symetrií dle roviny procházející osou.

Křivce z patří v π oskulační řada cyklů, obálka (z) jeví se jako ortogonální trajektorie tečen křivky z_1, tedy jest to evolventa kruhové evolventy.

Další příklad buď *koule* se středem O a poloměru a (obr. 45). Mezní křivka se skládá z kružnic m', m'' v rovinách μ', μ'' o poloměru

$c = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Křivka z je sférická šroubovice se sklonem 45°. Všechny normální roviny jdou středem O koule a mají také odchylku 45°, obalují tedy kuželovou plochu s vrcholem O, která jde kružnicemi



Obr. 45.

m', *m''*. Tato kuželová plocha je polární plocha křivky z a křivka sama je *evolventou* této *rotační plochy kuželové*. Vyjděme od bodu $A(\frac{1}{2}a\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}a\sqrt{2})$ na kružnici m'' a začněme s odvinováním kužele podél přímky OA; OT buď dotyková přímka v nové poloze. Tento pohyb vzniklý odvíjením pláště je totožný s kotálením kružnice hybné o poloměru a po kružnici m'', při čemž hybná kružnice má stálý střed O. Máme tedy zvláštní případ sférické epicykloidy.*)

Sklopme tečnou rovinu kužele podél přímky OT kolem tečny t do μ''. Střed kužele přejde do (O), $\overline{T(O)} = a$; odvinutý plášť přejde do výseče $(M)(O)T$, při čemž oblouk AT podstavy m'' rovná se oblouku $T(M)$ rozvinutého pláště. Jest tedy $\frac{1}{2}a\sqrt{2}\psi = a\varphi$, $\psi = \varphi\sqrt{2}$. Půdorys M_1 bodu M dostaneme z úměry $\overline{QM_1} : \overline{Q(M)} = \overline{T_1O_1} : \overline{T_1(O)}$, což lze provésti tak, že spojíme (M) s T_1, dostaneme bod μ $(O_1\mu \parallel (O)(M))$ a vedeme $\mu M_1 \parallel t_1$. Vzdálenost bodu M od roviny μ'' jest rovna $\overline{QM_1}$.

Teď můžeme napsati rovnice křivky z. V obr. 45 jest $\overline{T_1Q} = a\sin\varphi$, $\overline{Q(M)} = a(1 - \cos\varphi)$, $\overline{QM_1} = \overline{QM}\,.\cos 45° = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\,(1 - \cos\varphi)$. Promítněme nyní lomenou čáru O_1T_1QM do os Ox, Oy, Oz a dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi\cos\psi + a\sin\varphi\sin\psi, \\ y &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi\sin\psi - a\sin\varphi\cos\psi, \\ z &= -\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{11}$$

Pišme tyto rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}a(2 + \sqrt{2})\cos(\psi - \varphi) - \tfrac{1}{4}a(2 - \sqrt{2})\cos(\psi + \varphi), \\ y &= \tfrac{1}{4}a(2 + \sqrt{2})\sin(\psi - \varphi) - \tfrac{1}{4}a(2 - \sqrt{2})\sin(\psi + \varphi), \\ z &= -\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Epicykloida vytvořená bodem hybné kružnice o poloměru r při kotálení po pevné kružnici poloměru R se středem O je dána rovnicí (vznikne sčítáním vektorů):

$$x + \mathrm{i}y = (R + r)e^{\mathrm{i}\alpha} - re^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}, \quad R\alpha = r\beta, \tag{13}$$

kde α, β jsou úhly odkotálené na kružnici pevné a hybné a počáteční poloha na ose Ox ($x = R$, $y = 0$, $\alpha = \beta = 0$).

Půdorys z_1 uvažované křivky je dle rovnic (12)

$$x + \mathrm{i}y = \tfrac{1}{4}a(2 + \sqrt{2})\,e^{\mathrm{i}(\psi-\varphi)} - \tfrac{1}{4}a(2 - \sqrt{2})\,e^{\mathrm{i}(\psi+\varphi)}. \tag{14}$$

*) O těchto křivkách jedná podrobně M. Lerch ve své práci: Příspěvek k vlastnostem sférických čar šroubových, Rozpravy České akademie, roč. 23, č. 33.

Srovnáním rovnice (14) s rov. (13) dostaneme buď

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad r = \tfrac{1}{4}a(2 - \sqrt{2}), \quad \alpha = (\sqrt{2} - 1)\,\varphi, \quad \beta = 2\varphi,$$

anebo

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad r = -\tfrac{1}{4}a(2 + \sqrt{2}), \quad \alpha = (\sqrt{2} + 1)\,\varphi, \quad \beta = -2\varphi.$$

Podmínka $R\alpha = r\beta$ jest splněna.

Dle toho z_1 *jest epicykloida vytvořená kotálením kružnice o poloměru* $\frac{1}{4}a(2 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(a - c)$ po kružnici $m_1' \equiv m_1''$ a vyplní tedy mezikruží omezené obrysem kulové plochy a touto kružnicí. Dle toho byl narýsován v obraze první a druhý průmět křivky z. V souhlase se známým dvojím vytvořením epicykloidy lze z_1 vytvořiti, kotálí-li se kružnice o poloměru $\frac{1}{2}(a + c)$ po kružnici m_1', která ovšem je stále uvnitř hybné kružnice.*) Poměr poloměrů je iracionální, z_1 tedy křivka transcendentní.

Také bod (M) opisuje epicykloidu, již lze vytvořiti, je-li pevná kružnice m_1', hybná buď s poloměrem a neb $a - c$.

Z jiných vlastností ještě uveďme:

Hlavní normála křivky z v bodě M je rovnoběžná se stopou t normální roviny a dotýká se polární plochy v bodě σ na přímce OT. Polární souřadnice bodu σ_1 jsou ψ a $r = c - \overline{QM_1} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi$, polární rovnice křivky opsané bodem σ_1

$$r = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}(\psi\sqrt{2}).$$

Tyto křivky slují *růžice*; jest to zde speciální případ epicykloidy, neboť evoluta epicykloidy jest opět epicykloida. V rozvinutí kužele do roviny dostaneme křivku bodů σ, když z pevného bodu kružnice s poloměrem a spouštíme kolmice na jednotlivé poloměry; místo bodů σ je tedy kružnice nad průměrem AO čili geodetická kružnice kužele. Poloměr křivosti bodu M je dán délkou $M_1\sigma$, tedy

$$\varrho = a\sin\varphi.$$

Pro délku oblouku dostaneme z rovnic (11) snadným výpočtem

$$ds = a\sin\varphi\, d\varphi, \quad s = -a\cos\varphi + \text{konst.}$$

Počítáme-li oblouk od $\varphi = 0$, máme $s = a(1 - \cos\varphi)$, počítáme-li od hodnoty $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, dostaneme $s = -a\cos\varphi$. Hodnotám $0, \pm\pi$,

*) KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ: Deskriptivní geometrie I., str. 118.

$\pm 2\pi, \ldots$ odpovídají body vratu, hodnotám $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \ldots$ body na rovníku. Vezmeme-li druhou hodnotu s, vidíme, že platí

$$s^2 + \varrho^2 = a^2,$$

což připomíná přirozenou rovnici prosté cykloidy. Rozvineme-li plochu tečen křivky z do roviny, nemění se křivost ani délka oblouku. Přejde tedy naše křivka v rozvinutí v prostou cykloidu vytvořenou kotálením kružnice poloměru $\frac{1}{4}a$ po přímce.*)

Křivka (z), stopa plochy tečen na rovině rovníku jeví se jako evolventa křivky z_1 a jest to opět epicykloida, již lze vytvořiti kotálením kružnice s poloměrem $\frac{1}{2}a(\sqrt{2} - 1)$ po kružnici s poloměrem a.

Cvičení. 7,2,1. Podobným způsobem jako jsme učinili pro paraboloid prostudujte šroubovice se sklonem 45° a příslušné zobrazení cyklické na elipsoidu vejčitém nebo zploštělém. (Viz článek M. LERCHA: O některých křivkách prostorových, Časopis čes. matematiků, roč. 44.)

7,2,2. Totéž pro parabolický válec symetrický dle průmětny. (Půdorys šroubovice se sklonem 45° k průmětně jest prostá cykloida, jak snadno lze ukázati výpočtem neb i elementární úvahou.)

*) Viz LERCH, l. c. str. 30. Přirozené rovnice kotálnic viz na př. WIELEITNER: Spezielle ebene Kurven.

VIII. UŽITÍ CYKLICKÉ PROJEKCE A LAGUERROVÝCH TRANSFORMACÍ

Ukážeme v následujícím, jak z některých vět prostorové geometrie poměrně jednoduchých vycházejí věty o cyklech a paprscích zdánlivě velmi složité.

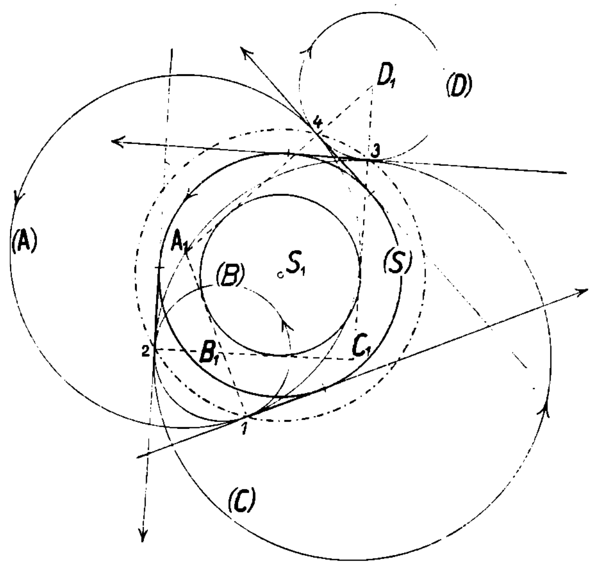
1. Kuželosečka k v prostoru a dvě mimoběžky m, n, které ji sekou v bodech M, N, určují plochu druhého stupně P (hyperboloid). Každá přímka, jež seče k, m, n je površka druhého systému. Buďte p, q dvě takové příčky sekoucí k v bodech P, Q. Pak dvojice m, n a p, q tvoří *prostorový* (zborcený) *čtyřúhelník* s vrcholy A, B, C, D. Tečné roviny v bodech M, N, P, Q určené pokaždé tečnou křivky k a příslušnou přímkou sekou se v jediném bodě S, pólu roviny kuželosečky k ploše P.

Nechť k je nyní základní kuželosečka C v rovině nevlastní, m, n, p, q tedy „isotropické" přímky. Vrcholům A, B, C, D patří cykly a dva sousední se dotýkají v cyklickém pořádku v bodech *1, 2, 3, 4*. Stranám čtyřúhelníka patří dotykové paprsky. Uvedený hyperboloid je nyní cyklografická koule o středu S, strany čtyřúhelníka jsou jeho površky a paprsky tečné jsou stopy tečných rovin v nevlastních bodech těchto přímek. Máme tedy větu:

Dotýkají-li se cykly (A), (B), (C), (D) *v cyklickém pořádku* (obr. 46), *pak dotykové paprsky obalují nový cykl* (S) *a tento má od daných cyklů tutéž tečnovou vzdálenost* (rovnou poloměru cykl. koule). *Dotykové body leží na kružnici soustředné s* (S) (stopa cykl. koule) *a středné* $A_1B_1, B_1C_1, \ldots$ *dotknou se rovněž kružnice soustředné* (půdorys hrdlové kružnice).

2. Uvažme teď větu duální k větě zpočátku uvedené. Mějme prostorový čtyřúhelník $ABCD$ a jeho strany ať se dotýkají kvadratického kužele s vrcholem V. Pak jest určena plocha druhého stupně F, která obsahuje strany čtyřúhelníka a má kužel za kužel tečný. Dotýká se ho podél kuželosečky v rovině ν, na které leží tedy dotyčné body stran čtyřúhelníka s kuželem. ν je polární rovina bodu V ku F.

Buď uvažovaný kužel cyklografický s vrcholem V. Bodům A, B, C, D patří cykly v uvedeném pořádku, stranám AB, BC, ... vždy dva paprsky, z nichž jeden se současně dotýká cyklů (A), (B), (V), dále jeden cyklů (B), (C), (V) atd. Dotykovým bodům stran s kuželem patří cykly, které se dotknou cyklu (V). Máme tedy větu:



Obr. 46.

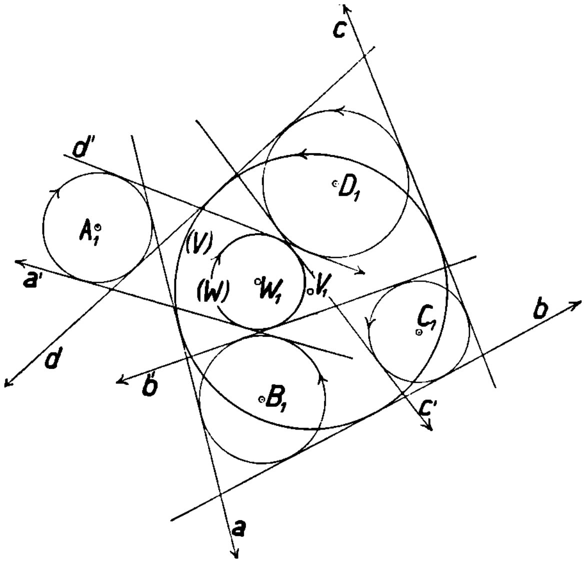
Cykly (A), (B), (C), (D) v uvedeném cyklickém pořádku určují čtyři páry společných tečných paprsků. Dotýkají-li se čtyři, jeden z každého páru, téhož cyklu (V), pak cykly lineárních řad (AB), (BC), (CD), (DA), jež se dotýkají cyklu (V), patří témuž cyklickému poli (obraz přenecháváme čtenáři).

3. Vraťme se ještě jednou k ploše F s dotykovým kuželem $V(C)$, na které leží prostorový čtyřúhelník $ABCD$. Stopa této plochy v rovině nevlastní je kuželosečka, jež se dvakrát dotkne kuželosečky C na nevlastní přímce roviny v. F a C určují rozvinutelnou plochu společných tečných rovin, jež se zde rozpadá ve dva kužele. $V(C)$ je jeden, druhý buď $W(C)$. (Duálně, dotýkají-li se plocha F a kužel ve dvou bodech,

rozpadne se průsečná křivka ve dvě kuželosečky). Odtud plyne v projekci cyklické zajímavá věta:

Cykly (A), (B), (C), (D) určují v uvedeném cyklickém pořádku čtyři páry společných tečných paprsků. Dotýkají-li se čtyři, jeden z každého páru, cyklu (V), dotýkají se ostatní čtyři opět nového cyklu (W).

V obr. 47 volen napřed cykl (V), jeho čtyři tečné paprsky a, b, c, d. Pak sestrojeny cykly (A), (B), (C), (D), jež se dotknou vždy dvou paprsků v cyklickém pořádku. Nové společné tečné paprsky se dotýkají cyklu (W).



Obr. 47.

4. *Buď ABCD čtyrstěn, jehož stěny* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *jsou roviny „isotropické"* (α protější k A, β ku B atd). *Ortogonální průměty vrcholů* A_1, B_1, C_1, D_1 *jsou na kružnici.*

Důkaz: Body A_1, B_1, C_1, D_1 jde svazek kuželoseček a ten seče nevlastní přímku roviny π v involuci bodové, ke které patří páry určené přímkami $A_1 B_1$, $C_1 D_1$, resp. A_1C_1, B_1D_1 nebo A_1D_1, B_1C_1. Stopy rovin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ v nevlastní rovině tvoří čtyrstran křivce C opsaný a jeho protější vrcholy spojeny s pólem P_∞ roviny π (na kolmici ku π)

dávají také páry involuce. Ale na př. průsečnice (α, β) je identická s hranou CD, (γ, δ) s AB atd., tedy involuce svazku (P_∞) seče nevlastní přímku roviny π v involuci identické s involucí vyťatou svazkem kuželoseček o základních bodech A_1, B_1, C_1, D_1. Ale jeden pár involuce (P_∞) jsou tečny ku C, které jdou kruhovými body roviny π. Jedna kuželosečka řečeného svazku je tedy kružnice.

Další vlastnost čtyrstěnu uvažovaného jest, že *protější hrany jsou stejně „dlouhé"* (mají tutéž cyklografickou délku).

Důkaz: Buďte t_1, t_2, t_3, t_4 nevlastní přímky rovin α, β, γ, δ, jež tvoří čtyrstran opsaný křivce C. Jedna jeho úhlopříčka, na př. $(t_1t_2) \, . \, (t_3t_4)$ neseče C v reálných bodech, lze tedy šikmou symetrií, jíž v průmětně odpovídá Laguerrova inverse, převésti čtyřstěn $ABCD$ v jiný, takže hrany $(\alpha\beta) \equiv CD$, $(\gamma\delta) \equiv AB$ jsou rovnoběžné s průmětnou π. Máme tedy čtyrstěn, jehož všechny stěny mají od π odchylku 45° a dvě protější hrany rovnoběžné s průmětnou. V průmětu se pak jeví A_1B_1, C_1D_1 jako průměry kružnice a tedy $\overline{AB} = \overline{CD}$ (v obyčejné i v C-geometrii). Právě tak ostatní dvojice protějších hran.

Z těchto vlastností plynou zajímavé vztahy v cyklické projekci. Stěny čtyrstěnu $ABCD$ mají za stopy paprsky a, b, c, d (s náležitou orientací, 1,2), vrcholům patří cykly, které se vždy dotýkají tří z oněch čtyř paprsků. V projekci tedy:

Dány jsou čtyři paprsky. Sestrojme cykly, které se vždy tři z daných paprsků dotýkají. Pak středy jejich jsou na kružnici a tečnové vzdálenosti vždy dvou a dvou zbývajících jsou stejné.

Úhlopříčky čtyrstranu $t_1t_2t_3t_4$ opsaného křivce C tvoří její polární trojúhelník. Každá úhlopříčka je však nevlastní přímka roviny rovnoběžné s párem protějších hran čtyrstěnu $ABCD$. Vedeme-li každou jeho hranou rovinu rovnoběžnou s hranou protější, dostaneme šestistěn, který tvoří obdobu pravoúhlého rovnoběžnostěnu euklidovské geometrie. Jako tam všech osm vrcholů leží na kouli, leží také osm vrcholů našeho šestistěnu na cyklografické kouli a její střed je středem tohoto rovnoběžnostěnu. Jemu v π přísluší cykl — *střední cykl* — výše uvedených čtyř cyklů daných čtyřmi paprsky. *Od něho mají všechny cykly tutéž tečnovou vzdálenost.*

Buď K cyklografická koule jdoucí vrcholy čtyrstěnu $ABCD$ (4, 4, cvič. 7). Pak na př. stěna $(ABC) \equiv \delta$ má v rovině nevlastní přímku t_4, jež se dotkne křivky C v T_4 a seče K v parabole. Touto parabolou a křivkou C jde kužel s vrcholem S_4 na poláře t_4' přímky t_4. t_4 je v rovině nevlastní, tedy reciproká polára t_4' jde středem M cykl. koule a bodem T_4. Je to tedy „isotropická" přímka. To platí o všech stěnách čtyrstěnu a středy všech kuželů S_i leží na cyklografickém kuželu o středu M. V projekci máme větu:

Jsou-li v π čtyři paprsky a, b, c, d a cykly (A), (B), (C), (D), které se vždy tři z nich dotýkají, pak vždy tři z těchto čtyř cyklů se dotýkají dalšího cyklu S_i a tyto čtyři nové cykly se dotknou téhož cyklu (M).

t_4' je geom. místo středů všech cyklografických koulí, jež jdou parabolou v rovině (ABC). Stopník této přímky na π, jenž leží na cyklu (M), je středem cykl. koule, jejíž stopní a hrdlová kružnice je kolmá k cyklům (A), (B), (C). Tedy cykly (A), (B), (C), (D) *dávají po třech body stejných mocností a ty leží na cyklu* (M).

5. Tři plochy druhého stupně mají společných 8 bodů. Říkáme jim *skupina asociovaných bodů.* Plocha stupně druhého je dána devíti body. Osmi body jde obecně svazek ploch (∞^1) stupně druhého, sedmi body celý trs (∞^2). Ke zvoleným sedmi bodům lze sestrojiti osmý, který s nimi doplňuje skupinu asociovaných bodů. Je-li v trsu plocha zvrhlá ve dvojinu rovin, pak jsou čtyři body skupiny v jedné a čtyři ve druhé rovině, neboť čtyři body v prvé a tři ve druhé rovině určují trs, jehož jedna plocha sestává ze dvou rovin a musí tedy obsahovati i osmý bod. Vrcholy rovnoběžnostěnu tvoří takovou skupinu asociovaných bodů.

Sestrojme podobnou skupinu. V rovině ϱ ať jsou dány body *1, 2, 3, 4,* ty určují šest spojnic: *12, 13,* … . Veďme každou z nich jednu rovinu a označme je (*12*), (*13*), … . Pak máme tři plochy zvrhlé ve dvojiny rovin: (*12*), (*34*); (*13*), (*24*); (*14*), (*23*). Skupina asociovaných bodů je tvořena body *1, 2, 3, 4* v rovině ϱ a jinými čtyřmi, ve kterých se sekou vždy roviny následujících trojin: (*12*), (*13*), (*23*); (*12*), (*24*), (*14*); (*34*), (*13*), (*14*); (*34*), (*24*), (*23*). To jsou roviny jdoucí stranami jednoho ze čtyř trojúhelníků tvořených body *1, 2, 3, 4.* Tyto čtyři body jsou tedy v jedné rovině σ.

Užijme tohoto výsledku v cyklografii. Buďte v průmětně π čtyři body *1, 2, 3, 4*. Roviny vedené spojnicemi *12, 13, ...* buďte roviny „isotropické", každou spojnicí jen jedna, jinými slovy dejme této spojnici určitou orientaci. Pak průsečíkům těchto rovin patří cykly vepsané trojúhelníkům *123, 124, ...* tvořeným vždy třemi paprsky. Průsečíky jsou v jedné rovině a cykly patří témuž cyklickému poli. Máme tedy větu:

Čtyři body v průmětně π určují šest spojnic. Přisuďme jim libovolnou orientaci a máme šest paprsků, jež tvoří čtyři trojúhelníky s vrcholy v daných bodech. Cykly vepsané těmto trojúhelníkům patří témuž cyklickému poli.

Tuto větu lze zobecniti. Provedeme-li dilataci, dostaneme místo čtyř bodů čtyři cykly o témž poloměru a šest paprsků, z nichž se každý dotkne dvou cyklů. Trojina paprsků, jež se dotýkají tří různých cyklů, určuje nový cykl a čtyři takto sestrojené cykly patří téže lineární kongruenci.

Ještě obecnější větu dostaneme, užijeme-li Laguerrovy inverse a převedeme π do obecné roviny, nebo vyjdeme-li od čtyrrohu v obecné rovině přímo. Větu lze vysloviti:

Patří-li čtyři cykly témuž cyklickému poli, určují vždy dva z nich dvojinu společných tečných paprsků. Vezmeme-li jeden z každé dvojice, dostaneme paprskový šestistran a tři paprsky, jež patří jedné trojině z původních čtyř cyklů, určují paprskový trojúhelník a cykl jemu vepsaný. Čtyři takto získané cykly patří témuž cyklickému poli.

6. Vraťme se opět k původní konfiguraci na počátku odst. 5. Měli jsme skupinu osmi asociovaných bodů, ale máme také duální skupinu osmi asociovaných rovin, jež tvoří basis trsu ploch druhé třídy. Jako zvrhlé plochy vystupují zde dvojiny bodů, každým jdou čtyři z osmi rovin. Skutečně, na př. bodem *1* jdou roviny ϱ, (*12*), (*13*), (*14*), zbývající roviny (*23*), (*24*), (*34*) sekou se v jednom bodě na σ, který s prvým tvoří jednu plochu trsu. Odtud plyne opět zajímavý výsledek, volíme-li za ϱ rovinu „isotropickou", neboť pak sedm z uvažovaných rovin se dotýká křivky C, tedy dotýká se i osmá a máme novou větu:

Nechť čtyři cykly se dotýkají téhož paprsku. Po dvou dávají nových šest společných paprsků tečných a tyto po třech určují nové čtyři cykly.

Tyto čtyři cykly se opět dotýkají jednoho paprsku. Označíme-li původní cykly (A), (B), (C), (D), pak (B), (C), (D) mají vedle p^e ještě tři tečné paprsky, jichž se dotkne cykl (A'), (C), (D), (A) určují rovněž tři paprsky, jichž se dotkne cykl (B') atd. Cykly (A'), (B'), (C'), (D') dotknou se téhož paprsku. Obraz přenecháváme čtenáři.

OBSAH

		Str.
I.	*Úvod*	
1,1.	Cyklický průmět bodu	7
1,2.	Orientovaná přímka čili paprsek	9
1,3.	Úhel cyklu s paprskem	13
1,4.	Mocnost paprsku k cyklu	14
1,5.	Úhel dvou cyklů	15
1,6.	Tečnová vzdálenost cyklů	17
1,7.	Imaginární kružnice	18
1,8.	Mocnost bodu ke kružnici, svazek kružnic a chordála, trs kružnic	19
1,9.	Rovnoosá hyperbola	22
II.	*Lineární řada cyklů. Cyklické pole*	
2,1.	Lineární řada cyklů	25
2,2.	Cyklické pole (lineární kongruence cyklů)	27
2,3.	Úlohy o řadách a cyklických polích	28
	Cvičení	33
III.	*Cyklografické kužele a cyklografické kružnice*	
3,1.	Cyklografické kružnice	35
3,2.	Svazek kružnic v rovině a příslušný útvar v prostoru	38
3,3.	Úlohy o dotyku	41
	Cvičení	45
IV.	*Cyklografické koule*	
4,1.	Cyklografické koule se středem v průmětně	46
4,2.	Úlohy o kolmosti cyklů a kružnic	47
	Cvičení	49
4,3.	Cyklografické koule v obecné poloze	49
4,4.	Body společné dvěma neb třem cyklografickým koulím	53
	Cvičení	57
4,5.	Svazek cyklografických koulí	58
4,6.	Trs cyklografických koulí	62
	Cvičení	63
V.	*Cyklické zobrazení bodových transformací*	
5,1.	Dilatace	65
5,2.	Laguerrova inverse	65
	Cvičení	70

Str.
5,3. Kruhová inverse 70
5,4. Pseudogeometrie (C-geometrie) a její vztah k cyklografii 72
Cvičení 76

VI. Cyklický obraz křivky
6,1. Obecné úvahy 77
6,2. Cyklický obraz kuželosečky 78
6,3. Kružnice dotýkající se dvakrát dané kuželosečky 79
6,4. Jaké prostorové křivce odpovídá v rovině cykloida, epi- a hypocykloida? 80
6,5. Cyklický obraz křivky v rovině „isotropické". 83
Cvičení 84

VII. Cyklické zobrazení ploch
7,1. Koule, rotační kužel, hyperbolický válec 85
Cvičení 86
7,2. Cyklické zobrazení obecné plochy 87
Cvičení 94

VIII. Užití cyklické projekce a Laguerrových transformací 95

OPRAVY

V obr. 18 cykl *(B)* má býti orientován obráceně (záporně).

V obr. 31 má býti cykl *(B)* orientován záporně, kružnice *(L)* nemá býti orientována.

Spisovatel	*Prof. Dr Ladislav Seifert*
Název díla	*Cyklografie*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků v Praze*
roku	*1949*
Edice	*Kruh, svazek 15*
Redigoval	*Dr F. Vyčichlo*
Vytiskla	*Knihtiskárna „Prometheus" v nár. správě, Praha*
Stran	*104*
Obrazců	*47*
Vydání	*první (3300 výt.)*
Cena brož. výt.	*Kčs 47,—*