B. HOSTINSKÝ

~ SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ ~ JEDNOTOU ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

GEOMETRICKÉ PRAVDĚ- PODOBNOSTI

KRUH

sv. 2.

K R U H

SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ

JEDNOTOU ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za redakce B. Bydžovského, V. Posejpala a M. Valoucha

Svazek 2.

B. Hostinský

GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

Napsal

DR. BOHUSLAV HOSTINSKÝ

profesor teoretické fysiky na Masarykově universitě v Brně

TISKEM A NÁKLADEM

JEDNOTY ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

V PRAZE 1926

PŘEDMLUVA.

Počet pravděpodobnosti vznikl z úvah o pokusech, ve kterých náhoda rozhoduje o tom, zdaři-li se pokus či nezdaři, Pokus může vésti k různým výsledkům; předpokládáme, že jejich počet je konečný. Srovnáváme pak počet těch výsledků, které vedou k danému zjevu, s úhrnným počtem všech výsledků, ke kterým pokus může vésti; poměr obou čísel měři pravděpodobnost, že pokus se zdaři. Příkladem je hra kostkou; hodime-li kostku, je pravděpodobnost, že vyjde určité číslo, na př. čtyři, rovna jedné šestině.

Od úloh, kde výpočet pravděpodobnosti zakládá se na úvahách kombinatorických, liši se úlohy o geometrických čili spojitých pravděpodobnostech, kde přicházeji v úvahu nespočetná množstvi připadů. Nejstarším příkladem je Buffonova úloha o jehle: na vodorovné rovině jsou narýsovány ekvidistantni rovnoběžky; vypočisti pravděpodobnost, že jehla vržená na rovinu dopadne tak, že protne jednu rovnoběžku. Proti pojmu geometrické pravděpodobnosti, jenž je tak důležitý pro fysiku (na př. v kinetické teorii plynů), byly činěny různé námitky. Dnes však maji význam takřka jen historický, neboť v posledních desitiletich a to hlavně zásluhou Borelovou byl kriticky objasněn pojem geometrické pravděpodobnosti i jeho vztah k aplikacim fysikálnim.

Tato knižka má dvoji účel. Předně podává základni věty o geometrických pravděpodobnostech a zabývá se úlohami zajimavými se stanoviska ryze geometrického; zvláštni kapitola je věnována úvahám o pokusech, kterými lze přibližně potvrditi teoretické formule pro pravděpodobnosti. Čtenáři, *kteří se zajímají o tento obor, naleznou mnoho dalších zajímavých úloh v Czuberově knize o geometrických pravděpodobnostech, kterou na několika místech cituji. Za druhé snažil jsem se užíti Poincaréovy »metody libovolných funkcí« k řešení některých speciálních úloh. Myslím, že není dosud známo, že tato metoda dosahuje mnohem dále, než se dá na první pohled odhadnouti podle těch několika jednoduchých problémů, jež Poincaré původně rozřešil. Všude tam, kde se jedná o spojitý pohyb, můžeme, přihlížejíce k tomu, jak konečná poloha závisí na počátečních podmínkách, vypočítati pravděpodobnost za předpokladů zcela obecného rázu. Přeji si upozorniti touto knížkou naše matematiky na zvláštní a nový způsob, kterým Poincaré osvětlil obtížné pojmy pravděpodobnosti a náhody.*

V první kapitole shrnul jsem stručně zásady počtu pravděpodobnosti. Čtenáři, kteří se zajímají o tento obor, mohou užíti spisů, jichž seznam uvádím před začátkem první kapitoly.

Srdečné díky vzdávám pánům dru O. Borůvkovi a dru J. Kauckému, asistentům přírodovědecké fakulty Masarykovy university za to, že mně pomáhali při čtení korektur a Jednotě československých matematiků a fysiků za to, že spis vydala svým nákladem.

V Brně, v listopadu 1925.

BOHUSLAV HOSTINSKÝ.

Seznam

některých spisů o počtu pravděpodobnosti.

K úvodu do počtu pravděpodobnosti hodí se kniha

E. Borel: Le Hasard. Paris, F. Alcan.

Stručné učebnice:

Frèchet-Halbwachs: Le calcul des probabilités à la portée de tous. Paris 1924.

E. Borel - R. Deltheil: Probabilités, Erreurs. Paris, 1923.

Obšírnější díla:

J. Bertrand: Calcul des probabilités, Paris 1889; 2e édition 1907.

H. Poincaré: Calcul des probabilités, 2e édition, Paris, 1912; nezměněný otisk 1923.

E. Czuber: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 3. Aufl. I, II. Leipzig 1914—1921.

G. Castelnuovo: Calcolo delle probabilità, Milano-Roma-Napoli, 1919.

E. Borel: Éléments de la théorie des probabilités, 3e édition, Paris. 1924.

I. Obecné zásady počtu pravděpodobnosti.

1. Definice pravděpodobnosti. — Kostku, jejíž stěny jsou označeny čísly od 1 do 6, hodíme z větší vzdálenosti na vodorovnou rovinu a pozorujeme, které číslo padne.

Před jednotlivým hodem nemůžeme předvídati, které číslo v tom hodu vyjde. Opakujeme-li však pokus mnohokrát, objeví se v celkovém výsledku určitá pravidelnost. Hodíme-li kostkou na př. 6000krát, shledáme, že přibližně 1000krát padne číslo 1, přibližně 1000krát číslo 2 atd., ovšem za předpokladu, že kostka je přesně pracována a že je homogenní. Kdyby dřevěná kostka měla poblíž jedné stěny kovovou vložku, padala by na tuto stěnu častěji a zmíněná pravidelnost by se tím porušila.

Považujeme pravidelnost, jevící se ve statistice velké řady pokusů (v našem případě: házíme-li kostkou, vyjde určité číslo přibližně tolikrát, kolik obnáší šestina z celkového počtu pokusů), za důsledek určité pravidelnosti v podmínkách pokusu (kostka je pravidelná, takže žádná její stěna nemá význačných vlastností, ani pokud se týče vztahů ryze geometrických, ani pokud se týče rozdělení hmoty).

Míru pravděpodobnosti přisoudíme pak nějakému zjevu takto: je-li n počet všech těch případů, které vůbec mohou nastati jakožto výsledky zamýšleného pokusu, a m počet všech těch mezi nimi, které vedou k očekávanému zjevu (»případy příznivé«), je pravděpodobnost p zjevu určena vzorcem

$$p = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Pravděpodobnost zjevu vypočteme, dělíme-li počet případů příznivých počtem všech případů možných.

Řešení každé úlohy o pravděpodobnosti, pokud počet všech možných případů je konečný, předpokládá tedy, že

1. ustanovíme, které případy považujeme za možné a že
2. spočítáme všechny případy příznivé.

Hodíme-li jednou kostkou, je pravděpodobnost p, že vyjde určité číslo (na př. jedna), rovna $^1/_6$, neboť $n = 6$, $m = 1$.

Hodíme-li dvěma kostkami, je pravděpodobnost p, že vyjde součet osm, rovna $^5/_{36}$, neboť $n = 36$, $m = 5$. Počet všech možných případů ($= 36$), odlišujeme zde od počtu všech možných součtů ($= 11$), kterých lze dvěma kostkami docíliti. Pravděpodobnosti různých součtů nejsou stejné.

Krajní případy pravděpodobnosti jsou: nemožnost ($m = 0$, tedy $p = 0$) a jistota ($m = n$, tedy $p = 1$). Vždy platí, že

$$0 \leq p \leq 1.$$

Pravděpodobnost q, že uvažovaný zjev nenastane, jest

$$q = \frac{n - m}{n} = 1 - p.$$

Shora uvedená definice (1) pravděpodobnosti přihlíží jen k jedné stránce náhodných zjevů, totiž k podmínkám pokusu (v případě kostky: je dáno, že pokus musí míti jeden ze šesti možných výsledků a že jen jeden z nich je příznivý očekávanému zjevu); proto nazývá se někdy pravděpodobnost takto definovaná pravděpodobností a priori na rozdíl od tak zv. pravděpodobnosti a posteriori, kterážto je dána druhou stránkou náhodných zjevů, totiž pravidelností jevící se ve statistice veliké řady pokusů.

2. *Pravděpodobnost úhrnná.* — Budiž n počet všech vůbec možných případů, které mohou nastati jakožto výsledek daného pokusu. Rozdělme pak případy, jež jsou danému zjevu příznivy, v k skupin: v první skupině bude m_1 případů, ve druhé m_2 případů ... v k-té m_k případů; počet všech případů příznivých jest

$$m = m_1 + m_2 + \ldots m_k.$$

Pravděpodobnost, že pokus povede k případu obsaženému v prvé skupině, jest

$$p_1 = \frac{m_1}{n},$$

pravděpodobnost, že pokus povede k případu obsaženému ve druhé skupině, jest

$$p_2 = \frac{m_2}{n}, \text{ atd.}$$

Pravděpodobnost, že zjev vůbec nastane, je

$$p = \frac{m}{n} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n},$$

aneb

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_m. \tag{2}$$

p nazývá se *pravděpodobností úhrnnou* a máme větu: *Jsou-li $p_1, p_2, \ldots p_k$ pravděpodobnosti zjevů navzájem se vylučujících, takže jen jeden z nich se může v daném pokuse uskutečniti, jest pravděpodobnost, že jeden z nich se uskuteční, rovna součtu $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$.*

3. *Pravděpodobnost složená.* — *a)* Budiž n_1 počet všech případů, které vůbec mohou se vyskytnouti jakožto výsledky daného pokusu, m_1 pak počet těch, které jsou uvažovanému zjevu a_1 příznivy. Pravděpodobnost p_1, že zjev nastane, je dána vzorcem

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1}.$$

Označme písmeny m_2, n_2 a p_2 obdobné veličiny při nějakém pokuse, jenž se koná za jiných podmínek a jenž může vésti ke zjevu a_2. Pravděpodobnost, že nastane zjev a_2, jest

$$p_2 = \frac{m_2}{n_2}.$$

Předpokládejme, že mezi oběma zjevy není žádné příčinné souvislosti. Položme si otázku: Jak veľká jest pravděpodobnost p, že pokus prvního druhu bude přízniv zjevu a_1 a že zároveň pokus druhého druhu bude přízniv zjevu a_2? Počet všech možných případů jest $n_1 n_2$, neboť každý z n_1 možných výsledků, které může dáti pokus prvého druhu, dá se kombinovati s každým z n_2 případů, jež se mohou vyskytnouti při pokuse druhého druhu. Počet příznivých případů jest $m_1 m_2$ z podobného důvodu. Je tedy

$$p = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2},$$

čili

$$p = p_1 p_2. \tag{3}$$

Pravděpodobnost p určená vzorcem (1) nazývá se *složenou;* užívajíce tohoto názvu, vyjádříme vzorec větou: *Je-li p_1 pravděpodobnost nějakého zjevu a p_2 pravděpodobnost zjevu jiného, který jest na prvém nezávislý, jest $p_1 p_2$ pravděpodobnost, že nastanou oba zjevy.*

b) Rovnice (3) dá se zobecniti takto: je-li dáno k zjevů, mezi nimiž není příčinné souvislosti, a jsou-li pravděpodobnosti těch zjevů $p_1, p_2 \dots p_k$, jest pravděpodobnost p, že všech k zjevů vyskytne se pospolu, dána vzorcem

$$p = p_1 p_2 \dots p_k \,. \tag{3'}$$

4. Matematická naděje a střední hodnota. — Budiž x_1 hodnota, které nabude proměnná veličina x, zdaří-li se určitý pokus; a budiž p pravděpodobnost, že pokus ten se zdaří. Je-li N veliké číslo, bude v řadě N pokusů přibližně Np zdařilých; součet všech hodnot veličiny x, jež odpovídají zdařilým pokusům, je tedy přibližně Npx_1. Z toho připadá na jediný pokus průměrná (střední) hodnota px_1, kterou nazýváme ***matematickou naději*** veličiny x pro jeden pokus; Npx_1 je pak matematická naděje pro N pokusů.

Předpokládejme nyní obecněji, že proměnná veličina x nabývá jedné z n hodnot

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

a označme příslušné pravděpodobnosti, se kterými té neb oné hodnoty může nabýti, písmeny

$$p_1, p_2 \dots p_n \,;$$

platí rovnice $$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

a matematická naděje veličiny x je dána vzorcem

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \,. \tag{4}$$

Matematická naděje proměnné veličiny x se vypočte, násobíme-li každou hodnotu, které x může nabýti, pravděpodobnosti, že té hodnoty nabude, a sečteme-li všechny součiny tak utvořené.

Místo názvu »matematická naděje veličiny x« užíváme též názvů »pravděpodobná hodnota« nebo »střední hodnota« veličiny x. K objasnění tohoto posledního názvu vyjděme od vzorce

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \,,$$

kterým se stanoví x jakožto aritmetický střed n hodnot $x_1, x_2 \dots x_n$. Počítajíce takto střed, přisuzujeme všem veličinám x_k stejnou váhu. Kdybychom však z jakýchkoli důvodů přisoudili každé veličině x_k jinou *váhu* s_k, byla by střední hodnota ξ definována vzorcem

$$\xi = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots s_n x_n}{s_1 + s_2 + \dots + s_n} \,;$$

pro $s_1 = s_2 = \dots = s_n$ přechází ξ v x.

Zaveďme do počtu čísla p_k úměrná vahám s_k:

$$\frac{s_k}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} = p_k, \quad (k = 1, 2, \ldots n);$$

patrně jest $\quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

a vzorec pro ξ dá se psáti takto:

$$\xi = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n .$$

Střední hodnota ξ veličiny x není tedy nic jiného než její matematická naděje; váhy jednotlivých hodnot x_k jsou úměrny příslušným pravděpodobnostem.

5. ***Pravděpodobnost různých výsledků v řadě opakovaných pokusů.*** — Budiž p pravděpodobnost, že určitý zjev se dostaví jakožto výsledek nějakého pokusu, $1 - p$ pak pravděpodobnost, že zjev ten se nedostaví. Pokus, v němž nastane první případ, nazveme zdařeným; nastane-li druhý případ, bude pokus nezdařený.

Konáme pokus celkem n-krát za stejných podmínek a klademe si otázku: jak veliká je pravděpodobnost P_m, že v řadě n pokusů bude m zdařených a $n - m$ nezdařených?

Očíslujme nejprve všech n pokusů pořadovými čísly 1, $2, \ldots n$ a vytkněme určitých m z těchto čísel jakožto pořadová čísla pokusů, které se mají zdařiti; ostatních $n - m$ čísel bude pak náležeti pokusům, které se nemají zdařiti. Pravděpodobnost, že zdařené a nezdařené pokusy vyskytnou se právě v tomto předepsaném pořadí, jest

$$p^m (1 - p)^{n - m}.$$

Avšak v otázce shora položené nepřihlížíme k pořadí, ve kterém se zdařené resp. nezdařené pokusy mají vyskytnouti, nýbrž jen k úhrnnému jich počtu. Proto musíme násobiti číslo právě odvozené počtem permutací z n prvků s opakováním (v každé permutaci je celkem n prvků, z nich m je stejných, zbývající prvky pak, v úhrnném počtu $n - m$, jsou rovněž mezi sebou stejny). Hledaná pravděpodobnost jest

$$P_m = \frac{n!}{m!\,(n - m)!}\, p^m (1 - p)^{n - m}.$$

Položme si otázku, jak voliti číslo m (jsou-li n a p dána), aby pravděpodobnost P_m měla co největší hodnotu?

Je-li P_m největší člen v posloupnosti kladných čísel

$$P_0, P_1, P_2, \ldots P_n ,$$

jest

$$\frac{P_m}{P_{m+1}} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{m+1}{n-m} > 1, \qquad \frac{P_{m-1}}{P_m} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{m}{n-m+1} < 1$$

a tedy $$np + p - 1 < m < np + p.$$

Hledané číslo m je tak sevřeno do dvou mezí, jichž rozdíl $= 1$. Je-li číslo n dosti veliké, můžeme vynechati $p-1$ nebo p vedle np, a máme přibližné hodnoty

$$np \quad \text{resp.} \quad n(1-p)$$

pro počet zdařených resp. nezdařených pokusů za předpokladu, že P_m dosahuje maximální hodnoty. *Ze všech výsledků, které se mohou vyskytnouti, vykonáme-li pokus n krát,*) má největší pravděpodobnost ten, ve kterém počet podařených pokusů má se k počtu nepodařených jako p se má ku* $1-p$.

6. *Přibližná hodnota pravděpodobnosti* P_m. — *a) Budiž m* veliké číslo celé. Podle Stirlingovy formule**) dá se $m!$ vyjádřiti přibližně výrazem

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-m} m^{m+\frac{1}{2}};$$

poměr tohoto výrazu ku $m!$ má za limitu jednotku, roste-li m do nekonečna.

Předpokládejme nyní, že čísla n a m, vyskytující se ve vzorci pro P_m v odst. 5., jsou velmi veliká, zaveďme do počtu *úchylku h* rovnicí $$h = m - np$$

a užijme Stirlingovy formule. Není-li h větší než $\sqrt{n}$ a považujeme-li poměr $h : n$ za nekonečně malou veličinu, obdržíme přibližnou hodnotu P výrazu P_m:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\, e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}.$$

P je pravděpodobnost, že v řadě n pokusů vyskytne se $np + h$ zdařených; pravděpodobnost, že počet zdařených pokusů bude obsažen v mezích $np + h_1$ až $np + h_2$, jest

$$P(h_1, h_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \sum_{h=h_1}^{h_2} e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}.$$

*) Rozumí se, že různé možné výsledky srovnáváme jen co do počtu podařených pokusů, bez ohledu na pořadí, ve kterém se střídají podařené pokusy s nepodařenými.

**) Viz *J. A. Serret* Integralrechnung. 2. Aufl. (Leipzig 1899), p. 164; *K. Petr* Počet integrální (Praha 1915), p. 408.

b) Exponenciální funkce klesá s h velmi pomalu, je-li n veliké; proto můžeme součet nahraditi integrálem:

$$P(h_1, h_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \int_{h_1}^{h_2} e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}} dh.$$

Položme

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt;$$

předchozí vzorec můžeme pak psáti takto:

$$P(h_1, h_2) = \tfrac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{h_2}{\sqrt{2np(1-p)}}\right) - \tfrac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{h_1}{\sqrt{2np(1-p)}}\right). \quad (5)$$

Úvahy obsažené v odst. 5. a 6. shrneme větou: *Budiž p pravděpodobnost, že nějaký pokus se zdaří, n počet pokusů, m skutečný počet pokusů zdařených, np pravděpodobný počet pokusů zdařených a h úchylka:*

$$h = m - np.$$

Předpokládáme, že n je číslo velmi veliké a že h není větši než $\sqrt{n}$ Pak pravděpodobnost $P(h_1, h_2)$, že úchylka h jest obsažena v mezích h_1 a h_2, jest určena přibližně vzorcem (5).

Průběh funkce $\Theta(t)$ objasní se touto tabulkou:

t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$
0·00	0·000 0000	1·20	0·9103140..
0·20	0·222 7025..	1·50	0·9661052..
0·40	0·428 3922..	2·00	0·9953223..
0·50	0·520 4999..	3·00	0·9999779..
1·00	0·842 7008..	4·00	0·99999998459..

7. *Srovnání s výsledky pokusů.* — Je-li n veliké číslo, vyskytne se v řadě n pokusů přibližně

$$np \quad (6)$$

zdařených (srv. odst. 1.), je-li p pravděpodobnost, že pokus se zdaří.

Užijme nyní této věty pro případ, že konáme veliký počet s serií po n pokusech. V každé jednotlivé serii je pravděpodobnost $P(h_1, h_2)$, že úchylka h bude obsažena v mezích h_1 a h_2, určena vzorcem (5). Bude tedy přibližně celkem

$$\frac{s}{2}\left[\Theta\left(\frac{h_2}{\sqrt{2np(1-p)}}\right)-\Theta\left(\frac{h_1}{\sqrt{2np(1-p)}}\right)\right] \tag{7}$$

serií, v nichž úchylka skutečného počtu zdařených pokusů od np bude obsažena v mezích h_1 a h_2. Položíme-li $h_1 = -h_2$, obdržíme (ježto Θ je funkce lichá)

$$s\,.\,\Theta\left(\frac{h_1}{\sqrt{2np(1-p)}}\right) \tag{7 a}$$

jakožto přibližný počet serií, ve kterých bude úchylka h číselně menší než h_1.

Platnost vzorů (6), (7) a (7*a*) dá se potvrditi pokusy; nutno ovšem znáti hodnotu pravděpodobnosti p. Potvrzení vzorce (6) je poměrně snadné. Zevrubnější potvrzení vzorce (7) nebo (7*a*) vyžaduje většího počtu pokusů, neboť n i s musejí býti veliká čísla.

Poznamenejme, že úvahy, obsažené v odst. 5. a 6., jimiž jsou vzorce (6), (7) a (7*a*) odůvodněny, předpokládají platnost základních vět o pravděpodobnosti úhrnné (odst. 2.) a o pravděpodobnosti složené (odst. 3.); jsou však nezávisly na definici pravděpodobnosti, vyjádřené rovnicí (1). Užití oněch vzorců není tudíž omezeno jen na ty úlohy, ve kterých definujeme pravděpodobnost jakožto poměr počtu případů příznivých k počtu případů možných; vzorce ty platí pro každou definici pravděpodobnosti, která se srovnává s principy o pravděpodobnosti úhrnné a o pravděpodobnosti složené. Sem patří tak zv. pravděpodobnosti geometrické, o kterých bude v tomto spise pojednáno.

8. *Přehled úloh o geometrických pravděpodobnostech.* — Pojem geometrické pravděpodobnosti vyskytuje se po prvé v Buffonově úloze o jehle:*) na vodorovné rovině jsou narýsovány rovnoběžky ve stejných vzdálenostech; hodíme-li na rovinu jehlu, jak velká je pravděpodobnost, že jehla protne některou z rovnoběžek? Vykonáme-li veliký počet pokusů, udává poměr, ve kterém je počet zdařených pokusů k úhrnnému

*) *Buffon:* Essai d'arithmétique morale (Supplément à l'Histoire naturelle, vol. IV., p. 84; 1777).

počtu všech pokusů, přibližnou hodnotu hledané pravděpodobnosti. Avšak přímý výpočet této pravděpodobnosti na základě podmínek pokusu nemůže vycházeti bezprostředně z definice (1). Neboť počet všech možných případů je nekonečně veliký, rovněž tak počet případů příznivých. Podobně je tomu v jiných úlohách, kde hledáme pravděpodobnost, že nějaký útvar vyhovuje určitým geometrickým podmínkám. Prvním krokem k řešení úlohy jest ustanoviti míru pro množství všech případů možných jakož i pro množství všech případů příznivých.

Všimněme si nejjednodušší úlohy o geometrické pravděpodobnosti: na úsečce AB jsou zvoleny dva body C a D. Vypočísti pravděpodobnost, že bod M, zvolený uvnitř úsečky AB, leží uvnitř úsečky CD. Předpokládejme, že není žádného důvodu, proč bychom očekávali, že bod M se spíše octne v některé části úsečky AB než v jiné; pak bude hledaná pravděpodobnost úměrna délce úsečky CD, a pravíme, že *hustota pravděpodobnosti**) je konstantní podél celé úsečky AB. Kdybychom však z jakýchkoli důvodů předpokládali, že v některých částech úsečky AB může se bod M spíše vyskytnouti, než v jiných, nebyla by hustota pravděpodobnosti všude stejná.**) Podobně můžeme rozlišovati i v jiných úlohách, běží-li na př. o pravděpodobnost, že přímky, roviny atd. vyhovují určitým podmínkám.

V kap. II., III. a IV. jedná se výhradně o případech, kdy hustota pravděpodobnosti je konstantní. V kap. V. jsou probrány některé případy, ve kterých se výpočet pravděpodobnosti dá snadno kontrolovati pokusy. V kap. VI. konečně zabývám se speciálními úlohami, ve kterých hustota pravděpodobnosti není konstantní.

II. Základní definice a obecné věty o geometrických pravděpodobnostech.

9. *Bod na přímce.* — *a)* Budiž dána úsečka AB a volme bod M někde uvnitř této úsečky nebo na jejím kraji. Množství všech případů, jež mohou nastati (množství všech bodů, ležících na úsečce AB), měříme délkou $\overline{AB}$ úsečky a pravíme, že *množství všech bodů, ležících na dané úsečce, má za míru délku této úsečky.* Zvolme nyní na AB dva body C a D. Měrou

*) T. j. pravděpodobnost vypočtená pro případ, že délka úsečky CD je rovna jednotce.

**) Srv. též odst. 14.

množství všech bodů, které leží na CD, jest délka CD. *Pravděpodobnost p, že bod M, volený na úsečce AB, leží zároveň na CD, definujeme vzorcem*

$$p = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} . \tag{8}$$

Tato definice je zcela obdobná definici (1); na místo čísla n nastupuje zde míra $\overline{AB}$ pro množství všech možných případů a na místo čísla m míra $\overline{CD}$ pro množství všech případů příznivých.

b) Předchozí definice pravděpodobnosti p zakládá se na tom, že považujeme délku úsečky za míru pro množství všech bodů, na úsečce ležících.

Volme na přímce pevný bod O za počátek souřadnic a označme písmeny x_1 resp. x_2 úsečky dvou bodů A a B. Za míru pro množství všech bodů, tvořících úsečku AB, považujme obecněji výraz

$$f(x_1, x_2).$$

Funkce f dá se určiti, učiníme-li o ní tyto dva předpoklady:

1. Hodnota funkce f, jež udává míru úsečky AB, nezávisí na poloze bodu O (předpoklad o invarianci vůči změně souřadnic).

2. Leží-li bod C na úsečce AB, rovná se její míra součtu měr, které náležejí oběma částem jejím AC a CB, tedy (je-li $x_1 < x_2 < x_3$)

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_3) + f(x_3, x_2),$$

kterážto rovnice vyjadřuje předpoklad o sčítání měr.

Zaveďme nové souřadnice x'_1 a x'_2 bodů A a B rovnicemi

$$x_1 = x'_1 + a, \qquad x_2 = x'_2 + a,$$

kde a znamená libovolnou konstantu. Podle prvního předpokladu jest

$$f(x'_1, x'_2) = f(x_1, x_2).$$

Jinými slovy: hodnota míry f se nemění, zvětšíme-li x_1 i x_2 o tutéž konstantu. f je tudíž funkcí rozdílu obou proměnných, takže lze psáti

$$f(x_1, x_2) = F(x_2 - x_1).$$

Náleží-li pak bodu C úsečka x_3, máme podle druhého předpokladu

$$F(x_2 - x_1) = F(x_2 - x_3) + F(x_3 - x_1)$$

aneb, zavedeme-li do počtu délky

$$x = x_3 - x_1, \qquad y = x_2 - x_3$$

úseček AC a CB,

$$F(x + y) = F(x) + F(y).$$

Každá kladná funkce $F(x)$, vyhovující této rovnici, dá se vyjádřiti formulí*)

$$F(x) = k \,.\, x,$$

kde k je konstanta. Míra úsečky má se k míře jiné úsečky jako se mají jejich délky; tak docházíme k definici pravděpodobnosti p shora podané.

c) Vzorce (8) užíváme též k výpočtu pravděpodobnosti, že bod leží v části CD oblouku AB nějaké křivky, považujíce délku oblouku za míru pro množství všech bodů na oblouku tom ležících.

Podobně béřeme úhel za míru všech polopaprsků, které uvnitř toho úhlu z jeho vrcholu vycházejí. Odtud definice: *Pravděpodobnost, že polopaprsek, vedený v rovině daným bodem O, leží v daném úhlu α, jehož vrcholem jest O, rovná se poměru*

$$\alpha : 2\pi. \tag{8a}$$

10. Bod v rovině nebo v prostoru. — a) Za míru pro množství bodů, které vyplňují určitý obor A v rovině, považujeme plošný obsah P tohoto oboru. Budiž A_1 část oboru A, P_1 její plošný obsah a volme bod M uvnitř oboru A. ***Pravděpodobnost p, že bod M, volený v oboru A, leží v určité jeho části A_1, jest určena vzorcem***

$$p = \frac{P_1}{P}. \tag{9}$$

Pro případ, že běží o bod M, volený v určité části prostoru, zavádíme definice obdobné předchozím: ***Objem V trojrozměrného oboru A považujeme za míru pro množství všech bodů, obsažených v A. Pravděpodobnost, že bod M, zvolený v oboru A, leží v určité jeho části A_1, jež má objem V_1 jest určena vzorcem***

$$p = \frac{V_1}{V}. \tag{9'}$$

b) Vzorce (9) a (9') resp. definice měr pro obory A a A_1 dají se odvoditi z předpokladu o invarianci míry vůči trans-

*) *G. Darboux:* Sur le problème fondamental de la géométrie projective (Mathem. Annalen, Bd. XVII. p. 55—61; 1870).

formaci souřadnic (viz podobnou úvahu v odst. 9.). Míru pro trojrozměrný obor odvodíme takto: Považujme integrál

$$J_A = \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

kde f je funkce (zatím neurčená) obyčejných pravoúhlých souřadnic x, y a z, za míru oboru A. Tato definice vyhovuje předpokladu o sečítání měr (srv. odst. 9.), neboť skládá-li se obor A ze dvou částí, A_1 a A_2, platí

$$J_{A_1} + J_{A_2} = J_A.$$

Zbývá určiti funkci $f(x, y, z)$ tak, aby integrál J_A **neměnil** svého tvaru při libovolné transformaci pravoúhlých souřadnic x, y, z. Z transformačních vzorců

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ax' + by' + cz', \\ y &= y_0 + a'x' + b'y' + c'z', \\ z &= z_0 + a''x' + b''y' + c''z', \end{aligned}$$

kde $a, b, \ldots c''$ jsou elementy ortogonálního determinantu, plyne, že

$$J_A = \iiint_{A'} f(x_0 + ax' + by' + cz',\ y_0 + \ldots,\ z_0 + \ldots)\, dx'\, dy'\, dz';$$

A' značí obor přiřaděný oboru A uvažovanou transformací. Prvá formule pro J_A má vůči proměnným x, y, z obecně jiný tvar než druhá vůči proměnným x', y', z'. Žádáme-li, aby oba tvary byly totožné, musíme vzíti

$$f(x, y, z) = const.$$

Míra je tudíž úměrná objemu; z toho vyplývá formule (9'). Pro případ oboru dvojrozměrného provede se příslušná úvaha zcela podobně.

c) Vzorec (9) definuje též pravděpodobnost, že bod M, zvolený na křivé ploše o obsahu P, leží v určité její části o plošném obsahu P_1.

11. Přímka v rovině. — a) Přímka budiž určena souřadnicemi q a φ tak, že v bodových pravoúhlých souřadnicích má rovnici

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - q = 0.$$

V dalším budeme se zabývati hlavně d v o j r o z m ě r n ý m i množstvími přímek. Takové množství definuje se na př. nerovností

$$F(q, \varphi) \leq 0.$$

Integrál

$$\iint_M dq\, d\varphi \tag{10}$$

udává míru daného dvojrozměrného množství M přímek. Poměr

$$\iint_{M_1} dq\, d\varphi : \iint_{M} dq\, d\varphi. \tag{11}$$

udává pravděpodobnost, že přímka (q, φ), zvolená v M, je zároveň obsažena v M_1 (je-li M_1 částí množství M).

b) Tyto definice dají se odůvodniti požadavkem invariance vůči transformacím souřadnic x, y, z, podobně jako definice (9). Předpokládejme, že míra daného množství M přímek dá se vyjádřiti integrálem tvaru

$$\iint_M f(q, \varphi)\, dq\, d\varphi.$$

Tato definice vyhovuje požadavku o sčítání měr (srv. odst. 9. a 10.); funkce f ustanoví se požadavkem invariance takto: Dokažme nejprve, že při každé transformaci souřadnic, která přiřaďuje přímce (q, φ) nové souřadnice (q', φ'), jest funkční determinant

$$\frac{D(\varphi, q)}{D(\varphi', q')} = 1.$$

Při translaci jest

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b,$$

kde a a b jsou konstanty. Původní rovnice přímky přejde v

$$x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - (q - a \cos \varphi - b \sin \varphi) = 0.$$

Píšeme-li tuto novou rovnici ve tvaru

$$x' \cos \varphi' + y' \sin \varphi' - q' = 0,$$

jest

$$\varphi = \varphi', \quad q = q' + a \cos \varphi' + b \sin \varphi'$$

a tedy

$$\frac{D(\varphi, q)}{D(\varphi', q')} = 1.$$

Při rotaci je rovněž funkční determinant $= 1$, neboť

$$\varphi = \varphi' + a, \qquad q = q'.$$

Poněvadž pak nejobecnější transformace skládá se z translací a rotací postupně provedených, jest její funkční determinant (rovný součinu z determinantů, příslušných částečným transformacím) roven jedné. Proto transformuje se náš integrál v

$$\iint_{M'} f(q, \varphi)\, dq'\, d\varphi',$$

kde M' značí obor odvozený z M danou transformací. Funkce $f(q, \varphi)$, považujeme-li ji za funkci proměnných φ' a q', závisí obecně na těchto proměnných jinak než na φ a q; má-li býti závislost stejná pro všechny soustavy souřadnic (x, y), resp. (q, φ), musí býti $f = const.$ Tak docházíme k definici míry, z níž plyne definice pravděpodobnosti (11).*)

e) Uvedené definice míry a pravděpodobnosti nedají se bezprostředně aplikovati na jednorozměrná množství přímek, na př. na množství polopaprsků, vyplňujících daný úhel α. Za míru tohoto množství považujeme úhel α a pravděpodobnost, že polopaprsek, jenž vrcholem toho úhlu prochází, je v něm obsažen, béřeme jeho poměr k plnému úhlu (odst. 9*c*).

12. Přímka v prostoru. — *a)* Přímka v prostoru mějž v pravoúhlých souřadnicích x, y, z rovnice

$$x = az + p, \qquad y = bz + q;$$

jest určena čtyřmi veličinami a, b, p, q. Omezíme-li tyto veličiny určitými podmínkami (na př. nerovnostmi), obdržíme čtyřrozměrné množství M přímek; jen o takovýchto množstvích budeme dále jednati. *Integrál*

$$\iiiint\limits_M \frac{da\,db\,dp\,dq}{(1 + a^2 + b^2)^2} \tag{12}$$

udává míru daného čtyřrozměrného množství přímek. Je-li M_1 část množství M, udává poměr

$$\iiiint\limits_{M_1} \frac{da\,db\,dp\,dq}{(1 + a^2 + b^2)^2} : \iiiint\limits_M \frac{da\,db\,dp\,dq}{(1 + a^2 + b^2)^2} \tag{13}$$

pravděpodobnost, že přímka (a, b, p, q), zvolená v M, náleží zároveň do M_1. Geometrický význam míry odvodíme takto: Přímka P (a, b, p, q) má směrové cosinusy

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \qquad \beta = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

p a q jsou souřadnice bodu, ve kterém se P protíná s rovinou Oxy. Označme znaky dp a dq nekonečně malé přírůstky veličin p a q. Ty přímky, které jsou s P rovnoběžny a jichž souřadnice p a q jsou obsaženy v intervalech $(p, p + dp)$, resp. $(q, q + dq)$, vyplňují nekonečně úzký hranol H, jenž protíná rovinu Oxy v rovnoběžníku o plošném obsahu $dp\,dq$; kolmý průřez tohoto hranolu má plošný obsah

$$dQ = \gamma\,dp\,dq = \frac{dp\,dq}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

---

*) Srv. *H. Poincaré:* Calcul des Probabilités, 2e édition, No 72.

Uvažujme nyní o těch přímkách, které obdržíme, změníce a a b nekonečně málo, takže nabudou hodnot, obsažených v intervalech $(a, a + da)$ resp. $(b, b + db)$. Vedeme-li ke každé takové přímce rovnoběžku středem pomocné koule o poloměru $= 1$, vymezí přímky tak sestrojené část jejího povrchu, která měří tělesný úhel oněmi přímkami vyplněný; jeho velikost jest

$$d\Omega = \left|\frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma}\right| = \left|\frac{da\, db}{(1+a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

Element integrálu (11) je tedy

$$\frac{da\, db\, dp\, dq}{(1+a^2+b^2)^2} = dQ\, d\Omega;$$

rovná se součinu z kolmého průřezu hranolu H a tělesného úhlu $d\Omega$.

Tato geometrická interpretace ukazuje, že vzorec (12), udávající míru uvažovaného přímkového množství, nezmění svého tvaru, provedeme-li libovolnou transformaci pravoúhlých souřadnic. Dokážeme, že naopak podmínkou neproměnnosti vůči transformacím pravoúhlých souřadnic jest formule (12) určena. Předpokládejme, že měrou uvažovaného přímkového množství jest výraz

$$m = \iiiint f(a, b, p, q)\,.\, da\, db\, dp\, dq$$

vztažený k příslušnému oboru; po transformaci soustavy $Oxyz$ na soustavu $O'x'y'z'$

$$\begin{aligned} x &= Ax' + By' + Cz' + x_0, \\ y &= A'x' + B'y' + C'z' + y_0, \\ z &= A''x' + B''y' + C''z' + z_0, \end{aligned}$$

obdržíme na místo původních rovnic přímky P rovnice nové, které se dají upraviti na tvar

$$x' = a'z' + q', \qquad y' = b'z' + q'.$$

Výpočět funkčního determinantu

$$\frac{D(a, b, p, q)}{D(a', b', p', q')}$$

usnadní se touto úvahou: Nekonečně úzký hranol H, jenž byl v soustavě $Oxyz$ definován přírůstky da, db, dp a dq, je v nové soustavě $O'x'y'z'$ definován přírůstky da', db', dp' a dq'; veličiny dQ a $d\Omega$ nemění se transformací souřadnic, takže platí

$$\iiiint \frac{da\, db\, dp\, dq}{(1+a^2+b^2)^2} = \iiiint \frac{da'\, db'\, dp'\, dq'}{(1+a'^2+b'^2)^2}.$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{D(a, b, p, q)}{D(a', b', p', q')} = \left(\frac{1+a^2+b^2}{1+a'^2+b'^2}\right)^2$$

a tedy

$$m = \iiiint f(a, b, p, q)\, da\, db\, dp\, dq =$$

$$= \iiiint f(a, b, p, q) \left(\frac{1+a^2+b^2}{1+a'^2+b'^2}\right)^2 da'\, db'\, dp'\, dq'.$$

Požadavek, aby v nové soustavě byla míra m vyjádřena stejnou formulí jako dříve, dává rovnici

$$m = \iiiint f(a', b', p', q')\, da'\, db'\, dp'\, dq'.$$

Srovnáme-li s výrazem předešlým, dostáváme podmínku

$$\frac{f(a, b, p, q)}{f(a', b', p', q')} = \frac{(1+a'^2+b'^2)^2}{(1+a^2+b^2)^2};$$

poněvadž pak veličiny a, b, a', b' mohou býti voleny zcela libovolně a nezávisle jedna na druhé, musí býti

$$f(a, b, p, q) = \frac{k}{(1+a^2+b^2)^2},$$

kde k značí konstantu. Dosadíme-li $k(1+a^2+b^2)^{-2}$ na místo f do původního vzorce pro hledanou míru, obdržíme právě formuli (12), až na konstantní faktor k; pro výpočet pravděpodobnosti (13) nemá hodnota veličiny k žádného významu.

13. Rovina v prostoru. — *a)* Budiž dána rovina R rovnicí

$$ux + vy + wz + 1 = 0;$$

veličiny u, v, w nazveme jejími souřadnicemi. V dalším budeme se zabývati toliko trojrozměrnými množstvími rovin; souřadnice rovin, jež takovému množství náleží, vyhovují určitým nerovnostem.

Integrál

$$\iiint_{\varepsilon} \frac{du\, dv\, dw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \tag{14}$$

udává míru trojrozměrného množství E rovin. Poměr

$$\iiint\limits_{E_1} \frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2)^2} : \iiint\limits_{E} \frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \tag{15}$$

udává pravděpodobnost, že rovina (u, v, w) *zvolená v E je zároveň obsažena v* E_1, *je-li* E_1 *částí množství E.*

Integrály, jež se vyskytují ve formulích (14) a (15), upravíme tak, aby byl zjevný jejich geometrický význam. Budiž ϑ úhel, který svírá normála sestrojená k rovině R s osou Oz, φ úhel mezi průmětem této normály do roviny Oxy a mezi osou Ox, p pak vzdálenost roviny R od počátku souřadnic. Platí vztahy

$$u = -\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{p}, \quad v = -\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{p}, \quad w = -\frac{\cos\vartheta}{p},$$

$$\frac{1}{(u^2+v^2+w^2)^2} = p^4, \qquad \frac{D(u, v, w)}{D(\vartheta, \varphi, p)} = \frac{\sin\vartheta}{p^4},$$

takže na vzorec (14) pro míru nabývá tvaru

$$\iiint \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dp. \tag{14'}$$

Normále přisuzujeme vždy určitý smysl a p čítáme od počátku souřadnic v tom smyslu kladně. Jeli $d\omega$ element jednotkové koule, v němž je její povrch proťat poloměry vedenými rovnoběžně k normálám rovin odpovídajících hodnotám úhlů ϑ a φ v intervalech $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ resp. $(\varphi, \varphi + d\varphi)$, jest

$$d\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,;$$

vzorec (14') pro míru lze psáti tudíž také takto:

$$\iiint d\omega\, dp. \tag{14''}$$

Z tohoto výrazu plyne, že míra má tvar invariantní při libovolné transformaci pravoúhlých souřadnic. Úvahou, která je zcela obdobná úvaze shora provedené o míře množství přímkových, dá se dokázati, že ze všech formulí tvaru

$$\iiint f(\vartheta, \varphi, p)\, d\vartheta\, d\varphi\, dp$$

jedině formule (14'), v níž

$$f(\vartheta, \varphi, p) = \sin\vartheta,$$

jest invariantní vůči libovolné soustavě pravoúhlých souřadnic.*)

14. O významu invariantních definic míry a pravděpodobnosti. — V předchozích odstavcích uvedli jsme vzorce pro míru množství bodových, přímkových a rovinových. Všechny tyto formule, jakož i příslušné formule pro pravděpodobnosti, jsou invariantní vůči libovolné transformaci pravoúhlých souřadnic. Budiž na př. A trojrozměrný obor o objemu V v obyčejném bodovém prostoru a B obor, který je s A shodný. Podle odst. 10a mají oba tyto obory tutéž míru, rovnou objemu V. Obor B vzniká z A přemístěním; míra nějakého bodového množství je tedy invariantní vůči libovolnému přemístění.

Pravděpodobnost, že bod zvolený uvnitř určitého oboru leží v některé jeho části o objemu 1 cm^3, nazveme hustotou pravděpodobnosti. Podle definice uvedené v odst. 10. je hustota pravděpodobnosti všude stejná.

Podobné úvahy platí i o definicích míry a pravděpodobnosti, podaných v odst. 11. —13. Každé množství přímek nebo rovin má určitou míru, která se nemění, přemístí-li se ono množství libovolným způsobem (hustota pravděpodobnosti je všude stejná).

V dalších odstavcích této kapitoly pojednáme o některých obecných větách. Při tom přidržíme se všude zde, jakož i v kap. III., IV. a V., definic podaných v odst. 9.—13.

15. Míra množství, jehož prvkem je skupina několika bodů. — Je dáno n uzavřených ploch $S_1, S_2, \dots S_n$ bez singulárních bodů. Budiž D_k vnitřek plochy S_k, V_k objem oboru D_k a x_k, y_k, z_k, pravoúhlé souřadnice bodu A_k zvoleného uvnitř D_k.

Předpokládejme nejprve, že plocha S_i leží vždy vně S_k jsou-li i a k dva různé indexy. Množství, jehož prvkem je skupina n bodů $A_1, A_2, \dots A_n$, má míru

$$J = \int\int \dots \int dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \dots dx_n\, dy_n\, dz_n\,;$$

integrál je $3n$násobný, integruje se vzhledem k (x_1, y_1, z_1) přes obor D_1, vzhledem k (x_2, y_2, z_2) přes obor D_2 atd. Integrál J je proto roven součinu n objemů V_k:

$$J = V_1 \,.\, V_2 \dots V_n\,.$$

*) Stran důkazů o invarianci, podaných v odst. 12. a 13., viz práci *G. Pólya:* Über geometrische Wahrscheinlichkeiten (Sitzungsbericht der kais. Ak. der Wiss. *126*, p. 319—328; Wien, 1917).

Předpokládejme nyní, že plochy $S_1, S_2 \dots S_n$ mají jakoukoli vzájemnou polohu; dva nebo více oborů D_k mohou míti společné části. V tomto případě rozdělíme každý obor D_k v určitý počet částečných oborů δ_k, δ_{kl}, $\delta_{klm} \dots$ (částečné obory s jedním, dvěma, třemi ... indexy) podle následujícího pravidla: δ_k je souhrn těch částí oboru D_k, které neobsahují bodů A_i, je-li i index jiný než k; δ_{kl} je souhrn částí společných oborům D_k a D_l, takže v δ_{kl} není bodů A, je-li i index jiný než k nebo než l; δ_{klm} je souhrn částí společných oborům D_k, D_l a D_m, takže δ_{klm} neobsahuje bodů A_i, je-li i index jiný než k, nebo než l, nebo než m, atd. Volme skupinu G, složenou z n bodů $A_1, A_2 \dots A_n$. Každému páru bodů, jenž jest obsažen v G a jenž leží v některém částečném oboru δ_{kl} o dvou indexech, přiřadíme koeficient 2; je-li v G celkem r takových párů, přiřadíme skupině G koeficient 2^r. Podobně přiřadíme každé trojici bodů, jež jest obsažena v G a leží v některém částečném oboru δ_{klm} se třemi indexy, koeficient 3!; je-li v G celkem s takových trojic, přiřadíme skupině G koeficient $(3!)^s$, atd. Tak přiřadí se skupině G koeficient a tvaru

$$a = (2!)^r \, . \, (3!)^s \dots$$

a míra pro množství, jehož prvkem je skupina G, složená z n bodů $A_1, A_2 \dots A_n$, bude vyjádřena integrálem

$$\int\int \dots \int \frac{1}{a} \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \, dx_2 \, dy_2 \, dz_2 \dots dx_n \, dy_n \, dz_n \; ; \qquad (15)$$

integrační obor je definován právě tak jako pro hořejší integrál J.

Tak na př., je-li $n = 3$ a splývají-li plochy S_1, S_2, S_3 s danou plochou S, jejíž vnitřek má objem V, jest $a = 6$ pro každou trojici bodů A_1, A_2, A_3, takže míra množství, jehož prvkem je trojice tří bodů volených uvnitř S, je vyjádřena formulí

$$\tfrac{1}{6} V^3.$$

Zde ovšem považujeme každou trojici bodů za dokonale určenou, jsou-li známy polohy všech tří bodů; bodům ve skupině nepřisuzujeme zvláštního pořadí. Vytkneme-li však body v určitém pořadí, obdržíme z každé skupiny tří geometrických bodů celkem šest skupin, které se liší jedna od druhé jen různým pořadím bodů; měrou množství, jehož prvkem je takováto skupina tří bodů, jest V^3.

Poznamenejme, že zcela stejným postupem se počítá míra množství, jehož prvkem je skupina přímek, rovin atd. Tak na př. užijeme-li označení zavedeného v odst. 12. a 13., je míra množství, jehož prvkem je skupina složená z přímky a z roviny, definována integrálem sedminásobným

$$\int\int\ldots\int d\Omega\, dQ\, d\omega\, dp;$$

integrace vztahuje se ke všem párům přímka-rovina, tvořícím dané množství. Viz rozmanité příklady v kap. III. a IV.

16. Výpočet středních hodnot. — Budiž dána veličina

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n,),$$

jejíž hodnota závisí na poloze bodů $A_1, A_2, \ldots A_n$; užíváme označení zavedeného v odst. 15.

Střední hodnota $m(U)$ veličiny U bude dána vzorcem

$$m(U) = \frac{\int\int\ldots\int \frac{U}{\alpha}\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \ldots dx_n\, dy_n\, dz_n}{\int\int\ldots\int \frac{1}{\alpha}\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \ldots dx_n\, dy_n\, dz_n}; \qquad (16)$$

opět jest D_k integračním oborem vůči proměnným x_k, y_k, z_k.

Ve speciálním případě, kdy všechny obory D_k splývají v jedno s daným oborem D, jest

$$\alpha = n!,$$

a vzorec pro střední hodnotu nabude tvaru

$$m(U) = \frac{\int\int\ldots\int U\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \ldots dx_n\, dy_n\, dz_n}{V^n} \qquad (16')$$

je-li V objem oboru D. Tak na př. může býti U objem proměnného útvaru, jenž jest určen skupinou n bodů volených uvnitř D; formule (16′) udává střední hodnotu objemu.

Pro $n = 1$ obdržíme

$$m(U) = \frac{\int\int\int U\, dx\, dy\, dz}{V}$$

jakožto střední hodnotu funkce U tří proměnných v daném trojrozměrném oboru o objemu V.

Výpočty středních hodnot, jež se vztahují k polohám přímek nebo rovin, provedou se podobně. Viz příklady v kap. III. a IV.

17. Pravidla o výpočtu pravděpodobnosti. — *a)* Budiž D trojrozměrný obor, Δ jeho část a A bod volený uvnitř D. Pravděpodobnost p, že bod A nalézá se uvnitř Δ, je definována vzorcem

$$p = \frac{V_1}{V}, \tag{17}$$

kde V jest objem oboru D, V_1 pak objem oboru Δ. Užívajíce této definice, dokážeme platnost vět o úhrnné a složené pravděpodobnosti.

b) Úhrnná pravděpodobnost. Budiž opět V objem oboru D, a V_1 objem části D_1 tohoto oboru, V' objem jiného oboru D', jenž nemá s D společného bodu, a V_2 objem části D_2 oboru D'. Volme uvnitř D bod A a uvnitř D' bod B.

Měrou množsví, jehož prvkem je bodový pár AB, jest součin VV'. Množství párů AB takových, že A se nalézá uvnitř D_1, B pak kdekoli v D', má míru V_1V'. Množství párů AB takových, že B se nalézá uvnitř D_2, A pak kdekoliv v D má míru V_2V. Označme nyní pravděpodobnost, že A jest uvnitř V_1, písmenem p_1, pravděpodobnost, že B jest uvnitř V_2, písmenem p_2, pravděpodobnost, že buď A jest uvnitř V_1 aneb B uvnitř V_2, písmenem p.

Podle definice (17) jest

$$p_1 = \frac{V_1V'}{VV'} = \frac{V_1}{V}, \quad p_2 = \frac{V_2V}{VV'} = \frac{V_2}{V'}, \quad p = \frac{V_1V' + V_2V}{VV'}$$

a tedy
$$p = p_1 + p_2. \tag{18}$$

p_1 a p_2 jsou pravděpodobnosti dvou případů vzájemně se vylučujících; pravděpodobnost úhrnná p, že nastane buď jeden nebo druhý případ, rovná se součtu $p_1 + p_2$ (srv. odst. 2.).

Tento princip snadno se rozšíří na případy, kdy sečítáme větší počet pravděpodobností nebo kdy integrujeme pravděpodobnosti nekonečně malé.

c) Složená pravděpodobnost. Užívajíce označení právě zavedeného, počítejme pravděpodobnost, že bod A jest uvnitř D_1 a bod B současně uvnitř D_2. Množství příznivých případů má míru $V_1 V_2$, takže hledaná pravděpodobnost P vyjádří se vzorcem

$$P = \frac{V_1V_2}{VV'}.$$

Je tedy
$$P = p_1 p_2; \tag{19}$$

P je pravděpodobnost složená (srv. odst. 3.). —

Na základě definicí dříve podaných (viz odst. *9.—13.* a odst. *15.*) můžeme vypočísti míru libovolného množství, jehož prvkem jest určitým způsobem stanovená skupina bodů, přímek a rovin. Míra je vždy vyjádřena integrálem mnohonásobným; je-li M_1 míra oboru »případů příznivých« a M míra oboru všech případů možných, jest každá pravděpodobnost p, že skupina bodů, přímek a rovin, vyhovuje určitým podmínkám, vyjádřena formulí tvaru

$$p = \frac{M_1}{M};$$

formule (17) je speciálním případem této formule obecnější.

Generalisace formulí (18) a (19) pro úlohy o přímkách a o rovinách je na snadě. Rozmanité aplikace pojmů míry a pravděpodobnosti ve složitějších případech jsou uvedeny v kap. III. a IV.

18. Dvě věty o středních hodnotách. — *a)* Budiž U objem proměnného tělesa t, jehož tvar, velikost a poloha závisí na n bodech $A_1, A_2, \ldots A_n$; tyto body mohou býti voleny jakkoliv uvnitř daného trojrozměrného oboru D. Je-li B bod volený uvnitř D, pravděpodobnost p, že B se nalézá uvnitř tělesa t, je dána vzorcem

$$p = \frac{m(U)}{V}, \tag{20}$$

kde $m(U)$ značí střední hodnotu objemu U a V objem oboru D.*)

K důkazu poznamenejme především, že — užijeme-li označení zavedeného v odst. 15. — pravděpodobnost, že bod A_k se nalézá uvnitř nekonečně malého pravoúhlého rovnoběžnostěnu P_k o rozměrech dx_k, dy_k, dz_k, rovná se

$$\frac{dx_k\, dy_k\, dz_k}{V}.$$

Tedy podle odst. 17*c* pravděpodobnost složená, že A_1 jest uvnitř prvního rovnoběžnostěnu, současně A_2 uvnitř druhého, A_3 uvnitř třetího atd. pro $A_4, A_5, \ldots A_n$, rovná se

$$p_1 = \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \ldots dx_n\, dy_n\, dz_n}{V^n}.$$

Mají-li body $A_1, A_2, \ldots A_n$ určité polohy uvnitř D, pravdě-

*) Viz *Czuber:* Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe (Leipzig 1884) No. 175.

podobnost, že B se nalézá uvnitř f, jest rovna

$$p_2 = \frac{U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n)}{V}.$$

Změňme nyní nekonečně málo polohy jednotlivých bodů $A_1, A_2, \ldots A_n$ tak, že každý z nich bude se nalézati uvnitř příslušného rovnoběžnostěnu P_k. Složená pravděpodobnost, že každý bod A_k jest uvnitř P_k a že B je zároveň uvnitř f, rovná se výrazu

$$p_1 p_2 = \frac{U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n)\, dx_1, dy_1 \ldots dz_n}{V^{n+1}}.$$

Hledanou pravděpodobnost p vypočteme (viz odst. 17*b*), integrujíce napsaný výraz podle všech souřadnic $x_1, y_1, \ldots z_n$. Vychází

$$p = \frac{1}{V} \iint \ldots \int \frac{U\, dx_1\, dy_1 \ldots dz_n}{V^n} = \frac{m(U)}{V}.$$

Zcela podobně by se počítalo se středními hodnotami a s pravděpodobnostmi, jež závisejí na poloze přímek nebo rovin.

b) Budiž U veličina, jejíž hodnota závisí na poloze n bodů $A_1, A_2, \ldots A_n$ uvnitř oboru D o objemu V; m nechť značí její střední hodnotu. Zvětšme obor D nekonečně málo, takže zvětšený obor D' bude míti objem $V + dV$. Předpokládáme, že D nachází se uvnitř oboru D'. Budiž pak $m + dm$ střední hodnota veličiny U, počítaná za předpokladu, že všech n bodů A_k leží uvnitř D', a m_1 její střední hodnota, počítaná za předpokladu, že jediný z n bodů A_k leží v oboru $(D' - D)$ o objemu dV, kdežto ostatních $n - 1$ se nalézá v D. Platí vzorec

$$V dm = n\,(m_1 - m)\, dV. \tag{21}$$

Důkaz: Podle definice střední hodnoty jest

$$m = \frac{\int\limits_D \int\limits_D \ldots \int\limits_D U\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n}{V^n}$$

a

$$m + dm = \frac{\int\limits_{D'} \int\limits_{D'} \ldots \int\limits_{D'} U\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n}{(V + dV)^n},$$

kde je pro krátkost položeno $dt_k = dx_k\, dy_k\, dz_k$. Násobme celou rovnici jmenovatelem pravé strany, podržme na levo toliko člen konečně veliký a členy nekonečně malé prvního stupně a dělme pak po obou stranách veličinou V^n; tak obdržíme vztah

$$m + dm + \frac{m\,n}{V}\,dV = \frac{\int\limits_{D'}\int\limits_{D'}\ldots\int\limits_{D'} U\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n}{V^n}.$$

Rozložme každý integrační obor D' v D a D'', takže

$$D'' = D' - D.$$

Pak lze psáti (vynecháváme integrovanou funkci)

$$\int\limits_{D'}\int\limits_{D'}\ldots\int\limits_{D'} = \int\limits_{D}\int\limits_{D}\ldots\int\limits_{D} + n\int\limits_{D''}\int\limits_{D}\ldots\int\limits_{D} + \binom{n}{2}\int\limits_{D''}\int\limits_{D''}\ldots\int\limits_{D} + \ldots$$

Vzhledem k tomu, že integrační obor D'' má nekonečně malý objem dV, podržíme jen prvé dva členy na pravé straně poslední rovnice. Dosadíme-li pak do hořejšího vztahu a poznamenáme-li, že

$$m_1 = \frac{\int\limits_{D''}\int\limits_{D}\ldots\int\limits_{D} U\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n}{V^{n-1}\,dV},$$

obdržíme

$$m + dm + \frac{m\,n}{V}\,dV = m + \frac{n\,m_1}{V}\,dV,$$

z čehož bezprostředně vyplývá rovnice (21).

Věta právě dokázaná dá se vyjádřiti též užitím pojmu pravděpodobnosti: Je-li p pravděpodobnost, že n bodů A_k, volených uvnitř D, vyhovuje daným podmínkám; je-li pak $p + dp$ táž pravděpodobnost pro obor D' o objemu $V + dV$ a konečně p_1 táž pravděpodobnost pro případ, že jediný z bodů A_k leží uvnitř oboru $D' - D$, kdežto ostatních $n - 1$ leží uvnitř oboru D, platí*)

$$V dp = n\,(p_1 - p)\,dV. \qquad (21')$$

Úlohy 1—24.

1. Na úsečce, jejíž délka $= 1$, jsou zvoleny dva body. Jak velká je pravděpodobnost, že jejich vzdálenost je menší než a, je-li $a < 1$? [$p = 2a - a^2$; viz *Borel* Le Hasard, p. 76—80, *Borel* Éléments de la théorie des probabilités, 3e éd., p. 89—93.]

*) Viz *M. W. Crofton:* Probability (Encyclopaedia Britannica, 9th edition). *R. Deltheil:* Sur la théorie des probabilités géométriques (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. XI., 1919).

2. Dvě osoby umluví si, že se dostaví na určité místo během určitého časového intervalu od $t = 0$ do $t = 1$ a že ten, kdo přijde první, počká na druhého po dobu a, načež odejde. Předpokládáme, že uvnitř onoho intervalu je v každém okamžiku pravděpodobnost příchodu stejná, a to pro jednu osobu jak pro druhou. Jak velká je pravděpodobnost p, že se setkají? [Počet možných případů měříme plochou čtverce o straně $= 1$, počet případů příznivých plochou, složenou ze dvou lichoběžníků. Úloha je v podstatě totožná s úlohou 1. Vychází $p = 2a - a^2$. Viz *A. Pánek*: Řešení Laurentovy úlohy z počtu pravděpodobnosti. (Časopis pro pěstování m. a f., XX., 1891, p. 94—97).]

3. Zvolíme-li na obvodě daného kruhu tři body, jak veliká je pravděpodobnost p, že trojúhelník jimi stanovený jest ostroúhlý? [$p = 1/4$, viz *A. Pánek*: Problém z geometrické pravděpodobnosti (Časopis pro pěstov. m. a f. XX., 1891, p. 148—150)].

4. Úsečka AB je rozdělena na tři části dvěma libovolně vytčenými body P a Q. Jak veliká jest pravděpodobnost, že lze sestrojiti trojúhelník ze tří úseček takto vzniklých? [$p = 1/4$; viz *Poincaré* Calcul des probabilités, p. 123, *Markoff*, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig, 1912, § 29. *Czuber*, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung etc. 3. Aufl. Leipzig. Bd. I. p. 13.]

5. Vypočísti pravděpodobnost p, že ze tří úseček, je-li každá kratší než určitá daná délka, dá se sestrojiti tupoúhlý trojúhelník [$p = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$].

6. V mezikruží o poloměrech r a $r + a$ jsou vytčeny dva body. Jak velká je pravděpodobnost p, že úsečka jimi omezená neprotíná vnitřní kružnici?

$$\left[p = \frac{2(a+r)^2 \arccos \frac{r}{a+r}}{\pi(2ar + a^2)} - \frac{2r}{\pi\sqrt{2ar + a^2}}.\right]$$

7. Strany obdélníka jsou menší než 1, jinak však libovolně vytčeny. Jak velká je pravděpodobnost p, že úhlopříčka je menší než jedna? [$p = \frac{1}{4}$; viz *Whitworth:* Choice and chance, 3th edition, Cambridge 1878, p. 213.]

8. Střední vzdálenost dvou bodů, jež jsou zvoleny na úsečce o délce a, jest $\frac{1}{3}a$.

9. Dva body M a M' jsou zvoleny uvnitř čtverce o straně a. Střední hodnota (matematická naděje) čtverce vzdálenosti MM' jest

$$\frac{\int_0^a\int_0^a\int_0^a\int_0^a [(x - x')^2 + (y - y')^2]\, dx\, dy\, dx'\, dy'}{a^4} = \frac{a^2}{3}.$$

Obecně platí věta: střední hodnota čtverce vzdálenosti MM', jsou-li M a M' dva body uvnitř libovolného obrazce, rovná se poloměru setrvačnosti toho obrazce vzhledem k jeho těžišti (viz *Czuber*: Geometrische Wahrscheinlichkeiten, p. 216—217).

10. Zvolme uvnitř daného polygonu, jenž je opsán kružnici K, bod a opišme kolem tohoto bodu kruh, jenž je celý obsažen uvnitř polygonu. Střední hodnota plošného obsahu takového kruhu rovná se jedné desetině kruhu K. [Viz *Czuber*, tamtéž, p. 219.]

11. Obdobná střední hodnota jako v úloze 10., je-li dán kruh na místě polygonu, rovná se opět desítině daného kruhu.

12. Vypočísti pravděpodobnost P, že vzdálenost dvou bodů, zvolených uvnitř kruhu o poloměru R, je menší než a.

$$P = \frac{\pi a^2 + 2\alpha (R^2 - a^2) - (2R^2 + a^2) \sin \alpha \cos \alpha}{\pi R^2},$$

kde $2R \sin \alpha = a$. Viz *Borel*, Bulletin de la Société mathém. de France, t. 46, p. 105; 1918; *Deltheil*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. 11, p. 1; 1919. — Srv. též s obdobnou úlohou 18.]

13. Dva body M a M' jsou zvoleny na povrchu koule. Jak veliká je pravděpodobnost p, že kratší oblouk hlavní kružnice, spojující M s M', je menší než a? $p = \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$;

viz rozbor v knize *Borel:* Le Hasard, p. 86—91 nebo *Borel*, Éléments, 3e édition, p. 96—100.]

14. Dvě koule o poloměru r dotýkají se v jednom bodě zevně jedna druhé. Na povrchu jedné zvolíme bod P, na povrchu druhé pak bod Q. Jak veliká je pravděpodobnost, že vzdálenost RQ je menší než $2r$? [$p = {}^{13}/_{35}$; viz *Czuber*, Geom. Wahrscheinlichkeiten, p. 70—72.]

15. Tři body A, B, C jsou zvoleny na povrchu koule. Jak veliká je střední hodnota plošného obsahu sférického trojúhelníka ABC? [Rovná se osmině kulového povrchu; viz *Czuber*, tamtéž, p. 217.]

16. Na povrchu koule zvolíme tři body jakožto vrcholy sférického trojúhelníka. Pravděpodobnost, že všechny úhly trojúhelníka jsou ostré, jest rovna

$$\frac{1}{2\pi} - \tfrac{1}{8}.$$

17. Vytkněme libovolně čtyři body na povrchu koule; pravděpodobnost, že všechny čtyři jsou na jedné polokouli, rovná se $^7/_8$. [Viz *Czuber*, tamtéž, p. 217—218.]

18. Vypočísti pravděpodobnost P, že vzdálenost dvou bodů, zvolených uvnitř koule o poloměru R je menší než a.

$$P = \frac{a^3}{R^3} - \frac{9\,a^4}{16\,R^4} + \frac{a^6}{32\,R^6};$$

viz *Czuber*, tamtéž, p. 69—70; *Borel-Deltheil*, Probabilités, Erreurs (Paris, 1923), p. 81—83. — Srv. též s úlohou 12.]

19. Jak velká je pravděpodobnost p, že délka tětivy v kružnici o poloměru R jest obsažena mezi a a b $(a < b)$?

[Je-li směr tětivy dán, jest

$$p = \frac{1}{2R}[\sqrt{4R^2 - a^2} - \sqrt{4R^2 - b^2}];$$

viz *Borel-Deltheil*, tamtéž, p. 77, *Borel*, Éléments... 3e édition, p. 107—109].

20. Vodorovná rovina je rozdělena dvěma řadami přímek ve čtvercovou síť; strana čtverce budiž a. Hodíme-li na rovinu kruhový kotouč o poloměru r ($2r < a$), jak veliká je pravděpodobnost p, že kotouč padne celý dovnitř některého čtverce?

$$[p = \frac{(a-r)^2}{a^2};$$

viz zajímavé úvahy o této úloze v knize *Fréchet-Halbwachs*, Le calcul des probabilités à la portée de tous Paris, 1924, p. 72—76].

21. Na vodorovnou rovinu, na níž je nazývána síť shodných rovnostranných trojúhelníků o straně a, je vržena nekonečně tenká jehla o délce l. Pravděpodobnost, že jehla se octne celá uvnitř jednoho trojúhelníka, jest

$$1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{l}{a}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right).$$

[Viz *Markoff*, l. c., § 32.]

22. Daný kruh je rozdělen průměrem ve dvě poloviny. Vypočísti pravděpodobnost p, že přímka, která protíná prvou polovinu, protíná též druhou.

$$[p = \frac{4}{\pi + 2};$$

viz *Czuber*, l. c., p. 129].

23. Někdo učiní po rovné cestě n kroků stejně dlouhých buď vpřed nebo do zadu; přisuzujeme-li při každém kroku oběma možným směrům stejnou pravděpodobnost, je pravděpodobnost, že na konec bude o h kroků vzdálen od původního stanoviště, rovna

$$(\tfrac{1}{2})^n \cdot \frac{n!}{h!\,(n-h)!}.$$

Srv. s úlohou 24.

24. Někdo vyjde z bodu O, jde rovně v libovolném směru a urazí dráhu l_1; pak se otočí o libovolný úhel a zase urazí přímočarou dráhu l_2 atd. Vykoná-li celkem n takovýchto přímočarých pohybů, jak veliká je pravděpodobnost, že jeho vzdálenost od bodu O bude menší než r?

[Jsou-li J_0 a J_1 Besselovy funkce indexu 0 a 1, jest

$$P_n = r\int_0^\infty J_1(rx)\,J_0(l_1 x)\,J_0(l_2 x)\ldots J_0(l_n x)\,dx.$$

Viz *Lord Rayleigh:* On the problem of random vibrations. (Philosophical Magazine 6th series. vol. XXXVII. 1919,

p. 321—347., Scientific Papers, vol. VI., p. 604—626); *Lord Rayleigh:* The theory of Sound, 2[nd] edition, London 1894, vol. I., p. 39—41. Srv. též *M. v. Smoluchowski:* Abhandlungen über die Brownsche Bewegung (Ostwads Klassiker, Nr. 207.)

Je-li n velmi veliké a $l_1 = l_2 = \dots l_n = 1$, jest přibližně

$$P_n = 1 - e^{-\frac{r^2}{n}}].$$

III. Konvexní křivky v rovině.

19. Přímky protínající konvexní křivku. — *a)* Budiž k uzavřená konvexní*) křivka; volme počátek O souřadnic uvnitř k. Je-li φ úhel, který svírá vnější normála s osou Ox, bude vzdálenost tečny od počátku určitou funkcí úhlu φ, kterou označíme $f(\varphi)$. Tato funkce je kladná, jednoznačná a periodická s periodou 2π. Každá přímka

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - q = 0$$

protínající křivku C vyhovuje podmínce

$$q - f(\varphi) \leqq 0;$$

znamení rovnosti platí jen pro případ, že přímka se dotýká křivky k. Měrou všech jejích sečen je podle odst. 11. výraz

$$m = \int\int dq\, d\varphi = \int q\, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi,$$

který můžeme psáti též ve tvaru

$$m = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [f(\varphi) + f(\varphi + \pi)]\, d\varphi.$$

Výraz v závorce udává vzdálenost dvou tečen kolmých k normále určené úhlem φ; tuto délku můžeme považovati za polovinu průmětu celého obvodu křivky do normály (rozumí se, že počítáme jen s absolutními hodnotami jednotlivých elementů obvodu resp. jejich průmětů). Označme řečený průmět písmenem A; obdržíme

$$m = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} A\, d\varphi.$$

*) Křivku nazýváme konvexní, je-li protata každou přímkou nejvýše ve dvou bodech.

Poslední integrál vypočteme podle Cauchyho*) takto: Promítneme-li úsečku délky s do přímky, která s ní svírá úhel φ, jest absolutní hodnota průmětu $s\,|\cos\varphi|$. Integrujme tento výraz v mezích od 0 do 2π; vychází

$$s\int_0^{2\pi}|\cos\varphi|\,d\varphi = 4s.$$

Poněvadž pak si můžeme mysliti obvod křivky k rozdělen na nekonečně malé úsečky, jest

$$\int_0^{2\pi} A d\varphi = \text{4násobnému obvodu křivky.}$$

Z toho plyne, že *množství všech přímek, protínajících konvexní křivku, má míru rovnou jejímu obvodu.*

Tato věta dá se přenésti i na konvexní obrazce, jichž tečna nemění se spojitě s úhlem φ, na př. na konvexní mnohoúhelníky. V každém vrcholu mnohoúhelníka mění se $f(\varphi)$ nespojitě. Mnohoúhelník dá se však nahraditi s libovolnou přesností konvexní křivkou, jejíž tečna mění spojitě svůj směr; blíží-li se křivka mnohoúhelníku, blíží se míra všech přímek ji protínajících určité limitě, kterou považujeme za míru přímek, protínajících daný mnohoúhelník.

Není-li křivka k (nebo mnohoúhelník) konvexní, mysleme si kolem ní položenu uzavřenou a napiatou nit, která je tak stažena, že má nejmenší možnou délku. Nit přilehne pak ke k jen podél konvexních oblouků; má-li k konkávní oblouky, bude nit míti přímočaré úseky a vytvoří uzavřenou konvexní čáru k'. Každá přímka protínající k (nebo k') protíná též k' (nebo k), takže integrál

$$\iint d\varphi\, dq$$

má stejnou hodnotu jak pro množství přímek, jež protínají křivku prvou, tak pro množství, odpovídající křivce druhé. Proto můžeme se v těchto úlohách omeziti jen na křivky konvexní.

Z věty o míře přímek protínajících konvexní křivku (nebo konvexní obrazec) plyne tento důsledek: *Pravděpodobnost p, že přímka, protínající konvexní obrazec k_1 o obvodě L_1, pro-*

*) Viz Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes, *Oeuvres de Cauchy,* 1e série t. 2., p. 107—177.

tíná současně jiný konvexní obrazec k_2, jenž leží uvnitř k_1 a má obvod L_2, jest

$$p = L_2 : L_1. \qquad (22)$$

L_1 měří zde množství všech případů možných, L_2 množství všech případů příznivých. Je zajímavo, že pravděpodobnost p závisí toliko na poměru obou obvodů, nikoli však na geometrickém tvaru obou čar ani na jejich relativní poloze.

b) Užijme rovnice (22) k řešení této úlohy: V rovině jsou narýsovány ekvidistantní rovnoběžky a mimo to konvexní křivka k v obvodu L; vzdálenost $2a$ dvou sousedních rovnoběžek je tak veliká, že křivka k nemůže protínati dvě z nich. Jest vypočísti pravděpodobnost p, že křivka k je protata některou rovnoběžkou.

Představme si, že narýsujeme kružnici k' o průměru $2a$ tak, že obsahuje křivku k ve svém vnitřku. Obrazec složený z křivky k a z kružnice k' považujeme za nepromĕnný útvar; mění-li k svou polohu v rovině, mění ji zároveň k'. V každém případě je k' protata nějakou rovnoběžkou (jen jednou z nich; nehledíme ke krajnímu případu, kdy se k' dotýká dvou sousedních rovnoběžek). Výpočet pravděpodobnosti p redukuje se tudíž na řešení úlohy: přímka protíná křivku k' v obvodu $2\pi a$; určiti pravděpodobnost p, že protíná křivku k o obvodu L, která leží uvnitř k'. Vychází podle vzorce (22)

$$p = \frac{L}{2\pi a}. \qquad (22')$$

Redukuje-li se k na úsečku o délce $2b$, jest $L = 4b$ a

$$p = \frac{2b}{\pi a}. \qquad (22'')$$

Tímto vzorcem je rozřešena *Buffonova úloha o jehle.* Srv. odst. *8.* a odst. *35. a.*

20. Croftonova věta o třetí mocnině sečny. — Počítejme dvojím způsobem míru M pro množství, jehož prvkem je pár bodů zvolených uvnitř k; při tom považujeme páry za různé, liší-li se pořadím obou bodů. Předně máme

$$M = P^2.$$

Abychom vypočetli M druhým způsobem, označme písmeny x, y resp. x', y' souřadnice dvou bodů A a A' volených uvnitř k. Pišme

$$M = \iiiint dx'\, dy'\, dx\, dy$$

a integrujme podle x', y' předpokládajíce, že bod A' vyplňuje nekonečně malou výseč, která má za vrchol pevný bod A, a která jest omezena přímkami (q, φ) a $(q + dq, \varphi + d\varphi)$ v bodě A se sbíhajícími. Jsou-li c délka celé sečny (q, φ) a r resp. $c—r$ obě části, ve které se bodem A dělí, bude

$$M = \iiint \tfrac{1}{2}\left[r^2 + (c-r)^2\right] dx\, dy\, d\varphi .$$

Polohu bodu A můžeme určiti veličinami q (= vzdálenosti sečny (q, φ) od počátku souřadnic) a r (= vzdálenosti bodu A od jednoho konce sečny). Poněvadž pak

$$dxdy = dqdr,$$

jest

$$M = \iint\int_0^c \tfrac{1}{2}\left[r^2 + (c-r)^2\right] dr\, dq\, d\varphi =$$

$$= \iint \tfrac{1}{3} c^3\, dq\, d\varphi .$$

Srovnajíce obě formule pro M, obdržíme vzorec Croftonův: *)

$$\iint c^3\, dq\, d\varphi = 3\, P^2 .$$

Výraz

$$\tfrac{1}{3} c^3\, dq\, d\varphi$$

udává míru pro množství párů bodových AA', určených těmito podmínkami: bod A leží uvnitř nekonečně úzkého pruhu omezeného přímkami (q, φ) a $(q + dq, \varphi)$, spojnice AA' svírá s přímkou (q, φ) úhel obsažený v mezích o a $d\varphi$.

21. Vzájemné polohy sečen a bodů. — V následujících odstavcích označíme písmenem

L . . . . obvod dané uzavřené konvexní křivky k,

P . . . . její plošný obsah,

q, φ . . souřadnice přímky; rovnice přímky zní

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - q = 0,$$

σ, σ' . . plošné obsahy částí, ve které se vnitřek křivky k dělí danou sečnou; $\sigma + \sigma' = P$.

a) Množství všech přímek, které protínají křivku k, má míru L. Dle odst. 15. má množství, jehož prvkem je pár sečen křivky L, míru

$$N = \tfrac{1}{2} L^2 .$$

*) Viz Crofton, Comptes Rendus 1869, p. 1469; J. A. Serret: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 1869, p. 177.

Množství všech párů sečen, které se protínají uvnitř k, má míru

$$Z = \tfrac{1}{2} \iiiint dq\, d\varphi\, dq'\, d\varphi';$$

integrace vztahuje se ke všem sečnám (q, φ) a (q', φ') takovým, že průsečík leží uvnitř k.

Vytkněme dvě pevné sečny rovnoběžné: (q, φ) a $(q + dq, \varphi)$. Nekonečně úzký pruh, utvořený jimi a dvěma obloučky křivky k, má, vynecháme-li nekonečně malé veličiny vyšších stupňů, obvod $2c$; c značí délku sečny (q, φ). Je tedy, integrujeme-li dle q' a φ',

$$Z = \tfrac{1}{2} \iint 2c\, dq\, d\varphi.$$

Poněvadž pak nezávisle na φ jest

$$\int c\, dq = P, \quad \text{a} \quad \int d\varphi = \pi,$$

jest

$$Z = \pi P.$$

Pravděpodobnost, že dvě sečny křivky k protínají se uvnitř k, jest

$$p = \frac{Z}{N} = \frac{2\pi P}{L^2}.$$

b) Obraťme se nyní k výpočtu míry I pro množství, jehož prvek jest utvořen sečnou křivky k a párem bodů AA', jež leží oba uvnitř k po různých stranách oné sečny. Při tom nepovažujeme dva takové páry za různé, liší-li se jen označením (pořadím) obou bodů.

Míra I dá se vyjádřiti trojím způsobem. Předně jest

$$I = \iint \sigma \sigma'\, dq\, d\varphi;$$

kde σ a σ' jsou části plochy P, oddělené sečnou (q, φ); integrace se vztahuje ke všem sečnám.

Uvážíme-li dále, že množství všech přímek protínajících úsečku AA' o délce ϱ má míru 2ϱ (úsečku považujeme za nekonečně zploštělou uzavřenou křivku o obvodu 2ϱ), můžeme psáti

$$I = \tfrac{1}{2} \iint 2\varrho\, dx\, dy\, dx'\, dy';$$

podle souřadnic (x, y) bodu A a podle souřadnic (x', y') bodu A' integruje se přes celý vnitřek křivky k.

Třetí vzorec pro míru I lze odvoditi následovně: Veďme bodem A, který prozatím považujeme za pevný, dvě sečny (q, φ) a $(q + dq, \varphi + d\varphi)$, tvořící nekonečně malý úhel $d\varphi$. Budiž c délka sečny a r vzdálenost bodu A od jednoho jejího konce. Množství bodů A', ležících uvnitř onoho nekonečně malého úhlu (po jedné straně bodu A) ve vzdálenosti ϱ až $\varrho + d\varrho$ od A má za míru

$$\varrho\, d\varrho\, d\varphi;$$

množství přímek protínajících úsečku AA' má míru

$$2\varrho.$$

Příspěvek k integrálu I, pocházející ode všech bodů A', ležících po obou stranách bodu A v onom nekonečně malém úhlu, je tedy

$$\tfrac{1}{2}\, 2\, dx\, dy\, d\varphi \left[\int_0^r \varrho^2\, d\varrho + \int_0^{c-r} \varrho^2\, d\varrho\right] = \tfrac{1}{3}\,[r^3 + (c-r)^3]\, d\varphi\, dx\, dy.$$

Integrál I vypočteme nahradíce, podobně jako v odst. 20., element $dx dy$ elementem $dq dr$, takže

$$I = \tfrac{1}{3} \iint\int_0^c [r^3 + (c-r)^3]\, dr\, dq\, d\varphi = \tfrac{1}{6} \iint c^4\, dq\, d\varphi,$$

při čemž integrace se vztahuje ke všem sečnám (q, φ) křivky k.

Dělme integrál I měrou

$$\tfrac{1}{2} LP^2$$

množství, jehož prvkem je sečna a pár bodů zvolených uvnitř k. Obdržíme tak tři výrazy pro *pravděpodobnost* ω, *že sečna křivky k odděluje dva body uvnitř k zvolené*

$$\omega = \frac{2\iint \sigma\sigma'\, dq\, d\varphi}{LP^2} = \frac{2\iint \varrho\, dx\, dy\, dx'\, dy'}{LP^2} = \frac{\iint c^4\, dq\, d\varphi}{3\, LP^2}.$$

c) Uvnitř k volíme čtyři body A, B, C, D. Měrou množství všech párů bodových A, B (spojnic AB) takových, že bod A leží uvnitř mezi přímkami (q, φ) a $(q + dq, \varphi)$, kdežto směr přímky AB liší se nekonečně málo od směru přímky (q, φ), je dle odst. 20.

$$\tfrac{1}{3}\, c^3\, dq\, d\varphi;$$

množství všech párů bodových CD (na pořadí bodů C a D nezáleží), jež leží po jedné nebo po druhé straně přímky (q, φ), má za míru

$$\tfrac{1}{2}\,(\sigma^2 + \sigma'^2).$$

Míra pro množství čtyřbodových skupin $ABCD$ takových, že body C a D leží po téže straně přímky A, B (nutno děliti dvěma, ježto nezáleží na pořadí bodů A a B) je tudíž rovna integrálu

$$M = \frac{1}{12} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi;$$

integrace vztahuje se ke všem sečnám křivky k.

Dělme tento výraz měrou

$$\tfrac{1}{4} P^4$$

množství všech čtveřin bodových $ABCD$, při čemž považujeme dvě takové čtveřiny za identické, liší-li se toliko pořadím bodů A, B nebo pořadím bodů C, D. Obdržíme vzorec pro *pravděpodobnost Π že dva body uvnitř k volené leží po téže straně přímky, která spojuje dva jiné body volené uvnitř k:*

$$\Pi = \frac{1}{3 P^4} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi.$$

Podle odst. *20.* jest

$$\frac{1}{3 P^4} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2 + 2\sigma\sigma')\, dq\, d\varphi = \frac{1}{3 P^4} \iint c^5\, dq\, d\varphi = 1.$$

Z toho následuje: *pravděpodobnost Π', že dva body volené uvnitř k jsou odděleny přímkou, která spojuje jiné dva body uvnitř k volené, jest rovna*

$$\Pi' = 1 - \Pi = \frac{2}{3 P^4} \iint c^3 \sigma\sigma'\, dq\, d\varphi.$$

22. Další úlohy o skupinách tří nebo čtyř bodů. —

a) Uvnitř k volme tři body A, B a C. Spojnice těchto bodů dělí vnitřek křivky k na sedm částí, jež označíme čísly $1, 2, \ldots 7$; vnitřek trojúhelníka ABC označíme číslem 1, část přilehlou k vrcholu A číslem 2, část přilehlou ke straně AB číslem 3 atd. (viz obr. 1.). Budiž D čtvrtý bod volený uvnitř k. Všechny čtyři bodové skupiny*) $ABCD$ takové, že D leží vzhledem k trojúhelníku ABC v $k$té části ($k = 1, 2, \ldots 7$) tvoří množství, jehož míru nazveme M_k. Patrně jest

$$M_2 = M_4 = M_6, \qquad M_3 = M_5 = M_7.$$

Výraz

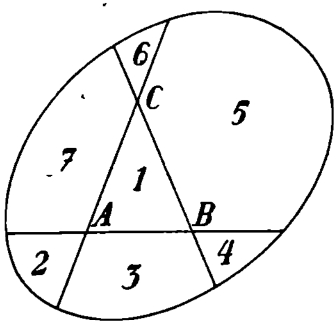
$$M_2 + M_7 + M_4 + M_5 = 2\,(M_2 + M_3)$$

udává míru pro množství čtyřbodových skupin $ABCD$ takových, že přímka CD (spojnice vrcholu C s některým bodem

*) Zde přihlížíme k pořadí bodů uvnitř skupiny.

voleným uvnitř některé z částí 2, 7, 5, 4), neprotíná úsečky AB. Nehledíme-li k pořadí bodů v páru A, B, ani v páru C, D, bude hořejší výraz roven čtyřnásobné míře M, vypočtené v odst. *21c*.

Je tedy
$$2\,(M_2 + M_3) = 4\,M.$$
Výraz
$$M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 = 3\,(M_2 + M_3)$$
jest měrou pro množství čtyřbodových skupin $ABCD$ takových, že bod D leží vně trojúhelníka ABC. Měrou všech čtyř-



Obr. 1.

bodových skupin vůbec jest P^4, tedy ***pravděpodobnost ω, že bod volený uvnitř k leží vně trojúhelníka utvořeného jinými třemi body taktéž uvnitř k volenými, jest***

$$\omega = \frac{3\,(M_2 + M_3)}{P^4} = \frac{6\,M}{P^4}$$

aneb, dosadíme-li za M vzorec odvozený v odst. *21c*:

$$\omega = \frac{1}{2\,P^4} \iint c^3\,(\sigma^2 + \sigma'^2)\,dq\,d\varphi = \tfrac{3}{2}\,\Pi, \qquad (23)$$

kde Π značí pravděpodobnost definovanou v odst. *21c*.

Pravděpodobnost, že čtvrtý bod leží uvnitř trojúhelníka utvořeného prvními třemi, jest

$$1 - \omega = 1 - \frac{1}{2\,P^4} \iint c^3\,(\sigma^2 + \sigma'^2)\,dq\,d\varphi.$$

b) Počítejme střední hodnotu $m\,(\triangle)$ plochy trojúhelníka utvořeného třemi body, jež jsou voleny uvnitř k. Podle obecné věty vyjádřené vzorcem (20) jest

$$1 - \omega = \frac{m(\triangle)}{P}$$

a tedy užijeme-li vzorce (23),

$$m(\triangle) = (1 - \omega) P = P - \frac{1}{2P^3} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi. \quad (24)$$

c) Uvnitř k volíme čtyři body. Jak velká je pravděpodobnost p, že tvoří nekonvexní čtyřúhelník? (Sylvesterova úloha.) Pravděpodobnost p souvisí s pravděpodobností ω shora vypočtenou podle rovnice

$$p = 4(1 - \omega),$$

je tedy

$$p = 4 - \frac{2}{P^4} \iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi. \quad (25)$$

Pro trojúhelník jest $p = \frac{1}{3} = 0{\cdot}3333\ldots$,
» obdélník » $p = \frac{11}{36} = 0{\cdot}3056\ldots$,
» kruh » $p = \frac{35}{12\pi^2} = 0{\cdot}2955\ldots$ *)

W. Blaschke udává toto řešení Sylvesterovy úlohy: pravděpodobnost p nabývá hodnoty $\frac{1}{3}$ jen v případě, že k je trojúhelník a hodnoty $\frac{35}{12\pi^2}$ jen v případě, že k jest elipsa; v prvém případě má p největší, ve druhém nejmenší možnou hodnotu.**)

d) Dva body jsou zvoleny uvnitř k a třetí bod na obvodě k. Plocha trojúhelníka jimi utvořeného má střední hodnotu

$$m_1(\triangle) = \tfrac{4}{3} m(\triangle),$$

kde $m(\triangle)$ je střední hodnota určená vzorcem (24).

K důkazu použijeme obecné věty, vyjádřené formulí (21). Na místo objemu V oboru D nastoupí zde obsah P křivky k;

---

*) Viz Czuberovu knihu dříve citovanou a tyto práce: *Crofton* Probability (Encyclopaedia Britannica). *J. Sylvester* (Acta Mathematica, t. *14*, 185—205; 1891). *R. Deltheil* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. *11*; 1919). *A. Pánek* (Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky r. *11*, 1882 , p. 121—122).

**) *W. Blaschke*: Ueber Affine Geometrie XI. (Berichte des Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, Bd. 69., 1917; p. 436—453). Viz též *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie II., p. 55 (Berlin, 1923).

křivku tu zvětšíme nekonečně málo homotetickou transformací. Platí $dV = dP$. Přírůstek dm střední hodnoty $m = m$ (Δ) bude zřejmě hověti úměře

$$dm : m = dP : P,$$

takže podle (21) bude (pro $n = 3$)

$$P \frac{dm}{dP} = 3(m_1 - m), \quad \text{tedy} \quad m_1 = \tfrac{4}{3} m.$$

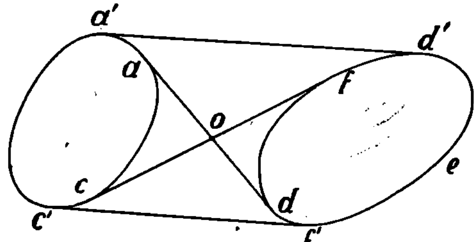
e) Uvnitř k volíme tři body a čtvrtý bod na K. Pravděpodobnost p_1, že tyto čtyři body tvoří nekonvexní čtyřúhelník, rovná se pravděpodobnosti p [vzorec (25)].

Abychom to dokázali, užijeme zase homotetické transformace, kterou se k nekonečně málo mění; do vzorce (21′) dosadíme $V = P$ a

$$dp = 0,$$

ježto uvedenou transformací se p nemění (p závisí jen na tvaru, nikoli na rozměrech křivky k). Vychází ihned, že $p_1 = p$.

23. *Přímky, jež protínají dvě konvexní křivky.* — *a)* Buďte k_1 a k_2 dvě konvexní křivky vzájemně se vylučující, X délka napiaté z k ř í ž e n é niti, položené kolem obou křivek a Y délka napiaté n e z k ř í ž e n é niti kolem nich položené. Označme dále písmenem A konvexní obrazec $oaa'bc'co$ (viz



Obr. 2.

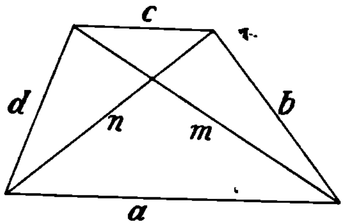
obr. 2.), utvořený částí křivky k_1 a částmi společných vnitřních tečen, jež se v o sbíhají; písmenem B pak obdobný konvexní obrazec $od'ed'fo$. Množství přímek protínajících obrazec A (nebo B) má míru rovnou obvodu obrazce A (nebo B); součet obou měr jest $= X$, míře to přímkového množství M, jež se skládá z těchto dvou částí: 1. z množství M_1 přímek protínajících konvexní obrazec $a'bc'f'ed'a'$ (jsou-li $d'd'cc'f'$ společné vnější stěny obou křivek) a 2. z množství M_2 přímek, jež protínají současně obrazec A i obrazec B (tyto poslední přímky, obsažené též v množství M_1, vyskytují se v M každá dvakrát). Měrou množství M_1 jest Y; z toho soudíme, že

$$X - Y \tag{26}$$

je měrou množství M_2 těch přímek, které protínají zároveň obrazce A i B. Toto množství je však totožné, jak učí pohled na obrazec, s množstvím přímek, které protínají zároveň křivku k_1 i k_2. ***Výraz (26) je měrou pro množství všech přímek, které protínají současně obě křivky k_1 a k_2.***

b) Užijme věty právě nalezené k řešení této úlohy: Je dán konvexní čtyřúhelník o stranách a, b, c, d a o úhlopříčkách m, n. Jest vypočítati míru pro množství těch přímek, které protínají dvě protější strany čtyřúhelníka.

Považujme strany a a c (viz obr. 3. za nekonečně zploštělé elipsy (strana a je zároveň osou a dvojnásobnou lineární



Obr. 3.

výstředností elipsy, jejíž vedlejší osa $= o$; podobně strana c) a užijeme oné věty. Patrně jest

$$X = a + c + m + n, \quad Y = a + b + c + d = L,$$

kde L značí obvod čtyřúhelníka. Měrou pro množství všech přímek protínajících současně úsečky a a c jest

$$X - Y = m + n - b - d.$$

Podobně jest, klademe-li

$$X' = b + d + m + n, \quad Y' = L,$$

měrou pro množství všech přímek protínajících úsečky b a d výraz

$$X' - Y' = m + n - a - c.$$

Z toho následuje, že měrou pro množství všech přímek protínajících pár protějších stran v daném čtyřúhelníku jest

$$X - Y + X' - Y' = 2\,(m + n) - L.$$

Poněvadž pak L je měrou pro množství všech přímek protínajících obvod čtyřúhelníka, jest

$$p = 2\,\frac{m + n}{L} - 1 \tag{27}$$

pravděpodobnost, že přímka protínající obvod čtyřúhelníka protíná jej ve dvou protilehlých stranách. Pro čtverec o straně a je

$$L = 4a, \quad m = n = a\sqrt{2},$$

a tudíž

$$\sqrt{p} = \sqrt{2} - 1 = 0{\cdot}414\ldots \tag{27'}$$

Pro obdélník, jehož strany jsou v poměru 3 : 4, jest

$$L = 14, \quad m = n = 5,$$

a tudíž

$$p = \tfrac{3}{7}. \tag{27''}$$

c) Počítejme míru N pro množství přímek, které oddělují jednu konvexní křivku k_1 od jiné k_2 (obr. 2.).

Množství všech přímek, které protínají konvexní obrazec $a'bc'f'ed'a$, má za míru délku Y nezkřížené niti, položené kolem obou daných křivek. Míra Y skládá se z těchto částí: z míry L_1 (= obvodu křivky k_1), množství sečen křivky k_1, z míry L_2 (= obvodu křivky k_2), množství sečen křivky k_2 a z míry N; od součtu těchto tří veličin jest však odečísti podle vzorce (26) míru $X - Y$ množství všech sečen společných oběma křivkám k_1 a k_2, neboť v součtu $L_1 + L_2$ je každá společná sečna čítána dvakráte. Je tedy

$$Y = L_1 + L_2 + N - X + Y$$

aneb

$$N = X - L_1 - L_2. \tag{28}$$

Vzorec (28) udává míru N pro množství přímek, které odděluji konvexní křivku o obvodu L_1 od jiné konvexní křivky o obvodu L_2; X znači délku napiaté zkřižené niti kolem obou křivek položené.

Úlohy 25. —29.

25. Křivka K o obvodu L obsahuje uvnitř dvě uzavřené a navzájem se vylučující křivky k a k' o obvodech l a l'. Jak veliká je

pravděpodobnost p, že libovolně vytčená přímka, která protíná K, neprotíná ani k ani k'? [$p = \frac{x - l - l'}{L}$; viz větu dokázanou v odst. 23c].

26. Uvnitř k volíme dva body. Sečna, jež je spojuje, dělí se jimi a průsečíky s k ve tři části. Pravděpodobnost, že z těchto tří úseček dá se sestrojiti trojúhelník, jest $= 1/4$. [*Czuber*: Geom. Wahrscheinlichkeiten, p. 156—157].

27. Uvnitř trojúhelníka zvolíme dva body; plošný obsah trojúhelníka, jejž tvoří tyto body spolu s určitým vrcholem trojúhelníka daného, má střední hodnotu

$$M_2 = \tfrac{4}{27} S,$$

značí-li S plošný obsah daného trojúhelníka [*Czuber* tamtéž p. 235].

28. Uvnitř k jsou voleny dva body. Střední hodnota jejich vzdálenosti jest (viz odst. 21b) $\frac{\omega L}{2}$.

29. Střední hodnota tětivy, kterou určuje libovolná přímka, protínající křivku k, jest určena vzorcem

$$m_0 = \frac{\pi P}{L}.$$

Pro kruh o poloměru R vychází

$$m_0 = \frac{\pi R}{2}.$$

IV. Konvexní plochy v prostoru.

24. *Přehled zkratek.* — V této kapitole pojednáme o některých úlohách, jež se vztahují k uzavřeným konvexním plochám v prostoru. Každá taková plocha je protata libovolnou přímkou nejvýše ve dvou bodech. Označíme písmenem

K . . . danou uzavřenou konvexní plochu bez singulárních bodů,
V . . . objem části prostoru omezené plochou K,
S . . . plošný obsah plochy K,
Σ, Σ' . . objemy částí, ve které se dělí vnitřek plochy K libovolnou sečnou rovinou ($\Sigma + \Sigma' = V$),
k . . . konvexní křivku, ve které libovolná sečná rovina protíná plochu K,
P . . . plošný obsah křivky k,
L . . . obvod křivky k,
C . . . délku sečny, kterou omezuje plocha K, na libovolné přímce ji protínající,
M . . . hodnotu integrálu (14), vztaženého ke všem rovinám (u, v, w), jež protínají plochu K.

V rovnicích přímek a rovin, jakož i ve vzorcích pro míru rozličných množství, budeme užívati označení zavedeného v odst. 12. a 13.

25. *Roviny protínající konvexní plochu.* — *a)* Je dána rovinná uzavřená křivka bez dvojného bodu; budiž P její plošný obsah a c délka sečny, kterou vytíná libovolná rovina. Počítejme hodnotu integrálu

$$\iiint c\, dp\, d\omega = \iiint c \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dp,$$

kde integrace se vztahuje ke všem rovinám

$$x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + z \cos \vartheta - p = 0.$$

jež danou křivku protínají. Rovinu křivky volme za rovinu Oxy a předpokládejme, že počátek O jest uvnitř křivky (volba soustavy souřadnic nemá vlivu na hodnotu uvažovaného integrálu. Ani c ani $dpd\omega$ se změnou soustavy souřadnic nemění; viz odst. 12.—14.). Zavedeme nové integrační proměnné q a ϑ' rovnicemi

$$p = q \sin \vartheta', \qquad \vartheta = \vartheta'.$$

Obdržíme

$$\iiint c\, dp\, d\omega = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int c \sin^2 \vartheta'\, dq\, d\vartheta'\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\, \pi^2 P; \qquad (29)$$

koeficient $\frac{1}{2}$ je třeba připojiti, neboť mění-li se φ spojitě od o do 2π, obdržíme každou rovinu dvakráte, mimo to pak jest

$$\int c\, dq = P,$$

poněvadž q značí vzdálenost sečny c od počátku O.

b) Ustanovme nyní hodnotu integrálu

$$\iiint L\, dp\, d\omega = \iiint L \sin \vartheta\, dp\, d\vartheta\, d\varphi,$$

kde L značí obvod průsečné křivky, kterou z dané konvexní plochy K vytíná rovina (p, ϑ, φ); integrace vztahuje se ke všem sečným rovinám plochy K. Budiž l nekonečně malá část křivky L, obsažená v nekonečně malém elementu $d\sigma$ plochy K. Podle vzorce (29) jest

$$\iiint l \sin \vartheta\, dp\, d\vartheta\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\, \pi^2\, d\sigma,$$

vztahuje-li se integrace ke všem rovinám protínajícím nekonečně malý element $d\sigma$. Je-li tudíž S celý povrch plochy K, platí

$$\iiint L\, dp\, d\omega = \tfrac{1}{2}\, \pi^2 S; \tag{29'}$$

integrace vztahuje se ke všem sečným rovinám plochy K.

c) Míra pro množství všech rovin, které protínají konvexní uzavřenou plochu K, jest, předpokládáme-li počátek O uvnitř K,

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \iint p\, d\omega; \tag{30}$$

p značí zde vzdálenost tečné roviny plochy K od O. To plyne bezprostředně z formule (14'), provedeme-li integraci podle p. Podle Minkowského *) dá se psáti poslední integrál též ve tvaru

$$M = \iint \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) d\sigma, \tag{30'}$$

kde R a R' značí hlavní poloměry křivosti a integrace vztahuje se k celé ploše K; $d\sigma$ jest element plošného obsahu.

Uveďme tři speciální případy:

Je-li plocha K nekonečně zploštělá, takže se redukuje na část roviny dvojnásobně čítanou a omezenou konvexní křivkou o obvodě L, jest

$$M = \tfrac{1}{2}\pi L. \tag{30 a}$$

Je-li plocha K nekonečně zploštělá ve dvou směrech, takže se redukuje na úsečku o délce c, dvojnásobně čítanou, jest míra pro množství všech rovin protínajících tuto úsečku rovna

$$\pi c. \tag{30 b}$$

Je-li K trojosý elipsoid o poloosách $a, b, c,$ dají se M i povrch S vyjádřiti tímto integrálem.**) Položme, předpokládajíce, že $c < b < a$,

$$f(m, n) = 8 \iint \sqrt{\frac{1 - (1 - m)x^2 - (1 - n)y^2}{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$

*) *H. Minkowski:* Ges. Abhandlungen II., p. 241; Leipzig 1911.

**) Viz *B. Hostinský:* Sur quelques applications géométriques des intégrales elliptiques et sur les relations entre les intégrales complètes. (Věstník Král. Spol. Nauk. 1919.)

kde integrace na pravo vztahuje se ke kvadrantu kruhu o poloměru = 1, vymezenému podmínkami

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Pak platí formule

$$S = ab\, f\left(\frac{c^2}{a^2}, \frac{c^2}{b^2}\right)$$

$$M = a\; f\left(\frac{c^2}{a^2}, \frac{b^2}{a^2}\right).$$

d) Budiž K_1 konvexní plocha, M_1 míra množství všech jejích sečných rovin, K_2 pak jiná konvexní plocha, ležící uvnitř plochy K_1, a M_2 příslušná míra. Každá rovina protínající plochu K_2 protíná zároveň plochu K_1; podle věty vyjádřené rovnicí (15) bude *pravděpodobnost p, že rovina protínající konvexní plochu K_1 protíná zároveň jinou konvexní plochu K_2, položenou uvnitř K_1, rovna*

$$p = M_2 : M_1. \tag{31}$$

26. *Úlohy o párech a trojicích sečných rovin.* — *a)* Množství E, jehož prvkem je pár sečných rovin plochy K, má podle obecné definice (viz odst. 15.) míru

$$\iiint_E \iiint \frac{1}{\alpha}\, d\omega\, dp\, d\omega'\, dp' = \tfrac{1}{2} M^2,$$

neboť α rovná se všude dvěma.

Počítejme nyní hodnotu integrálu téže funkce, je-li integračním oborem množství F párů sečných rovin takových, že průsečnice obou rovin pár tvořících protíná plochu K. Zase bude $\alpha = 2$. Poznamenejme, že trojnásobný integrál

$$\iiint \tfrac{1}{2}\, d\omega\, dp$$

vztažený ke všem rovinám R, jež protínají pevnou sečnou rovinu R', je roven $\frac{1}{4}\pi L$, značí-li L obvod křivky, v níž R' protíná plochu K [viz vzorec (30a)]. Integrál

$$\iiint \frac{\pi}{4} L\, d\omega'\, dp'$$

vztažený ke všem sečným rovinám R plochy K je roven $^1/_8\, \pi^3 S$ dle vzorce (29'). Je tedy míra množství F

$$\iiint_F \iiint \tfrac{1}{2}\, d\omega\, dp\, d\omega'\, dp' = \tfrac{1}{8}\, \pi^3 S.$$

Dělíme-li tento výraz hořejším výrazem pro míru množství E, obdržíme pravděpodobnost p', že dvě sečné roviny plochy K protínají se v přímce, která rovněž plochu protíná:

$$p' = \frac{\pi^3 S}{4 M^2}.$$

b) Množství G, jehož prvek jest utvořen trojicí sečných rovin plochy K, má míru

$$\iiint \underset{G}{\iiint} \iiint \tfrac{1}{6}\, dp\, d\omega\, dp'\, d\omega'\, dp''\, d\omega'' = \tfrac{1}{6} M^3.$$

Počítejme integrál téže funkce, vztažený k oboru H, jehož prvkem je trojice sečných rovin, protínajících se v bodě položeném uvnitř K. Rovinu, k níž se vztahuje element $dp d\omega$, označíme R; podobně zavedeme R' a R''. Integrujme nejprve podle souřadnic roviny R, která protíná průsečnici s dvou pevných sečných rovin R' a R''. Trojnásobný integrál

$$\iiint dp\, d\omega$$

bude roven πC, je-li C délka sečny položené na s (viz vzorec 30*b*). Integrál

$$\iiint \tfrac{1}{6}\, \pi\, C\, dp'\, d\omega'$$

vztažený ke všem rovinám R', jež protínají pevnou sečnou rovinu R'', je podle vzorce (29) roven

$$\frac{\pi^3}{12} P.$$

Integrujeme-li konečně vzhledem k souřadnicím roviny R'', obdržíme pro hledanou míru

$$\frac{\pi^3}{12} \iiint P\, dp\, d\omega = \frac{\pi^3}{12} \,.\, 2\pi V$$

aneb

$$\iiint \underset{H}{\iiint} \iiint \tfrac{1}{6}\, dp\, d\omega\, dp'\, d\omega'\, dp''\, d\omega'' = \tfrac{1}{6} \pi^4 V.$$

Dělíme-li tento výraz výrazem $^1/_6 M^3$, obdržíme pravděpodobnost p'', že tři sečné roviny protínají se uvnitř K: *)

$$p'' = \pi^4 \frac{V}{M^3}.$$

---

*) Srv. *Czuber:* Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten (Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., XC. II. Abt. p. 719—742; Wien, 1884).

27. *Přímky protínající konvexní plochu.* — *a)* Vypočtěme míru pro množství všech přímek, které protínají vnitřek uzavřené rovinné křivky γ bez dvojného bodu. Je-li σ plošný obsah obrazce omezeného křivkou γ, jest (v označení odst. 12.)

$$\iint dp\, dq = \sigma,$$

kde integrace vztahuje se k všem bodům (p, q), ležícím uvnitř křivky

$$\iint \frac{da\, db}{1 + a^2 + b^2} = \iint d\alpha\, d\beta = \pi;$$

v posledním integrálu vztahuje se integrace k polovině pomocné koule o poloměru $= 1$; α, β jsou souřadnice průmětu do roviny Oxy, takže hodnota integrálu $=$ ploše kruhu o poloměru $= 1$. Podle vzorce (12) bude tudíž hledaná míra $= \pi\sigma$. *Množství všech přímek, které protínají rovinný obrazec o plošném obsahu σ, má míru $\pi\sigma$.*

b) Budiž nyní K libovolná uzavřená konvexní plocha a S její plošný obsah. Každá přímka, která plochu K protíná, má s ní dva body společné. Budiž $d\sigma$ nekonečně malý element plochy K. Množství všech přímek, které ten element protínají, má dle předchozího výpočtu míru $\pi d\sigma$. Integrací tohoto výrazu přes celou plochu K dostaneme míru pro množství všech jejích sečen. Nutno však uvážiti, že tak čítáme každou sečnu dvakráte, poněvadž má dva průsečíky s plochou. Výsledek je, že *množství všech přímek protínajících uzavřenou konvexní plochu o plošném obsahu S má míru*

$$\tfrac{1}{2}\pi S. \tag{32}$$

Věta pod a) uvedená je zvláštním případem této věty; neboť část roviny o plošném obsahu σ je považovati za polovinu povrchu nekonečně zploštělé uzavřené plochy o plošném obsahu $S = 2\sigma$.

c) Každá přímka, která protíná nějakou uzavřenou konvexní plochu, protíná zároveň každou plochu, která předešlou obklopuje. Způsobem zcela obdobným tomu, kterým jsme odvodili vzorce (22) a (31), dokážeme, že *pravděpodobnost p, že přímka, která protíná uzavřenou konvexní plochu K_1 o plošném obsahu S_1, protíná zároveň jinou takovou plochu K_2, která má plošný obsah S_2 a leží uvnitř K_1, jest*

$$p = S_2 : S_1.$$

28. *Věta obdobná větě Croftonově* (srv. odst. 20.) — Dokažme tuto větu: *Integrál*

$$\iiiint C^4 \, dQ \, d\Omega$$

vztažený ke všem přímkám, které protínají danou konvexní plochu K, rovná se druhé mocnině objemu V násobené šesti.

Vyjděme ze vzorce

$$V^2 = \iiint \iiint dx_2 \, dy_2 \, dz_2 \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \, ;$$

integrace vztahuje se vzhledem k bodu A_1 (x_1, y_1, z_1) na celý vnitřek plochy K, rovněž tak vzhledem k bodu A_2 (x_2, y_2, z_2). Šestinásobný integrál na pravé straně vypočítáme takto: Předpokládejme, že bod A_1 je pevný a veďme jím sečnu o délce C. Sestrojme pak kuželovou plochu, jejíž vrchol jest v A_1 a jež obsahuje uvnitř sečnu C; budiž $d\Omega$ nekonečně malý tělesný úhel, jenž měří otvor té kuželové plochy. Integrál

$$\iiint dx_2 \, dy_2 \, dz_2$$

vztažený ke vnitřku této hodnoty má hodnotu (= součtu objemů dvou kuželů)

$$\tfrac{1}{3} \, [r^3 + (C - r)^3] \, d\Omega,$$

jsou-li r a $C - r$ obě části sečny C oddělené bodem A_1.

Mění-li bod A_1 nekonečně málo svou původní polohu, takže zůstává uvnitř pravoúhlého rovnoběžnostěnu, jehož základna, kolmá k C, je rovna dQ a jehož jedna hrana, rovnoběžná s C, je rovna dr, můžeme psáti

$$dQ \, dr$$

na místo $dx_1 \, dy_1 \, dz_1$ a obdržíme

$$V^2 = \tfrac{1}{3} \iiiint \left\{ \int_0^C [r^3 + (C - r)^3] \, dr \right\} d\Omega \, dQ$$

aneb

$$V^2 = \tfrac{1}{6} \iiiint C^4 \, d\Omega \, dQ;$$

integrace vztahuje se ke všem přímkám, které protínají plochu K.*)

---

*) Tuto větu, vzorec (33c) a věty uvedené v odst. 30.—32. uveřejnil jsem v práci S u r l e s p r o b a b i l i t é s g é o m é t r i q u e s (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 50; Brno, 1925).

29. *Úlohy o skupině dvou bodů a jedné sečné roviny.* — *a)* Počítejme hodnotu devítinásobného integrálu

$$J = \int\int \ldots \int dp\, d\omega\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2;$$

integrační element budiž určen párem bodů A_1 (x_1, y_1, z_1) a A_2 (x_2, y_2, z_2) položených uvnitř K a rovinou R, která protíná úsečku $A_1 A_2$. K pořadí obou bodů nepřihlížíme. Vyjádříme integrál J trojím způsobem. Předně jest

$$J = \int\int\int \Sigma\Sigma'\, dp\, d\omega, \tag{33 a}$$

kde Σ a Σ' jsou části, ve které se dělí celý objem V rovinou R; integrace vztahuje se ke všem sečným rovinám R plochy K. Za druhé máme *)

$$J = \frac{\pi}{2} \int\int\int \int\int\int \varrho\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2, \tag{33 b}$$

kde ϱ značí délku úsečky $A_1 A_2$; integrace se vztahuje ke všem bodům A_1, ležícím uvnitř K a stejně ke všem bodům A_2 uvnitř K. Podle vzorce (30*b*) je totiž pro určitou polohu bodů A_1 a A_2

$$\int\int dp\, d\omega = \pi C = \pi\varrho;$$

koeficient $^1/_2$ je nutno ve vzorci (33*b*) připojiti, poněvadž nyní přihlížíme k pořadí bodů A_1 a A_2, takže dvěma body uvnitř K a rovinou R jsou určeny dva různé elementy integrálu (33*b*).

Třetí vzorec zní

$$J = \frac{\pi}{20} \int\int\int\int C^5\, d\Omega\, dQ; \tag{33 c}$$

integrace vztahuje se ke všem přímkám, protínajícím plochu S.

Vzorec (33*c*) odvodíme ze vzorce (33*b*) touto úvahou: Budiž bod A_1 pevný a proveďme na pravé straně rovnice (33*b*) nejprve integraci podle x_2, y_2 a z_2. Za tím účelem veďme bodem A_1 sečnu, která se dělí bodem A_1 ve dvě části o délkách r a $C - r$. Sestrojme pak, podobně jako v odst. 28., kuželovou plochu, jejíž otvor se měří nekonečně malým tělesným úhlem $d\Omega$ a jež obsahuje uvnitř sečnu C. Nekonečně malý element objemový, jenž jest omezen uvažovanou kuželovou plochou a dvěma soustřednými koulemi o středu A_1 a o poloměrech ϱ a $\varrho + d\varrho$, je roven

$$\varrho^2\, d\varrho\, d\Omega.$$

---

*) Vzorce (33*a*) a (33*b*) odvodil *Czuber* v práci citované v poznámce k odst. 26.

Je-li ϱ dosti malé, jsou uvnitř kuželové plochy dva elementy tohoto druhu (oddělené bodem A_1).

Násobme oba elementy vzdáleností ϱ a integrujme podle x_2, y_2, z_2 přes celý vnitřek kuželové plochy. Vychází

$$\int\int\int \varrho\, dx_2\, dy_2\, dz_2 = \left[\int_0^r \varrho^3\, d\varrho + \int_0^{C-r} \varrho^3\, d\varrho\right] d\Omega.$$

Nahraďme, jako v odst. 28. element dx_1, dy_1, dz_1, elementem $dQdr$; formule (33*b*) přejde tak v

$$J = \frac{\pi}{2} \int\int\int\int\left[\int_0^C \left(\int_0^r \varrho^3\, d\varrho + \int_0^{C-r} \varrho^3\, d\varrho\right) dr\right] dQ\, d\Omega$$

aneb

$$J = \frac{\pi}{20} \int\int\int\int C^5\, dQ\, d\Omega;$$

integrace vztahuje se ke všem sečnám plochy K.

b) Dělíme-li integrál na pravé straně rovnice (33*b*) čtvercem objemu V^2, obdržíme *střední hodnotu* $m(\varrho)$ *vzdálenosti dvou bodů volených uvnitř* K; srv. formuli (16'). Vychází

$$m(\varrho) = \frac{2}{\pi} \frac{J}{V^2}.$$

c) Množství, jehož prvek jest utvořen párem bodů A_1, A_2, zvolených uvnitř K a sečnou rovinou plochy K, má míru (nepřihlížíme k pořadí bodů uvnitř páru)

$$\tfrac{1}{2} V^2 M.$$

Dělíme-li tímto číslem integrál J, dostaneme pro *pravděpodobnost, že sečná rovina plochy K odděluje dva body volené uvnitř K, hodnotu*

$$\frac{2J}{V^2 M}.$$

30. Úloha o skupině pěti bodů. — *a)* Budiž G skupina pěti bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 zvolených uvnitř K, která má tuto vlastnost: body A_4 a A_5 leží po téže straně roviny $A_1\, A_2\, A_3$. Klademe si za úlohu vypočísti míru pro množství E, jehož prvky jsou všechny možné skupiny G. Míra ta jest

$$\int\int \ldots \int dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \ldots dx_5\, dy_5\, dz_5.$$

Integrace vztahuje se ke všem skupinám G.*)

Proveďme nejprve integrace vzhledem k souřadnicím bodů A_1, A_2 a A_3. Zavedeme nové integrační proměnné

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ y'_1,\ y'_2,\ y'_3,\ u,\ v,\ w$$

rovnicemi

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + 1 = 0$$
$$ux_2 + vy_2 + wz_2 + 1 = 0$$
$$ux_3 + vy_3 + wz_3 + 1 = 0$$

$$x_1 = x'_1,\quad x_2 = x'_2,\quad x_3 = x'_3\quad y_1 = y'_1\quad y_2 = y'_2,\quad y_3 = y'_3.$$

Funkční determinant původních proměnných

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ z_1,\ z_2,\ z_3$$

vzhledem k novým proměnným jest

$$\frac{D\,(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3)}{D\,(x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3, u, v, w)} = \frac{1}{w^4}\begin{vmatrix} x'_1, y'_1, 1 \\ x'_2, y'_2, 1 \\ x'_3, y'_3, 1 \end{vmatrix}.$$

Element transformovaného integrálu dostaneme, násobíce absolutní hodnotu tohoto výrazu součinem $dx'_1\ dx'_2\ dx'_3\ dy'_1\ dy'_2\ dy'_3\ du\ dv\ dw$. Element dá se tedy psáti ve tvaru

$$\left(\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{w}\right)^4 \left\|\begin{matrix} x'_1, y'_1, 1 \\ x'_2, y'_2, 1 \\ x'_3, y'_3, 1 \end{matrix}\right\| \frac{dx'_1\, dx'_2 \ldots dw}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$

aneb

$$2\,\Delta\; d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\xi_3\, d\eta_3\, \frac{du\, dv\, dw}{(u^2+v^2+w^2)^2},$$

kde Δ značí kladně čítaný plošný obsah trojúhelníka $A_1\ A_2\ A_3$; u, v, w souřadnice roviny $A_1\ A_2\ A_3$ a ξ_k, η_k ($k = 1, 2, 3$) souřadnice bodu vůči soustavě souřadnic, jejíž osy jsou v té rovině. Je totiž

$$\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{w}\left\|\begin{matrix} x'_1, y'_1, 1 \\ x'_2, y'_2, 1 \\ x'_3, y'_3, 1 \end{matrix}\right\| = 2\Delta,\quad \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{w}\,.\,dx'_1\, dy'_1 = $$
$$= d\xi_1\, d\eta_1 \text{ atd.}$$

Buďte nyní Σ a Σ' části objemu V, ve které se dělí rovinou $A_1\ A_2\ A_3$. Pro pevnou polohu té roviny máme

$$\iiint\iiint dx_4\, dy_4\, dz_4\, dx_5\, dy_5\, dz_5 = \Sigma^2 + \Sigma'^2,$$

*) Při tom přihlížíme k pořadí bodů uvnitř skupiny. V práci shora citované (Sur les probabilités géométriques) považoval jsem dvě skupiny G za totožné, liší-li se při dané poloze pěti bodů toliko permutacemi prvních tří bodů nebo čtvrtého s pátým. Proto bylo nutno děliti integrál dvanácti.

takže míra množství E bude vyjádřena vzorcem

$$2\int\int\ldots\int(\Sigma^2+\Sigma'^2)\,\Delta\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2\,d\xi_3\,d\eta_3\,\frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$

anebo

$$2\int\int\ldots\int(\Sigma^2+\Sigma'^2)\,\Delta\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2\,d\xi_3\,d\eta_3\,dp\,d\omega;$$

zde značí $dp\,d\omega$ element vztahující se k rovině, která je nekonečně blízká rovině $A_1A_2A_3$. Integrace vzhledem k souřadnicím roviny vztahuje se na všechny sečné roviny plochy K, a v každé takové rovině vztahují se integrace vzhledem ke ξ_1, η_1, $\xi_2 \ldots \eta_3$ na všechny polohy bodů A_1, A_2 a A_3 uvnitř K. Součet $\Sigma^2+\Sigma'^2$ závisí toliko na poloze roviny $A_1A_2A_3$. Předně třeba vypočísti integrál

$$J_1=\int\int\int\cdot\int\int\int\Delta\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2\,d\xi_3\,d\eta_3;$$

jeho hodnota jest $P^3\,m\,(\Delta)$,

kde $m\,(\Delta)$ značí střední hodnotu plochy trojúhelníka, jehož vrcholy leží uvnitř K v určité její sečné rovině a kde P značí plošný obsah příslušného rovinného řezu. Podle vzorce (24) jest

$$m\,(\Delta)=P-\frac{1}{2P^3}\int\int c^3\,(\sigma^2+\sigma'^2)\,dq\,d\varphi;$$

při tom je v uvažované sečné rovině přímka (q,φ) definována rovnicí

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-q=0,$$

c značí délku tětivy, jež ta přímka vytíná z K a σ, σ' jsou plošné obsahy částí, ve které se dělí vnitřek průsečné křivky k přímkou (q,φ). Integrace se vztahuje ke všem přímkám (q,φ), jež průsečnou křivku k protínají. Je tedy

$$J_1=P^4-\tfrac{1}{2}\int\int c^3\,(\sigma^2+\sigma'^2)\,dq\,d\varphi.$$

Z toho plyne, že míra množství E jest rovna výrazu

$$E=2\int\int\int m\,(\Delta)\,P^3\,(\Sigma^2+\Sigma'^2)\,dp\,d\omega \tag{34}$$

nebo

$$E=2\int\int\int\left[P^4-\tfrac{1}{2}\int\int c^3\,(\sigma^2+\sigma'^2)\,dq\,d\varphi\right](\Sigma^2+\Sigma'^2)\,dp\,d\omega \tag{34'}$$

V této formuli vztahuje se integrál podle q a φ na všechny přímky, jež protínají plochu K a leží v určité její sečné rovině; integrace podle souřadnic roviny vztahují se pak ke všem sečným rovinám plochy K.

Integrál původně patnáctinásobný převádí se takto (nehledíme-li k integracím, kterými třeba ustanoviti σ, σ', Σ, Σ' a P) na součet integrálu trojnásobného a pětinásobného.

b) Dělíme-li právě vypočítanou míru množství E pátou mocninou objemu V, t. j. měrou množství, jehož prvkem je libovolná pětibodová skupina, zvolená uvnitř K, obdržíme vzorec pro pravděpodobnost *a, že ve skupině pěti bodů* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, *zvolených uvnitř* K, *jsou body* A_4 *a* A_5 *po téže straně roviny* $A_1A_2A_3$.

$$a = \frac{E}{V^5} = \frac{2\iiint m(\Delta)\, P^3 (\Sigma^2 + \Sigma'^2)\, dp\, d\omega}{V^5} \tag{35}$$

$$a = \frac{2\iiint \left[P^4 - \frac{1}{2}\iint c^3 (\sigma^2 + \sigma'^2)\, dq\, d\varphi\right] (\Sigma^2 + \Sigma'^2)\, dp\, d\omega}{V^5} \tag{35'}$$

31. Úlohy týkající se zvláštní polohy bodu a čtyřstěnu. — *a)* Zvolme uvnitř K čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4; písmenem T označíme čtyřstěn jimi utvořený a zároveň jeho objem.

Stěny čtyřstěnu T dělí objem V plochou K omezený na patnáct částí. První část, kterou nazveme T_0, jest utvořena vnitřkem čtyřstěnu T. Ostatní části označíme takto: Budiž τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) stěna čtyřstěnu T protilehlá k vrcholu A_i a označme tu její stranu, po které leží vrchol A_i, za zápornou, druhou pak za kladnou. Jsou-li i, k, l, m indexy *1, 2, 3, 4* vzaté v libovolném pořadí, označíme: písmenem T_i tu část objemu V, která leží na kladné straně roviny τ_i a na záporné straně roviny τ_k, τ_l, a τ_m; písmenem T_{ik} tu část objemu V, která leží na kladné straně rovin τ_i a τ_k a na záporné straně rovin τ_l a τ_m konečně písmenem τ_{ikl} tu část, která leží na kladné straně rovin τ_i, τ_k a τ_l a na záporné straně roviny τ_m. Patnáct částí, ve které se objem V dělí rovinami τ, bude tak označeno znaky:

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4;\ T_{12},\ T_{23},\ T_{31},\ T_{14},\ T_{24},\ T_{34};\ T_{123},\ T_{124},\ T_{134},\ T_{234}.$$

Budiž nyní A_5 pátý bod volený uvnitř K a označme písmenem E_0 míru množství, jehož element je tvořen pětibodovou skupinou takovou, že pátý bod leží vzhledem k prvním čtyřem v T_0; písmenem E_1 míru množství, jehož element je tvořen pětibodovou skupinou takovou, že pátý bod leží v T_1 atd.

Veličiny $E_0, E_1, \ldots E_{12}, \ldots E_{234}$ vyhovují patrně rovnicím

$$\left.\begin{array}{c} E_1 = E_2 = E_3 = E_4 \\ E_{12} = E_{23} = E_{31} = E_{14} = E_{24} = E_{34} \\ E_{123} = E_{234} = E_{341} = E_{412} \\ E_0 + 4E_1 + 6E_{12} + 4E_{123} = V^5, \end{array}\right\} \quad (36)$$

neboť V^5 je měrou pro množství všech pětibodových skupin vůbec.

Další vztahy mezi veličinami E najdeme, uvažujíce o vztahu čtyřstěnu T ke čtyřstěnu U, utvořenému body A_1, A_2, A_3 a A_5. Vnitřek plochy K rozdělí se stěnami čtyřstěnu U v patnáct částí, jež označíme, užívajíce obdobných zkratek jako dříve, písmeny

U_0; U_1, U_2, U_3, U_5; U_{12}, U_{23}, U_{31}, U_{15}, U_{25}, U_{35}; U_{123}, U_{125}, U_{135}, U_{235}, U_0 značí vnitřek čtyřstěnu U atd.

Z geometrické definice oborů T_{123} a U_{123} plyne přímo věta: *Je-li bod A_5 v T_{123}, jest A_4 v U_0; je-li A_5 v T_0, jest A_4 v U_{123}.*

Z této věty a z vět, jež by se z ní odvodily záměnou indexů, vyplývá vzhledem k rovnicím (36), že

$$E_{123} = E_{124} = E_{134} = E_{234} = E_0. \quad (36a)$$

Uvažujme dále o případu, že bod A_5 leží v části T_1; pak úsečka $A_1 A_5$ protíná vnitřek trojúhelníka $A_2\ A_3\ A_4$; rovina $A_1\ A_2\ A_5$ odděluje body A_3 a A_4; rovina $A_1\ A_3\ A_5$ odděluje body A_2 a A_4. Body A_4 a A_5 leží po téže straně roviny $A_1 A_2 A_3$; body A_1 a A_4 leží po téže straně roviny $A_2\ A_3\ A_5$. Jinými slovy: bod A_4 leží v U_{23}. Je-li A_5 v T_{23}, odděluje rovina $A_2\ A_3\ A_5$ body A_1 a A_4, t. j. bod A_4 leží v U_1. Platí věta:

Je-li bod A_5 v T_1, jest A_4 v U_{23}; je-li A_5 v T_{23}, jest A_4 v U_1.

Z této věty a z vět, jež by se z ní odvodily záměnou indexů, vyplývá, že

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_{12} = E_{23} = E_{31} = E_{14} = E_{24} = E_{34}. \quad (36b)$$

Poslední rovnice (36) dává vzhledem k (36*a*) a k (36*b*) vztah mezi E_0 a E_1:

$$5E_0 + 10E_1 = V^5. \quad (37)$$

Druhý vztah mezi E_0 a E_1 obdržíme uvážíce, že množství všech pětibodových skupin takových, že A_4 a A_5 leží po téže

straně roviny $A_1\ A_2\ A_3$, má míru E ustanovenou vzorcem (34). Patrně jest
$$E_0+E_1+E_2+E_3+E_{12}+E_{23}+E_{31}+E_{123}=E$$
aneb vzhledem k předešlým rovnicím
$$2\,E_0+6\,E_1=E. \tag{38}$$
Rovnicemi (37) a (38) jest úloha rozřešena; známe-li E_0 a E_1, dovedeme podle rovnic (36), (36*a*), (36*b*) vypočísti všech patnáct veličin E.

b) Eliminujíce E_1 z rovnic (37) a (38) dostaneme
$$E_0=\tfrac{3}{5}\,V^5-E \tag{39}$$
Dělme tuto rovnici veličinou V^5 a zaveďme do počtu *pravděpodobnost* p_0, *že z pěti bodů* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, uvnitř K *volených,* A_5 *leží uvnitř čtyřstěnu* $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$; poněvadž
$$p_0=\frac{E_0}{V^5},$$
obdržíme
$$p_0=\tfrac{3}{5}-a; \tag{40}$$
a značí pravděpodobnost, určenou vzorcem (35) nebo (35′).

c) Budiž nyní $m\,(T)$ střední hodnota objemu čtyřstěnu T. Podle obecné věty, dokázané v odst. 18*a*, jest
$$p_0=\frac{m\,(T)}{V}$$
a tedy
$$m\,(T)=(\tfrac{3}{5}-a)\,V. \tag{41}$$

d) Volme uvnitř K pět bodů a hledejme pravděpodobnost p, že kterýkoli z nich leží uvnitř čtyřstěnu, utvořeného ostatními čtyřmi. Vyhovuje-li některý z pěti bodů této podmínce, nevyhovuje jí žádný z ostatních čtyř. Hledaná pravděpodobnost je tedy jakožto pravděpodobnost úhrnná pětkrát větší než p_0. Máme rovnici
$$p=5p_0=3-5a. \tag{42}$$

Poněvadž p_0 je kladné číslo nebo nula, plyne z rovnice (40), že
$$a\leqq\tfrac{3}{5};$$
poněvadž pak $p\leqq 1$, plyne z rovnice (42), že
$$p\leqq\tfrac{1}{5}$$
a dále, že
$$a=\tfrac{3}{5}-p_0\geqq\tfrac{2}{5}.$$

Pravděpodobnosti a *a* p_0 *vyhovují pro každou uzavřenou konvexní plochu podmínkám*
$$p_0\leqq\tfrac{1}{5},\qquad \tfrac{2}{5}\leqq a\leqq\tfrac{3}{5}.$$

Pro kouli o poloměru R vychází

$$a = \tfrac{84}{143},\quad p_0 = \tfrac{9}{715},\quad m(T) = \tfrac{12}{715}\,\pi R^3.$$

W. Blaschke uvádí větu, že při daném objemu V dosahuje m (T) nejmenší hodnoty, je-li K ellipsoid, a největší, je-li K čtyřstěn.*)

32. Dvě úlohy o skupinách bodů, je-li jeden bod volen na ploše K. — *a)* Budiž T_1 čtyřstěn, jehož tři vrcholy jsou voleny uvnitř K, kdežto čtvrtý vrchol je na ploše K samé. Střední hodnota objemu T_1 dá se vypočísti podle vzorce (21). Je-li dV nekonečně malý přírůstek objemu V, který obdržíme, aplikujeme-li na K homothetickou transformaci (předpokládáme, že původní plocha K jest obsažena celá uvnitř plochy transformované), roste m (T), kde T značí objem čtyřstěnu, obsaženého uvnitř K, úměrně s V, takže

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V}.$$

Dosadíme-li do vzorce (21) $n = 4$, bude

$$m_1 = \tfrac{5}{4}\,m,$$

kde m značí střední hodnotu objemu čtyřstěnu T_1, jehož všechny čtyři vrcholy jsou uvnitř K, m pak střední hodnotu objemu čtyřstěnu T, jehož tři vrcholy jsou uvnitř K, čtvrtý pak na K.

b) Pravděpodobnost p_0, určená rovnicí (40), nemění se, aplikujeme-li na K homothetickou transformaci. Hledejme pravděpodobnost p_1, že bod zvolený uvnitř K nalézá se zároveň uvnitř čtyřstěnu, jehož tři vrcholy jsou voleny uvnitř K, čtvrtý pak na ploše K samé. Dosadíme do rovnice (21′) $dp = 0$; vychází

$$p_1 = p_0.$$

V. Pokusné úlohy.

33. Pokusné určení geometrických pravděpodobností. — Vezměme za základ ty definice geometrických pravděpodobností, jež byly podány v kap. II., III. a IV., a hleďme výsledky výpočtů srovnati s pokusy.

*) Viz *W. Blaschke*: Ueber affine Geometrie XI (Berichte über die Verhandlungen d. kön. sachsischen Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, Bd. 69., p. 452; 1917).

Pokusná kontrola týká se především vzorců (6) a (7). Prvý z nich vztahuje se k počtu zdařených pokusů, které se vyskytnou v celkovém počtu n pokusů, druhý pak se vztahuje k úchylce h skutečného počtu zdařených pokusů od teoretického počtu np. Připomeňme, že podle odst. 17 *b, c* platí známá pravidla o pravděpodobnosti úhrnné též o pravděpodobnosti geometrické; tím jest odůvodněno srovnání formulí s pokusy (srv. úvahy o tom v odst. 7.).

Každá geometrická pravděpodobnost dá se vyjádřiti zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel mají tvar

$$\int\int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1,\, dx_2, \ldots dx_n,$$

kde f jest kladná funkce proměnných $x_1, x_2 \ldots$ (souřadnic bodů, přímek a rovin).

V aplikacích na konkrétní úlohy zasluhují zvláštní pozornosti případy, ve kterých vycházejíce z prvků zvolených, odvozujeme z nich další geometrickými konstrukcemi. Tak na př. stanovíme-li v daném kruhu polohu sečny polohou jejího středu, a ptáme-li se na pravděpodobnost, že sečna vyhovuje určité podmínce, musíme aplikovati pravidla o výpočtu pravděpodobnosti pro polohu bodu (středu sečny) a nikoli pro polohu sečny jakožto přímky libovolně volené (viz odst. 34.). Vůbec je třeba, má-li býti vzorec pro nějakou pravděpodobnost zkoušen pokusem, aby podmínky pokusu odpovídaly definici uvažované pravděpodobnosti. Je-li naopak předepsán pokus určitého druhu, musí býti při teoretickém výpočtu pravděpodobnosti přihlíženo k podmínkám pokusu.

34. Rozbor tak zv. Bertrandova paradoxa. — Bertrand učinil pozoruhodné námitky proti pojmu geometrické pravděpodobnosti. Přes to, že nemůžeme v nich viděti více než upozornění, aby definice pravděpodobnosti odpovídala přesně podmínkám pokusu, stojí tyto námitky za podrobnější úvahu.

Běží o tuto úlohu: Je dána kružnice o poloměru r a do ní je vepsán rovnostranný trojúhelník (délka strany $= r\sqrt{3}$). V kružnici narýsujeme nějakou tětivu. Jak velká je pravděpodobnost p, že tětiva je delší než strana onoho trojúhelníka?

Bertrand*) udává trojí řešení:

*) *J. Bertrand:* Calcul des Probabilités, Paris 1889; 2e édition 1907, p. 4—5.

I. Představme si vepsaný trojúhelník v určité poloze a uvažujme o tětivách, jež jsou rovnoběžny s jeho základnou. Výška trojúhelníka rovná se třem polovinám poloměru r. Protíná-li tětiva výšku v bodě, jehož vzdálenost od středu kružnice je menší než polovina poloměru, je tětiva delší než strana trojúhelníka; v opačném případě je kratší. Pravděpodobnost, že tětiva určitého směru je delší než strana trojúhelníka, je tedy $1/2$. Směr základny trojúhelníka, a tedy i směr tětivy možno voliti libovolně; úvaha platí stejně pro každý směr základny, máme tudíž

$$p = \tfrac{1}{2}. \tag{I}$$

II. Uvažujme nyní o všech tětivách, které mají jeden koncový bod v určitém vrcholu trojúhelníka. Příslušný vnitřní úhel trojúhelníka $\pi/3$ měří množství všech případů příznivých (tětivy delší než strana trojúhelníka), kdežto přímý úhel π měří množství všech případů vůbec možných. Pravděpodobnost, že tětiva, jejíž jeden koncový bod je dán, je delší než strana trojúhelníka, rovná se tedy $1/3$. Poněvadž pak můžeme voliti kterýkoli bod na obvodě kružnice za vrchol trojúhelníka, platí, že

$$p = \tfrac{1}{3}. \tag{II}$$

III. Srovnávejme konečně všechny tětivy v kružnici podle polohy jejich středů. Má-li střed tětivy vzdálenost menší než je polovina poloměru od středu kružnice, je tětiva delší než strana trojúhelníka; v opačném případě jest kratší. Pravděpodobnost, že střed tětivy leží ve vzdálenosti $\leqq \frac{1}{2} r$ od středu kružnice (jinými slovy: že leží uvnitř kružnice, která je s danou kružnicí soustředná a má poloměr poloviční), je rovna poměru ploch kružnice o poloměru $1/2\, r$ a kružnice o poloměru r, tedy

$$p = \tfrac{1}{4}. \tag{III}$$

Tyto tři vzájemně si odporující formule (I), (II) a (III) tvoří tak zv. Bertrandovo paradoxon; daná úloha dala by se řešiti ještě jinými způsoby, které by vedly k jiným a jiným hodnotám pravděpodobnosti p. Bertrand učinil z toho skeptický závěr, že úloha je vůbec špatně položena, že nemá určitého smyslu. S tohoto stanoviska byly by vůbec všechny úlohy založené na pojmu geometrické pravděpodobnosti, ilusorní.

Avšak krajně skeptické stanovisko Bertrandovo jeví se nepřijatelným, když uznáme podle Borela,*) že je nutno přihlédnouti ke způsobu, kterým se děje tak zv. náhodná volba tětivy v kružnici. Položme si jen otázku: co to znamená, voliti »náhodně« tětivu v kružnici? Uveďme tři způsoby takovéto volby a hleďme po každé odvoditi řešení Bertrandovy úlohy:

I'. Narýsujme na vodorovné rovině řadu ekvidistantních rovnoběžek; vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek budiž $2r$. Házejme pak na rovinu kruhový kotouč o poloměru r. Jedna z rovnoběžek je vždy sečnou kotouče (v krajním případě dotýká se kotouč dvou rovnoběžek). Poloha kotouče na vodorovné rovině určí se třemi veličinami: souřadnicemi x, y jeho středu a úhlem ω, který určitý poloměr, na kotouči vyznačený, svírá se směrem rovnoběžek; osu Ox volme právě v tomto směru. Máme posouditi poměr, ve kterém je množství případů příznivých (tětiva je delší než $r\sqrt{3}$) k množství všech vůbec možných případů. Je jasno, že nemusíme přihlížeti ani k hodnotě veličiny x, ani k hodnotě veličiny ω. Rozhoduje tu jedině hodnota veličiny y, a z úvah dříve učiněných (důkaz I.) plyne, že hledaná pravděpodobnost je vyjádřena vzorcem (I). Je to skutečně tak, jako by byl dán směr tětivy; ze tří hořejších důkazů I, II a III jedině prvý je vhodný, kdežto druhých dvou nelze užíti.

II'. Na pevné rovině narýsujme přímku a a v jednom bodě A této přímky připíchneme k rovině list průhledného papíru, na němž jsou narýsovány jednak kružnice, která prochází bodem A, jednak rovnostranný trojúhelník T s vrcholem A do ní vepsaný. Roztočíme-li list prudce kolem bodu A tak, aby zůstával stále ve své rovině, ustálí se konečně v určité poloze; přímka a vytíná v kružnici tětivu určité délky. List může se otočiti z počáteční polohy o libovolný úhel. Vezmeme-li 2π za míru všech možných případů, jest patrně $\frac{2}{3}\pi$ měrou všech případů příznivých (přímka a probíhá vnitřkem trojúhelníka T). Platí formule (II).

III'. Házejme na vodorovný kruhový kotouč o poloměru r malé zrnko tak, aby kterákoli část kotouče mohla býti zasažena se stejnou pravděpodobností. Bod, ve kterém zrnko dopadne, považujme za střed tětivy. V tomto případě užijeme

*) *E. Borel*: Le Hasard (Paris, Alcan), p. 82; Élements de la théorie des probabilités (3ième éd. Paris 1924), p. 106.

formule (III), neboť hledanou pravděpodobnost obdržíme, dělíce plochu kotouče o polovičním poloměru plochou kotouče původního.

Výsledek úvah shrneme takto: Bertrandovo paradoxon má základ v tom, že se naprosto nepřihlíží k experimentálním podmínkám, za kterých se děje »náhodná volba« tětivy. Rozumný výpočet pravděpodobnosti může se však provésti jen se zřetelem k nim. Házíme-li, jak je vyloženo v I', kotouč na rovnoběžky, jest $p = 1/2$; učiníme-li 1000 pokusů, očekáváme podle vzorce (6), že se zdaří asi 500 z nich (tětiva bude delší než $r\sqrt{3}$.) Konáme-li pokus tak, jak vyloženo pod II', jest $p = 1/3$; z 1000 pokusů zdaří se asi 333. Házíme-li konečně zrnk otak, jak bylo uvedeno pod III', jest $p = 1/4$; z 1000 pokusů zdaří se asi 250.

Každý z důkazů I, II a III má svůj dobrý smysl; odpovídají však po řadě různým podmínkám pokusu I', II' a III'.

35. *Buffonova úloha o jehle.* — Házíme jehlu (nebo hůlku) na vodorovnou rovinu, na níž jsou narýsovány rovnoběžné přímky ve stejných vzdálenostech. Jak velká je pravděpodobnost p, že jehla protne některou z těch přímek?

Buffon rozřešil úlohu za těchto předpokladů: Střed jehly může dopadnouti na kterýkoli bod roviny se stejnou pravděpodobností a osa jehly může padnouti do kteréhokoli směru rovněž se stejnou pravděpodobností. Vzorec pro hledanou pravděpodobnost p můžeme odvoditi z řešení jedné dřívější úlohy takto: Budiž $2a$ vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek a $2b$ délka jehly; předpokládáme, že $2b < 2a$. Házíme-li na rovinu kruhový kotouč o průměru $2a$, na němž je nakreslena úsečka (jehla) o délce $2b$, protne se kotouč vždy jednu z rovnoběžek. Úloha zní pak takto: nalézti pravděpodobnost p, že přímka, jež protíná kružnici o průměru $2a$, protíná současně úsečku délky $2b$, položenou uvnitř kružnice. Dle odst. 19*b* jest

$$p = \frac{2b}{\pi a}. \tag{42'}$$

To jest Buffonův vzorec,*) ze kterého plyne

$$\pi = \frac{2b}{ap}.$$

Pravděpodobnost p dá se určiti pokusně; hodíme-li jehlu

*) Viz spis citovaný v poznámce odst. 8.

celkem n-krát a nastane-li průsek s nějakou přímkou m-krát, bude přibližně

$$p \doteq \frac{m}{n}, \qquad \pi \doteq \frac{2b}{a} \cdot \frac{n}{m}.$$

Poslední vzorec podává tak zv. experimentální určení čísla π. Švýcarský matematik Wolf konal takové pokusy a našel pro $n = 5000$ hodnotu $\pi = 3{\cdot}1507$, což se shoduje s pravou hodnotou $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$ až na chybu menší než třetina procenta.*) Je přirozeno, že v tomto výsledku vidíme aspoň do jisté míry potvrzení o správnosti úvah, kterými byl Buffonův vzorec odvozen. Srv. též odst. 39.

36. Pólyovy pokusy. — Podle odst. *23b* je pravděpodobnost, že přímka protínající čtverec, protíná jej ve dvou protilehlých stranách, rovna $\sqrt{2} - 1 = 0{\cdot}414\ldots$; obdobná pravděpodobnost pro obdélník, jehož strany jsou v poměrech 3 : 4, jest $^3/_7 = 0{\cdot}4285\ldots$

Pólya kontroloval tyto vzorce empiricky: házel papírový čtverec (obdélník o rozměrech 3×4) na vodorovnou rovinu, na níž byly narýsovány rovnoběžné přímky a to v takových vzdálenostech, že obvod čtverce (obdélníku) mohl býti proťat nejvýše jednou z nich. V řadě pokusů vyskytlo se celkem 1865 případů, kdy čtverec byl přímkou proťat. Teoretický počet těch případů, kdy nastává průsek ve dvou protějších stranách, jest dle vzorce (6) ($n = 1865$, $p = 0{\cdot}414$ pro čtverec)

$$0{\cdot}41421\ldots \times 1865 = 772{\cdot}5\ldots;$$

skutečně pozorovaný počet těch případů, kdy nastal průsek ve dvou protějších stranách, lišil se od tohoto čísla o čtyři jednotky.

Podobně pro obdélník: V řadě 1429 případů, kdy obvod obdélníka byl proťat, lišil se teoretický počet případů, kdy měl nastati průsek ve dvou protějších stranách

$$\tfrac{3}{7} \cdot 1429 = 612{\cdot}4\ldots,$$

od skutečně pozorovaného počtu o tři jednotky.**)

*) Srv. též *E. Barbier* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 2e série, t. 5, p. 273—286; 1860). *E. Borel:* Éléments de la théorie des probabilités, 3e édition, Paris 1924, p. 100. *A. A. Markoff:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin, 1912, p. 164. *E. Czuber:* Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, Leipzig 1884, p. 184.

**) *G. Pólya:* Ueber geom. Wahrscheinlichkeiten. (Sitzber. der k. Ak. d. Wissensch., Wien, Bd. 126, 1917, p. 319—328). Četné příklady obsahuje též dílo *Czuberovo:* Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte.

Úlohy 30.—38. (Jest vykonati příslušné pokusy.)

30. Hodíme-li kostkou n-krát, padne každé číslo přibližně $(n/6)$-kráte. Hoďme kostkou n-krát a zaznamenejme úchylku $h = m - {}^1/_6\, n$ skutečně pozorovaného počtu m případů, kdy skutečně určité číslo (na př. jedna) padlo od teoretické hodnoty $n/6$. Vykonejme pak druhou serii o n pokusech a stanovme opět h. Je-li počet s serií veliký (v každé serii je n hodů; n je taktéž veliké), jest v ${}^1/_2\, s$ seriích úchylka h menší než číslo*) $0{\cdot}07948 \times \sqrt{10\, n}$ a větší než toto číslo v seriích ostatních.

31. Hodíme-li dvěma kostkami n-krát, jsou přibližné hodnoty frekvencí, se kterými se vyskytují součty 2 až 12, udány v následující tabulce:

součet x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet případů, kdy padne součet x	$\frac{n}{36}$	$\frac{n}{18}$	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{9}$	$\frac{5n}{36}$	$\frac{n}{6}$	$\frac{5n}{36}$	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{18}$	$\frac{n}{36}$

32. Provésti pokusy, popsané v odst. 34. pod I′, II′, III′.

V prvém případě házíme kotouč z průhledného papíru, na němž jsou narýsovány dvě soustředné kružnice o poloměrech r a $r/2$, na (vodorovnou) rovinu, v níž jsou narýsovány rovnoběžky ve stejných vzdálenostech $= 2r$. Větší kružnice je pokaždé protata některou rovnoběžkou. Vykonáme-li celkem n pokusů a je-li m počet případů, kdy také menší kružnice je některou rovnoběžkou protata, jest přibližně

$$m = \tfrac{1}{2}\, n.$$

Ve druhém případě připíchneme onen list průhledného papíru se dvěma kružnicemi v jednom bodě A obvodu větší kružnice k rovině; v rovině vedeme bodem A pevnou přímku a. Roztočíme papír kolem bodu A a pozorujeme, je-li, když se kotouč zastaví, i menší kružnice protata přímkou a. Je-li m počet případů, kdy tomu tak jest, a n úhrnný počet pokusů, platí přibližně

$$m = \tfrac{1}{3}\, n.$$

Ve třetím případě užijme (uchylujíce se poněkud od textu odst. 22) tohoto postupu: V rovině narýsujme čtvercovou síť; strana čtverce $= 2r$. Hodíme-li na ni onen list průhledného papíru se dvěma kružnicemi, leží uvnitř větší kružnice buď jeden vrchol některého čtverce nebo žádný. Je-li n počet případů, kdy leží uvnitř větší kružnice jeden vrchol čtverce a m počet těch případů, kdy tento vrchol leží zároveň uvnitř menší kružnice, platí přibližně

$$m = \tfrac{1}{4}\, n.$$

33. Hodíme-li n-krát kruhový kotouč o poloměru r na čtvercovou síť o straně čtverce $= a$, padne kotouč v m případech tak, že

*) Viz odst. 6. Podobné vztahy pro úchylku h můžeme odvoditi v každé z následujících úloh.

leží celý uvnitř jednoho čtverce. Platí přibližně (srv. úlohu 20 na str. 35).

$$m = \left(\frac{a-r}{a}\right)^2 . n.$$

34. Pokus s jehlou (viz odst. 35.) můžeme provésti též tak, že házíme na rovinu, ve které jsou narýsovány rovnoběžky ve stejných vzdálenostech $= 2a$, list průhledného papíru, na němž je narýsována úsečka o délce $= 2b$. Je-li n úhrnný počet všech hodů a m počet těch, ve kterých úsečka protne některou rovnoběžku, jest přibližně

$$m = \frac{2b}{\pi a} . n.$$

35. V rovině jsou narýsovány rovnoběžky ve stejných vzdálenostech $= 2a$. Házíme na rovinu rovnoramenný lichoběžník, jehož tři strany jsou stejně dlouhé $= a$, čtvrtá pak $2a$. Obvod obrazce $= 5a$, úhlopříčka $= a\sqrt{3}$. Je-li n počet případů, ve kterých obvod lichoběžníka protne se vůbec s některou rovnoběžkou, a n_1 počet těch případů, kdy průsek nastává ve dvou protilehlých stranách lichoběžníka, platí přibližně (srv. odst. 36.)

$$n_1 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{5} - 1\right) n = 0{\cdot}38564 . n.$$

Stran podobných pokusů se čtvercem a s obdélníkem viz odst. 36.

36. V rovině narýsujeme rovnoběžky ve stejných vzdálenostech $2R$ a házíme na ni kruhový kotouč o poloměru R; po každé měříme délku tětivy C, kterou rovnoběžka vymezuje na kotouči Vykonáme-li celkem n pokusů, a jsou-li $C_1, C_2, \ldots$ příslušné délky tětivy, je, poněvadž střední délka tětivy přibližně rovna kvadrantu kružnice (viz úl. 29. na str. 48), přibližně

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \tfrac{1}{2}\pi n R.$$

37. Střední hodnota čtverce tětivy C, kterou libovolná přímka vytíná v kružnici o poloměru R, vypočte se podle vzorce (integrace se vztahuje ke všem přímkám protínajícím kružnici)

$$\frac{\iint C^2\,dq\,d\varphi}{\iint dq\,d\varphi} = \frac{\pi\int_{-R}^{R} 4(R^2 - x^2)\,dx}{2\pi R} = \tfrac{8}{3} R^2.$$

Užijeme-li označení zavedeného v úl. 36. máme přibližně

$$C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 = \tfrac{8}{3} n R^2.$$

38. Střední hodnota třetí mocniny tětivy C, ve které libovolná přímka protíná kružnici o poloměru R, je (viz odst. 20.)

$$\frac{3P^2}{L} = \frac{3 . \pi^2 R^4}{2\pi R} = \frac{3\pi R^3}{2}.$$

Užijeme-li označení zavedeného v úl. 36., máme přibližně

$$C_1^3 + C_2^3 + \ldots + C_n^3 = \tfrac{3}{2}\pi n R^3.$$

VI. Poincaréova metoda libovolných funkcí.

*37. Poincaréova metoda. Problém rulety.**) — a) Přihlédneme-li blíže k podmínkám, za kterých pokusně zjišťujeme nějakou geometrickou pravděpodobnost, seznáme často, ne-li vždycky, že nelze považovati všechny případy, které se jakožto výsledek uvažovaného pokusu mohou vyskytnouti, za stejně pravděpodobné. Proto nelze také bez dalšího rozboru úlohy počítati hledanou pravděpodobnost jednoduchým srovnáváním případů příznivých se všemi případy vůbec možnými. Objasněme to na příkladě rulety. Kolem geometrické osy kotouče rozděleného na $2n$ stejně velikých výsečí, jež jsou střídavě červené a černé, otáčí se jehla; v počátečním okamžiku udělíme jí nárazem určitou úhlovou rychlost, takže jehla oběhne několikráte dokola, až se vlivem tření, odporu vzduchu atd. zastaví buď u výseče červené nebo u výseče černé. Jak veliká je pravděpodobnost, že vyjde červená?

Uvažme nejprve, že ke konci pohybu, když už je kinetická energie jehly nepatrná, stačí docela malá překážka (na př. zrnko prachu), která způsobí, že se jehla zastaví u určité výseče. I když je ruleta dokonale pracována, nemůžeme tvrditi, že pravděpodobnost zastaviti se u určité výseče je pro všechny výseče naprosto stejná; při tom ani nepřihlížíme k okolnosti, že také individualita hráčova, jevící se ve zvláštním střídání počátečních rychlostí, které hráč jehle uděluje, může zde míti určitý vliv. Poincaré ukázal však, že jest jeden zvláštní důvod, pro který můžeme považovati pravděpodobnost, že jehla se zastaví u červené výseče, za rovnou $1/2$, aspoň pokud počet výsečí je velmi veliký.

Představme si, že na začátku každého pokusu postavíme jehlu do určité polohy a že jí pak udělíme tak velikou počáteční rychlost, aby se otočila nejméně padesátkráte dokola; počáteční rychlost budiž však v takových mezích, že se jehla v každém pokusu zastaví po méně než 100 obězích. Označme písmenem ϑ úhel, o který se jehla úhrnem otočí než se za-

*) *H. Poincaré:* Calcul des Probabilités, 2e édition, chap. VIII. *E. Borel:* Élements de la théorie des probabilités, 3e édition, chap. VIII.

staví. Je tedy vždy $50 \cdot 2\pi < \vartheta < 100 \cdot 2\pi$. O pravděpodobnosti, že se jehla zastaví po opsání úhlu obsaženého v mezích ϑ až $\vartheta + d\vartheta$, budeme předpokládati, že je rovna výrazu

$$\varphi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

kde φ značí spojitou funkci proměnné ϑ. Patrně jest

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = 1,$$

poněvadž integrál vyjadřuje pravděpodobnost, že jehla se vůbec někde zastaví. Funkce $\varphi(\vartheta)$ (»hustota pravděpodobnosti«) rovná se nule, je-li ϑ menší než $50 \cdot 2\pi$ nebo větší než $100 \cdot 2\pi$.

Znázorněme funkci $y = \varphi(\vartheta)$ graficky a sestrojme na ose $O\vartheta$ všecky body a_i odpovídající těm hodnotám úhlu ϑ, při kterých se jehla zastaví právě na rozhraní červené a černé výseče. Tak obdržíme na ose $O\vartheta$ řadu stejně dlouhých intervalů, které odpovídají střídavě barvě červené a černé. Vztyčme v těch bodech pořadnice a vyčárkujme všechny plochy, které jsou nad intervaly odpovídajícími červené barvě. Označíme-li tyto intervaly $a_1 a_2, a_3 a_4, \ldots a_{2k-1} a_{2k}$, bude pravděpodobnost, že vyjde červená barva, rovna výrazu

$$p = \sum_k \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

t. j. součtu vyčárkovaných ploch. Poincaré dokázal, že součet p vyčárkovaných ploch blíží se jedné polovině (celá plocha omezená křivkou $= 1$) jakožto limitní hodnotě, roste-li počet n červených výsečí do nekonečna a je-li funkce $\varphi(\vartheta)$ taková, že její derivace je menší než určitá konstanta, nechť ϑ má hodnotu jakoukoli. V odst. 38. bude podrobně vyložen důkaz obdobné věty pro případ funkce tří proměnných; proto neuvádím nyní důkazu Poincaréovy věty a poznamenávám jen toto: Je-li n velmi veliké číslo, jsou intervaly $a_1 a_2, a_2 a_3 \ldots$ velmi malé a je zřejmo, že obsah vyčárkované plochy nad $a_1 a_2$ liší se jen velmi málo od obsahu nevyčárkované plochy nad $a_2 a_3$ atd. Z toho důvodu je úhrnný obsah ploch vyčárkovaných téměř roven obsahu ploch nevyčárkovaných.

Je-li tedy výsečí velmi mnoho, je hledaná pravděpodobnost velmi blízká jedné polovině, nezávisle na tom, jaká je funkce $\varphi(\vartheta)$. Touto funkcí zavádí se vlastně do počtu to, co vyplývá z malých nedokonalostí v konstrukci rulety nebo z individuality hráčovy a čím se způsobuje, že lze očekávati zastavení kotouče spíše v některých polohách než v jiných. Můžeme též říci, že funkce φ měří hustotu pravděpodobnosti. Ačkoli jsme učinili jen málo předpokladů o funkci $\varphi(\vartheta)$, takže ji lze voliti dosti libovolně, přece z počtu vypadla; v konečném výsledku se nevyskytuje.

38. Zobecnění Poincaréovy metody. — V odst. *39.* je podáno nové řešení Buffonovy úlohy o jehle; řešení to zakládá se na zobecnění Poincaréovy metody, které nyní vyložím.

a) Budiž A souvislý trojrozměrný obor položený v konečné vzdálenosti. Písmenem A označíme zároveň jeho objem, jenž v obyčejných pravoúhlých souřadnicích bude dán integrálem

$$\iiint_A dx\, dy\, dz.$$

Budiž dále $\varphi(x, y, z)$ funkce tří proměnných, která je jednoznačná a má spojité derivace prvního řádu, pokud bod (x, y, z) jest v oboru A; mimo to předpokládáme, že v oboru A všude platí

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| < K, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| < K, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right| < K,$$

kde K je konstanta.

Rozdělme nyní obor A v m stejných elementárních oborů. Každý elementární obor nechť je souvislý; jeho objem jest

$$\varepsilon = \frac{A}{m}.$$

Rozdělení budiž provedeno tak, aby vzdálenost dvou bodů, obsažených v témže elementárním oboru nebyla nikdy delší než určitá délka l.

Rozdělme konečně každý elementární obor ve dvě části (z nichž každá může býti složena z více menších dílů, jež leží odděleně jedny od druhých); objem prvé části, kterou nazveme bílou, jest $\lambda\varepsilon$, objem druhé části, kterou nazveme černou, jest $(1-\lambda)\varepsilon$. Poměr λ bílé části k celému objemu příslušného elementárního oboru budiž konstantní; je to číslo, obsažené mezi 0 a 1, které nezávisí ani na uvažovaném elementárním oboru, ani na čísle m.

Označme pak písmeny J a J_1 následující integrály:

$$J = \iiint\limits_{A} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad J_1 = \iiint\limits_{A_1} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Integračním oborem prvého integrálu je celý původní obor A; A_1 jest obor složený ze všech bílých částí, uvnitř A obsažených.

Hodnota integrálu J_1 závisí na čísle m. Roste-li m do nekonečna, a konverguje-li zároveň l k nule, máme

$$\lim_{m=\infty} J_1 = \lambda J. \tag{43}$$

Dokažme tuto větu. Důkaz založíme na rovnici

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 \Delta x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_2 \Delta y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_3 \Delta z, \tag{44}$$

kde

$$\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)$$

a kde

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_3$$

jsou hodnoty prvních derivací funkce φ ve třech bodech (ξ_i, η_i, ζ_i) ($i = 1, 2, 3$), jichž souřadnice vyhovují podmínkám

$$x \leqq \xi_i \leqq x + \Delta x, \qquad y \leqq \eta_i \leqq y + \Delta y, \qquad z \leqq \zeta_i \leqq z + \Delta z.$$

Budiž nyní δ libovolný elementární obor. Uvnitř δ jest určitý bod (x, y, z), ve kterém funkce φ nabývá největší hodnoty M a pak bod ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$), kde φ nabývá nejmenší hodnoty M'. Platí

$$|\Delta x| \leqq l, \qquad |\Delta y| \leqq l, \qquad |\Delta z| \leqq l$$

a rovnice (44) ukazuje, že

$$M - M' = \Delta\varphi < 3\, l\, K. \tag{45}$$

Ta část integrálu J, která se vztahuje k uvažovanému elementárnímu oboru δ, násobená činitelem λ, jest menší než $\lambda M\varepsilon$; ta část integrálu J_1, která se vztahuje k bílému dílu oboru δ, jest větší než $\lambda M'\varepsilon$. Odečtěme obě části; rozdíl je částí trojnásobného integrálu $\lambda J - J_1$ a je menší než

$$(M - M')\,\varepsilon\lambda < 3\,l\,\lambda\,K\,\varepsilon = \frac{3\,l\,\lambda\,K\,A}{m}\,.$$

Trojnásobný integrál $\lambda J - J_1$ skládá se z m takových částí, tedy

$$|\lambda J - J_1| < 3\,l\,\lambda\,K\,A. \qquad (46)$$

Veličina l konverguje k nule, roste-li m do nekonečna; z toho plyne správnost vzorce (43).

Obdobný vzorec dal by se odvoditi stejným postupem pro funkci φ libovolného počtu nezávisle proměnných. Je-li jen jedna nezávisle proměnná veličina a položíme-li $\lambda = {}^1/_2$, dává vzorec (43) Poincaréovu větu, uvedenou v předešlém odstavci.

b) Vraťme se k funkci $\varphi\ (x, y, z)$ tří proměnných a předpokládejme, že φ nezávisí na z. Třetí člen na pravé straně rovnice (44) rovná se pak nule, takže na místo nerovnosti (45) budeme míti nerovnost

$$M - M' < 2\,lK.$$

To platí i v případě, že podmínce

$$|\Delta z| \leqq l$$

není vyhověno; v tomto případě nastoupí na místo (46) nerovnost

$$|\lambda J - J_1| < 2\,l\,\lambda\,K\,A.$$

Z toho plyne důsledek, že věta (43) platí pro funkci φ, která nezávisí na hodnotě proměnné z, i v tom případě, že rozměry elementárních oborů, měřené rovnoběžně k ose Oz, nemají nulu za limitu, když m roste do nekonečna.

39. Nové řešení úlohy o jehle. — Původní Buffonovo řešení úlohy o jehle (viz odst. 19*b* a 35) zakládá se v podstatě na těchto dvou předpokladech:

I. Pravděpodobnost, že střed jehly dopadne na místo, jež se nalézá uvnitř části roviny o plošném obsahu ε, jest úměrná jejímu plošnému obsahu ε a nezávisí na její poloze ani na jejím tvaru.

II. Pravděpodobnost, že úhel ω, který osa dopadnuvší jehly svírá s pevnou přímkou vodorovné roviny, jest obsažen v mezích ω_1 a ω_2, jest úměrná rozdílu $\omega_2 - \omega_1$.

Avšak není možno vymysliti takové uspořádání pokusu, aby podmínce I bylo vyhověno. Uvažujme na příklad o následujících podmínkách: Rovnoběžky jsou narýsovány na desce stolu, jež má tvar čtverce. Na začátku každého pokusu umístíme jehlu ve středu desky stolu a to tak, že osa jehly je svislá, načež udělíme jehle určitou rychlost ve směru svislém vzhůru. Jehla ovšem není v počáteční poloze naprosto přesně svislá, rovněž náraz, kterým se uvádí v pohyb, mění se co do směru i co do velikosti od pokusu k pokusu, třebaže v nepatrných mezích. Proto dopadá jehla v různých pokusech na různá místa stolu. Ale odchylky v počátečních podmínkách nesmějí býti příliš veliké, poněvadž jehla nemá padnouti mimo stůl. Předpokládejme tedy, že je málo pravděpodobno, že jehla dopadne blízko kraje stolu. Budiž p_1 pravděpodobnost, že střed jehly bude uvnitř určitého čtverce, jehož strana měří 1 *cm* a jenž je narýsován poblíže středu stolu; budiž pak p_2 obdobná pravděpodobnost pro stejně veliký čtverec, narýsovaný poblíže kraje stolu. Patrně bude $p_1 > p_2$; z toho vyplývá, že předpokladu I není vyhověno.

Chceme-li tedy počítati pravděpodobnost, že střed jehly dopadne uvnitř nějaké dané části stolní desky (roviny xy), musíme nahraditi předpoklad I předpokladem obecnějším. Připustíme, že tato pravděpodobnost jest úměrná integrálu

$$\iint \varphi(x, y)\, dx\, dy;$$

integrace vztahuje se k uvažované části roviny xy. Funkce $\varphi(x, y)$ není dána; shledáme však, že za určitých podmínek vypadne z počtu, takže se nebude vyskytovati v konečném výsledku.

Učiníme tyto dva předpoklady:

I'. Hodíme jehlu vždy tak, aby její střed dopadl dovnitř čtverce C ve vodorovné rovině. Jeden vrchol čtverce volíme za počátek 0 pravoúhlých souřadnic a strany v něm se sbíhající za osy $0x$ a $0y$. Vrcholy čtverce C mají souřadnice

$$(0, 0), (s, 0), (s, s), (0, s).$$

Strana s čtverce rovná se celistvému násobku vzdálenosti $2a$ dvou sousedních rovnoběžek

$$s = 2na.$$

Rovnoběžné přímky na čtverci narýsované

$$y = 0, \ y = 2a, \ y = 4a, \dots y = 2na$$

dělí jej v n shodných obdélníků; každý z nich má rozměry $2na$ a $2a$.

Pravděpodobnost, že střed jehly dopadne dovnitř uzavřené křivky, narýsované v rovině xy (uvnitř C), jest rovna zlomku

$$\frac{\int\limits_s\int\limits_s \varphi(x, y)\,dx\,dy}{\int\limits_0\int\limits_0 \varphi(x, y)\,dx\,dy};$$

integrace v čitateli vztahuje se k vnitřku dané křivky.

Funkce $\varphi(x, y)$ má spojité parciální derivace 1. řádu a platí pro každý bod uvnitř C

$$\left|\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\right| < K, \qquad \left|\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\right| < K,$$

kde K značí konstantu.

II'. Pravděpodobnost, že úhel ω, který osa dopadnuvší jehly svírá s pevnou přímkou roviny $0xy$, jest obsažen v mezích ω_1 a ω_2, jest úměrná rozdílu $\omega_2 - \omega_1$.

Vycházejíce z uvedených dvou předpokladů, obdržíme pro pravděpodobnost p', že jehla protne některou rovnoběžku, vzorec

$$p' = \frac{\iiint\limits_{A_1} \varphi(x, y)\,dx\,dy\,d\omega}{\iiint\limits_{A} \varphi(x, y)\,dx\,dy\,d\omega}. \tag{46}$$

Integrál ve jmenovateli vztahuje se k oboru A všech případů možných. Střed (x, y) jehly může býti kdekoliv uvnitř čtverce C o straně $s = 2na$; osa jehly může svírati s osou $0x$ libovolný úhel ω v intervalu $(0, 2\pi)$, avšak z důvodů souměrnosti postačí uvažovati jen úhly ostré, obsažené ve čtvrtině $(0, \frac{1}{2}\pi)$ předešlého intervalu (při výpočtu případů příznivých učiníme ovšem podobnou redukci). Obor A je tedy definován nerovnostmi

$$o < x < 2na, \quad o < y < 2na, \quad o < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Integrační obor A_1 integrálu v čitateli je tvořen body (x, y, ω), které odpovídají případům příznivým (jehla protíná některou rovnoběžku). Souřadnice x středu jehly může míti jakoukoli hodnotu v mezích $(o, 2na)$; souřadnice y musí se lišiti od souřadnice $2\nu a$, má-li nastati průsek s ν-tou rovnoběžkou, nejvýše o b; poněvadž pak z důvodů souměrnosti uvažujeme jen o úhlech ω, obsažených v intervalu $(o, {}^1/_2\pi)$, máme podmínky

$$o < x < 2na, \quad 2\nu a < y < 2\nu a + b, \quad o < \omega < \arccos \frac{y - 2\nu a}{b}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots n - 1),$$

pro případ, že pořadnice y je větší než pořadnice proťaté rovnoběžky, a podobně podmínky

$$o < x < 2na, \quad 2\nu a - b < y < 2\nu a, \quad o < \omega < \arccos \frac{2\nu a - y}{b}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n)$$

pro případ, že pořadnice y jest menší než pořadnice proťaté rovnoběžky.

Představme si (x, y, ω) jakožto obyčejné pravoúhlé souřadnice bodu v prostoru a sledujme tvary oborů A a A_1. Obor A je pravoúhlý rovnoběžnostěn, jehož základnou je čtverec C a jehož výška rovná se ${}^1/_2\pi$. Rozdělme obor A v n^2 elementárních oborů jednak rovinami, které jsou kolmé k rovině čtverce C a procházejí každá jednou z daných rovnoběžek

$$y = 2\nu a \; (\nu = 1, 2, \ldots n - 1),$$

jednak rovinami kolmými k předešlým:

$$x = 2\nu a \; (\nu = 1, 2, \ldots n - 1).$$

Každý elementární obor má tedy za základnu čtverec o straně $2a$ a výšku rovnou $\frac{1}{2}\pi$. Rozdělme dále tyto elementární obory válcovými plochami

$$\omega = \arccos \frac{y - 2\nu a}{b} \quad (\nu = 0, 1, \ldots n - 1)$$

a

$$\omega = \arccos \frac{2\nu a - y}{b} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

jichž hrany jsou rovnoběžné s Ox. Tak se rozdělí každý elementární obor na dvě části. Jedna, kterou nazveme bílou, je tvořena body (x, y, ω) znázorňujícími případy, kdy jehla protíná jednu ze dvou sousedních rovnoběžek; druhá, kterou nazveme černou, je tvořena zbytkem oboru.

Obor A_1 je právě utvořen souborem všech částí bílých. Pravděpodobnost p, udaná Buffonovým vzorcem (42'), je rovna poměru $A_1 : A$; nezávisí na n.

Vzorec (46) ukazuje však, že pravděpodobnost p' závisí na počtu n rovnoběžek.

Užijme nyní věty dokázané v odst. 38. Poněvadž funkce φ nezávisí na proměnné ω, přichází v úvahu poznámka učiněná v odst. 38*b*. Užijeme-li značek zavedených v odst. 38., jest

$$\omega \doteq x, \qquad n = m, \qquad \frac{2b}{\pi a} = \lambda.$$

Roste-li n do nekonečna a zmenšuje-li se a zároveň tak, že ani $s = 2na$ ani $b : a$ se nemění, přechází vzorec (46) v

$$\lim_{n=\infty} p' = \frac{2b}{\pi a}. \tag{47}$$

Nechceme-li měniti původní předpoklady naší úlohy, nebudeme zvětšovati n do nekonečna; pravá strana rovnice (47), totožná s Buffonovým vzorcem, udává pak, je-li n dosti veliké, přibližnou hodnotu hledané pravděpodobnosti. Výsledek vyjádříme takto: *Za předpokladů I' a II', a je-li počet n rovnoběžek narýsovaných uvnitř čtverce C velmi veliký, udává výraz 2b : πa přibližnou hodnotu pravděpodobnosti, že jehla protne některou rovnoběžku.*

Poněvadž tedy pravá strana vzorce (47) udává hledanou pravděpodobnost jen přibližně, nemůžeme tvrditi, že by poměr $m' : n'$, plynoucí z pokusů (viz poznámku o experimentálním určení čísla π v odst. 35.) vyjadřoval ji tím přesněji, čím je počet n' pokusů větší (písmenem n' značíme úhrnný počet pokusů, písmenem m' pak počet případů, ve kterých jehla protne některou rovnoběžku). Jakmile připustíme, že funkce φ není konstantní v celém čtverci C, nemůžeme očekávati, že by se z výsledku pokusů dala odvoditi hodnota čísla π tím přesněji, čím větší by bylo n'.*)

*) Výsledky uvedené v odst. 38. a 39. uveřejnil jsem v práci nadepsané Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle (Rozpravy České Akademie II. Tř. R. 26., č. 13(1917). Později uveřejnil jsem francouzské zpracování: Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille (Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. 44, p. 126—136; 1920). Pan *M. Fréchet* doplnil moje úvahy v článku Remarque sur les probabilités continues (Bull. des sc. math., 2e série, t. 45, p. 87—88; 1921). Viz též knihu: *Fréchet-Halbwachs:* Le calcul des probabilités à la portée de tous (Paris, 1924; p. 43).

Kdyby φ bylo konstantní, mohli bychom ve vzorci (46) zlomek na pravé straně krátiti, takže pravděpodobnost p' stala by se totožnou s pravděpodobností p, definovanou vzorcem (42').

40. Valivý pohyb koule po vodorovné rovině. — Na povrchu koule o poloměru a je dán sférický obrazec S, omezený uzavřenou křivkou bez dvojného bodu. Kouli položíme na vodorovnou rovinu α tak, že z počátku se jí dotýká v bodě O_1. Pak udělíme kouli vodorovný náraz, takže se valí po rovině a zastaví se posléze vlivem tření v určité konečné poloze; budiž T_1 konečný bod dotyku s rovinou. Jest určiti pravděpodobnost, že bod T_1 (jakožto bod kulového povrchu) leží uvnitř obrazce S, za těchto předpokladů:

a) Počáteční poloha koule vůči rovině α jest předepsána.

b) Koule valí se po rovině bez klouzání a počáteční její rychlost nepřekročí určité meze, takže střed koule opíše úsečku ne delší než $2\pi na$ (koule otočí se nejvýše n-krát kolem vodorovného průměru). Směr úsečky může býti jakýkoli (ovšem vodorovný); n je veliké kladné číslo celé.

c) Hledaná pravděpodobnost p dá se vyjádřiti vzorcem

$$p = \frac{\iint\limits_{P} F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi}{\iint\limits_{\Pi} F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi}; \tag{48}$$

zde značí ϱ a φ polární souřadnice v rovině α s pólem v bodě O_1; $\varrho d\varrho d\varphi$ jest element plošného obsahu; $F(\varrho)$ je kladná funkce, jejíž derivace je menší než určitá konstanta K. Funkce ta měří hustotu pravděpodobnosti; vytkneme-li v poloze určené polárními souřadnicemi ϱ a φ element roviny, je pravděpodobnost, že bod T_1 nalézá se uvnitř toho elementu, úměrna jeho plošnému obsahu, koeficient úměrnosti závisí však toliko na ϱ a nikoli na φ. Písmeno P označuje obor případů příznivých, t. j. část roviny α utvořenou všemi body M_1, ve kterých může nastati dotyk koule s rovinou takový, že bod dotyku (na kouli) leží uvnitř obrazce S. Π značí vnitřek kruhu opsaného v rovině α kolem bodu O_1 poloměrem $2\pi na$.

Poznamenejme, že každý bod M_1 roviny α odpovídá jediné určité poloze koule; abychom kouli do té polohy přivedli, je nutno valiti ji z předepsané počáteční polohy tak, aby její bod dotyku s rovinou opsal úsečku O_1M_1.

Rozřešme úlohu ve speciálním případě, že S je pravidelný sférický čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou zároveň vrcholy krychle do koule vepsané. Sestrojme na kouli oblouky hlavních kružnic nad každou hranou vepsané krychle. Tak rozdělí se celý povrch koule v šest pravidelných sférických čtyřúhelníků o vnitřních úhlech $\frac{2}{3}\pi$. Pravděpodobnosti, že T_1 leží uvnitř prvého, druhého ... šestého čtyřúhelníka, označíme po řadě

$$p_{I},\ p_{II},\ p_{III},\ p_{IV},\ p_{V},\ p_{VI}.$$

Výpočet provedeme pro dvě počáteční polohy koule. První případ. — Buďte A, B, C, D, E, F, G, H vrcholy vepsané krychle a předpokládejme, že v počáteční poloze jsou stěny $ABCD$ a $EFGH$ vodorovné a hrany AE, BF, CG a DH svislé. Sférické čtyřúhelníky $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ a $EFGH$ označíme po řadě I, II, ... VI.

Předpokládejme, že v počáteční poloze dotýká se koule roviny α v bodě O_1, jenž splývá se středem O čtyřúhelníka I. Nechť se koule valí tak, že v konečné poloze dotýká se roviny α bodem A; budiž A_1 poloha příslušného bodu dotyku v α. Obdobně je definován bod B_1 atd.

Přímku O_1A_1 volíme za polární osu.

Když se koule valí, bod dotyku opisuje přímku d, procházející bodem O_1; geometrické místo těch bodů kulového povrchu, které postupně stávají se body dotyku s rovinou α, je hlavní kružnice k, jejíž rovina nechť svírá úhel φ s diagonální rovinou $ACGE$ krychle v počáteční poloze. Kružnice k prochází bodem O' protilehlým k O a protíná oblouky AB, EF, BH a DC v bodech, které po řadě označíme písmeny M, N, P a Q.

Ve sférickém trojúhelníku O_1MA jest v počáteční poloze koule

$$O_1\widehat{A}M = \frac{\pi}{3}, \quad A\widehat{O_1}M = \varphi, \quad \sin(\widehat{O_1A}) = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos(\widehat{O_1A}) = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Strana

$$\widehat{O_1M} = r$$

bude tedy určena rovnicemi

$$\cos(O_1\widehat{M}A) = -\cos\varphi\cos\frac{\pi}{3} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$$

a
$$\sin r : \sin (\widehat{O_1 A}) = \sin \frac{\pi}{3} : \sin (\widehat{O_1 M A});$$
z nich odvodíme, že
$$\sin r = \sqrt{\frac{2}{3 + \sin 2\varphi}}. \tag{49}$$

Když se koule valí po d, body M, N, P, Q stanou se postupně body dotyku koule s rovinou a to v místech M_1, N_1, P_1, Q_1, M_2, ... atd. Úhel mezi d a mezi přímkou O_1A_1 je roven φ. Obecně je
$$O_1 M_n = [2(n-1)\pi + r]\, a, \qquad O_1 N_n = [(2n-1)\pi - r]\, a$$
$$O_1 P_n = [(2n-1)\pi + r]\, a, \qquad O_1 Q_n = (2n\pi - r)\, a$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$
při čemž r jest ostrý úhel určený formulí (49).

Otáčí-li se přímka d v rovině α kolem O_1, opisují body M_1, N_1, ... M_2, ... křivky, kterými se rovina α dělí v nekonečně mnoho křivočarých čtyřúhelníků. Označíme je čísly I, II, ... Čtyřúhelníky označené v rovině číslem I, budou obsahovati body L_1 takové, že, dotýká-li se koule roviny v L_1, splývá určitý bod L sférického čtyřúhelníka I s L_1 atd. Čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ je konvexní, čtyřúhelník $A_2B_2C_2D_2$ je dvojnásobně souvislý a p.

Pravděpodobnosti p_I, p_{II}, ... počítají se podle vzorce (48). Podle předpokladu jest konečný bod dotyku T_1 v každém případě uvnitř kruhu Π opsaného poloměrem $2n\pi a$ kolem O_1. Plošný obsah toho kruhu je
$$\Pi = 4\pi^3 n^2 a^2.$$

Písmeno P ve formuli (48) značí souhrn rovinných čtyřúhelníků I nebo II ..., podle toho, počítáme-li p_I či p_{II} ... Funkce F rovná se nule vně kruhu Π.

Počítejme nejprve pravděpodobnosti p_I, p_{II}, ... za předpokladu, že
$$F(\varrho) \equiv 1;$$
pak teprve přejdeme k případu obecnému.

Budiž tedy $F \equiv 1$. Pravděpodobnost p_I bude rovna poměru
$$\frac{P}{\Pi},$$
kde P značí úhrnný plošný obsah všech rovinných čtyřúhel-

níků I. Abychom tento poměr vyčíslili, rozdělme Π soustřednými kružnicemi o poloměrech

$$2\pi a,\ 4\pi a,\ 6\pi a, \ldots 2(n-1)\pi a$$

a o středu O_1 v n dílů, jichž plošné obsahy označíme písmeny

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3, \ldots \Gamma_n;$$

patrně jest

$$\Gamma_m = \pi a^2 [(2m\pi)^2 - (\overline{2m-1}\,\pi)^2] = 4\pi^2 (2m-1) a^2.$$

Γ_1 je kruh o poloměru $2\pi a$; Γ_m $(m > 1)$ je mezikruží o poloměrech $2(m-1)\pi a$ a $2m\pi a$. Tu část mezikruží Γ_m, která je tvořena čtyřúhelníky I, nazveme C_m; je to obor skládající se ze dvou dvojnásobně souvislých částí. Kraje první části mají v polárních souřadnicích rovnice

$$\varrho = 2(m-1)\pi a,\quad \varrho = 2(m-1)\pi a + ra$$

a kraje druhé části rovnice

$$\varrho = 2m\pi a - ra,\quad \varrho = 2m\pi a;$$

snadno vypočteme, že plošný obsah oboru C_m je

$$c_m = 8(2m-1)\,\pi I a^2,$$

kde

$$I = \int_0^{\pi/2} r\, d\varphi. \tag{50}$$

Přibližná hodnota tohoto integrálu jest 1·319...

Hodnota poměru

$$\lambda = \frac{C_m}{\Gamma_m} = \frac{2I}{\pi^2},$$

jež nezávisí na m, rovná se přibližně 0·267... Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$p_I = \frac{P}{\Pi} = \frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n} = \lambda = 0{\cdot}267\ldots$$

Abychom ustanovili p_{VI}, označme písmenem C'_m plošný obsah části roviny omezené křivkami

$$\varrho = (2m-1)\pi a - ra \text{ a } \varrho = (2m-1)\pi a + ra.$$

Vychází

$$C'_m = 8(2m-1)\,\pi I a^2 = C_m,$$

a

$$p_{VI} = p_I = \frac{2I}{\pi^2} = 0{\cdot}267\ldots$$

Součet

$$p_I + p_{II} + \ldots + p_{VI}$$

je roven jednotce, tedy

$$p_{II} + p_{III} + p_{IV} + p_V = 1 - 2\,p_I = 0{\cdot}466\ldots$$

a, ježto tyto čtyři pravděpodobnosti jsou stejny

$$p_{II} = p_{III} = p_{IV} = p_V = \frac{1}{4} - \frac{I}{\pi^2} = 0{\cdot}114\ldots$$

Přejděme nyní k obecnému případu, kdy hustota pravděpodobnosti jest úměrná funkci $F_{(\varrho)}$ průvodiče ϱ. Pravděpodobnost p_I bude vyjádřena vzorcem (48), kterému dáme tvar

$$p_I = \frac{S'}{S},$$

kde

$$S' = \iint_P F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi, \qquad S = \iint_\Pi F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

Položme dále

$$S'_m = \iint_{C_m} F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi, \qquad S_m = \iint_{\Gamma_m} F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

a označme písmeny M a μ největší a nejmenší hodnotu funkce F uvnitř Γ_m. Ježto $C_m = \lambda\Gamma_m$, platí

$$S'_m > \lambda\,\mu\,\Gamma_m, \qquad \lambda\,S_m < \lambda\,M\,\Gamma_m$$

a tedy

$$\lambda\,S_m - S'_m < \lambda\,(M - \mu)\,\Gamma_m.$$

Napišme tuto nerovnost pro $m = 1, 2, \ldots n$ a poznamenejme, že

$$M - \mu < 2\pi a K.$$

Součet všech ploch Γ_m je roven Π, takže

$$\lambda S - S' < 2\pi\lambda a K\,\Pi, \tag{51}$$

kde $\Pi = 4\pi^3 n^2 a^2$. Z toho plyne, že formule

$$\lim_{n=\infty} p_I = \lim_{n=\infty} \frac{S'}{S} = \lambda,$$

platí v těchto dvou případech: 1. Konverguje-li pravá strana nerovnosti (51) k nule, nebo 2. je-li pravá strana nerovnosti (51) dále menší než určitá konstanta a rostou-li současně S a S' do nekonečna. První případ bude přibližně uskutečněn, bude-li poloměr koule a velmi malý nebo bude-li konstanta K velmi malá. Výsledek shrneme takto: *Předpokládejme, že* *v počáteční poloze dotýká se koule roviny v bodě O_1, jenž splývá se středem O sférického čtyřúhelníka I; konverguje-li druhá strana nerovnosti (51) k nule, nebo je-li stále menší než určitá konstanta, kdežto S a S' rostou do nekonečna, blíží se pravděpodobnosti p_I* a *p_{VI} mezním hodnotám*

$$\lim_{n=\infty} p_I = \lim_{n=\infty} p_{VI} = \frac{2J}{\pi^2}$$

a ostatní hodnotám

$$\lim_{n=\infty} p_{II} = \lim_{n=\infty} p_{III} = \lim_{n=\infty} p_{IV} = \lim_{n=\infty} p_V = \frac{1}{4} - \frac{J}{\pi^2},$$

kde J jest integrál ustanovený vzorci (50) a (49).

Druhý případ. — Předpokládejme nyní, že bod dotyku koule s rovinou α splývá v počáteční poloze s vrcholem A vepsané krychle. Výpočet pravděpodobností p_I, p_{II}, ... provede se podobně jako v případě předešlém a dojde se k těmto výsledkům. Položme

$$\sin r' = \frac{2}{5 - \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\varphi\right)}$$

$$J' = \int_0^{\frac{\pi}{3}} r'^2 \, d\varphi;$$

hodnotu úhlu r' je stanoviti jakožto funkci proměnné φ tak, aby v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ stále rostla, a aby se redukovala na $\frac{\pi}{2}$, když φ rovná se $\frac{\pi}{6}$. Dá se dokázati, že

$$\frac{J'}{\pi^2} = \frac{1}{6}.$$

Libovolná funkce $F(\varrho)$ (hustota pravděpodobnosti) zavede se jako dříve.

Je-li počáteční poloha koule taková, že se dotýká roviny α ve vrcholu A vepsané krychle, a připustíme-li jinak tytéž předpoklady jako dříve, jest $\frac{1}{6}$ společná limitní hodnota všech pravděpodobností p_I, p_{II}, ... p_{VI} pro případ, že n roste do nekonečna. —

Je zřejmo, že tato úloha je zcela obdobná úlohám o ruletě a o jehle, jež byly řešeny v předchozích odstavcích. Poincaréova metoda: zavésti libovolnou funkci jakožto hustotu pravděpodobnosti tak, že hledaná pravděpodobnost má hodnotu na té funkci nezávislou, když určitý parametr n roste do nekonečna, je velmi obecná. Dá se jí užíti všude, kde běží o pohyb tělesa, jehož konečná poloha má vyhověti daným podmínkám. S tohoto stanoviska patří úloha: vypočísti pravděpodobnost, že při hodu kostkou vyjde určité číslo, mezi úlohy o geometrických pravděpodobnostech. Výpočet pravděpodobnosti užitím Poincaréovy metody jest ovšem mnohem obtížnější v tomto případě než ve shora řešené úloze o kouli, poněvadž je těžko vzíti v počet pohyb, který kostka vykoná, než se ustálí v konečné poloze.*)

*) Srv. autorovo pojednání Sur la méthode des fonctions arbitraires dans le Calcul des probabilités, jež bude uveřejněno v Acta Mathematica.

O B S A H.