Kurs variačního počtu

M. A. LAVRENTJEV
L. A. LJUSTERNIK

KURS VARIAČNÍHO POČTU

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

1952

M. A. LAVRENTJEV
L. A. LJUSTERNIK

KURS VARIAČNÍHO POČTU

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

1952

KURS VARIAČNÍHO POČTU

M. A. LAVRENT'JEV a L. A. LJUSTERNIK

1952

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

PRAHA

Z ruského originálu Курс вариационного исчисления, který vydalo Gosudarstvennoje izdateľstvo techniko-teoretičeskoj literatury v Moskvě a Leningradě r. 1950, přeložil Dr Karel Winkelbauer. Obálku navrhl Luděk Anger, graficky upravil Miloš Hrbas.

PŘEDMLUVA

V tomto druhém vydání knihy jsme podstatně přepracovali výklad o úlohách s volnými konci a podali jsme nový výklad variační theorie Sturm-Liouvilleových rovnic. Vzhledem k požadavkům programu kursu variačního počtu jsme přidali kapitolu věnovanou úlohám na minimum a maximum, která speciálně obsahuje některé výsledky P. L. Čebyševa.

Mimo to jsme v kap. IX přidali nový paragraf, v němž je ukázána souvislost lineárních variačních úloh s integrálními rovnicemi.

Vyjadřujeme své díky profesoru A. I. Plesnerovi za cenné pokyny, jichž jsme použili při závěrečné redakci rukopisu.

Moskva, květen 1950.

Autoři

ELEMENTÁRNÍ ZPŮSOBY ŘEŠENÍ EXTREMÁLNÍCH ÚLOH

§ 1. Obecné pojmy.

Funkcionál. Základním předmětem studia klasické analysy je funkce. Ve variačním počtu se budeme zabývat studiem závislostí, kdy je hodnota závisle proměnné určena funkcí. Uvedeme nejjednodušší příklad takové závislosti.

Vyšetřujme délku libovolné křivky, která spojuje dva dané body A, B. Naše závisle proměnná — délka křivky — bude určena tvarem čáry, spojující body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, neboli, což je totéž, funkcí zobrazenou naší křivkou. Uvedenou závislost lze snadno vyjádřit v přehledném tvaru.

Budiž dána rovnice křivky spojující body A a B ve tvaru

$$y = y(x),$$

při čemž se souřadnice x mění v intervalu $x_0 \leqq x \leqq x_1$ a funkce $y(x)$ má v tomto intervalu spojitou derivaci $y'(x)$. Pak bude délka J křivky rovna

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Se změnou funkce $y(x)$ se bude měnit i křivka tuto funkci zobrazující a veličina J, t. j. délka křivky $y = y(x)$. Tedy J závisí na funkci $y(x)$; různým funkcím $y(x)$ odpovídají různé hodnoty J. Obecně, jsou-li číselné hodnoty některé veličiny J určeny volbou funkce $y(x)$, která patří do určité třídy funkcí, pak to zapíšeme takto:

$$J = J[y(x)]$$

a zavedeme následující definici:

Definice. *Budiž dána určitá třída funkcí $y(x)$. Řekneme, že $J[y(x)]$ je funkcionál definovaný pro funkce naší třídy, je-li každé funkci této třídy $y(x)$ přiřazeno určité číslo $J[y(x)]$.*

Třída funkcí $y(x)$, pro něž je funkcionál definován, se nazývá oborem funkcionálu.

Pokud zobrazujeme geometricky funkce jedné proměnné čarami, nazýváme jindy funkcionál pro ně definovaný také funkcí čáry.

Vraťme se k funkcionálu $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ a položme $x_0 = 0$, $x_1 = 1$; pak dostaneme pro $y(x) = x$, $y'(x) = 1$,

$$J[y(x)] = J[x] = \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}.$$

Je-li $y(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (řetězovka), pak

$$J\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x + e^{-x})'^2}{4}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Jako druhý příklad (ještě jednodušší) vezměme systém všech spojitých funkcí $y(x)$, definovaných na úsečce $x_0 \leqq x \leqq x_1$, a položme

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y(x)\, dx. \tag{2}$$

Pak je $J[y(x)]$ funkcionál definovaný pro funkce $y(x)$; každé funkci $y(x)$ odpovídá určitá hodnota $J[y(x)]$. Tento funkcionál vyjadřuje pro $y > 0$ geometricky obsah rovinného oboru, omezeného křivkou $y = y(x)$, osou Ox a pořadnicemi $x = x_0$, $x = x_1$.

Klademe-li v rovnosti (2) místo $y(x)$ konkretní funkce, budeme dostávat odpovídající hodnoty $J[y(x)]$. Položíme-li jako v předcházejícím příkladě $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, bude

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)\, dx.$$

Je-li nyní $y(x) = x$, pak

$$J[y(x)] = J[x] = \int_0^1 x\, dx = \tfrac{1}{2};$$

je-li $y(x) = x^2$, pak

$$J[y(x)] = J[x^2] = \int_0^1 x^2\, dx = \tfrac{1}{3};$$

je-li $y(x) = \frac{1}{x+1}$, pak

$$J\left[\frac{1}{x+1}\right] = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = [\lg(x+1)]_0^1 = \lg 2;$$

je-li $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pak

$$J\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Bylo by možno uvést řadu dalších příkladů funkcionálů.

Upozorňujeme čtenáře na to, že funkcionál (1) je definován na třídě funkcí, které mají spojitou derivaci, kdežto funkcionál (2) je definován na širší třídě funkcí spojitých.

Extrém funkcionálů. Už na samém počátku vzniku analysy nekonečně malých veličin spolu s úlohami o extrémech funkcí n proměnných se objevila celá řada úloh z geometrie, mechaniky a fysiky na vyhledání extrémů funkcionálů. Jako na nejjednodušší příklad lze upozornit na tuto úlohu: *mezi všemi rovinnými křivkami, spojujícími dva dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, najít tu, jejíž délka je nejmenší.*

Analyticky říká tato úloha tolik: mezi všemi funkcemi $y = y(x)$ takovými, že

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

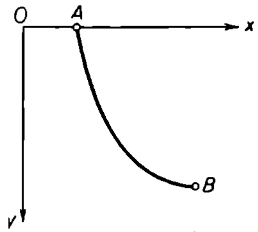
najít tu, pro niž

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x$$

nabývá nejmenší hodnoty.

Víme, že hledaná křivka, která dává minimum délky, je úsečka spojující body A a B, neboli, vyjádřeno analyticky: $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x$ nabývá nejmenší hodnoty, je-li $y(x) = y_0 + k(x - x_0)$, kde $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Historicky byla první úlohou, která vzbudila obecný zájem mezi matematiky, úloha o brachystochroně, kterou položil Ivan Bernoulli: *mezi všemi křivkami, spojujícími dva dané body A a B, najít tu, po níž se hmotný bod, pohybující se z bodu A působením tíže s počáteční rychlostí rovnou nule, dostane v nejkratší době do bodu B.*[1])



Obr. 1.

Proložme body A a B vertikální rovinu a omezme se na rovinné oblouky tyto body spojující. Za osu Ox vezměme horizontální přímku a osu Oy zvolme tak, aby směřovala vertikálně dolů (obr. 1). V tomto případě budou mít body A a B odpovídající souřadnice $(x_0, 0)$ a (x_1, y_1). Pohybuje-li se hmotný bod z A bez počáteční rychlosti, je jeho rychlost v s jeho pořadnicí y ve vztahu:

$$v^2 = 2gy,$$

kde g je gravitační zrychlení, neboli

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Budiž $y = y(x)$ rovnice křivky, po níž se pohybuje bod z A do B. Rychlost pohybu bodu je rovna

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

kde $\mathrm{d}t$ je elementem času. Z toho

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}. \tag{3}$$

Integrujeme-li vztah (3), obdržíme dobu T, potřebnou k proběhnutí dráhy od bodu A do bodu B po křivce $y = y(x)$:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}. \tag{3'}$$

Zřejmě je T funkcionál závislý na funkci $y(x)$. Chceme najít funkci

---

[1]) Přirozeně zde předpokládáme, že A ani B neleží na jedné vertikální přímce. Kdyby A a B ležely na jedné vertikální přímce, pak by byla řešením úlohy tato přímka.

$y(x)$ (neboli, což je totéž, křivku $y = y(x)$), pro niž T nabývá nejmenší hodnoty. Řešení této úlohy uvedeme v dalším paragrafu.

Úloha o brachystochroně je analyticky příbuzná jiné fysikální úloze: *v dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B; chceme určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z bodu A do bodu B.* Tento problém rovněž vede k úloze najít extrém funkcionálu na základě tak zvaného Fermatova principu: *ze všech křivek, spojujících body A a B, je trajektorie světelného paprsku čarou, po níž proběhne světlo z A do B za nejkratší dobu.*

Omezme se na případ roviny a zvolme za rovinu, v níž se světlo šíří, rovinu xOy. Buďte x_0, y_0 a x_1, y_1 souřadnice bodů A a B a budiž $y = y(x)$, $x_0 \leqq x \leqq x_1$, jedna z křivek, jež tyto body spojuje. Označme $v(x, y)$ rychlost světla v bodě (x, y). Opakujeme-li úvahu provedenou v předcházejícím příkladě, zjistíme, že doba T, za kterou světlo proběhne podél křivky $y = y(x)$ z A do B, je vyjádřena integrálem

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{v[x, y(x)]} \, dx. \tag{4}$$

Podle Fermatova principu vede úloha určit trajektorii světelného paprsku k úloze určit čáru, pro niž funkcionál T nabývá nejmenší hodnoty.

Předmět variačního počtu. Řešení jednotlivých úloh na stanovení minima a maxima funkcionálů vedlo k vytvoření nové matematické discipliny — variačního počtu, jehož předmětem je vyšetřování obecných method určování extrémů pro funkcionály. Shora uvedené příklady jsou typickými úlohami variačního počtu, čili krátce — variačními úlohami.

§ 2. Nejjednodušší úloha variačního počtu. Eulerova rovnice.

Formulace nejjednodušší úlohy variačního počtu. Naším nejbližším cílem je uvést methody řešení nejjednodušších úloh variačního počtu.

Podle analogie s kriterii existence extrémů funkcí jedné a několika proměnných se setkáváme zcela přirozeně s třemi hlavními problémy, které máme řešit:

I. Najít takové nutné podmínky, jež musí splňovat hledané funkce, aby bylo možno na jejich základě skutečně určit hledanou křivku, víme-li, že řešení existuje.

II. Najít dostatečně obecná kriteria pro existenci extrému.

III. Když již známe křivku, která splňuje základní nutnou podmínku, ustanovit kriteria, podle nichž by bylo možno soudit, udává-li tato křivka skutečně extrém, a je-li tomu tak, bude-li tento extrém maximem nebo minimem.

Připomínáme, že v úlohách, které se týkají konkretních aplikací, velmi často plyne existence extrému přímo z podstaty problému; z toho důvodu mají problémy první skupiny prvořadý význam. S těmito problémy začneme.

Budiž dána spojitá funkce $F(x, y, y')$, která má spojité parciální derivace do druhého řádu včetně podle všech tří argumentů x, y, y'. Nechť jsou kromě toho dány v rovině xOy dva body $A(a, b)$ a $B(a_1, b_1)$. Nejjednodušší úlohu variačního počtu, jak jsme ukázali výše, lze formulovat tímto způsobem: *mezi všemi křivkami, vyjádřenými rovnicemi*

$$y = y(x) \tag{5}$$

(*funkce $y(x)$ a její derivace $y'(x)$ jsou spojité v intervalu $a \leqq x \leqq a_1$*) *a jdoucími danými body A a B, určit tu, pro niž integrál*

$$J = \int_a^{a_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

nabývá největší nebo nejmenší hodnoty.

Eulerova rovnice. Pro danou úlohu dokázal po prvé Euler následující větu:

Věta I. *Nabývá-li integrál J svého extrému pro křivku $y = y(x)$, pak funkce $y = y(x)$ touto křivkou zobrazená vyhovuje diferenciální rovnici*

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0. \tag{7}$$

Než přejdeme k důkazu této věty, ukážeme její praktický význam.

Provedeme-li naznačené derivování podle x u druhého sčítance levé strany rovnice (7),[2]) obdržíme

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0. \tag{8}$$

Z toho vidíme, že není-li $F_{y'y'}$ rovno identicky nule, je diferenciální rovnice (7) druhého řádu a má tedy její obecný integrál tvar

$$y = f(x, \alpha, \beta), \tag{9}$$

kde α, β jsou libovolné konstanty. Je tudíž možno Eulerovu větu formulovat takto: *existuje-li křivka $y = y(x)$ dávající extrém, patří k soustavě křivek (9) závislé na dvou parametrech.* Z toho plyne, víme-li předem, že hledaná křivka existuje, že k jejímu faktickému určení zbývá zjistit hodnoty α a β. Avšak tyto hodnoty lze najít, použijeme-li další podmínky úlohy: hledaná křivka musí procházet dvěma danými body $A(a, b)$ a $B(a_1, b_1)$, t. j. neznámé α a β musí splňovat podmínky:

$$\left.\begin{aligned} b &= f(a, \alpha, \beta), \\ b_1 &= f(a_1, \alpha, \beta), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

z nichž se α a β stanoví.

Udává tedy Eulerova věta pro existenci extrému nutné podmínky, pomocí nichž lze v mnoha případech úlohu řešit.

Vzhledem k základnímu významu věty pro celou klasickou theorii i praxi variačního počtu uvedeme dvojí odvození této věty. Jedno odvození dostaneme, zobecníme-li postup, jehož užijeme při řešení konkretních úloh: považovat variační úlohu za mezný případ úlohy hledat extrémy funkcí několika proměnných. Tato methoda, historicky nejstarší,[3]) má tu velkou přednost, že bezprostředně spojuje úlohu variačního počtu se známou úlohou nalézt extrémy funkcí. Bohužel je třeba k přesnému provedení důkazů touto methodou už při nejjednodušší úloze použít pracných a jemných úvah; důkazy se stanou ještě složitějšími, přejdeme-li k obecnějším úlohám variačního počtu. Základní myšlenky takového důkazu hned uvedeme.

[2]) $F_{y'} = F_{y'}(x, y, y')$ je funkce tří argumentů x, y, y' a $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ jsou zároveň funkce proměnné x.

[3]) Vyjádřeno přesněji, je tato methoda úpravou těch starších method v moderní tvar.

Druhá methoda — Lagrangeova — využívá specifičnosti úloh variačního počtu a přimyká se bezprostředně k dalšímu rozvoji variačního počtu — k počtu funkcionálnímu. Tato methoda je v nynější době ve variačním počtu základní. Uvedeme ji později, při čemž důkaz provedeme s veškerou matematickou přesností.

Odvození Eulerovy rovnice. Seznámíme se s odvozením Eulerovy rovnice v obecném případě. Omezíme se přitom, jak jsme se zmínili výše, jen na hlavní myšlenku důkazu a odpustíme si všechny detaily.

Nechť tedy pro $y = y(x)$ nabývá integrál

$$J = \int_a^{a_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

maximální nebo minimální hodnoty. Vezměme soustavu polygonů Π_n s vrcholy (x_i, y_i) $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, kde $x_i = a + i\Delta x$,

$$\Delta x = \frac{a_1 - a}{n};\ y_0 = b,\ y_n = b_1,$$

při čemž $y_i = y(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ jsou různé pro různé polygony soustavy. Na systému polygonů Π_n definujme funkci

$$J_n = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, y'_i)\Delta x,$$

kde

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}.$$

J_n je funkce n proměnných $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Má-li $y(x)$ spojitou derivaci, je $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = J$.

Z členů součtu J_n závisí na y_i jenom členy

$$F(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1})\Delta x,\quad F(x_i, y_i, y'_i)\Delta x,$$

při čemž i-tý člen obsahuje y_i přímo i nepřímo v třetím argumentu y'_i, kdežto $(i - 1)$-tý jenom nepřímo v třetím argumentu

$$y'_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}.$$

Z toho

$$\frac{\partial J_n}{\partial y_i} = F_y(x_i, y_i, y'_i)\,\Delta x - F_{y'}(x_i, y_i, y'_i) + F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1}) =$$

$$= \left[F_y(x_i, y_i, y'_i) - \frac{\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)}{\Delta x}\right]\Delta x,$$

kde

$$\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i) = F_{y'}(x_i, y_i, y'_i) - F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1}).$$

Pro polygon Π_n, který minimalisuje J_n, máme

$$\frac{\partial J_n}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

neboli

$$F_y(x_i, y_i, y'_i) - \frac{\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)}{\Delta x} = 0. \tag{11}$$

Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce lze napsat rovnici (11) v tomto tvaru:

$$F_y(x_i, y_i, y'_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{y}'_i), \tag{12}$$

kde

$$\overline{x}_i = x_{i-1} + \Theta_1(x_i - x_{i-1}), \quad \overline{y}_i = y_{i-1} + \Theta_2(y_i - y_{i-1}),$$
$$\overline{y}'_i = y'_{i-1} + \Theta_3(y'_i - y'_{i-1}); \quad 0 < \Theta_k < 1.$$

Úlohu najít křivku $y = y(x)$ minimalisující nebo maximalisující integrál J znovu považujeme za limitní případ úlohy určit polygon vedoucí k extrému součtu J_n při $n \to \infty$. Přejdeme-li v rovnici (11) k limitě, dostaneme vzhledem k vztahu (12):

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0.$$

Tím jsme dostali Eulerovu rovnici pro křivku $y = y(x)$, pro kterou J nabývá extrému.

Variace. Víme, že základní methodou v theorii extrémů funkcí n proměnných bylo, že se našel diferenciál funkce, t. j. hlavní lineární část přírůstku, který pak musel být v bodech extrému identicky roven nule. Funkcionál

$$J = \int_a^{a_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

jsme vyšetřovali jako limitu funkce polygonu

$$J_n = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, y_i')\,\Delta x.$$

Máme

$$\mathrm{d}J_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial J_n}{\partial y_i}\,\delta y_i,$$

kde δy_i jsou nekonečně malé přírůstky pořadnic; tedy

$$\mathrm{d}J_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left[F_y(x_i, y_i, y_i') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{y_i'}) \right] \delta y_i\,\Delta x. \tag{13}$$

Předpokládejme, že pro n konvergující k nekonečnu součet J_n konverguje k integrálu J a součet v pravé části (13) k integrálu

$$\int_a^{a_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \right) \delta y\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Výraz (14) pro funkcionál J je obdobou úplného diferenciálu. Nazývá se *variací* funkcionálu. Níže uvidíme, že variace je v jistém smyslu hlavní lineární částí přírůstku funkcionálu a že Eulerova rovnice je podmínkou toho, aby se identicky rovnala nule.

Případ, kdy F nezávisí na y. V tomto případě obdržíme z Eulerovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0,$$

a z toho

$$F_{y'}(x, y') = \text{const}. \tag{15}$$

Připomínáme ještě, že z rovnice (15) lze určit y' jako funkci závislou jenom na x. Lze tedy říci, že v případě námi uvedeném můžeme vyjádřit řešení Eulerovy rovnice kvadraturami.

Příklad. Mezi všemi křivkami na kulové ploše, spojujícími její dva dané body, najít křivku nejkratší délky.

Označíme Θ a φ zeměpisnou délku a šířku bodu na kulové ploše. Budiž křivka dána rovnicí $\Theta = \Theta(\varphi)$. Délka oblouku γ na kulové ploše je rovna

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_\gamma \sqrt{\mathrm{d}\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\Theta^2} = \int_\gamma \sqrt{1 + \cos^2\varphi\,\Theta'^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Výraz za integračním znamením neobsahuje Θ. Proto v našem případě má Eulerova rovnice integrál

$$F_{\Theta'} = C \quad (\text{kde } F = \sqrt{1 + \cos^2\varphi\,\Theta'^2}),$$

neboli

$$\frac{d\Theta}{d\varphi} = \Theta' = \frac{C}{\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi - C^2}} = \frac{C}{\cos^2\varphi\sqrt{(1 - C^2) - C^2\,\mathrm{tg}^2\varphi}} =$$
$$= \frac{d\,\mathrm{tg}\varphi}{d\varphi}\,\frac{C}{\sqrt{(1 - C^2) - C^2\,\mathrm{tg}^2\varphi}}.$$

Z toho

$$\Theta + C_2 = \arcsin(C_1\,\mathrm{tg}\varphi), \text{ kde } C_1 = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}},$$

neboli

$$C_1\,\mathrm{tg}\varphi = \sin(\Theta + C_2), \quad \mathrm{tg}\varphi = \alpha\sin\Theta + \beta\cos\Theta \tag{16}$$
$$\left(\alpha = \frac{1}{C_1}\cos C_2, \quad \beta = \frac{1}{C_1}\sin C_2\right).$$

Přejdeme od sférických souřadnic ke kartézským:

$$x = r\cos\Theta, \; y = r\sin\Theta, \; z = r\,\mathrm{tg}\varphi \;\; (r = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Rovnice (16) nabude tvaru

$$z = \alpha x + \beta y. \tag{16'}$$

Výsledná rovnice (16′) je rovnicí roviny, která prochází středem kulové plochy a vytíná na ní hlavní kružnici. Z toho plyne, že nejkratší čarou je oblouk hlavní kružnice.

Případ, kdy *F* nezávisí na *x*. Rozebereme ještě jeden zvláštní případ, kdy integrovaná funkce $F(x, y, y')$ nezávisí explicitně na x: najdeme podmínku, kterou musí splňovat křivka $y = y(x)$, pro kterou integrál

$$J = \int_a^{a_1} F(y, y')\,dx$$

nabývá extremální hodnoty.

K řešení dané úlohy provedeme záměnu proměnných tak, že y budeme považovat za nezávisle proměnnou a x za funkci proměnné y, kterou máme určit. V tom případě vede naše úloha k úloze hledat extremální křivku pro integrál

$$J = \int_b^{b_1} F\left(y, \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dx}{dy}\,dy,$$

který, položíme-li $x' = \frac{dx}{dy}$, $\Phi(y, x') = x'F\left(y, \frac{1}{x'}\right)$, lze přepsat takto:

$$J = \int_b^{b_1} \Phi\,(y, x')\,dy.$$

To je případ, kdy neznámá funkce $x = x(y)$ není v integrované funkci explicitně obsažena. Musí tedy hledaná křivka vyhovovat rovnici

$$\Phi_{x'}(y, x') = C.$$

Přejdeme-li k funkci F, obdržíme $\left(\text{vezmeme-li v úvahu, že } y' = \frac{1}{x'}\right)$

$$\Phi_{x'} = x'F_{y'}\,.\left(-\frac{1}{x'^2}\right) + F = F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C.$$

To je již hledaná diferenciální rovnice k určení neznámé funkce $y(x)$. Eulerovu rovnici dostaneme, derivujeme-li obě části rovnice podle x. Rovnice

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C \tag{17}$$

neobsahuje x, a proto ji lze integrovat kvadraturami. Tedy i v tomto případě můžeme vyjádřit řešení Eulerovy rovnice kvadraturami.

Jako příklad může sloužit integrál (4). Čtenář zjistí, že v tomto případě rovnice (17) přejde v rovnici

$$v(y)\sqrt{1 + y'^2} = k.$$

Jestliže F nezávisí ani na y, ani na x, t. j. $F = F(y')$, pak rovnice (15) přejde v rovnici

$$F'(y') = \text{const},$$

z čehož $y' = \text{const} = k$, a je tedy $y = kx + b$ — integrální křivky Eulerovy rovnice jsou přímky. Na příklad v úloze o nejkratší vzdálenosti dvou bodů $F \equiv \sqrt{1 + y'^2}$; čára minimalisující integrál (1) je úsečka.

Singulární případ. Není-li $F_{y'y'}$ rovno identicky nule, pak je Eulerova rovnice rovnicí druhého řádu a její obecný integrál obsahuje dvě libovolné konstanty, které vhodně zvoleny určují obecně hledanou extremální křivku. Vyšetřme nyní případ, když je

$$F_{y'y'} \equiv 0.$$

V tomto případě integrovaná funkce bude zřejmě lineární funkcí proměnné y':

$$F = M(x, y) + y'N(x, y). \tag{18}$$

Eulerova rovnice nabude tvaru

$$\frac{\partial M}{\partial y} + y' \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} N = 0,$$

neboli po zjednodušení

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{19}$$

Není-li tomuto vztahu vyhověno identicky, pak tento vztah definuje v rovině zcela určitou křivku, která v obecném případě nebude procházet dvěma předem danými body A a B — námi formulovaná úloha variačního počtu není obecně řešitelná.

V jednotlivých případech může být rovnice (19) řešením úlohy najít extrém integrálu

$$J = \int_a^{a_1} (M + Ny')\,\mathrm{d}x.$$

Na příklad pro integrál

$$J = \int_0^1 \{y' \sin \pi y - (x + y)^2\}\,\mathrm{d}x$$

vypadá rovnice (19)

$$-2(y + x) = 0.$$

Podél této křivky nabývá integrál J hodnoty $\frac{2}{\pi}$. Není těžké dokázat, že je to maximální hodnota integrálu. Vskutku

$$J \leqslant \int_0^1 y' \sin \pi y\,\mathrm{d}x = \int_{y(0)}^{y(1)} \sin \pi y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\,[\cos \pi y(0) - \cos \pi y(1)] \leqslant \frac{2}{\pi}.$$

Uveďme zároveň, že již pro integrál

$$J = \int_0^1 \{y' \sin \alpha y - (x + y)^2\}\,\mathrm{d}x \quad (0 < |\alpha| < \pi),$$

pro který má rovnice (19) tvar

$$y = -x$$

jako dříve, nedostaneme ani maximum ani minimum. Neboť

$$J(y) = \int_{y(0)}^{y(1)} \sin\alpha y \, dy - \int_0^1 (x + y)^2 \, dx = \frac{1}{\alpha} [\cos\alpha y(0) - \cos\alpha y(1)] - \int_0^1 (x + y)^2 \, dx,$$

a proto

$$J(-x) = \frac{1}{\alpha} [1 - \cos\alpha].$$

Položme nyní $y = (-1 + k)x$, kde k je libovolná konstanta; v tom případě

$$J[(-1 + k)x] = \frac{1}{\alpha} [1 - \cos\alpha(k - 1)] - \frac{k^2}{3} =$$

$$= J(-x) + \frac{1}{\alpha} [\cos\alpha - \cos\alpha(k - 1)] - \frac{k^2}{3}.$$

Z toho plyne, že rozdíl

$$J[(-1 + k)x] - J[-x] = \frac{2}{\alpha} \sin\frac{\alpha k}{2} \sin\left(\frac{\alpha k}{2} - \alpha\right) - \frac{k^2}{3}$$

změní pro dostatečně malé k znaménko při změně znaménka k (pro $k \to 0$ je pravá strana této rovnosti veličina ekvivalentní s $-k\sin\alpha$, jelikož podle předpokladu je α různé od 0 a π). Nemůže tedy $J(-x)$ být ani maximem ani minimem funkcionálu $J(y)$.

Předpokládali jsme, že vztah (19) není identicky splněn; předpokládejme nyní, že (19) platí identicky. V tomto případě integrovaný výraz $(M + Ny')\,dx = M\,dx + N\,dy$ je úplný diferenciál — hodnota integrálu závisí jenom na souřadnicích počátečního a koncového bodu křivky $y = y(x)$ a nezávisí na integrační cestě — úloha variačního počtu nemá smyslu.

§ 3. Elementární řešení některých variačních úloh.

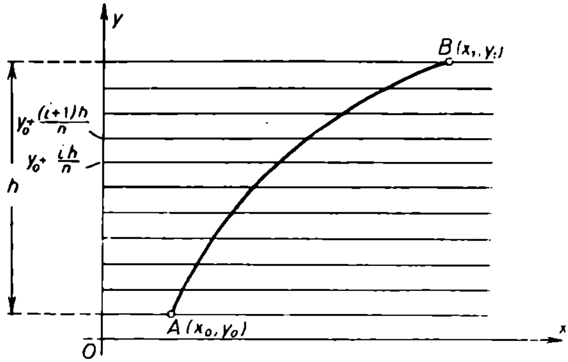
Šíření světla. Řešme úlohu formulovanou v prvním paragrafu o trajektorii světelného paprsku, když se světlo šíří v rovině xOy, při čemž světelný paprsek probíhá z bodu $A(x_0, y_0)$ do bodu $B(x_1, y_1)$. Omezme se na případ, kdy rychlost v spojitě závisí toliko na y: $v = v(y)$. Označme S rovinné prostředí, v němž se světlo šíří. Sestrojme v rovině xOy horizontální pás šířky $y_1 - y_0 = h$:

$$y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + h = y_1; \tag{20}$$

tento pás je ohraničen přímkami rovnoběžnými s osou Ox, které procházejí body A a B. Rozdělme pak pás (20) přímkami

$$y = y_0 + i\,\frac{h}{n}\ (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

na n horizontálních pásků (obr. 2):



Obr. 2.

$$y_0 + \frac{ih}{n} \leqslant y \leqslant y_0 + \frac{(i + 1)h}{n}\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1). \qquad (20')$$

Mysleme si nahrazeno prostředí S se spojitou změnou rychlosti světla prostředím S_n, v němž se mění rychlost světla po skocích, a to: uvnitř i-tého pásku (20′) ($i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$) budeme považovat rychlost světla v_i za konstantní a rovnou

$$v_i = v\left(y_0 + \frac{ih}{n}\right).$$

Řešme nyní úlohu pro prostředí S_n.

Tato úloha je úlohou na hledání minima funkce ($n - 1$) proměnných. Vskutku podle předpokladu o konstantnosti rychlosti světla uvnitř každého z pásů (20′) trajektorie světelného paprsku, jdoucího z A do B, bude polygonem, jehož vrcholy leží na přímkách $y = y_0 + \frac{ih}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Označíme-li a_i úsečku i-tého vrcholu tohoto polygonu, odpovídající pořadnici $y_0 + \frac{ih}{n}$, dostaneme pro dobu T_n, za niž světlo proběhne po polygonu, výraz

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{v_i} \sqrt{(a_{i+1} - a_i)^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}. \tag{21}$$

Podle Fermatova principu musí světlo dojít z A do B v nejkratší době, proto musí být úsečky $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ jednotlivých vrcholů polygonu zvoleny tak, aby výraz (21) nabýval svého minima. A to je úloha vyhledat extrém funkce $(n - 1)$ proměnných. K řešení je nutno položit

$$\frac{\partial T_n}{\partial a_i} = 0 \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1). \tag{22}$$

Transformujme tyto rovnice tak, že označíme úhel, který svírá i-tá strana polygonu s osou Ox, znakem φ_i. V tom případě dostaneme

$$\frac{\partial T_n}{\partial a_i} = - \frac{a_{i+1} - a_i}{v_i \sqrt{(a_{i+1} - a_i)^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}} +$$

$$+ \frac{a_i - a_{i-1}}{v_{i-1} \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}} = - \frac{\cos\varphi_i}{v_i} + \frac{\cos\varphi_{i-1}}{v_{i-1}} = 0,$$

neboli

$$\frac{\cos\varphi_{i-1}}{v_{i-1}} = \frac{\cos\varphi_i}{v_i} = \frac{1}{k}, \tag{23}$$

kde k nezávisí na i.

Budeme nyní vyšetřovat úlohu o šíření světla v prostředí S jako mezný případ úlohy o šíření světla v prostředí S_n při n neomezeně rostoucím. Tím přejdeme od rozdělení indexu lomu prostředí a rychlostí světla po skocích k jejich spojitému rozdělení; polygonální trajektorie přejdou v křivočaré, jež budou vyjádřeny rovnicemi $y = y(x)$; doba T pohybu světla bude vyjádřena v limitě místo součtu (21) integrálem

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x}{v(y)} = \lim_{n \to \infty} T_n.$$

Lze dokázat, že při tomto limitním přechodu přejde polygonální trajektorie prostředí S_n minimalisující T_n v křivočarou trajektorii prostředí

S minimalisující T a zároveň směry stran polygonálních trajektorií přejdou ve směry tečen ke křivočaré trajektorii. V tom případě podmínka (23) minima pro T_n přejde v podmínku minima pro T:

$$\frac{\cos\varphi}{v(y)} = \frac{1}{k} = \text{const}, \tag{23'}$$

při čemž je-li $y = y(x)$ rovnice limitní trajektorie, pak

$$\operatorname{tg}\varphi = y', \text{ tedy } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Tudíž rovnice (23′) přejde v diferenciální rovnici:

$$v(y)\sqrt{1 + y'^2} = k, \tag{24}$$

kterou jsme již dostali dříve.

To je rovnice se separovanými proměnnými; její obecný integrál bude mít tvar

$$x = \int \frac{v\,\mathrm{d}y}{\sqrt{k^2 - v^2}} + C, \tag{24'}$$

kde C je integrační konstanta.

Z toho soudíme, že v daném prostředí náleží trajektorie světelného paprsku vždy k dvojparametrové soustavě křivek (24′) (parametry: C a k); z každého bodu $M(x_0, y_0)$ roviny vychází svazek paprsků

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{v\,\mathrm{d}y}{\sqrt{k^2 - v^2}}.$$

Rovnice trajektorie tohoto paprsku závisí na jednom parametru k, který lze najít, jestliže známe buď směr paprsku v uvedeném bodě nebo jestliže známe ještě jeden bod, jímž paprsek prochází.

Ukážeme jeden zvláštní případ, kdy řešení lze provést do konce. Předpokládejme, že rychlost šíření světla je úměrná pořadnici:

$$v = \alpha y, \ \alpha > 0.$$

V tomto případě nabude rovnice soustavy trajektorií paprsku tvaru

$$x = \int \frac{\alpha y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 y^2}} + C$$

neboli po integraci a úpravě:

$$(x - C)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 = r^2.$$

Jsou tedy v uvedeném případě trajektorie paprsku oblouky kružnic se středy na ose Ox. Každými dvěma body prochází jediná trajektorie.

Úloha o brachystochroně. Použijeme shora dosaženého výsledku rovněž k řešení úlohy o brachystochroně (viz str. 8).

Proložme body A a B vertikální rovinu a opatřme ji pravoúhlou soustavou souřadnic; počátek souřadnic umístíme v bodě A a osu Oy položíme tak, aby směřovala vertikálně dolů.

Buďte (a, b) souřadnice bodu B, g gravitační zrychlení. Doba T, kterou potřebuje hmotný bod, aby spadl z A do B, bude vyjádřena integrálem

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} \mathrm{d}x$$

(viz § 1, formule (3′)). Naše úloha vede k hledání křivky, podél níž integrál T nabývá nejmenší hodnoty.

Vzhledem k tomu, co bylo řečeno, musí hledaná křivka vyhovovat rovnici (24). Dosadíme-li do této rovnice za $v(y) = \sqrt{2gy}$, dostaneme

$$\sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1 + y'^2} = k,$$

neboli

$$y = \frac{k_1}{1 + y'^2} \left(k_1 = \frac{k^2}{2g}\right). \tag{25}$$

K integrování této poslední rovnice bylo by možno použít formule (24′), avšak bude vhodnější provést integraci přímo tím, že zavedeme novou proměnnou substitucí

$$y' = \operatorname{tg}\varphi. \tag{26}$$

Rovnice (25) přejde po substituci v rovnici:

$$y = \frac{k_1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = k_1 \cos^2\varphi = \frac{k_1}{2} (1 + \cos 2\varphi). \tag{27}$$

Derivujeme-li ji podle x, najdeme

$$y' = - k_1 \sin 2\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \tag{28}$$

t. j.

$$\mathrm{tg}\varphi = -2k_1 \cos\varphi \sin\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x},$$

neboli

$$\cos^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = -\frac{\mathrm{d}x}{2k_1}.$$

Integrujeme-li poslední rovnost, najdeme obecný integrál rovnice (25) v parametrickém tvaru:

$$x = -\frac{k_1}{2}(2p + \sin 2\varphi) + C_1,$$

$$y = \frac{k_1}{2}(1 + \cos 2\varphi).$$

Zavedeme nový parametr Θ, položíme-li $2\varphi = \pi - \Theta$. Potom rovnice soustavy nabudou tvaru

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\Theta - \sin\Theta) + C, \\ y &= r(1 - \cos\Theta), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

kde r a C jsou libovolné konstanty. Je to tedy soustava cykloid, vytvořených kotálením kružnice poloměru r po reálné ose. Body vratu budou body reálné osy s úsečkami

$$x = C \pm 2n\pi r.$$

V našem případě $C = 0$, jelikož podle podmínky úlohy prochází křivka počátkem souřadnic. Neznámé r se určí z podmínky, že křivka prochází bodem B.

Probraná úloha umožňuje jednoduché, ale zajímavé zobecnění. Předpokládejme, že hmotný bod v uvedené úloze má v počátečním okamžiku určitou počáteční rychlost v_0. V tomto případě rychlost v bodu bude v libovolném okamžiku rovna

$$v^2 = 2g(y + y_0),$$

kde

$$y_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Úloha o čáře nejrychlejšího sestupu se převede na úlohu nalézt čáru, podél níž integrál

$$T^* = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y + y_0)}} \, \mathrm{d}x$$

nabývá nejmenší hodnoty. Integrál T^* se převede na integrál T záměnou proměnné

$$\eta = y + y_0.$$

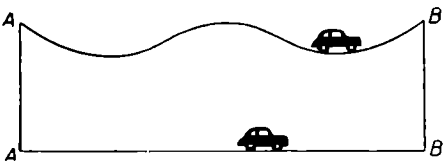
Z toho soudíme, že hledaná čára bude obsažena mezi cykloidami

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\Theta - \sin\Theta) + C, \\ y &= r(1 - \cos\Theta) - y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (29')$$

Obr. 3.

Cykloida (29′) se dostane kotálením kružnice poloměru r po přímce $y = -y_0$. Pro libovolné pevné y_0 se konstanty r a C určí z podmínky, že křivka prochází body A a B.

Omezíme se na zvláštní případ, kdy body A a B leží na ose Ox. Pro $y_0 = 0$ bude hledaná křivka úplnou cykloidou (obr. 3). Křivka se bude protínat s osou Ox v pravém úhlu: s růstem počáteční rychlosti v_0, a tedy i y_0, bude se úhel, v němž se protne křivka s osou souřadnic x, zmenšovat, křivka se stále méně a méně bude odchylovat od úsečky AB a pro $v_0 \to \infty$ přejde naše křivka v úsečku AB.



Obr. 4.

Z uvedené úlohy plyne následující, na první pohled paradoxní fakt: z bodu A do bodu B při jednom a témže vydání za pohonné látky lze v některých případech dojet rychleji po kopcovité cestě než po cestě rovné (obr. 4).

Maupertuis-Eulerův princip. Řešením úlohy z optiky o tvaru trajektorie světelného paprsku v prostředí s proměnnou rychlostí šíření světla řešili jsme také úlohu z mechaniky o čáře nejrychlejšího pádu. Takovou analogii mezi úlohami z optiky a mechaniky můžeme zjistit u velmi širokého okruhu úloh. V mechanice byla objevena obdoba optického principu Fermatova Maupertuisem a Eulerem a dostal název Maupertuis-Eulerův princip. Omezíme se na podstatu tohoto principu.

Vyšetřujme pohyb volného hmotného bodu M o hmotě $m = 1$ v rovinném silovém poli s daným potenciálem $U(x, y)$. Za těchto podmínek půjde podle obecných zákonů mechaniky zrychlení našeho bodu vždy ve směru normál k ekvipotenciálním čarám

$$U = C \quad (C \text{ je konstanta}),$$

a velikost rychlosti v bude rovna

$$v = \sqrt{2U + h},$$

kde h je konstanta pro každý pohyb. Označíme φ úhel, který svírá trajektorie s příslušnou ekvipotenciální čarou.

Z připomenuté vlastnosti zrychlení plyne,[4]) že rovnice trajektorie pohybujícího se bodu bude souhlasit s Eulerovou rovnicí pro funkcionál

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2U + h} \, . \, \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x.$$

Proto trajektorie bodu M při pohybu rychlostí $v = \sqrt{2U + h}$ souhlasí s trajektorií světelného paprsku pohybujícího se rychlostí

$$v_1 = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{2U + h}}.$$

Jelikož světelný paprsek při rychlosti světla $v_1 = \frac{1}{v}$ realisuje extrém integrálu

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{v_1} = \int \frac{\sqrt{1 + y^{2\prime}} \, \mathrm{d}x}{v_1}, \tag{30}$$

je pro trajektorii pohybujícího se bodu realisován extrém integrálu

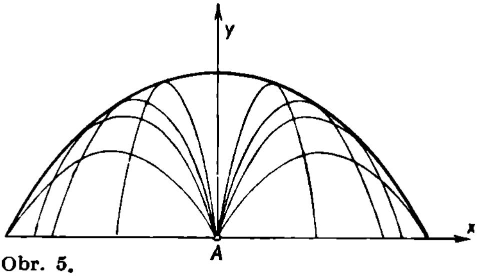
$$\int v \mathrm{d}s = \int \sqrt{2u + h} \, \mathrm{d}s. \tag{31}$$

Integrál $\int v \mathrm{d}s$ podél trajektorie se nazývá *účinkem.*

Obdrželi jsme variační princip Maupertuis-Eulerův: účinek, t. j. integrál $\int v \, \mathrm{d}s$, podél čáry spojující dva dané body nabývá extrému na trajektorii bodu M.

Takovým způsobem se převede mechanická úloha určit trajektorii pohybu bodu na úlohu variačního počtu.

Analogie mezi mechanikou a optikou. Analogie mezi principem Fermatovým a Maupertuisovým byla dávno zjištěna. Hamilton jí použil k vytvoření své theorie rovnic mechaniky, o níž se zmíníme v dalším. V současné fysice dala tato analogie počátek k vytvoření tak zvané vlnové mechaniky.



Obr. 5.

Pomocí této opticko-mechanické analogie můžeme, jestliže známe trajektorii některého mechanického pohybu o rychlosti $\sqrt{2U + h}$, obdržet trajektorii světelného paprsku, pohybujícího se rychlostí $\frac{1}{\sqrt{2U + h}}$, a obráceně. Na příklad:

[4]) To bude dokázáno v kapitole VI.

v gravitačním poli se pohybuje bod, který měl v počátečním okamžiku rychlost v_0, po parabole (obr. 5) rychlostí

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}, \tag{32}$$

kde g je gravitační zrychlení, y pořadnice bodu (horizontální přímka procházející počáteční polohou bodu je vzata za osu Ox). Z počátečního bodu A vychází svazek parabolických trajektorií, obalených rovněž parabolou (ochranná parabola). Je-li nyní rychlost světla v prostředí vyjádřena formulí

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}, \tag{33}$$

pak paprsky, vycházející z počátku souřadnic, budou mít podle mechanicko-optické analogie tvar parabol, obalených zase ochrannou parabolou.

V této kapitole uvedené úlohy o brachystochroně, o šíření světla, o isoperimetrickém problému byly na konci 17. století a na začátku 18. století těmi zkušebními kameny, na nichž se tvořily a zkoušely nové methody matematické analysy.

Řešením úlohy o brachystochroně, kterou položil I. Bernoulli v r. 1696, se zabývali bratři I. a J. Bernoulliové, Newton, Leibniz, l'Hospital.

Leibniz byl první, kdo při řešení úlohy o brachystochroně přešel od vyšetřování integrační křivky k vyšetřování mnohoúhelníka vepsaného do této křivky a tím nahradil variační úlohu úlohou na obyčejný extrém.

Téhož postupu později použili i při řešení jiných úloh bratři Bernoulliové, avšak byl to teprve člen petrohradské akademie L. Euler, který vytvořil z tohoto postupu, používaného na jednotlivé případy, methodu, když přešel od řešení jednotlivých zvláštních úloh k obecnému problému, jak najít extrém funkcionálu neboli, jak psal Euler, funkce čáry.

Pomocí své methody (viz § 2) převedl Euler shora uvedený problém na řešení tak zvané Eulerovy diferenciální rovnice, vyšetřil velký počet příkladů, na nichž demonstroval účinnost jím vytvořené theorie.

Limitní přechod k diferenciálním rovnicím nemohl být v Eulerově době matematicky přesně proveden a také Eulerovy úvahy neměly onu přesvědčivost, na kterou si zvykla další pokolení matematiků, kteří podali (viz kap. II) obecně platný a na konečných diferencích nezávislý důkaz Eulerových diferenciálních rovnic a celé další theorie.

Avšak Eulerova methoda konečných diferencí se znovuzrodila a zdokonalila v třicátých letech našeho století, hlavně v pracích sovětských matematiků.[5])

§ 4. Aplikace.

Úloha o minimální rotační ploše. *Mezi všemi křivkami*

$$y = y(x)$$

($y(x)$ i $y'(x)$ jsou spojité), jejichž koncovými body jsou dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, chceme určit křivku, která při svém otáčení kolem osy Ox vytvoří plochu minimálního obsahu.

Tato úloha je zvláštním případem obecné úlohy nalézt minimální plochu, která prochází danou křivkou nebo danou soustavou křivek.

Označme $y = y(x)$ libovolnou křivku splňující zmíněné předpoklady. Jak známo, je obsah S plochy, vytvořené otáčením této čáry kolem osy Ox, vyjádřen integrálem

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Ježto integrovaná funkce zřejmě nezávisí explicitně na x, bude řešení Eulerovy rovnice naší úlohy vyjádřeno kvadraturami. První integrál bude:

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1 + y'^2} - y'y\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \alpha,$$

kde α je libovolná konstanta, neboli po zjednodušení

$$y = \alpha\sqrt{1 + y'^2}. \tag{34}$$

Abychom zkrátili výklad o integrování této rovnice, použijeme umělého obratu; zavedeme novou proměnnou φ:

$$y' = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = \operatorname{sh}\varphi.$$

Dosadíme-li výraz pro y' do rovnice (34), obdržíme

$$y = \alpha\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\varphi} = \alpha \operatorname{ch}\varphi. \tag{35}$$

[5]) Viz sborník „Matematika v SSSR za XV let“ a „Matematika v SSSR za XXX let“.

Tím jsme vyjádřili y pomocí φ. Budeme se snažit vyjádřit rovněž x pomocí φ. Zderivujeme proto podle x rovnost (35):

$$y' = \alpha \operatorname{sh}\varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

Z podmínky $y' = \operatorname{sh}\varphi$ obdržíme

$$\alpha \frac{d\varphi}{dx} = 1.$$

Z toho

$$x = \alpha\varphi + \beta,$$

kde β je nová libovolná konstanta. Tím nabude obecný integrál Eulerovy rovnice v parametrickém vyjádření tvaru:

$$x = \alpha\varphi + \beta,$$
$$y = \alpha \operatorname{ch}\varphi,$$

neboli

$$y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{\alpha}. \tag{36}$$

Rovnice (36) ukazuje, že se minima, pokud existuje, dosáhne pro křivku, která vznikne z řetězovky

$$y = \operatorname{ch}x$$

homothetií se středem v počátku souřadnic (α je poměr homothetie) a posunutím ve směru osy Ox (β je velikost posunutí).

Pohyb planet. *Vyšetřujme soustavu dvou hmotných bodů, které na sebe působí podle Newtonova gravitačního zákona. Chceme, považujíce jeden bod za pevný, zkoumat pohyb volného bodu.*

Při přechodu k polárním souřadnicím (r, φ) vyjádříme potenciál gravitace podle Newtonova zákona ve tvaru $\frac{\mu}{r}$ (μ je konstanta). Označíme v_0 počáteční rychlost a r_0 počáteční průvodič pohybujícího se bodu. V tom případě je

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r_0},$$

neboli

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + h\right), \tag{37}$$

kde

$$h = \frac{v_0^2}{\mu} - \frac{2}{r_0}.$$

Podle Maupertuis-Eulerova principu je dráha vyšetřovaného pohybu extremála integrálu

$$\int \sqrt{\frac{2}{r} + h}\, \mathrm{d}s = \int \sqrt{\frac{2}{r} + h}\,.\, \sqrt{r^2 + r'^2}\, \mathrm{d}\varphi \left(r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right).$$

Ježto výraz za integračním znamením nezávisí explicitně na φ, má Eulerova rovnice tvar:

$$\frac{r^2 \sqrt{\frac{2}{r} + h}}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = C,$$

z čehož

$$\varphi + C_1 = C \int \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{2r + hr^2 - C^2}} = \arccos \frac{C^2 - r}{r\sqrt{1 + hC^2}},$$

kde C a C_1 jsou integrační konstanty. Nakonec dostaneme rovnici trajektorie ve tvaru

$$r = \frac{C^2}{1 + e\cos(\varphi + C_1)} \quad (e = \sqrt{1 + hC^2}). \tag{38}$$

Pohyb se děje po kuželosečce o výstřednosti (numerické) $e = \sqrt{1 + hC^2}$. Podle počáteční rychlosti obdržíme dráhu eliptickou, parabolickou nebo hyperbolickou:

pro $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, $h < 0$, $e < 1$ dráhu eliptickou;

pro $v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$, $h = 0$, $e = 1$ dráhu parabolickou;

pro $v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$, $h > 0$, $e > 1$ dráhu hyperbolickou.

V případě eliptické dráhy najdeme velkou poloosu a elipsy ze vzorce

$$a = \frac{C^2}{1 - e^2} = -\frac{1}{h}, \text{ t. j. } \frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu} = -h. \tag{39}$$

Poloosa a je úplně určena počáteční polohou r_0 a počáteční rychlostí v_0, při čemž nezávisí na směru této rychlosti. Směr počáteční rychlosti, jak je zřejmé z předcházejících vzorců, nemá vliv na to, bude-li naše dráha parabolická, eliptická nebo hyperbolická.

Z (37) a (39) plyne

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{r_1}{r}}, \tag{40}$$

kde $r_1 = 2a - r$ je průvodič bodu eliptické dráhy vzhledem k druhému ohnisku elipsy.

Umístíme nyní přitahující bod do druhého ohniska naší elipsy a budeme vyšetřovat pohyb po téže eliptické dráze. Při takovém posunutí středu přitažlivosti zamění se role průvodičů r a r_1 a podle formule (40) obdržíme pro rychlost v_1 nového pohybu

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{r}{r_1}} = \frac{\mu}{a}\frac{1}{v}.$$

Rychlosti pohybů po eliptické dráze v případě, když přitažlivá hmota je umístěna v různých ohniscích, jsou nepřímo úměrné.

Porovnáme-li výrazy pro dobu T a pro účinek U při pohybu po oblouku trajektorie

$$T = \int \frac{ds}{v}, \quad U = \int v\, ds,$$

dostaneme vlastnost eliptických drah, kterou objevil N. E. Žukovskij:

Doba, za kterou planeta přitahovaná Sluncem, umístěným v ohnisku F, proběhne oblouk AB eliptické trajektorie, je rovna konstantnímu faktoru μ/a násobenému účinkem při pohybu planety po témže oblouku, kdyby Slunce leželo v druhém ohnisku.

§ 5. Methody přibližného řešení úloh variačního počtu.

Shora uvedenou methodu konečných diferencí, kterou vytvořil Euler lze chápat jako methodu přibližného řešení variačních úloh (viz na příklad § 3).

Uvedeme nyní jiné methody přibližných řešení.

Methoda nekonečného počtu proměnných. K methodám variačního počtu, které bezprostředně zobecňují úlohu o extrému diferenciálního počtu, patří také následující methoda. Předpokládejme, že mezi všemi křivkami, které jsou rovny nule v koncových bodech intervalu $[0, \pi]$, chceme určit tu křivku, podél níž integrál

$$J = \int_0^\pi F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

nabývá nejmenší hodnoty. Rozložíme proto hledanou funkci v trigonometrickou řadu:

$$y = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx + \ldots$$

O tomto rozvoji jsme mohli předpokládat, že neobsahuje ani volný člen, ani kosiny , neboť y se na koncích intervalu rovná nule, a tedy bez újmy na obecnosti můžeme funkci považovat za lichou:

$$y(-x) = -y(x).$$

Za předpokladu, že neznámá funkce má spojitou derivaci, kterou lze rozvinout ve stejnoměrně konvergentní Fourierovu řadu, obdržíme

$$y' = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \ldots + na_n \cos nx + \ldots$$

Dosadíme-li do výrazu J místo y a y' jejich rozvoje, dostaneme J jako funkci nekonečné posloupnosti koeficientů:

$$J = J(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Naše úloha vede k určení těch hodnot a_n, pro něž J nabývá nejmenší hodnoty. Použijeme-li podmínek extrému, dostaneme systém rovnic, z nichž se mají určit a_n:

$$\frac{\partial J}{\partial a_n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

V obecném případě činí vyšetřování takových soustav nekonečného počtu rovnic o nekonečném množství neznámých velké potíže, ale v některých zvláštních případech vede tato cesta k snadnému a úplnému řešení úlohy. Budeme nyní počítat úlohu, u níž lze této methody použít.

Isoperimetrická úloha. Tak se nazývá následující úloha: *Mezi všemi jednoduchými zavřenými křivkami, které mají předepsanou délku, najít tu, jejíž vnitřek má největší obsah.*

Budiž

$$x = x(s),\ y = y(s)\ (0 \leqq s \leqq l) \tag{41}$$

rovnice jednoduché zavřené křivky v parametrickém tvaru, kde jsme vzali za parametr s délku oblouku:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1 \tag{42}$$

a kde l je předepsaná délka křivky.

Při tomto označení je obsah S oblasti, ohraničené křivkou (41), vyjádřen integrálem

$$S = \int_0^l x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s.$$

Naše úloha se tím převede na následující úlohu: mezi funkcemi $x = x(s)$, $y = y(s)$, periodickými s periodou l a vyhovujícími podmínce (42), určit tu, pro niž integrál S nabývá největší hodnoty.

Rozložíme x a y ve Fourierovy řady:[6])

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{l}s + b_n \sin\frac{2\pi n}{l}s\right), \\ y &= \tfrac{1}{2}c_0 + \sum\left(c_n \cos\frac{2\pi n}{l}s + d_n \sin\frac{2\pi n}{l}s\right), \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

kde a_n, b_n, c_n, d_n jsou neznámé Fourierovy koeficienty; z toho

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= \sum\left(-\frac{2\pi n}{l}a_n \sin\frac{2\pi n}{l}s + \frac{2\pi n}{l}b_n \cos\frac{2\pi n}{l}s\right), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= \sum\left(-\frac{2\pi n}{l}c_n \sin\frac{2\pi n}{l}s + \frac{2\pi n}{l}d_n \cos\frac{2\pi n}{l}s\right). \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

K dalšímu výkladu připomeneme dvě formule z theorie Fourierových řad. Jsou-li α_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ a β_k $(k = 1, 2, \ldots)$ Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$ s periodou l a jsou-li γ_k a δ_k Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ s touže periodou l, pak

$$\frac{2}{l}\int_0^l [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum(\alpha_n^2 + \beta_n^2), \tag{45}$$

---

[6]) Předpokládáme, že funkce $x(s)$ a $y(s)$ mají spojité derivace, vyhovující Lipschitzově podmínce. Těchto hypothes ohledně $x(s)$, $y(s)$ je nám třeba k tomu, abychom mohli tyto funkce rozvinout ve Fourierovy řady.

$$\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\alpha_0\gamma_0 + \sum(\alpha_n\gamma_n + \beta_n\delta_n).^{7)} \tag{46}$$

Nyní vyjádříme integrál S pomocí Fourierových koeficientů. Podle (43), (44) a (46) dostaneme:

$$S = \pi\sum n(a_n d_n - b_n c_n). \tag{47}$$

Kromě toho, podle podmínky (42) má být

$$\int_0^l \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2\right] \mathrm{d}s = l. \tag{48}$$

Z toho dostaneme, vyjádříme-li integrál (48) pomocí Fourierových koeficientů, podle (44) a (45)

$$l = \frac{2\pi^2}{l}\sum n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2). \tag{49}$$

Použijeme-li získaných formulí (47) a (49), snadno vyčíslíme rozdíl mezi obsahem kruhu, omezeného kružnicí délky l, a obsahem S:

$$\frac{l^2}{4\pi} - S = \frac{\pi}{2}\sum n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - \pi\sum n(a_n d_n - b_n c_n) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum\{(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)\} \geqq 0.$$

Znaménko rovnosti platí jenom pro $a_1 - d_1 = 0$, $b_1 + c_1 = 0$, $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, t. j. když

$$x = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos s + b_1\sin s,$$

$$y = \tfrac{1}{2}c_0 - b_1\cos s + a_1\sin s.$$

Je tedy hledaná křivka kružnice:

$$(x - \tfrac{1}{2}a_0)^2 + (y - \tfrac{1}{2}c_0)^2 = a_1^2 + b_1^2 = \frac{l^2}{4\pi^2}.$$

Tudíž mezi všemi křivkami dané délky l: $x = x(s)$, $y = y(s)$, které splňují shora uvedené podmínky spojitosti, je to kružnice, která ohraničuje plochu největšího obsahu.

---

[7]) Viz na příklad knihu G. M. Fichtengol'c, Kurs differencial'nogo a integral'nogo isčislenija, sv. III.

Čebyševova methoda. P. L. Čebyšev stanovil následující přibližnou methodu řešení variačních úloh. Místo extrému integrálu

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,\mathrm{d}x$$

se vyšetřuje extrém součtu

$$\sum_{i=1}^{n} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,\mathrm{d}x,$$

definovaného na třídě mnohočlenů daného stupně. Pro některé zvláštní případy těchto součtů řeší P. L. Čebyšev úlohu o extrémech pomocí řetězových zlomků.

Přímé methody. Způsob nalezení funkcí realisujících extrém, popsaný na str. 31, vede k úloze řešit soustavu nekonečného počtu rovnic o nekonečném počtu neznámých — k úloze, jež je obecně velmi obtížná. Ritz navrhl postup přibližného řešení úlohy tak, že se převede na soustavu konečného počtu rovnic o konečném počtu neznámých.

Hledejme extrém (pro určitost minimum) funkcionálu $J(y)$, kde $y = y(x)$ je určitá třída funkcí, jež lze vyjádřit ve tvaru řad

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x);$$

a_i jsou určité reálné koeficienty, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ je některá posloupnost funkcí (obyčejně orthogonální, jako na příklad systém trigonometrických funkcí 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, …).

Vyšetřujme n-parametrovou soustavu funkcí

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x),$$

rozložitelných v konečné řady podle funkcí $\varphi_i(x)$. Pro tyto funkce se stane $J(y)$ funkcí konečného počtu proměnných, a to koeficientů $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$J(y^{(n)}) = J(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Nyní budeme hledat mezi funkcemi $y^{(n)}(x)$ tu, která minimalisuje $J(y^{(n)})$, t. j. budeme hledat posloupnost o n koeficientech: $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots$ $\ldots, a_n^{(n)}$, minimalisujících funkci $J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Čísla $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots$

$\ldots, a_n^{(n)}$ najdeme jako řešení soustavy n rovnic o n neznámých:

$$\frac{\partial J_n}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Jim odpovídá funkce

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i(x).$$

Nechť n neomezeně roste. Přirozeně očekáváme, že při tom funkce $y^{(n)}(x)$ konvergují k funkci $y(x)$, která realisuje minimum našeho funkcionálu $J(y)$. V mnoha úlohách je tomu vskutku tak. V každém případě vyvstanou při tom před námi tyto otázky:

a) vyšetřovat konvergenci posloupnosti funkcí $y^{(n)}$;

b) v případě konvergence $y^{(n)}(x)$ k některé funkci $y(x)$ dokázat, že limitní funkce $y(x)$ realisuje minimum $J(y)$;

c) vezmeme-li jako aproximaci hledané limitní funkce $y(x)$ jednu z funkcí $y^{(n)}(x)$, pak vzniká otázka, jak odhadnout chybu, t. j. odhadnout rozdíl

$$|y(x) - y^{(n)}(x)|.$$

Příklad. Najít minimum

$$\int_{-1}^{1} y'^2 \, dx$$

za podmínek:

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad \int_{-1}^{1} y^2 \, dx = 1.$$

V dalším dokážeme[8]), že se tohoto minima dosáhne pro funkci

$$y = \cos\frac{\pi}{2} x \text{ a je rovno } \frac{\pi^2}{4} = 2{,}47 \ldots$$

Řešme úlohu přibližně. Budeme třeba hledat minimum daného funkcionálu za daných podmínek mezi mnohočleny prvních tří stupňů:

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3.$$

Z podmínky $y(-1) = y(1) = 0$ dostaneme, že mnohočleny y musí mít tvar

$$y = (1 - x^2)(a + bx).$$

[8]) Viz kap. IX.

Z toho

$$\int_{-1}^{1} y^2\,dx = \int_{-1}^{1} [(1-x^2)(a+bx)]^2\,dx = a^2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx +$$

$$+ 2ab\int_{-1}^{1} x(1-x^2)^2\,dx + b^2\int_{-1}^{1}(x^3-x)^2\,dx = \tfrac{16}{15}a^2 + \tfrac{16}{105}b^2.$$

Dále

$$\int_{-1}^{1} y'^2\,dx = a^2\int_{-1}^{1} 4x^2\,dx + 2ab\int_{-1}^{1} 2x(3x^2-1)\,dx + b^2\int_{-1}^{1}(3x^2-1)^2\,dx =$$

$$= \tfrac{8}{3}a^2 + \tfrac{18}{5}b^2.$$

Minimum výrazu

$$\tfrac{8}{3}a^2 + \tfrac{18}{5}b^2$$

za podmínky

$$\tfrac{16}{15}a^2 + \tfrac{16}{105}b^2 = 1$$

dostaneme pro $b = 0$, $a = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ a je rovno $\tfrac{8}{3} \cdot \tfrac{15}{16} = 2{,}50$. Absolutní chyba, s níž je minimum určeno, je 0,03, relativní chyba výsledku nepřevyšuje 1,2%.

Odůvodnění Ritzovy methody, objevené v r. 1908, a rovněž Čebyševovy methody provedl N. M. Krylov, který podal r. 1918 důkaz konvergence minimalisující posloupnosti pro celou řadu problémů. Ve svých pracích z let 1925—1931 udal N. M. Krylov řadu odhadů aproximací, při čemž tyto odhady byly uvedeny pro nevelká čísla aproximací a zvláště pro jejich malé hodnoty, což je zvláště důležité v praxi.

KAPITOLA II.

METHODA VARIACÍ

§ 6. Další poznámky o extrémech funkcionálů.

Obecná poznámka. V předcházející kapitole jsme našli nutné podmínky pro to, aby daná čára vedla k extrému některé funkce čáry. Methody, jimiž jsme řešili podobné úlohy, spočívaly v aproximaci našich funkcí čáry funkcemi konečného počtu proměnných, v řešení úlohy o extrému pro tyto funkce a v přechodu k limitě. Nestudovali jsme oprávněnost přechodu k limitě a rovněž jsme se nezabývali otázkou, vede-li vždy limita extrémů aproximujících funkcí k hledanému extrému funkce čáry, neboť takové vyšetřování překračovalo rámec námi dané úlohy. Kdybychom takové vyšetřování provedli, dostali bychom nejenom diferenciální rovnici extremály, nýbrž i aproximaci řešení této diferenciální rovnice řešením systému obyčejných rovnic, t. j. výsledek podstatně větší; právě proto je třeba k jeho dosažení daleko jemnějších úvah. Pro naši skromnější úlohu určit tvar diferenciální rovnice hledané extremální křivky je tento postup poněkud pracný i v nejjednodušší úloze, přejeme-li si jej provést úplně přesně. Při přechodu k složitějším úlohám projeví se tyto jeho nedostatky ještě zřetelněji. Při řešení variační úlohy vycházíme od funkcí konečného počtu proměnných; nemáme dosud algoritmu speciálně určeného pro funkcionály a proto pružnějšího. Problém vytvoření takového algoritmu položil již Euler a řešil jej Lagrange v r. 1759. Tím byla objevena nová cesta pro rozvoj variačního počtu. Eulerovy methody se znovuzrodily teprve nedávno, když se vynořily otázky o aproximaci řešení variačních úloh.

Podstata Lagrangeovy methody je v tom, že se pro funkce obecnější povahy zobecní ten pojem, na němž je vybudována theorie extrémů funkcí konečného počtu proměnných, a to pojem diferenciálu. Princip, jehož jsme v této theorii používali, že totiž v bodě extrému je diferenciál roven nule, se zobecní na funkcionály.

Přípustné čáry. Začneme pečlivější a přesnější formulací úlohy: najít čáru, pro niž určitý funkcionál nabývá extrému. Je zřejmé, že především musíme charakterisovat tu soustavu čar, náležející k definičnímu oboru naší funkce, mezi nimiž leží křivka dávající extrém. Takové čáry se nazývají *přípustnými* čarami naší variační úlohy.

Naši úlohu formulujeme tímto způsobem: *Je dána třída C přípustných čar, patřících k definičnímu oboru funkce* $J(\gamma)$ *čáry* γ. *Je najít nutné podmínky k tomu, aby pro čáru* γ_0 *naší třídy nabývala funkce* $J(\gamma)$ *svého minima* (resp. maxima), *t. j. aby* $J(\gamma) \geqq J(\gamma_0)$, *kde* γ *je libovolná jiná čára této třídy* (pro maximum $J(\gamma) \leqq J(\gamma_0)$).

Definice třídy přípustných čar se mění spolu s úlohou. V tak zvané elementární úloze variačního počtu byly přípustnými čarami rovinné křivky, které spojují dva dané body. V isoperimetrické úloze (viz § 5) musely mít přípustné čáry určitou délku. Taková omezení plynou bezprostředně z podmínek úlohy. Kromě toho klademe na přípustné čáry ještě řadu omezení theoreticko-funkcionálního charakteru, která rovněž závisí na typu úlohy. Vyšetřujeme-li funkce čáry, definované integrály $\int F(x, y, y')\,dx$, musíme žádat, aby integrovaný výraz a integrál měly smysl. Na příklad do třídy přípustných čar podobné úlohy zřejmě nemůže patřit čára, která nemá nikde tečnu.

Omezme prozatím třídu přípustných čar u funkcionálů, vyjádřených integrály $\int F(x, y, y')\,dx$, na čáry $y = y(x)$, kde funkce $y(x)$ a její první derivace jsou spojité. V pozdějších úvahách bude třídou přípustných čar množina křivek po částech hladkých.

Tím, že vyšetřujeme čáry dané rovnicemi $y = y(x)$, kde $y(x)$ je jednoznačná funkce, klademe ještě jedno omezení na třídu přípustných čar: jsou to čáry, které protínají přímky rovnoběžné s osou Oy jenom v jednom bodě. Abychom odstranili toto omezení, musili bychom použít parametrického vyjádření rovnic křivky, což také později provedeme.

Takovým způsobem omezujeme třídu přípustných čar ve dvou směrech: s jedné strany jsou to omezení theoreticko-funkcionálního charakteru (na příklad spojitost funkce vyjádřující čáru a spojitost jejích derivací). Od těchto omezení při současném zobecnění pojmu integrálu, délky křivky atp. lze částečně upustit a položit úlohu v obecnějším tvaru. S druhé strany činíme předpoklady plynoucí z charakteru úlohy (na příklad v isoperimetrické úloze rovnost délek přípustných křivek). Změny těchto předpokladů vedou po každé k novým úlohám, jež vyžadují vlastních method řešení.

Pro stručnost vyjadřování budeme dále používat této terminologie. Řekneme, že *křivka* $y = y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ *patří do třídy* C_1, *je-li funkce* $y(x)$ *spolu se svou první derivací spojitá pro* $a \leqq x \leqq b$. Řekneme obecně, že *křivka* $y = y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ *patří do třídy* C_n, *je-li v uzavřeném intervalu* $[a, b]$ *funkce* $y(x)$ *spojitá spolu se svými prvními* n *derivacemi.*

§ 7. Klasifikace extrémů.

Absolutní extrém. V theorii extrémů funkcí konečného počtu proměnných se rozlišuje mezi extrémem absolutním a relativním. Analogické dělení pojmu extrému provedeme i pro funkce čar. Řekneme, že daná funkce $J(\gamma)$ čáry má v dané třídě přípustných čar absolutní minimum, jehož nabývá na křivce γ_0 naší třídy, je-li pro libovolnou křivku γ naší třídy

$$J(\gamma) \geqq J(\gamma_0).$$

Analogicky se definuje i absolutní maximum.

Vyšetřujme na příklad délku křivky; za třídu přípustných čar vezmeme soustavu křivek, spojujících dva dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, vyjádřených rovnicemi

$$y = y(x),$$

kde $y(x)$ má spojitou derivaci a

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Délka křivky je vyjádřena integrálem

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Absolutního minima nabude délka na úsečce určené rovnicí

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (x_0 \leqq x \leqq x_1).$$

Poznámka. Na tomto příkladě vidíme, jak je omezení třídy přípustných čar na čáry s tečnou spojitě se měnící umělé. Je zřejmé, že úsečka bude udávat absolutní minimum délky, jestliže za třídu přípustných čar vezmeme soustavu čar, spojujících body A, B a skládajících se z nekonečného počtu oblouků se spojitě se měnící tečnou. Ba více, pro každou čáru γ lze definovat délku jako limitu délek polygonů do ní vepsaných, jejichž strany konvergují k nule. Tato limita, konečná nebo nekonečná, která je nezávislá na volbě posloupnosti polygonů, existuje pro každou křivku. Mohli bychom v dané úloze vzít za třídu přípustných čar soustavu všech spojitých křivek spojujících body A, B; úsečka by jako dříve minimalisovala délku.

Relativní extrém. Dříve než budeme definovat relativní extrém, objasníme tento pojem názorným příkladem. Mezi dvěma body na povrchu zemském leží vysoká a srázná hora; chceme spojit tyto dva body cestou nejkratší délky. Proto, abychom zmenšili délku cesty, je výhodné objet při jízdě z jednoho bodu do druhého vrchol hory; jak zprava, tak zleva najdeme mezi cestami, po nichž vrchol objíždíme, cestu nejkratší. Je-li nejkratší cesta zprava menší než nejkratší cesta zleva, pak je také absolutním minimem délek čar na zemském povrchu, které spojují tyto body. Nejkratší cesta zleva nepovede k absolutnímu minimu, avšak v každém případě bude nejkratší ze všech ostatních jí blízkých cest, spojujících tyto body a obcházejících spolu s ní vrchol hory zleva.

Zavedeme nyní několik pojmů nutných k přesné definici relativního extrému.

Vzdálenost mezi křivkami. Buďte dány dvě křivky, definované rovnicemi

$$\begin{matrix} y = y(x), \\ y = y_1(x) \end{matrix} \quad (a \leqq x \leqq b).$$

Vzdáleností mezi těmito křivkami nazveme nezáporné číslo r rovné maximu $|y_1(x) - y(x)|$ na úsečce $a \leqq x \leqq b$. Tuto vzdálenost budeme označovat takto:

$$r = r[y_1(x), y(x)].$$

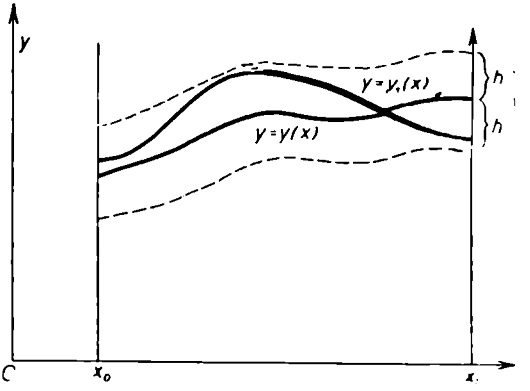
Sestrojme kolem křivky $y = y(x)$ pás „šířky“ $2h$ (obr. 6) tak, že od každého bodu křivky naneseme na obě strany ve směru pořadnice úsečky délky h.

Vzdáleností křivky $y = y_1(x)$ od křivky $y = y(x)$ pak bude polovina nejmenší „šířky" takového pásu kolem $y = y(x)$, který obsahuje křivku $y = y_1(x)$.

Budiž dána posloupnost křivek:

$$y = y_1(x), y = y_2(x), \ldots, y = y_n(x), \ldots,$$

jejichž vzdálenosti od křivky $y = y(x)$ konvergují k nule. To znamená, že posloupnost konverguje stejnoměrně k $y(x)$. Vzdálenost dvou křivek rovná nule je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby tyto křivky byly identické.



Obr. 6.

Ve funkci čáry

$$J(y) = \int F(x, y, y')\, dx$$

závisí integrovaný výraz nejenom na hodnotě funkce, nýbrž i na její derivaci. Proto hodnoty funkcionálu

$$J(y) = \int F(x, y, y')\, dx$$

pro dvě čáry, mezi nimiž je vzdálenost velmi malá, mohou se od sebe značně lišit. Na příklad křivka

$$y = \frac{1}{n} \sin nx \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

leží ve vzdálenosti $\frac{1}{n}$ od úsečky osy Ox: $y = 0$. Při tom však integrál $\int_0^\pi y'^2\, dx$ je pro tyto čáry roven $\frac{\pi}{2}$, resp. 0, a tento rozdíl zůstává nezměněn, když $n \to \infty$, t. j. když vzdálenosti mezi nimi konvergují k nule.

Tedy při nekonečně malé vzdálenosti dvou křivek y a y_1 hodnoty funkcionálů $J(y)$ a $J(y_1)$ se mohou lišit o konečnou hodnotu — funkcionál je „nespojitý“. K odvození podmínek pro extrém je však zvláště důležitá vlastnost spojitosti. Proto je nutno shora zavedený pojem vzdálenosti doplnit podstatně tak, aby se pro dvě „blízké“ křivky vyšetřované funkcionály málo lišily. Proto zobecníme pojem vzdálenosti takto:

Definice. *Vzdáleností n-tého řádu křivek $y(x)$ a $y_1(x)$, které mají spojité derivace do n-tého řádu včetně, se nazývá největší z maxim výrazů:*

$$|y_1(x) - y(x)|,\ |y_1'(x) - y'(x)|,\ \ldots$$
$$\ldots,\ |y_1^{(n)}(x) - y^{(n)}(x)|$$

v intervalu $a \leqq x \leqq b$.

Shora definovaný pojem vzdálenosti bude podle naší nové definice vzdáleností nultého řádu.

Při vyšetřování funkcionálů

$$\int F(x, y, y')\,dx$$

hraje zvláštní roli vzdálenost prvního řádu. Při spojitosti funkce F vzhledem k y a y' má dostatečně malá vzdálenost prvního řádu mezi dvěma křivkami $y = y(x)$ a $y = y_1(x)$ za následek libovolně malou absolutní hodnotu rozdílu funkcionálů těchto funkcí. Proto ve většině případů budeme pod vzdáleností mezi křivkami rozumět jejich vzdálenost prvního řádu.

Okolí křivky. Nazveme *ε-okolím n-tého řádu křivky*

$$y = y(x)\quad (a \leqq x \leqq b)$$

soustavu křivek

$$y = y_1(x),$$

jejichž vzdálenost n-tého řádu od křivky $y = y(x)$ je menší než ε.

Tedy ε-okolí nultého řádu křivky $y = y(x)$ se skládá z křivek, ležících v pásu šířky 2ε kolem křivky $y(x)$.

Silný a slabý extrém. Říkáme, že funkcionál

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \tag{1}$$

nabývá na křivce γ_0 silného relativního maxima, jestliže pro všechny přípustné čáry γ, ležící v některém ε-okolí **nultého** řádu křivky γ_0, platí

$$J(\gamma) \leqq J(\gamma_0).$$

Analogicky se definuje relativní silné minimum.

Říkáme, že funkcionál J nabývá na křivce γ_0 slabého maxima, jestliže pro všechny přípustné čáry γ, ležící v některém ε-okolí prvního řádu křivky γ_0, platí

$$J(\gamma) \leqq J(\gamma_0).$$

Každý absolutní extrém je současně slabým i silným relativním extrémem. Každý silný extrém je současně i slabým, avšak obráceně to obecně neplatí.

Příklad 1. Budiž

$$J = \int_0^\pi y^2(1 - y'^2)\,\mathrm{d}x.$$

Úsečka osy Ox vede k slabému minimu J.

Pro $y = 0$ je $J = 0$. Na druhé straně však pro křivky, které leží v ε-okolí prvního řádu této úsečky, je $|y'| < 1$, je-li ε libovolné kladné číslo menší než jedna, a integrovaný výraz je tudíž nezáporný. Je-li $y \not\equiv 0$, J je ovšem kladné a je rovno nule jenom pro $y \equiv 0$, t. j. pro naši úsečku. To znamená, že na ní nabývá J slabého minima.

Silného minima J nenabývá. Stačí položit

$$y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx;$$

pak

$$J = \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin^2 nx\,(1 - n\cos^2 nx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin^2 nx\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2 2nx\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}$$

a pro n dostatečně velké je pro naše křivky $J < 0$. Na druhé straně leží všechny tyto křivky pro n dostatečně velké v libovolně malém okolí nultého řádu křivky $y = 0$. Tedy J nenabývá pro $y = 0$ silného minima.

Příklad 2. Uvedeme ještě jeden příklad, který zvláště názorně ilustruje odlišný charakter slabého a silného extrému.

Po jezeře pluje loďka poháněná plachtou a vesly z bodu A do bodu B, při čemž rychlost větru má směr od B k A. Předpokládejme kromě toho, že pohon plachtou bez vesel může dát lodi rychlost $v = v(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá směr rychlosti se směrem větru, při čemž

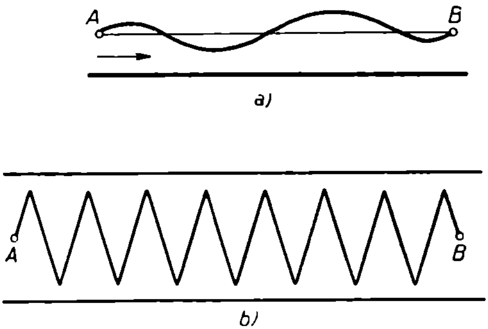
$$v(\alpha) \geqq 0 \text{ pro } 0 < \alpha < \pi - \alpha_0,\ \pi - \alpha_0 > \frac{\pi}{2},$$

a pro $\alpha > \pi - \alpha_0$ je pohyb nemožný (je nemožné plout bez vesel ve směru ležícím přímo proti větru, $\alpha = \pi$, a ve směru tomuto směru dostatečně blízkému):

$$v(\alpha) = 0 \text{ pro } \pi \geqq \alpha \geqq \pi - \alpha_0.$$

Chceme určit dráhu loďky tak, aby loďka doplula z A do B za nejkratší dobu.

Při pohybu loďky po přímce AB bude potřebný čas T_0 roven poměru vzdálenosti mezi A a B k rychlosti loďky, když se jenom vesluje. Přechod od pohybu po přímce k pohybu po křivce k přímce dostatečně blízké (ve smyslu blízkosti prvního řádu, obr. 7a) potřebný čas jenom zvětší, neboť plachta nebude v činnosti a délka dráhy se zvětší. Úsečka AB dá slabé minimum. Jestliže nyní předpokládáme, že je $\pi - \alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ a že rychlost, jíž dosáhneme jenom veslováním, je dostatečně malá, pak je zřejmé, že cestovní čas značně zkrátíme, budeme-li plout po lomené čáře (obr. 7b).



Obr. 7.

Poznámka. V první kapitole jsme viděli, že každá křivka, dávající extrém integrálu (1), vyhovuje Eulerově rovnici (7), § 2. Je tedy možno říci, že identické anulování levé strany rovnice (7), § 2, je nutnou podmínkou pro to, aby funkce $y = y(x)$ dávala extrém integrálu (1). V dalším se budeme zabývat jinými nutnými podmínkami extrému a v posledních kapitolách knihy budeme vyšetřovat také i postačující podmínky. Je důležité ihned připomenout, že jak nutné, tak postačující podmínky mohou být odlišné pro případy absolutního nebo relativního silného a slabého extrému. Poněvadž však každý absolutní extrém je současně silným relativním extrémem a ten je zase také slabým extrémem, jsou nutné podmínky pro slabý extrém nutnými i pro silný a absolutní extrém. Obráceně nutné podmínky pro silný a pro absolutní extrém nebudou obecně platit pro slabý extrém. Pro postačující podmínky budou vztahy obrácené: na příklad postačující podmínky absolutního extrému budou postačujícími podmínkami pro kterýkoli z relativních extrémů, ale obráceně to platit obecně nemusí.

Jak je známo, každá spojitá funkce definovaná v uzavřeném intervalu nabývá v něm svého absolutního minima.

Ve variačním počtu nemusí funkcionály nabývat svého extrému na třídě přípustných čar, t. j. jestliže infimum hodnot funkcionálu na třídě přípustných čar je rovno c, pak nemusí existovat taková přípustná křivka γ, že $J(\gamma) = c$.

Na příklad v § 17 budeme vyšetřovat úlohu, ve které funkcionál nenabude minima na křivkách se spojitě se měnící tečnou, ale nabude ho na křivkách po částech hladkých. Dokonce je v některých případech snadné ukázat příklady funkcionálů, definovaných na jistých třídách funkcí, které nenabývají extrému ani na jednom přirozeném rozšíření třídy přípustných čar.

Je přirozené, že se objevila řada prací o vyšetřování existence absolutního minima funkcionálů variačního počtu a o charakterisování skupin úloh se zajištěnou existencí extrémů. Podstatných výsledků v tomto směru bylo dosaženo v r. 1930 sovětským matematikem N. N. Bogoljubovem.

V letech 1948—1950 dosáhl A. G. Sigalov znamenitých úspěchů v řešení úlohy o existenci absolutního minima pro množné integrály.

§ 8. Variace nejjednoduššího funkcionálu.

Diferenciál. Dříve než přistoupíme k výkladu Lagrangeovy methody ve variačním počtu, připomeneme čtenáři definici diferenciálu funkce mnoha proměnných.

Budiž dána funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu.

Máme

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} h_i + \varepsilon,$$

kde ε je veličina nekonečně malá vyššího řádu než největší z absolutních hodnot přírůstků $|h_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (nebo než

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}).$$

Výraz $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$ je lineární funkce přírůstků $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Tento výraz se nazývá diferenciálem funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Lze ho nazvat hlavní lineární částí přírůstku funkce (hlavní v tom smyslu, že přírůstek f je roven diferenciálu až na veličinu nekonečně malou vyššího řádu než největší z $|h_i|$).

Diferenciál je možno definovat ještě jinak. Spojme „body“ n-rozměrného prostoru $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n)$ „přímkou“, skládající se z bodů $(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n)$, kde $-\infty < t < +\infty$. Funkce f se na této přímce změní ve funkci parametru t:

$$\Phi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n).$$

Máme

$$\Phi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n)}{\partial x_i} h_i.$$

Proto je

$$\Phi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} h_i.$$

Je tedy diferenciál $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$ derivace podle t pro $t = 0$ funkce $\Phi(t)$.

Poznámka. V našem případě se obě definice diferenciálu shodují. V obecnějším případě tyto definice ekvivalentní nejsou.

Budiž $a(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ hlavní lineární část přírůstku $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, t. j. $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a(h_1, h_2, \ldots, h_n) + \varepsilon$, kde ε je nekonečně malé vyššího řádu než největší z $|h_i|$.

Potom je

$$f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= a(th_1, th_2, \ldots, th_n) + \varepsilon_t\,^{1)}$$

(kde ε_t je veličina nekonečně malá řádu vyššího než největší z $|th_i| = |t|\ |h_i|$). Tedy pro pevná h_i a pro $t \to 0$ dostaneme: ε_t je veličina nekonečně malá vyššího řádu ve srovnání s t, protože z toho, že $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varepsilon_t}{|t|\,|h_i|} = 0$, plyne také pro pevné h_i, že $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varepsilon_t}{t} = 0$. Z toho

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] =$$
$$= a(h_1, h_2, \ldots, h_n) + \lim_{t\to 0} \frac{\varepsilon_t}{t} = a(h_1, h_2, \ldots, h_n),$$

neboli (podle definice derivace podle t)

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \ldots, x_n + th_n)\right]_{t=0} = a(h_1, h_2, \ldots, h_n),$$

t. j. diferenciál v prvním smyslu bude vždy diferenciálem také v druhém smyslu. Obrácené tvrzení neplatí. Budiž na příklad $f = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Potom pro $x = 0$, $y = 0$ a pro libovolná h_1, h_2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sqrt[3]{(th_1)^3 + (th_2)^3} = \sqrt[3]{h_1{}^3 + h_2{}^3};$$

tato veličina není lineární ani vzhledem k h_1, ani vzhledem k h_2, t. j. není diferenciálem v prvním smyslu.

Odvození variace. Mějme funkcionál

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

kde F má spojité derivace druhého řádu podle všech tří argumentů a $y = y(x)$ náleží do třídy C_1 funkcí, majících spojitou derivaci. Buďte $y(x)$ a $\overline{y}(x)$ dvě funkce z třídy C_1. Označme jejich rozdíl $\eta(x) = \overline{y}(x) - y(x)$; zřejmě $\eta(x)$ má všude spojitou derivaci

$$\eta'(x) = \overline{y}'(x) - y'(x).$$

1) Násobíme-li všechny argumenty parametrem t, znásobíme jím i hodnotu lineární funkce a.

Sestavíme rozdíl

$$J(\overline{y}) - J(y) = \int_a^b [F(x, y + \eta, y' + \eta') - F(x, y, y')] \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b [\overline{F}_y \eta(x) + \overline{F}_{y'} \eta'(x)] \, \mathrm{d}x,$$

kde pruh nad derivacemi F_y a $F_{y'}$ značí, že jsou vzaty pro hodnoty argumentů $x, \tilde{y}, \tilde{y}$, kde $\tilde{y}, \tilde{y}'$ leží mezi $\overline{y}(x)$ a $y(x)'$ resp. $y'(x)$ a $\overline{y}'(x)$. Pro stručnost budeme označovat F_y a $F_{y'}$ hodnoty těchto funkcí pro argumenty $x, y(x), y'(x)$. Ježto pro $a \leqq x \leqq b$ je

$$|\tilde{y} - y| < |\eta(x)| \leqq r(y, \overline{y}),$$

$$|\tilde{y}' - y'| < |\eta'(x)| \leqq r(y, \overline{y}),$$

kde $r(y, \overline{y})$ je vzdálenost prvního řádu funkcí $y(x)$ a $\overline{y}(x)$, pak vzhledem k spojitosti $F_y(x, y, y')$ a $F_{y'}(x, y, y')$ podle všech tří argumentů, ať je číslo $\varepsilon > 0$ jakékoliv, pro dostatečně malé $r(y, \overline{y})$ budeme mít

$$|\overline{F}_y - F_y| < \varepsilon, \; |\overline{F}_{y'} - F_{y'}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Je tedy

$$J(\overline{y}) - J(y) = \int_a^b [F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x)] \, \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_a^b [(\overline{F}_y - F_y)\eta(x) + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\eta'(x)] \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b [F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x)] \, \mathrm{d}x + \varepsilon_1 r(y, y), \tag{3}$$

kde ε_1 spolu s $r(y, \overline{y})$ konverguje podle nerovností (2) k nule. Z toho plyne, že výraz $\int_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta') \, \mathrm{d}x$, rovný přírůstku funkcionálu až na veličinu řádu vyššího než $r(y, \overline{y})$, je hlavní část přírůstku funkcionálu J. Tento výraz se nazývá *variací* funkcionálu J a značí se δJ:

$$\delta J = \int_a^b [F_y(x, y(x), y'(x))\eta(x) +$$

$$+ F_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x)] \, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Z definice variace plyne, že je funkcionálem závislým na počáteční funkci $y(x)$ a na přírůstku $\eta(x)$:

$$\delta J = K(y(x), \eta(x)),$$

při čemž na přírůstku $\eta(x)$ závisí variace δJ lineárně.

Tedy *variace je hlavní lineární část přírůstku funkcionálu.* Tato definice variace je obdobou první definice diferenciálu funkce mnoha proměnných.

Je možné zavést jinou definici variace, odpovídající druhé definici diferenciálu.

Vyšetřujme jednoparametrovou třídu funkcí $y(x) + t\eta(x)$. Pro funkce této třídy, pokud jsou $y(x)$ a $\eta(x)$ pevné, se změní funkcionál $J(y + t\eta)$ ve funkci argumentu t:

$$\Phi(t) = J(y + t\eta)$$

Použijme formule (3) a zaměňme $\eta(x)$ funkcí $t\eta(x)$:

$$J(y + t\eta) - J(y) = t\int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta')\,dx + \varepsilon_t,$$

kde $\varepsilon_t = \varepsilon_1 r(y, y + t\eta) = \varepsilon_1|t|r(y, y + \eta)$ je veličina nekonečně malá vyššího řádu než vzdálenost mezi funkcemi $y(x)$ a $y(x) + t\eta(x)$ (neboli, pokud jsou $y(x)$ a $\eta(x)$ pevné, než t). Z toho plyne

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_t}{t} = 0.$$

Proto je

$$\Phi'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{J(y + t\eta) - J(y)}{t} =$$

$$= \int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta)\,dx + \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_t}{t} = \int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta')\,dx. \tag{5}$$

Je tedy variace derivace podle t pro $t = 0$ funkce

$$\Phi(t) = J(y + t\eta).$$

To by bylo možno odvodit i přímo diferencováním za integračním znamením

$$\Phi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b F(x, y + t\eta, y' + t\eta')\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b [F_y(x, y + t\eta, y' + t\eta')\eta + F_{y'}(x, y + t\eta, \eta' + ty')\eta']\,\mathrm{d}x.$$

Je tedy (pro $t = 0$)

$$\Phi'(0) = \int_a^b [F_y(x, y, y')\eta + F_{y'}(x, y, y')\eta']\,\mathrm{d}x.$$

Tak jsme došli k jiné definici variace, totiž jako derivace podle parametru t pro $t = 0$ funkce $J(y + t\eta)$.

Pro funkcionály právě vyšetřovaného typu jsou obě definice ekvivalentní. V obecném případě však je druhá definice obecnější (jako v případě obyčejných funkcí).

Variace funkce. Ve výrazu pro úplný diferenciál funkce n proměnných se hodnoty přírůstků nezávisle proměnných nazývaly diferenciály těchto proměnných. Analogicky ve výrazu pro variaci δJ funkcionálu $J(y)$ se přírůstek $\eta(x)$ funkce $y(x)$ nazývá variací $y(x)$ a značí se

$$\delta y(x) = \eta(x) = \bar{y}(x) - y(x).$$

Námi zavedeného pojmu variace lze, jak uvidíme v další kapitole, použít k řešení celé řady extremálních úloh. Methoda řešení všech podobných úloh je založena na tom, že variace funkcionálu pro funkci vedoucí k extrému tohoto funkcionálu je identicky rovna nule.

Nutná podmínka extrému. Odvodíme teď nutnou podmínku pro to, aby křivka $y = y(x)$ ze třídy přípustných čar dávala v nejjednodušší úloze extrém funkcionálu $J(y)$. Odvodíme nutnou podmínku slabého minima (maxima), ale ta bude rovněž nutnou podmínkou i silného minima (maxima). Z definice slabého relativního extrému plyne:

Jestliže $y = y(x)$ realisuje slabé minimum funkcionálu $J(y)$, pak existuje takové ε-okolí prvního řádu křivky $y = y(x)$, že pro každou přípustnou křivku $y = y(x)$ z tohoto okolí přírůstek

$$J(\bar{y}) - J(y) \geqq 0. \tag{6}$$

Obráceně *v případě maxima pro všechny přípustné křivky* $\bar{y} = \bar{y}(x)$ *v některém ε-okolí prvního řádu dané křivky* $y = y(x)$

$$J(\bar{y}) - J(y) \leqq 0. \tag{7}$$

Je tedy podmínkou extrému, aby přírůstek

$$\Delta J = J(\bar{y}) - J(y)$$

měl konstantní znamení.

Dokážeme nyní jednoduchou pomocnou větu, které budeme v budoucnu velmi často používat.

Pomocná věta. *Nechť ve výrazu*

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha$$

je d konstantní, při čemž pro α konvergující k nule jakkoli, ε_α konverguje k nule spolu s α tak, že $\frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} \to 0$ (t. j. ε_α je veličina nekonečně malá řádu vyššího než α); *jestliže pak pro všechna dostatečně malá α máme*

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha \geqq 0$$

nebo jestliže pro všechna dostatečně malá α máme

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha \leqq 0,$$

pak je $d = 0$.

Vskutku, budiž $d \neq 0$, na příklad $d > 0$. Potom, ježto podle předpokladu $\frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha}$ konverguje k nule, bude výraz $d + \frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha}$ pro libovolná dostatečně malá α rovněž větší než nula. Proto je

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha = \alpha \left(d + \frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} \right) > 0 \text{ pro } \alpha > 0,$$

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha = \alpha \left(d + \frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} \right) < 0 \text{ pro } \alpha < 0,$$

což je ve sporu s předpokladem. Je tedy $d = 0$.

Na základě této věty dokážeme další větu, která udává základní nutnou podmínku pro existenci extrému.

Věta I. *Pro to, aby funkce $y(x)$ třídy C_1 minimalisovala (maximaliso-*

vala) funkcionál $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ *za podmínek* $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, *je nutné, aby variace*

$$\delta J = \int_a^b [F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)]\,\mathrm{d}x$$

byla rovna nule pro libovolnou funkci $\eta(x)$ *třídy* C_1, *pro kterou je* $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Abychom tuto větu dokázali, vyšetřujme funkci $y = y(x) + t\eta(x)$, kde $y(x)$ vede k extrému funkcionálu $J(y)$, t je libovolný parametr a $\eta(x)$ je libovolná funkce třídy C_1, pro niž $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Použijeme-li formulí (3) a (4) (když v (3) zaměníme $\eta(x)$ funkcí $t\eta(x)$), můžeme napsat

$$J(y + t\eta) - J(y) = t\delta J(y) + \varepsilon_1 |t| r(y, y + \eta). \tag{8}$$

Pro pevnou funkci $\eta(x)$ a pro t konvergující k nule, konverguje ε_1 rovněž k nule. Jestliže nyní $y(x)$ minimalisuje $J(y)$, pak platí pro každé kladné nebo záporné $t \to 0$ nerovnost (6). Položíme-li $\delta J(y) = d$,

$$t = \alpha,\ \varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 |t| r(y, y + \eta),$$

zjistíme na základě pomocné věty, že

$$\delta J(y(x)) = 0. \tag{9}$$

V případě maxima je splněna nerovnost (7), takže z pomocné věty najdeme zcela stejným způsobem vztah (9). Tím je věta dokázána.

Tuto větu lze dokázat, vyjdeme-li z druhé definice variace. Na třídě funkcí $y(x) + t\eta(x)$ se stane funkcionál J funkcí parametru t:

$$J(y + t\eta) = \Phi(t).$$

Tato funkce nabývá minima pro $t = 0$, t. j. když funkce $y(x) + t\eta(x)$ se právě rovná funkci $y(x)$ minimalisující J. Proto se musí pro $t = 0$ $\Phi'(t)$ rovnat nule: $\Phi'(0) = 0$. Avšak $\Phi'(0) = \int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta')\,\mathrm{d}x$, čímž je věta znovu dokázána.

Transformace variace. Za integračním znamením stojí ve výrazu pro první variaci lineární funkce proměnných $\delta y = \eta$ a $\delta y' = \eta'$. Integrací per partes lze variaci transformovat tak, aby za integračním znaením stála lineární funkce závislá jenom na δy (tak zvaná Lagrangeova transformace) nebo závislá jenom na $\delta y'$ (Du Bois-Reymondova transformace).

Lagrangeova transformace se provede tímto způsobem:

Integrací per partes dostaneme

$$\int_a^b F_{y'}\,\delta y'\,\mathrm{d}x = [F_{y'}\,\delta y]_b^a - \int_a^b \delta y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládáme-li, že v bodech a a b je variace δy rovna nule, pak

$$\int_a^b F_{y'}\,\delta y'\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \delta y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\,\mathrm{d}x.$$

Je tedy

$$\delta J(y) = \int_a^b (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,\mathrm{d}x = \int_a^b (F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'})\,\delta y\,\mathrm{d}x.$$

Toto vyjádření jsme obdrželi již v § 2 (formule (14)), když jsme vyšetřovali funkcionál $J(y)$ jako limitu funkce polygonu a $\delta J(y)$ jako limitu diferenciálu této funkce.

Připomeňme, že jsme o funkci $y(x)$ předpokládali, že má spojitou derivaci. Avšak y' jsme nepovažovali za diferencovatelnou funkci. Proto je Lagrangeova transformace a priori nepřípustná.

Aby odstranil další předpoklad o existenci druhé derivace y'', navrhl Du Bois-Reymond jinou transformaci variace. Označíme-li totiž

$$\int_a^x F_y\,\mathrm{d}x = N(x),$$

máme

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\,\delta y + F_{y'}\,\delta y'\right] \mathrm{d}x.$$

Dále, integrujeme-li per partes:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\,\delta y\,\mathrm{d}x = [N\delta y]_a^b - \int_a^b N\delta y'\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládáme-li jako předtím, že δy v bodech a a b je rovno nule, dostaneme

$$\delta J = \int_a^b (F_y' - N)\delta y'\,\mathrm{d}x.$$

Tato transformace nevyžaduje dalších předpokladů o struktuře funkce $y(x)$.

§ 9. Základní pomocné věty variačního počtu.

Pomocná věta I (Lagrange). *Nechť $M(x)$ je spojitá funkce. Jestliže pro libovolnou funkci $\eta(x)$, která má spojitou derivaci a je rovna nule v bodech a a b, je*

$$\int_a^b M(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pak $M(x) = 0$ pro všechna x ($a \leqq x \leqq b$).

Nechť je totiž v některém bodě c ($a < c < b$) $M(c) \neq 0$, na příklad $M(c) > 0$. Vzhledem k spojitosti funkce $M(x)$ pro dostatečně velké n je možno utvořit interval $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right]$, ležící uvnitř intervalu $[a, b]$ a obsahující bod c, v němž je $M(x)$ větší než určité kladné číslo m. Definujeme nyní funkci $\eta_0(x)$ takto:

$$\eta_0\, x) = \begin{cases} \sin^2\,[n(x - x_0)] \text{ v intervalu } \left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right] \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{vně intervalu } \left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right] \end{cases}$$

(viz obr. 8). Funkce $\eta_0(x)$ je spojitá, má spojitou derivaci a je kromě toho $\eta_0(b) = \eta_0(a) = 0$. Muselo by tedy být

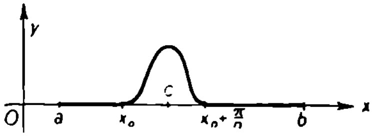
$$\int_a^b M(x)\eta_0(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

je však

$$\int_a^b M(x)\eta_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2[n(x-x_0)]\,\mathrm{d}x >$$

$$> m\int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \sin^2[n(x-x_0)]\,\mathrm{d}x = \frac{\pi m}{2n} > 0.$$

Tudíž předpoklad: $M(x) \neq 0$ pro x z intervalu $[a, b]$ vede ke sporu.[2])



Obr. 8.

Tím, že aplikoval tuto pomocnou větu na variaci

$$\delta J = \int_a^b \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x,$$

která musí být v případě extrému rovna nule pro kteroukoli funkci δy mající shora uvedené vlastnosti, odvodil Lagrange Eulerovu rovnici:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0.$$

Proto musí této rovnici vyhovovat každá funkce $y = y(x)$, která dává extrém integrálu

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

Křivky vyhovující Eulerově rovnici se nazývají *extremálami*.

Lagrangeovo odvození Eulerovy rovnice obsahovalo nepřesnost, na niž jsme upozornili při definici Lagrangeovy transformace.

Pomocná věta 2 (Du Bois-Reymond). *Je-li pro spojitou funkci $M(x)$ a pro libovolnou spojitou funkci $\eta(x)$ mající spojitou derivaci, při čemž*

---

[2]) Lagrangeova pomocná věta zůstane v platnosti, je-li funkce $\eta(x)$ v její formulaci libovolnou funkcí třídy $C_k (k \geqq 1)$, která je spolu s derivacemi do $(k-1)$-tého řádu na hranici rovna nule. Je třeba jenom v definici funkce $\eta_0(x)$ v intervalu $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right]$ vzít $\sin^{2k}[n(x-x_0)]$.

$\eta(a) = \eta(b) = 0$, *integrál*

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

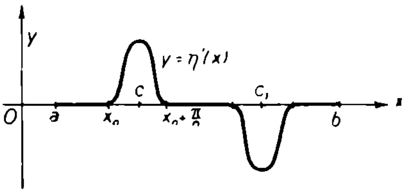
pak je $M(x)$ *v celém intervalu* $[a, b]$ *konstantní.*

Není-li totiž $M(x)$ konstatní, pak existují v intervalu $[a, b]$ alespoň dva body c_1 a c_2, v nichž funkce $M(x)$ nabývá různých hodnot, na příklad $M(c_1) > M(c_2)$. Budiž d_1 a d_2 dvojice čísel, která splňuje nerovnosti

$$M(c_1) > d_1 > d_2 > M(c_2).$$

Pak lze sestrojit pro dostatečně velké n pár intervalů $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right]$, $\left[x_1, x_1 + \frac{\pi}{n}\right]$, ležících v intervalu $[a, b]$, jež se nepřekrývají a jsou takové, že v intervalu $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right]$ platí nerovnost $M(x) > d_1$ a v druhém ze zvolených intervalů platí nerovnost

$$M(x) < d_2.$$



Obr. 9.

Funkci $\eta'(x)$ definujeme takto (obr. 9):

$$\eta'(x) = \begin{cases} \sin^2[n(x - x_0)] \text{ v intervalu } \left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\right], \\ -\sin^2[n(x - x_1)] \text{ v intervalu } \left[x_1, x_1 + \frac{\pi}{n}\right], \\ 0 \text{ ve všech ostatních bodech intervalu } [a, b]. \end{cases}$$

Funkce $\eta(x) = \int_a^x \eta'(x)\,\mathrm{d}x$ je spojitá, má spojitou derivaci $\eta'(x)$ a kromě toho je $\eta(a) = 0$,

$$\eta(b) = \int_a^b \eta'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \sin^2[n(x - x_0)]\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}} \sin^2[n(x - x_1)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Podle předpokladu má být

$$\int_{+a}^{-b} M(x)\,\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

ale na druhé straně

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2[n(x-x_0)]\,\mathrm{d}x -$$

$$-\int_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2[n(x-x_1)]\,\mathrm{d}x > (d_1-d_2)\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x > 0.$$

Vede tedy předpoklad, že $M(x)$ není konstatní, ke sporu.

Úplné odvození Eulerovy rovnice. Z Du Bois-Reymondovy pomocné věty dostaneme snadno úplné odvození Eulerovy rovnice. Budiž dána třída přípustných čar $y = y(x)$, kde $y(x)$ je funkce, která má spojitou derivaci, při čemž všechny funkce $y(x)$ nabývají pro $x = a$ a $x = b$ předepsaných hodnot y_0 a y_1. Na této třídě je definován funkcionál

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

kde F je spojitá funkce všech argumentů se spojitými parciálními derivacemi prvních dvou řádů. Předpokládejme, že funkce $y = y(x)$ ze třídy přípustných čar dává relativní slabý extrém funkcionálu J. V tomto případě je

$$\delta J = \int_a^b (-N + F_{y'})\delta y'\,\mathrm{d}x = 0$$

pro každou funkci δy, která má spojitou derivaci a je rovna nule v bodech a a b. Na základě Du Bois-Reymondovy pomocné věty dostaneme

$$F_{y'} - N = F_{y'} - \int_a^x F_y\,\mathrm{d}x = C$$

(C je konstanta). To je tak zvaný *integrální tvar Eulerovy rovnice.*

Funkce $N(x) = \int\limits_a^x F_y \, \mathrm{d}x$ je spojitá a má spojitou derivaci $N'(x) = F_y$.
Tedy spojitou derivaci podle x má také $F_{y'} = C + N(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = N'(x) = F_y.$$

Tak jsme dostali Eulerovu rovnici, při čemž jsme dokázali diferencovatelnost funkce $F_{y'}$.

Budiž nyní v některém bodě (x, y) křivky $y = y(x)$

$$F_{y'y'} \neq 0.$$

Při přechodu od bodu této křivky se souřadnicí x k bodu se souřadnicí $x + \Delta x$ zvětší se funkce $y(x)$ a $y'(x)$ o přírůstky Δy a $\Delta y'$, které vzhledem ke spojitosti funkcí $y(x)$ a $y'(x)$ konvergují k nule spolu s Δx. Máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\overline{F}_{xy'} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{yy'} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} \right],$$

kde druhé derivace $\overline{F}_{xy'}$, $\overline{F}_{yy'}$, $\overline{F}_{y'y'}$ s pruhy nahoře označují hodnoty těchto funkcí pro argumenty

$$x + \Theta_1 \Delta x, \; y + \Theta_2 \Delta y, \; y' + \Theta_3 \Delta y' \quad (|\Theta_i| < 1).$$

Pro $\Delta x \to 0$ tyto výrazy konvergují k $F_{xy'}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$, $F_{y'y'}(x, y, y')$ a je tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = F_{xy'} + F_{yy'} y' + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} F_{y'y'};$$

z toho

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y'' = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} - F_{xy'} - F_{yy'} y'}{F_{y'y'}}.$$

Tedy $y''(x)$ existuje v každém bodě křivky $y = y(x)$ dávající extrém, v němž je $F_{y'y'} \neq 0$.

Body extremály $y = y(x)$, v nichž je $F_{y'y'} \neq 0$, se nazývají *regulární*.

Nyní můžeme zformulovat námi dokázanou větu zcela úplně.

Věta 2. *Budiž funkce $F(x, y, y')$ spojitá spolu se svými parciálními derivacemi do druhého řádu včetně pro $a \leqq x \leqq b$ a pro libovolná y a y'. Dává-li křivka $y = y(x)$ třídy C_1 relativní slabý extrém integrálu*

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

pak funkce $y(x)$ vyhovuje Eulerově rovnici

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0$$

a $y''(x)$ existuje a je spojitá pro všechna x, pro něž je $F_{y'y'} \neq 0$.

Tak jsme nejenom odvodili Eulerovu rovnici, nýbrž jsme i dokázali (což jsme předtím nepředpokládali) existenci druhé derivace $y''(x)$ v každém regulárním bodě křivky, která dává extrém.

§ 10. Variace v bodě.

Pojem variace je bezprostředním zobecněním pojmu úplného diferenciálu funkce více proměnných. Lze také přenést (v jistém smyslu) na případ funkcionálů pojmy parciální derivace a parciálního diferenciálu.

Vyšetřujme v rovině soustavu polygonů Π_n s vrcholy $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n)$, při čemž jsou úsečky $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrcholů pevné a jejich pořadnice $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proměnné. Každý polygon je určen soustavou n hodnot $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pořadnic jeho vrcholů, každé soustavě n čísel odpovídá pak polygon Π_n, jehož vrcholy mají tato čísla za své pořadnice. Proto lze funkci n proměnných považovat za funkci polygonu Π_n:

$$\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \psi(\Pi_n).$$

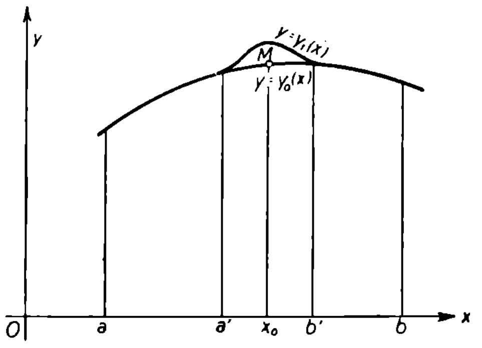
Nechť hodnota proměnné y se zvětší o Δy a všechny ostatní hodnoty proměnných $y_j (j \neq i)$ zůstanou beze změny; geometricky to znamená, že vrchol A_i polygonu Π_n se posune o Δy_i rovnoběžně s osou Oy a všechny ostatní vrcholy zůstanou beze změny; polygon Π_n přejde v polygon $\overline{\Pi}_n$. Potom je

$$\psi(\overline{\Pi}_n) - \psi(\Pi_n) = \frac{\partial\psi(\Pi_n)}{\partial y_i}\Delta y_i + \varepsilon,$$

kde ε je veličina nekonečně malá vyššího řádu než Δy_i. Ale první člen pravé strany této rovnosti $\frac{\partial \psi(\Pi_n)}{\partial y_i} \Delta y_i$ je parciální diferenciál funkce ψ, a

$$\frac{\partial \psi(\Pi_n)}{\partial y_i} = \lim_{\Delta y_i \to 0} \frac{\psi(\overline{\Pi}_n) - \psi(\Pi_n)}{\Delta y_i}$$

je parciální derivace. Při přechodu od polygonů ke spojitým čarám a od funkcí polygonu k funkcím čáry (funkcionálům) se nedají operace parciální diferenciace bezprostředně zobecnit: u spojité křivky nelze změnit pořadnici jenom jednoho jejího bodu. Avšak podle Volterrovy myšlenky je možno v jistém smyslu přenést operace parciální diferenciace na případ funkcionálů. Vyšetřujme soustavu křivek $y = y(x)$ třídy C_1, definovaných v intervalu $a \leqq x \leqq b$. Zvolme jednu z těchto křivek $y = y_0(x)$ a bod M na této křivce o souřadnici x_0, $a < x_0 < b$.



Obr. 10.

Zvolme nyní funkci $\delta y(x)$ třídy C_1, která je všude rovna nule až na nevelký interval (a', b') obsahující x_0. Předpokládejme pro jednoduchost, že $\delta y(x)$ v tomto intervalu nemění znamení. Budiž kromě toho $y_1(x) = y_0(x) + \delta y(x)$ (obr. 10). Křivky $y = y_0(x)$ a $y = y_1(x)$ spolu všude souhlasí až na okolí bodu M. Obsah plošky omezené těmito křivkami označme

$$\sigma = \int_a^b \delta y \, \mathrm{d}x.$$

Vyšetřujme funkcionál $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') \, \mathrm{d}x$, kde y je libovolná křivka třídy C_2. Potom je

$$J(y_1) - J(y_0) = \int_{a'}^{b'} (\overline{F}_y \delta y + \overline{F}_{y'} \delta y') \mathrm{d}x = \int_{a'}^{b'} (\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}) \, \delta y \, \mathrm{d}x,$$

kde $\overline{F}_y$, $\overline{F}_{y'}$ jsou hodnoty funkcí F_y, $F_{y'}$ pro argumenty x, $y_0 + \Theta_1\delta y$, $y_0' + \Theta_2\delta y'$. V dalším budeme považovat F_y, $F_{y'}$ za hodnoty týchž funkcí pro argumenty x, y_0, y_0'. Podle věty o střední hodnotě je

$$J(y_1) - J(y_0) = \left[\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right]_{x=x_1} \int_{a'}^{b'} \delta y \,\mathrm{d}x = \left[\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right]_{x=x_1} . \sigma; \quad (10)$$

zde x_1 znamená některý bod intervalu (a', b').

Nyní budeme zmenšovat plošku mezi našimi křivkami $y = y_0(x)$ a $y = y_1(x)$ do bodu M tak, že:

a) interval (a', b') konverguje k bodu x_0 (a tedy $x_1 \to x_0$);

b) vzdálenosti prvního řádu mezi křivkami y_0 a y_1, $r(y_1, y_0) \to 0$, t. j. δy a $\delta y'$ konvergují stejnoměrně k nule; tudíž $\overline{F}_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}$ konverguje stejnoměrně k $F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}$.

Za těchto předpokladů

$$\left[\overline{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{F}_{y'}\right]_{x=x_1} \to \left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0}.$$

Formule (10) nabude tvaru

$$J(y_1) - J(y_0) = \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0} + \varepsilon\right\}\sigma, \quad (10')$$

kde ε konverguje k nule spolu se σ. Výraz $\left[F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0}\sigma$ se nazývá variací $J(y)$ v bodě M o úsečce x_0 a označuje se takto:

$$\delta J(y_0)_M = \left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0} \sigma.$$

Variace v bodě je rovna přírůstku až na veličinu nekonečně malou vyššího řádu než σ.

Výraz

$$\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_0} = \lim_{\sigma\to 0} \frac{J(y_1) - J(y_0)}{\sigma}$$

se nazývá funkcionální derivací funkcionálu $J(y)$ v bodě M.

Variace a funkcionální derivace v bodě jsou obdobou parciálního diferenciálu a parciální derivace funkce více proměnných. Úplný diferenciál se rovnal součtu parciálních derivací, násobených přírůstky proměnných.

Variace $\delta J = \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right) \delta y \,\mathrm{d}x$ je rovna integrálu funkcionální derivace, násobené přírůstkem funkce.

Nutnou podmínkou extrému funkce více proměnných bylo, aby se všechny parciální derivace (parciální diferenciály) rovnaly nule.

Nutnou podmínkou extrému funkcionálu (Eulerova rovnice) je, aby se funkcionální derivace ve všech (vnitřních) bodech extremální křivky rovnaly nule (neboli, aby se variace ve všech vnitřních bodech rovnaly nule).

Použijeme-li pojmu variace v bodě, můžeme uvést ještě jeden důkaz Eulerovy rovnice. Přitom za obvyklých předpokladů o funkci $F(x, y, y')$ dokážeme, že když jakákoli spojitá křivka $y = y(x)$, i když nepatří do třídy C_2 (nebo C_1), vede ve srovnání ke všem sobě blízkým (ve smyslu vzdálenosti nultého řádu) křivkám třídy C_2, k extrému J, pak v každém bodě, který je vnitřním bodem intervalu spojitosti $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, vyhovuje funkce $y(x)$ Eulerově rovnici. Neboť nechť je pro bod x_0 tohoto intervalu

$$\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_0} = d.$$

Variujeme-li funkci $y(x)$ v okolí bodu $x = x_0$ (t. j. změníme-li $y(x)$ o přírůstek $\delta y(x)$, různý od nuly jenom v tom okolí bodu x_0, kde je y'' spojitá), potom z formule (10′) dostaneme

$$\Delta J = J(y + \delta y) - J(y) = \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_0} + \varepsilon\right\} \sigma,$$

t. j.

$$\Delta J = \sigma d + \varepsilon \sigma,$$

kde $\varepsilon \to 0$ pro $\sigma \to 0$. Protože $\sigma \to 0$ může mít jakékoliv znaménko, kdežto ΔJ musí být stále téhož znamení, zjistíme na základě pomocné věty se str. 51, že $d = 0$, t. j. v tomto bodě $y(x)$ vyhovuje Eulerově rovnici.[3])

Invariance Eulerových rovnic. Námi uvedené definice funkcionální derivace v bodě lze použít k tomu, abychom dostali jednu důležitou vlastnost extremál.

Zachováme-li předchozí označení, přejdeme od soustavy souřadnic (x, y) ke křivočaré soustavě souřadnic (u, v):

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

kde funkce φ a ψ mají spojité parciální derivace druhého řádu. Křivky γ: $y = y(x)$ a γ_1: $y = y_1(x)$ budou v nových souřadnicích vyjádřeny rovnicemi

$$v = v(u),\ v = v_1(u).$$

Ploška, obsažená mezi oběma křivkami, bude mít v nových souřadnicích obsah σ_1. Nechť se tato ploška zmenšuje na bod. Potom poměr obsahů této plošky ve starých a nových souřadnicích $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ konverguje k funkcionálnímu determinantu

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix},$$

který je podle předpokladu různý od nuly. Funkcionál

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

přejde ve funkcionál funkce $v(u)$:

$$J(y) = J_1(v) = \int_{a_1}^{b_1} F\left[\varphi(u, v), \psi(u, v), \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'}\right] . (\varphi_u + \varphi_v v')\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} F_1\,(u, v, v')\,\mathrm{d}u.$$

Je-li

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{J(y_1) - J(y)}{\sigma} = 0,$$

---

[3]) Tento důkaz by nebyl přesný, kdybychom vzali za třídu srovnávaných čar třídu C_1. Nebylo by těžké dokázat pomocí transformace Du Bois-Reymondovy, že udílí-li křivka $y = y(x)$ extrém integrálu J ve srovnání se všemi blízkými křivkami třídy C_1, pak v každém bodě této křivky, který je vnitřním bodem intervalu spojitosti $y(x)$ a $y'(x)$, je vyhověno Eulerově rovnici

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0$$

a pro $F_{y'y'} \neq 0$ existuje v tomto bodě spojitá druhá derivace $y''(x)$.

pak podle shora uvedených poznámek je

$$\lim_{\sigma_1 \to 0} \frac{J_1(v_1) - J_1(v)}{\sigma_1} = \lim_{\sigma \to 0} \left[\frac{J(y_1) - J(y)}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1}\right] = 0.$$

Funkcionální derivace funkcionálu $J_1(v)$ v každém bodě křivky γ je rovna nule. Je-li tudíž γ extremálou pro funkcionál $J(y)$, pak γ je rovněž extremálou pro funkcionál $J_1(v)$. Vlastnost křivky být extremálou je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic.

Analyticky to znamená: je-li křivka $y = y(x)$ extremálou pro integrál $J[y(x)]$, pak každá jednoznačná větev křivky $v = v(u)$, definovaná rovnicí

$$\psi(u, v) = y[\varphi(u, v)], \tag{11}$$

bude extremálou pro integrál $J_1[v(u)]$; rovnice (11) bude integrálem Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \frac{\partial F_1}{\partial v'} = 0. \tag{12}$$

Bude-li obecný integrál Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

odpovídající funkcionálu $J[y(x)]$, *roven*

$$y = y(x, \alpha, \beta),$$

pak obecný integrál Eulerovy rovnice (12), *odpovídající funkcionálu* $J_1[v(u)]$, *bude*

$$\psi(u, v) = y[\varphi(u, v), \alpha, \beta].$$

Eulerova rovnice zůstane rovněž invariantní, vyjádříme-li křivky γ v parametrickém tvaru; v geometrických úlohách je tento způsob vyjádření čáry zvláště vhodný proto, že nám ihned umožňuje osvobodit se od podmínky, že každá křivka třídy přípustných čar protíná rovnoběžku s osou Oy v jednom bodě. Této otázce věnujeme později speciální kapitolu.

Uvedeme nyní dvě aplikace principu invariance Eulerovy rovnice.

Příklad 1. Při vyšetřování a integraci Eulerovy rovnice se často používá záměny proměnných. Užijeme-li principu invariance, můžeme tuto transformaci provést s výrazem za integračním znamením a pak pro nový integrál napsat Eulerovu rovnici — bude to původní rovnice vyjádřená v nových proměnných.

Jako příklad vyšetříme integrál

$$J = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, \mathrm{d}\varphi.$$

Soustava extremál je určena rovnicí

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = 0. \tag{13}$$

Při záměně proměnných

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

přejde integrovaný výraz ve výraz $\sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x$ a tudíž přejde při téže záměně proměnných rovnice (13) ve tvar

$$y'' = 0$$

s obecným integrálem

$$y = \alpha x + \beta.$$

Z toho bude obecný integrál rovnice (13)

$$r\sin\varphi = \alpha r\cos\varphi + \beta.$$

Příklad 2. Budiž dán funkcionál $J(\gamma)$ definovaný pro všechny jednoduché oblouky γ, které mají spojitě se měnící tečnu, a mějme pro čáry γ, vyjádřené v pravoúhlých souřadnicích rovnicí $y = y(x)$ (funkce $y(x)$ a její derivace $y'(x)$ jsou jednoznačné a spojité),

$$J(\gamma) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme nyní, že mezi všemi čarami γ (spojujícími dva dané body A a B), na nichž je $J(\gamma)$ definován, existuje čára γ_0, dávající integrálu $J(\gamma)$ extrém, kterou nelze vyjádřit funkcí $y = y(x)$ třídy C_1 (existují tečny křivky γ_0 rovnoběžné s osou Oy; některé rovnoběžky s osou Oy protínají křivku γ_0 aspoň ve dvou bodech). Podle principu invariance snadno nahlédneme, že čára γ_0 bude integrální křivkou Eulerovy rovnice

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0. \tag{14}$$

Vskutku, vždycky můžeme zvolit křivočarou soustavu souřadnic (u, v) tak, aby v této soustavě souřadnic byla hledaná křivka vyjádřena funkcí $v = v(u)$ třídy C_1, pak ale bude γ_0 integrálem Eulerovy rovnice, napsané pro J v soustavě souřadnic (u, v); bude tudíž podle principu invariance Eulerovy rovnice křivka γ_0 rovněž integrálem rovnice (14).

Jako příklad na použití této poznámky můžeme uvést úlohu o čáře nejrychlejšího sestupu, když je počáteční rychlost rovna nule (§ 1). V této úloze má extremála, vyhovující počátečním podmínkám, v počátečním bodě tečnu rovnoběžnou s osou Oy, t. j. nepatří do třídy C_1.

§ 11. Druhá variace.

Druhá variace. U funkce jedné nebo více proměnných obracíme se při vyšetřování znaménka přírůstku funkce k druhému diferenciálu, jestliže se první diferenciál rovná identicky nule. Vyšetřování druhého diferenciálu nám dává další nutné podmínky pro maximum a minimum (speciálně umožňující rozlišovat případ maxima od případu minima) a rovněž postačující podmínky maxima nebo minima. Analogicky se postupuje v případě funkcionálů.

Budiž definován funkcionál

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

na křivkách třídy C_1 o pevných koncových bodech.

Rozvineme-li funkci F v Taylorovu řadu a zavedeme-li označení

$$y_1(x) = y(x) + \delta y(x),$$

kde $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, zjistíme, že

$$J(y_1) - J(y) = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_a^b (\overline{F}_{yy}\delta y^2 + 2\overline{F}_{yy'}\delta y \delta y' + \overline{F}_{y'y'}\delta y'^2)\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

kde

$$\overline{F}_{yy} = F_{yy}[x, y(x) + \Theta_1 \delta y(x), y'(x) + \Theta_2 \delta y'(x)]$$
$$(|\Theta_1| \leqq 1,\ |\Theta_2| \leqq 1),$$

a analogicky se definují $\overline{F}_{yy'}$ a $\overline{F}_{y'y'}$. Pro dostatečně malé $r(y_1, y)$ [$r(y_1, y)$ je vzdálenost prvního řádu] je

$$\overline{F}_{yy} = F_{yy} + \varepsilon_1,\ \overline{F}_{yy'} = F_{yy'} + \varepsilon_2,\ \overline{F}_{y'y'} = F_{y'y'} + \varepsilon_3,$$

kde max $|\varepsilon_1|$, max $|\varepsilon_2|$, max $|\varepsilon_3|$ konvergují k nule spolu s $r(y, y_1)$. Je tudíž

$$J(y_1) - J(y) = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}\delta y^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}\delta y'^2)\,\mathrm{d}x + \varepsilon, \tag{15'}$$

kde

$$\varepsilon = \int_a^b (\varepsilon_1 \delta y^2 + 2\varepsilon_2 \delta y \delta y' + \varepsilon_3 \delta y'^2)\,\mathrm{d}x.$$

Protože je $|2\delta y \delta y'| \leqq \delta y^2 + \delta y'^2$, dostaneme

$$\left|\int_a^b 2\varepsilon_2 \delta y \delta y'\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |\varepsilon_2|\,[\delta y^2 + \delta y'^2]\,\mathrm{d}x$$

a

$$|\varepsilon| \leqq \int_a^b (\varepsilon_4 \delta y^2 + \varepsilon_5 \delta y'^2)\,\mathrm{d}x,$$

kde ε_4 a ε_5 stejnoměrně konvergují k nule spolu s $r(y, y_1)$. Je však

$$|\delta y| \leqq r(y, y_1), \quad |\delta y'| \leqq r(y, y_1),$$

a proto

$$|\varepsilon| \leqq (\max|\varepsilon_4| + \max|\varepsilon_5|)(b - a)\, r(y, y_1)^2.$$

Z toho plyne, že ε je veličina řádu vyššího než $r(y, y_1)^2$. Zanedbáme-li ji, zjistíme ze vztahu (15'), že je

$$J(y_1) - J(y) \doteq \delta J + \delta^2 J,$$

kde δJ je první variace funkcionálu J:

$$\delta J = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,\mathrm{d}x, \tag{16}$$

a výraz

$$\delta^2 J = \tfrac{1}{2}\int_a^b (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2)\,\mathrm{d}x, \tag{17}$$

analogický druhému diferenciálu, se nazývá *druhá variace* funkcionálu $J(y)$.

Legendreova podmínka. Nyní dokážeme, že *když křivka* $y = y(x)$ *třídy* C_1 *realisuje minimum* J (resp. maximum), *pak pro libovolnou funkci* $\eta(x)$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$, *třídy* C_1 *je druhá variace nezáporná* (resp. nekladná):

$$\delta^2 J \geqq 0 \quad (\text{resp. } \delta^2 J \leqq 0).$$

Předpokládejme totiž opak, že pro některou funkci $\eta(x)$

$$\delta^2 J < 0.$$

Vyšetřujme soustavu funkcí $y(x) + t\eta(x)$. Potom

$$J(y + t\eta) - J(y) = t\delta J + t^2\delta^2 J + \bar{\varepsilon} t^2 r(y, \bar{y})^2,$$
$$|\bar{\varepsilon}| \leqq (\max|\bar{\varepsilon}_4| + \max|\bar{\varepsilon}_5|)\ (b - a),$$

kde δJ a $\delta^2 J$ jsou určeny nerovnostmi (16) a (17), $\bar{y} = y(x) + \eta(x)$ a $\bar{\varepsilon}$ konverguje k nule spolu s t. Ježto podle předpokladu křivka $y = y(x)$ minimalisuje J, je $\delta J = 0$, a tudíž znaménko pravé části pro dostatečně malá t souhlasí se znaménkem $\delta^2 J$, t. j. pro tytéž hodnoty

$$J(y + t\eta) - J(y) < 0,$$

což je ve sporu s podmínkou minima. Naše tvrzení je úplně dokázáno.

Vyšetřování druhé variace hraje základní úlohu při odvozování postačujících podmínek slabého extrému. Vyjádření druhé variace je možno poněkud zjednodušit.

Protože $$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \quad \text{a}$$

$$2\int_a^b F_{yy'}\delta y\delta y'\,\mathrm{d}x = \int_a^b F_{yy'}\,\mathrm{d}(\delta y^2) = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{yy'})\,\delta y^2\,\mathrm{d}x,$$

pak

$$\delta^2 J = \int_a^b (P\delta y^2 + R\delta y'^2)\,\mathrm{d}x,$$

kde

$$P = \tfrac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right),\quad R = \tfrac{1}{2}F_{y'y'}.$$

Nyní odvodíme nutnou podmínku pro nezápornost výrazu

$$\int_a^b (P\delta y^2 + R\delta y'^2)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 3 (Legendre). *Pro to, aby kvadratický funkcionál*

$$\int_a^b [P(x)\delta y^2 + R(x)\delta y'^2]\,\mathrm{d}x$$

byl nezáporný pro jakokouli funkci $\delta y(x)$ třídy C_1, pro niž $\delta y(a) = \delta y(b) =$

$= 0$, *je nutné, aby v intervalu* $a \leqq x \leqq b$ *byla splněna nerovnost*

$$R(x) \geqq 0.$$

Předpokládejme, že pro některé x_0 ($a \leqq x_0 \leqq b$)

$$R(x_0) = -2p \quad (p > 0).$$

V takovém případě vzhledem k spojitosti $R(x)$ můžeme předpokládat, že v některém intervalu $[a_1, b_1]$ délky $h > 0$, obsahujícím bod x_0 a obsaženém v intervalu $[a, b]$,

$$R(x) < -p$$

pro $a_1 \leqq x \leqq b_1$ ($b_1 = a_1 + h$). Označme M maximum $|P(x)|$ v intervalu $[a, b]$ a utvořme funkci $\delta y = \delta y(x)$:

$$\delta y(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi \cdot \dfrac{x - a_1}{h} \text{ pro } a_1 \leqq x \leqq b_1, \\ 0 \text{ v ostatních bodech intervalu.} \end{cases} \tag{18}$$

Tato funkce $\delta y(x)$ náleží do třídy C_1. Je nyní zřejmé, že

$$\int_a^b (P\delta y^2 + R\delta y'^2)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} P \sin^4 \pi \frac{x - a_1}{h} dx +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} R \frac{\pi^2}{h^2} \sin^2 2\pi \frac{x - a_1}{h}\, dx < Mh - \frac{p\pi^2}{h}.\text{[4]}$$

Pro h dostatečně malé stane se $Mh - \dfrac{p\pi^2}{h}$ záporným. Zvolme takové malé h a dosaďme do (18); dostaneme funkci $\delta y(x)$, pro niž je

$$\int_a^b (P\delta y^2 + R\delta y'^2)\, dx < 0.$$

Z toho plyne nutná podmínka pro existenci minima:

Legendreova podmínka. *Pro to, aby extremála* $y = y(x)$ *realisovala minimum funkcionálu*

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\, dx,$$

[4]) Protože $P \sin^4 \pi \dfrac{x - a_1}{h} \leqq P \leqq M$, je $R \sin^2 2\pi \dfrac{x - a_1}{h} < -p \sin^2 2\pi \dfrac{x - a_1}{h} < -p$.

je nutné, aby byla splněna podél extremály nerovnost:

$$F_{y'y'} \geqq 0.$$

Analogicky: *pro to, aby extremála* $y = y(x)$ *realisovala maximum funkcionálu*

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

je nutné, aby byla splněna podél extremály nerovnost

$$F_{y'y'} \leqq 0.$$

K důkazu stačí připomenout, že nutnou podmínkou minima je nezápornost druhé variace, takže Legendreova podmínka ihned plyne ze shora dosaženého výsledku.

KAPITOLA III.

ZOBECNĚNÍ NEJJEDNODUŠŠÍ ÚLOHY

§ 12. Prostorová úloha.

Formulace úlohy. Doposud jsme se omezovali na úlohy, kdy funkcionál závisel na čáře ležící v rovině. Mnoho námi uvedených příkladů z fysiky nás přivádí k úloze najít extrémy funkcionálů závislých na prostorových čarách. Takovou je na příklad úloha o lomu světla.

Předpokládejme, že rychlost, jíž se šíří světlo v nehomogenním prostředí, je danou funkcí bodu prostoru (x, y, z):

$$v = v(x, y, z);$$

chceme určit dráhu světelného paprsku jdoucího dvěma danými body $A(x_0, y_0, z_0)$ a $B(x_1, y_1, z_1)$.

Použijeme-li opět shora popsaného Fermatova principu, je možno tuto úlohu převést na úlohu stanovit čáru, podél níž se pohybující paprsek dostane z bodu A do bodu B v nejkratší době. Jsou-li

$$y = y(x), \ z = z(x)$$

rovnice libovolné křivky spojující dva dané body, pak je doba T, jíž světlo potřebuje, aby proběhlo z A do B (podél této křivky), vyjádřena integrálem

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} \, dx.$$

Tím se naše úloha převede na úlohu určit v prostoru čáru, podél níž integrál T nabývá nejmenší hodnoty.

Budeme se nyní zabývat úlohou nalézt extrém funkcionálu závislého na čáře, ležící v prostoru o třech nebo více rozměrech. Tuto úlohu můžeme zformulovat takto. Je dána funkce

$$F(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')$$

$2n + 1$ proměnných:

$$x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n'.$$

F je spojitá spolu se svými parciálními derivacemi podle všech argumentů do druhého řádu včetně. Mezi všemi křivkami

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$$

($y_i'(x)$ jsou spojité) prostoru o $n + 1$ rozměrech, spojujícími dva dané body $A(a_0, b_1^0, \ldots, b_n^0)$ a $B(a_1, b_1^1, \ldots, b_n^1)$ určit tu, podél níž integrál

$$J = \int_{a_0}^{a_1} F(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}x$$

nabývá extremální hodnoty.

Vzdálenost mezi prostorovými křivkami. Když jsme vyšetřovali nejjednodušší úlohu, zpřesnili jsme formulaci úlohy tím, že jsme zavedli pojem „ε-okolí" dvou křivek a rozdělili obecný pojem extrému na extrém absolutní, relativní silný a relativní slabý. Všechny tyto pojmy lze ihned rozšířit na obecnou úlohu námi právě danou.

Vzdáleností k-tého řádu mezi křivkami

$$y_i = y_i(x), \ i = 1, 2, \ldots, n$$

a

$$y_i = \overline{y}_i(x), \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

budeme rozumět největší z maximálních hodnot $(k + 1)n$ funkcí:

$$|\overline{y}_i(x) - y_i(x)|, \ |\overline{y}_i'(x) - y_i'(x)|, \ldots, |\overline{y}_i^{(k)}(x) - y_i^{(k)}(x)|,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \ a \leqq x \leqq a_1.$$

Zavedeme-li takovým způsobem pojem vzdálenosti, můžeme ihned přenést, aniž bychom něco změnili ve shora přijatých definicích ε-okolí různých řádů, definice absolutního, relativního atd. extrému na naši obecnou úlohu.

Nutné podmínky pro extrém. V této kapitole se omezíme jenom na důkaz základních nutných podmínek, které musí splňovat každá křivka třídy připustných čar, podél níž integrál J nabývá extremální hodnoty.

Věta I. *Jestliže křivka*

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$$

patří do třídy C_1 přípustných čar a vede k extrému integrálu J, pak funkce

$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ *vyhovují systému diferenciálních rovnic:*[1])

$$\left.\begin{aligned} &F_{y_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_1'} = 0, \\ &F_{y_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_2'} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_{y_n} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_n'} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Úloha této věty je v aplikacích táž, jako úloha již dříve rozbíraných analogických nutných podmínek v jiných problémech variačního počtu.

Systém (1) je systémem n diferenciálních rovnic o n neznámých funkcích: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Každá rovnice je v obecném případě rovnicí druhého řádu. Bude tedy obecný integrál tohoto systému obsahovat $2n$ libovolných konstant:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ y_2 &= y_2(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= y_n(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Každá křivka soustavy (2) se nazývá extremálou dané úlohy variačního počtu. Podle této věty je tedy každá křivka, která činí integrál J extremálním a která patří do třídy přípustných čar, extremálou.

Úloha skutečně určit hledanou křivku se tudíž převede na úlohu určit obecný integrál systému (2) a stanovit konstanty α_i. Podle shora uvedené formulace úlohy určí se tyto konstanty z $2n$ podmínek, které obdržíme z toho, že hledaná křivka jde body A a B.

Přejdeme k důkazu věty. Zavedeného pojmu variace křivky $y = y(x)$ lze přímo použít i v této úloze. Předpokládejme, že křivka

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dává minimum; v takovém případě pro všechny možné (dostatečně malé) variace přípustných křivek $y_i = y_i(x)$ musí se integrál J zvětšit. Tudíž se musí zvětšit, zůstanou-li všechny funkce y_i pro $i \neq k$ beze

[1]) Nezáleží na tom, zda extrém — slabý, silný, absolutní.

změny a funkci $y_k = y_k(x)$ variujeme. V souhlase s tím budeme předpokládat, že všechna $y_i = y_i(x)$ $(i \neq k)$ jsou pevná, a potom je J funkce čáry $y_k = y_k(x)$. Podle základní nutné podmínky takové nejjednodušší úlohy musí se variace tohoto funkcionálu rovnat nule v každém bodě. Je tedy

$$F_{y_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_k'} = 0 \quad (k = 1, 2, .., n).$$

O existenci y_k''. Při důkazu rovnic (1) jsme předpokládali, že všechny funkce $y_i'(x)$ mají spojité derivace. Zapíšeme-li rovnice (1) ve tvaru Du Bois-Reymondově, můžeme dokázat, že za jistých podmínek bude mít hledaná křivka také spojitou druhou derivaci. Máme

$$\int_{a_0}^{x} F_{y_k}\,\mathrm{d}x - F_{y_k'} = C_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

kde C_k je konstanta. Podél extremály je výraz

$$Q_k(x) = \int_{a_0}^{x} F_{y_k}\,\mathrm{d}x$$

spojitou funkcí, která má spojitou derivaci. Zapíšeme-li soustavu (3) ve tvaru

$$F_{y_k'} = Q_k(x) - C_k \tag{4}$$

a předpokládáme-li, že je funkcionální determinant $\Delta = \left| \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \right|$ podél některé extremály $y_k = y_k(x)$ různý od nuly a že C_k v soustavě (4) jsou konstanty, které odpovídají extremále $y_k = y_k(x)$, pak ať je hodnota $x(a_0 \leqq x \leqq a_1)$ jakákoli, existuje řešení soustavy (4) vzhledem k y_k', které je identicky rovné $y_k'(x)$ a diferencovatelné spolu s $Q_k(x)$. Z toho soudíme, je-li podél extremály $\Delta \neq 0$, že tato extremála náleží do třídy C_2.[2])

Variace v bodě. V případě prostorových úloh nelze definici variace přímo zobecnit proto, že místní změny křivky je možno dělat v kterémkoli směru. Budiž dán funkcionál

$$J(\gamma) = \int_a^b F(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}x,$$

---

[2]) Viz G. M. Fichtengoľc, Kurs differenciaľnogo a integraľnogo isčislenija, sv. 1, kap. VI, § 2.

definovaný na čáře γ, dané v $(n + 1)$-rozměrném prostoru $(x, y_1, \ldots, y_n)$ rovnicemi

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ a \leqq x \leqq b).$$

Budiž kromě toho γ křivka ze třídy přípustných čar a γ_1 křivka blízká ke křivce γ téže třídy, daná rovnicemi

$$y_i^{(1)} = y_i(x) + \delta y_i(x).$$

Předpokládáme, že funkce δy_i jsou rovny nule všude až na interval $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, kde x_0 $(a < x_0 < b)$ je úsečka některého bodu na γ. Vektory o složkách

$$\delta x = 0,\ \delta y_1, \ldots, \delta y_n$$

spojující body křivky γ s body (které mají tytéž úsečky) křivky γ_1, budeme považovat za rovnoběžné v celém našem intervalu $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Označíme-li δn délku odpovídajícího vektoru a p_i jeho směrový kosinus vzhledem k ose Oy_i, pak $\delta y_i = p_i \delta n$, při čemž p_i jsou konstantní pro všechny naše vektory. Potom je

$$J(\gamma_1) - J(\gamma) \approx \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) \delta y_i \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} p_i \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) \delta n \,\mathrm{d}x.$$

Pro dostatečně malé ε máme

$$\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) \delta n \,\mathrm{d}x \approx \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right)_{x = x_0} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta n \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right)_{x = x_0} \delta N,$$

kde δN je obsah válcové plochy, ležící mezi γ a γ_1 a vytvořené vektory δn. Tak je

$$J(\gamma_1) - J(\gamma) \approx \delta N \sum_{i=1}^{n} p_i \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right)_{x = x_0}. \tag{5}$$

Z toho plyne, že

$$\lim_{\delta N \to 0} \frac{J(\gamma_1) - J(\gamma)}{\delta N} = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right)_{x = x_0}. \tag{5'}$$

Konvergenci δN k nule bereme v tom smyslu, že δn, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta n$ a ε konvergují k nule.

Výraz (5′) budeme nazývat funkcionální derivací funkcionálu J v daném bodě $M(x_0, y_i)$ a v daném směru $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, kdežto pravou část výrazu (5) variací v bodě M v daném směru $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tohoto funkcionálu.

Eulerova rovnice znamená, že funkcionální derivace integrálu J v libovolném bodě extremály (nebo jeho variace v bodě) je v libovolném směru rovna nule.

Obráceně, jestliže je v každém bodě vyšetřované křivky variace podle libovolného směru rovna nule, pak je křivka extremálou a variace funkcionálu je pro ni rovna nule.

V § 10 jsme dokázali invarianci Eulerovy rovnice v případě jedné neznámé funkce. Zcela analogické úvahy ukazují, že soustava Eulerových rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zachová svůj tvar, přejdeme-li od souřadnic $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ k libovolným $n + 1$ křivočarým souřadnicím.

Princip Hamilton-Ostrogradského. Vyšetřujme mechanický systém bez vazeb, skládající se z n bodů, které mají hmoty: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Označíme-li (x_i, y_i, z_i) souřadnice i-tého bodu, dostaneme pro kinetickou energii systému:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right].$$

Budiž G potenciál systému závislý na $3n$ souřadnicích všech bodů. Z jeho definice plyne, že síla, která působí na i-tý bod, má komponenty

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}, \ \frac{\partial G}{\partial y_i}, \ \frac{\partial G}{\partial z_i}.$$

Silami setrvačnosti se nazývají síly o komponentách

$$-m_i \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}, \ -m_i \frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2}, \ -m_i \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2}.$$

Kdybychom jimi působili v bodech soustavy, anulovali bychom jejich zrychlení.

Nechť se soustava pohybuje, při čemž pohyb je určen $3n$ funkcemi:

$$x_i = x_i(t), \ y_i = y_i(t), \ z_i = z_i(t),$$

a nechť má v určitém okamžiku t soustava polohu určenou $3n$ souřadnicemi jejích bodů. Nechť se dále každý z těchto bodů posune o δx_i, δy_i, δz_i. D'Alembertův princip o dynamickém systému bez vazeb říká:

Jestliže k silám působícím na body našeho systému přidáme síly setrvačnosti, pak je jejich celková elementární práce při libovolném posuvu rovna nule:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial G}{\partial y_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} \right) \delta y_i + \left(\frac{\partial G}{\partial z_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2} \right) \delta z_i \right] = 0.$$

Označíme-li

$$\delta n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\delta x_i^2 + \delta y_i^2 + \delta z_i^2)},$$

$$p_i = \frac{\delta x_i}{\delta n}, \ q_i = \frac{\delta y_i}{\delta n}, \ r_i = \frac{\delta z_i}{\delta n},$$

dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}-m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\right)p_i+\left(\frac{\partial G}{\partial y_i}-m_i\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2}\right)q_i+\left(\frac{\partial G}{\partial z_i}-m_i\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2}\right)r_i\right]=0.$$

Výraz

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}p_i+\frac{\partial G}{\partial y_i}q_i+\frac{\partial G}{\partial z_i}r_i\right)$$

není ničím jiným, než funkcionální derivací v uvedeném bodě integrálu $\int G\mathrm{d}t$ (připomeňme, že G závisí jenom na souřadnicích), kdežto výraz

$$\sum m_i\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}p_i+\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2}q_i+\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2}r_i\right)$$

je derivace v bodě funkcionálu $\int T\,\mathrm{d}t$; obě derivace jsou vzaty ve směru (p_i, q_i, r_i). Znamená tudíž d'Alembertův princip, že se funkcionální derivace (nebo variace) podle libovolného směru integrálu $\int(G+T)\,\mathrm{d}t$ po trajektorii $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$ rovnají nule. A to znamená (viz výše), že podél trajektorie

$$x_i = x_i(t),\ y_i = y_i(t),\ z_i = z_i(t)$$

$(3n + 1)$-rozměrného prostoru je

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(G+T)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{6}$$

Rovnost (6) vyjadřuje Hamilton-Ostrogradského princip. Integrál (6) má rozměr $\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}}$, t. j. rozměr účinku.

Komparativní křivky

$$x_i = \bar{x}_i(t),\ y_i = \bar{y}_i(t),\ z_i = \bar{z}_i(t)$$

v $(3n + 1)$-rozměrném prostoru (t, x_i, y_i, z_i) spojují tytéž body

$$[t_0, x_i(t_0), y_i(t_0), z_i(t_0)],\ [t_1, x_i(t_1), y_i(t_1), z_i(t_1)],$$

jako křivka $x_i = x_i(t), y_i = y_i(t), z_i = z_i(t)$. Přejdeme nyní od soustavy $3n$ souřadnic (x_i, y_i, z_i) určujících pohyb k libovolné soustavě souřadnic $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$ transformací

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}),\\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}),\\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}) \end{aligned}\right\}\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Kinetická energie bude pak mít tvar kvadratické formy

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,i=1}^{n} a_{ij}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}\ (a_{ij} = a_{ji})$$

v derivacích nových souřadnic podle času; a_{ij} závisí na souřadnicích q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Potenciál G přejde ve funkci nových souřadnic q_i. Zřejmě zachová podmínka (6) při přechodu k novým souřadnicím svoji platnost. Eulerovy rovnice podle (6) nám dají

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n), \tag{7}$$

kde znakem $\dot{q}_i$ označujeme derivaci $\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$.

Rovnice (7) mají v mechanice název Lagrangeových rovnic.

Přijali jsme za východisko d'Alembertův princip, odvolili jsme z něho princip Hamilton-Ostrogradského a jako důsledek posledního principu Lagrangeovy rovnice. Tyto tři formy obecných rovnic mechaniky jsou ekvivalentní a mohli bychom za východisko vzít kteroukoli z nich. Hamilton-Ostrogradského princip má řadu výhod před jinými formami. Rovnice (6) nezávisí na soustavě souřadnic a je často vhodné použít této vlastnosti invariance; již jsme jí použili při odvození Lagrangeových rovnic.

Protože T je kvadratická forma vzhledem k $\dot{q}_i$, je

$$\sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \tag{8}$$

Výraz $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ se nazývá obecným impulsem.

Nechť potenciál G a kinetická energie T nezávisí v explicitním tvaru na čase t. V tomto případě máme [3])

$$(G + T) - \sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = -C. \tag{7'}$$

[3]) Skutečně, násobíme-li rovnice (7) výrazem $\dot{q}_i\mathrm{d}t = \mathrm{d}q_i$ a sečteme-li je, pak nalezneme

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial G}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i \mathrm{d}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i - \mathrm{d}\sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

t. j.

$$\mathrm{d}G + \mathrm{d}T - \mathrm{d}\sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

z čehož dostaneme (7').

Odtud podle (8) dostaneme

$$H = -G + T = C, \tag{9}$$

kde C je konstantní veličina. Výraz H není ničím jiným než celkovou energií soustavy a vztah (9) vyjadřuje známý zákon o zachování mechanické energie.

§ 13. Legendreova podmínka pro prostorovou úlohu.

Nechť jsou v třídě C_1 přípustných čar, ležících v prostoru o $n + 1$ rozměrech $(x, y_1, \ldots, y_n)$ a definovaných rovnicemi $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, zvoleny dvě blízké křivky γ a $\bar{\gamma}$. Buďte

$$\left.\begin{aligned} y_i &= y_i(x) \\ y_i &= \bar{y}_i(x) \end{aligned}\right\} \quad [i = 1, 2, \ldots, n;\ \bar{y}_i(x) = y_i(x) + \delta y_i(x)]$$

rovnice těchto křivek. Na třídě C_1 budiž definován funkcionál

$$J(\gamma) = \int_a^b F(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

V tom případě je

$$\begin{aligned} J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) &= \int_a^b \{F(x, \bar{y}_i, \bar{y}_i') - F(x, y_i, y_i')\}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i}\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i')\,\mathrm{d}x + \end{aligned}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_a^b \Big(\sum_{i,j} F_{y_i y_j}\,\delta y_i \delta y_j + 2\sum_{i,j} F_{y_i y_j'}\delta y_i \delta y_j' + \sum_{i,j} F_{y_i' y_j'}\delta y_i' \delta y_j'\Big)\,\mathrm{d}x + \varepsilon,$$

kde ε je veličina řádu vyššího než $r^2(\gamma, \gamma_1)$ (viz § 11). Výraz

$$\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i}\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i')\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) \delta y_i\,\mathrm{d}x$$

je hlavní lineární část přírůstku (variace). Je-li γ extremálou, pak je $\delta J \equiv 0$ a hlavní lineární částí přírůstku se stane kvadratický funkcionál (forma) v δy_i, t. j. druhá variace

$$\begin{aligned} \delta^2 J = \int_a^b \Big(\sum_{i,j} F_{y_i y_j}\delta y_i \delta y_j &+ 2\sum_{i,j} F_{y_i y_j'}\delta y_i \delta y_j' + \\ &+ \sum_{i,j} F_{y_i' y_j'}\delta y_i' \delta y_j'\Big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{11}$$

Nutná podmínka pro to, aby γ minimalisovala J, spočívá podle obecných úvah vyložených na konci předcházející kapitoly v tom, aby bylo $\delta^2 J$ nezáporné.

Věta 2 (Legendreova podmínka). *Nutnou podmínkou nezápornosti druhé variace je nezápornost formy*

$$A_M = \sum_{i,j} F_{y_i' y_j'} \eta_i \eta_j \tag{12}$$

v každém bodě M extremály neboli, což je totéž, splnění nerovností

$$F_{y_1'y_1'} \geqq 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} \geqq 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \ldots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \ldots & F_{y_2'y_n'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \ldots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} \geqq 0$$

v každém bodě extremály.

Uvedeme formu A_M v některém bodě

$$M(x_0, y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0))$$

extremály na kanonický tvar lineární transformací:

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k.$$

Po provedení nabude forma A_M tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(M)} \xi_i^2. \tag{13}$$

Forma A_M je nezáporná, jsou-li všechna odpovídající čísla $\lambda_i^{(M)}$ nezáporná.

Zavedeme funkce $\delta z_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pro něž platí:

$$\delta y_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \delta z_k(x),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ (α_{ik} jsou konstanty).

V tom případě je

$$\delta y_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \delta z_k'.$$

Výraz za integračním znamením v $\delta^2 J$ přejde ve výraz

$$\Sigma a_{ij} \delta z_i \delta z_j + 2 \Sigma b_{ij} \delta z_i \delta z_j' + \Sigma c_{ij} \delta z_i' \delta z_j',$$

kde a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} jsou nějaké funkce proměnné x. V bodě M máme

$$c_{ij}(x_0) = \lambda_{ij}^{(M)} = 0 \quad (i \neq j).$$

Budiž nyní všude v intervalu $[a, b]$ $\delta z_2 = \delta z_3 = \ldots = \delta z_n = 0$. Potom je

$$\delta J = \int (a_{11}\delta z_1^2 + 2b_{11}\delta z_1 \delta z_1' + c_{11}\delta z_1'^2)\, \mathrm{d}x.$$

Podle Legendreovy věty (viz kap. II) je nutnou podmínkou nezápornosti $\delta^2 J$ vyplnění nerovnosti $c_{11} \geqq 0$ všude v $[a, b]$. Speciálně tedy $c_{11}(x_0) = \lambda_1^{(M)} \geqq 0$. Analogicky se dokazuje nutnost nerovností $\lambda_2^{(M)} \geqq 0$, $\lambda_3^{(M)} \geqq 0, \ldots, \lambda_n^{(M)} \geqq 0$. Z toho tedy plyne nezápornost formy A_M.

Příklad. V Hamiltonově principu

$$\delta \int (G + T)\, \mathrm{d}t = 0$$

neobsahuje G derivace q_i', kdežto T je positivně definitní forma těchto derivací:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{ij} q_i' q_j'.$$

Forma A_M bude v tomto případě mít tvar

$$A_M = \Sigma T_{q_i' q_j'} \eta_i \eta_j = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{ij} \eta_i \eta_j.$$

Z kladnosti formy T plyne kladnost formy A_M. Zde je tedy Legendreova podmínka pro minimum splněna.

§ 14. Případ derivací vyššího řádu.

Formulace úlohy. Shora rozvinutá methoda variací umožňuje skoro beze změny řešit také ty úlohy variačního počtu, kdy integrovaná funkce závisí nejenom na první derivaci, nýbrž také na derivacích vyšších řádů.

Jako příklady takových úloh mohou sloužit úlohy theorie pružnosti: určit tvar prohnuté osy nosníku při různých podmínkách na konce. Jak je známo, vede tato úloha na vyhledání extrému potenciální energie systému. Na druhé straně závisí potenciální energie prohnutého nosníku na křivosti. Zabývá se tedy tato skupina úloh hledáním extremálních křivek, když integrovaná funkce závisí na derivacích prvního a druhého řádu neznámé funkce.

Problém položíme obecně:

Mezi všemi křivkami $y = y(x)$ třídy C_n v intervalu $[x_0, x_1]$, vyhovujícími v koncových bodech podmínkám

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y_1',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

určit tu, podél níž integrál

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,\mathrm{d}x$$

(F je daná funkce $n + 2$ proměnných $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$) *nabývá extrémní hodnoty.*

Především se podrobněji zmíníme o funkci F. O funkci F budeme jako obvykle předpokládat, že je spojitá spolu se všemi svými parciálními derivacemi prvního a druhého řádu podle všech argumentů pro $x_0 \leqq x \leqq x_1$ a pro všechny možné hodnoty druhých argumentů.

Odvození Euler-Poissonovy rovnice. První základní výsledek v tomto problému je uveden v této větě.

Věta 3. *Jestliže křivka $\gamma : y = y(x)$, která patří do třídy přípustných čar C_n, vede k extrému integrálu J, pak vyhovuje rovnici*

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} F_{y^{(n)}} = 0. \tag{14}$$

Objasníme si význam tohoto výsledku. Rovnice (14), jak je patrno, bude v obecném případě (pro $F_{y^{(n)}y^{(n)}} \neq 0$) řádu $2n$ a tudíž její obecný integrál bude obsahovat $2n$ libovolných konstant a bude mít tvar

$$y = f(x, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n). \tag{15}$$

Jestliže tedy hledaná křivka existuje, je obsažena v soustavě křivek (15) závislé na $2n$ parametrech. Konstanty můžeme za předpokladu existence hledané křivky určit z $2n$ podmínek na koncové body.

Omezíme se na důkaz věty pro případ $n = 2$:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,\mathrm{d}x.$$

Mějme dány dvě křivky γ a $\bar{\gamma}$ třídy C_2

$$y = y(x),\ y = \bar{y}(x) = y(x) + \delta y,$$

které mají v koncových bodech společné tečny a spojují body $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$:

$$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = \delta y'(x_0) = \delta y'(x_1) = 0.$$

Vzdáleností $r(\gamma, \bar{\gamma})$ mezi těmito křivkami nazveme největší z následujících tří čísel:

$$\max|\delta y|, \ \max|\delta y'| \ \text{a} \ \max|\delta y''|.$$

Nyní najdeme hlavní lineární část přírůstku J při přechodu od křivky γ k nekonečně blízké křivce $\bar{\gamma}$. Máme

$$\Delta J = J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'')\,\mathrm{d}x - \\ - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,\mathrm{d}x = \\ = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'')\,\mathrm{d}x + \varepsilon r(\gamma, \bar{\gamma}), \tag{16}$$

kde jsou argumenty funkcí F_y, $F_{y'}$, $F_{y''}$ argumenty $x, y(x), y'(x), y''(x)$ a kde ε konverguje k nule spolu s $r(\gamma, \bar{\gamma})$. První člen ve výrazu ΔJ je lineární funkcionál lišící se od ΔJ o hodnotu nekonečně malou řádu vyššího než $r(\gamma, \bar{\gamma})$. To je variace našeho funkcionálu

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'')\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže nyní činí γ funkcionál J extremálním, je

$$\delta J \equiv 0. \tag{17}$$

Použijeme totiž formule (16) na křivku γ, definovanou rovnicí $\bar{y} = y(x) + t\delta y$, kde t je libovolný parametr, y a δy jsou křivky třídy C_2. Potom dostaneme

$$\Delta J = J(y + t\delta y) - J(y) = t\delta J + \varepsilon|t|\, r(y, y + \delta y).$$

Nyní zbývá jenom nechat konvergovat t libovolným způsobem k nule a použít pomocné věty § 8 (str. 51).

Snažme se nyní transformovat δJ. Integrujeme-li druhý a třetí člen za integračním znamením per partes, dostaneme

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y'\,\mathrm{d}x = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \delta y\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\delta y''\,\mathrm{d}x = [F_{y''}\delta y']_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\,\delta y'\,\mathrm{d}x =$$

$$= [F_{y''}\delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''}\delta y\,\mathrm{d}x;$$

podle podmínek na koncové body všechny zintegrované členy odpadnou a nakonec obdržíme

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''}\right) \delta y\,\mathrm{d}x.$$

Je-li $\delta J \equiv 0$, pak podle základní pomocné věty (a poznámky na str. 55) máme

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} = 0. \tag{18}$$

Je tedy nakonec, jestliže pro γ nabývá integrál J extrému, křivka γ integrálem rovnice (18). Tím je věta úplně dokázána.

Poznámka. Při integraci per partes jsme u vyšetřované funkce použili existence derivací třetího a čtvrtého řádu. Od této hypothesy můžeme upustit, zaměníme-li vyšetřovanou transformaci Lagrangeovu transformací Du Bois-Reymondovou.

Případ snížení řádu Poissonovy rovnice. V některých případech můžeme řád $2n$ Euler-Poissonovy rovnice snížit o jednu.

1. Předpokládejme, že integrovaná funkce nezávisí explicitně na y; potom nabude rovnice Euler-Poissonova tvaru

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

neboli po integrování

$$F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''} + \ldots \mp \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} F_{y^{(n)}} = C.$$

To je právě hledaný první integrál.

2. Předpokládejme, že integrovaná funkce nezávisí explicitně na nezávisle proměnné x:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', \ldots, y^{(n)})\,\mathrm{d}x.$$

Provedeme záměnu proměnných. Za nezávisle proměnnou budeme považovat y a x vezmeme za neznámou funkci proměnné y. Označíme-li pro stručnost znakem x' derivaci $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ a obecně $x'' = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}, \ldots, x^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}y^n}$, dostaneme

$$\mathrm{d}x = x'\,\mathrm{d}y,\ y' = \frac{1}{x'};\ y'' = -\frac{x''}{x'^3},\ y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ldots$$

Z toho plyne, že integrál J nabude v nových proměnných tvaru

$$J = \int_{y_0}^{y_1} F\left(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ldots\right) x'\,\mathrm{d}y.$$

Touto transformací převedeme původní úlohu variačního počtu na novou, při čemž nyní není ve výrazu za integračním znamením neznámá funkce $x = x(y)$ explicitně obsažena. Tudíž, položíme-li

$$F\left(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \ldots\right) = \Phi(y, x', x'', \ldots, x^{(n)}),$$

bude mít hledaný první integrál tvar

$$\Phi_{x'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Phi_{x''} + \ldots \mp \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\Phi_{x^{(n)}} = C.$$

3. Nakonec ukážeme jeden případ, kdy je možno ihned napsat obecný integrál rovnice Euler-Poissonovy. Nechť integrovaná funkce F závisí jenom na $y^{(n)}$. V tomto případě rovnice nabude tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

neboli

$$F_{y^{(n)}} = P_{n-1}(x),$$

kde $P_{n-1}(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$. Označíme-li znakem f funkci inversní k funkci $F_{y^{(n)}}$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = f(P_{n-1}(x)),$$

z čehož y najdeme integrováním:

$$y = \underbrace{\int\int \dots \int}_{n} f[P_{n-1}(x)]\, dx^n + Q_{n-1}(x),$$

kde Q_{n-1} je libovolný mnohočlen stupně $n - 1$.

Příklad. Do válcových otvorů A a B jsou vetknuty konce válcového homogenního pružného hmotného nosníku. Považujeme-li otvory A a B za části jednoho horizontálně položeného válce, chceme určit tvar prohnuté osy nosníku.

Všechny rozměry, hustotu a koeficienty pružnosti nosníku považujeme za známé. K řešení použijeme principu: je-li systém ve stabilní rovnováze, pak se pro všechny možné posuvy systému potenciální energie systému zvětší.

Označíme $2l$ vzdálenost mezi podpěrami, ϱ hmotu délkové jednotky nosníku a ds element oblouku prohnuté osy nosníku. Zavedeme soustavu souřadnic. Nechť Ox spojuje opěrné body, počátek souřadnic rozděluje úsečku AB na polovinu a osa Oy směřuje vertikálně nahoru. Vypočteme nyní potenciální energii nosníku za předpokladu, že rovnice její pružné osy je $y = y(x)$. Potenciální energie, která je způsobena silami pružnosti při ohybu, bude rovna

$$\tfrac{1}{2}\mu \int_0^L \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds,$$

kde L je délka části nosníku mezi podpěrami, φ je úhel, který svírá tečna s osou Ox a μ je konstantní koeficient, závislý na modulu pružnosti a na momentu setrvačnosti příčného průřezu nosníku. Nyní vyšetříme potenciální energii vytvořenou gravitačním polem. Element nosníku ds bude mít potenciální energii rovnu $\varrho y\, ds$. Z toho dostaneme potenciální energii všech elementů nosníku rovnou

$$\int_0^L \varrho y\, ds.$$

Sečteme-li nalezené veličiny, obdržíme celkovou potenciální energii nosníku

$$E = \int_0^L \left[\tfrac{1}{2}\mu \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \varrho y\right] ds.$$

Dosadíme-li $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ a $\dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (křivost), dostaneme

$$E = \int_{-l}^{+l} \left\{\tfrac{1}{2}\mu \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} + \varrho y \sqrt{1 + y'^2}\right\} dx.$$

Podle shora připomenutého principu vede naše úloha na hledání minima výrazu E. Výraz za integračním znamením na x explicitně nezávisí; můžeme tudíž použít shora vyloženého postupu k tomu, abychom ihned snížili řád rovnice. Avšak přitom obdržíme rovnici třetího řádu dosti složitého tvaru, kterou nelze v obecném případě elementárně integrovat. Z toho důvodu se nebudeme zabývat jejím vyšetřováním v tomto tvaru a omezíme se na přibližné řešení v této úloze obvyklé.

Považujeme-li ohyb nosníku za neveliký, zanedbáme druhé mocniny y'; pak výraz E nabude tvaru

$$E = \int_{-l}^{l} \{\tfrac{1}{2}\mu y''^2 + \varrho y\} \, dx.$$

Eulerova rovnice vypadá nyní takto:

$$\varrho + \frac{d^2}{dx^2} \mu y'' = 0,$$

neboli

$$y^{(IV)} = -\frac{\varrho}{\mu};$$

její obecný integrál bude

$$y = -\frac{\varrho}{24\mu} x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Čtyři neurčené konstanty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ je možno stanovit z počátečních podmínek. Z podmínek symetrie máme ihned $\alpha = \gamma = 0$; kromě toho v koncových bodech je

$$y(-l) = y(l) = -\frac{\varrho l^4}{24\mu} + \beta l^2 + \delta = 0,$$

$$y'(-l) = y'(l) = -\frac{\varrho}{6\mu} l^3 + 2\beta l = 0.$$

Odtud nakonec nalezneme

$$y = \frac{\varrho}{24\mu} [-x^4 + 2l^2x^2 - l^4].$$

§ 15. Případ funkce více proměnných.

Ve všech předcházejících úlohách jsme se zabývali funkcionály závislými na funkcích jedné proměnné. Přejdeme nyní k úloze najít extrém funkcionálu závislého na funkci n proměnných.

V rozvoji tohoto oddílu variačního počtu patří velká zásluha vynikajícímu ruskému matematikovi M. V. Ostrogradskému, který publikoval v r. 1834 svoji práci o variačním počtu pro množné integrály. V tomto díle M. V. Ostrogradskij uvádí nejobecnější vyjádření variace množného integrálu, když výraz za integračním znamením je funkcí několika proměnných a parciálních derivací libovolného řádu.

Formule Ostrogradského, která vešla do všech učebnic analysy, týkající se transformace množných integrálů, je uvedena v této práci spolu s definicí variace množného integrálu.

Formulace úlohy. Mějme v n-rozměrném prostoru oblast Q, kterou budeme pro jednoduchost považovat za omezenou. Vezmeme třídu C_1 funkcí $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definovaných a spojitých v oblasti Q a na její hranici, které mají spojité parciální derivace $\varphi_i = \varphi_{x_i}$. Nazveme vzdáleností mezi funkcemi φ a ψ třídy C_1:

$$r(\varphi, \psi) = \max\{|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|,\\ |\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\}\\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soustava těch funkcí ψ, pro něž $r(\varphi, \psi) < \varepsilon$, tvoří ε-okolí funkce φ. Definujme na C_1 funkcionál

$$J(\varphi) = \int_Q \cdots \int F(x_i, \varphi, \varphi_i)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

kde F je daná spojitá funkce $2n + 1$ proměnných argumentů x_i, φ, $\varphi_{x_i} = \varphi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, mající parciální derivace podle všech argumentů do třetího řádu včetně.

Označme $\overline{C}_1$ soustavu těch funkcí φ ze třídy C_1, které nabývají na hranici Q předepsaných hodnot. Na hranici Q je definována funkce $f(A)$ a funkce φ v každém bodě A hranice Q je rovna

$$\varphi(A) = f(A).$$

Mezi všemi funkcemi třídy $\overline{C}_1$ hledáme tu, která činí funkcionál $J(\varphi)$ extrémním.

Nechť funkce φ z $\overline{C}_1$ činí $J(\varphi)$ extrémním a funkce $\varphi + \delta\varphi$ je některá jiná funkce téže třídy, ležící v jistém ε-okolí funkce φ. Zřejmě je ve všech bodech hranice

$$\delta\varphi(A) = 0.$$

Klademe-li

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\delta\varphi = \delta\varphi_{xi} = \delta\varphi_i,$$

najdeme, že

$$J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi) =$$

$$= \int\int_Q \dots \int [F(x_i, \varphi + \delta\varphi, \varphi_i + \delta\varphi_i) - F(x_i, \varphi, \varphi_i)] \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int\int_Q \dots \int [F_\varphi\delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i}\delta\varphi_i] \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n + \eta, \tag{19}$$

kde η je veličina vyššího řádu ve srovnání s $r(\varphi, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$.

Výraz

$$\delta J = \int\int_Q \dots \int [F_\varphi\delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i}\delta\varphi_i] \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

je hlavní lineární částí přírůstku $J(\varphi + \delta\varphi) - J(\varphi)$[4]) a nazývá se variací J.

Nutnou podmínkou pro to, aby pro φ nabýval funkcionál $J(\varphi)$ extrému, je, aby jeho variace byla identicky rovna nule:

$$\delta J = \int\int_Q \dots \int [F_\varphi\delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i}\delta\varphi_i] \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \equiv 0 \tag{20}$$

(to se dokazuje stejně jako analogická tvrzení v § 8 a 14 na základě pomocné věty na str. 51); identita (20) musí platit pro všechna $\delta\varphi$ ze třídy C_1, které jsou rovny nule na hranici Q.

Transformace variace. Je možno, jak jsme to učinili v § 8, převést integrací per partes výraz δJ na jednodušší tvar.

Vedeme všechny možné přímky rovnoběžné s osou Ox_i; vyšetřujeme interval AB, ležící na jedné takové přímce uvnitř Q, jehož koncové body leží na hranici Q. Máme

$$\int_A^B F_{\varphi_i}\delta\varphi_i \, \mathrm{d}x_i = [F_{\varphi_i}\delta\varphi]_A^B - \int_A^B \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})\delta y \, \mathrm{d}x_i =$$

$$= -\int_A^B \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i}) \, \delta\varphi \, \mathrm{d}x_i. \tag{21}$$

[4]) T. j. liší se od přírůstku o veličinu nekonečně malou řádu vyššího než $r(\varphi, \varphi + \delta\varphi)$.

Zde je $\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})$ úplná derivace funkce

$F_{\varphi_i}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$
podle x_i:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i}) = F_{x_i\varphi_i} + F_{\varphi\varphi_i}\varphi_i + \sum_{j=1}^{n} F_{\varphi_j\varphi_i}\varphi_{ji}.$$

Na základě (20) a (21) dojdeme k rovnostem

$$\iint_Q\ldots\int F_{\varphi_i}\delta\varphi_i \, dx_1 \ldots dx_n = -\iint_Q\ldots\int \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})\delta\varphi \, dx_1 \ldots dx_n$$

a

$$\delta J = \iint_Q\ldots\int [F_\varphi\delta\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{\varphi_i}\delta\varphi_i] \, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \iint_Q\ldots\int \left[F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{\varphi_i})\right] \delta\varphi \, dx_1 \ldots dx_n \equiv 0. \qquad (22)$$

Pomocná věta. *Je-li*

$$\iint_Q\ldots\int M\eta \, dx_1 \ldots dx_n \equiv 0,$$

kde M je spojitá funkce na Q a η libovolná funkce třídy C_1, jež je na hranici Q rovna nule, pak je

$$M \equiv 0$$

všude v oblasti Q.

Nechť je totiž v bodě A oblasti Q

$$M(A) = c \neq 0;$$

vezměme pro určitost $c > 0$. Sestrojme kolem bodu A pravoúhelník R:

$$a_i \leqq x_i \leqq b_i,$$

který leží celý v Q a je takový, že $M(A') > \frac{c}{2}$ pro každý bod A' z R. Definujme funkci η na Q tímto způsobem:

$$\eta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi(x_i - a_i)}{b_i - a_i},$$

je-li bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v obdélníku R, a

$$\eta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

leží-li bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vně R.

Lehko se přesvědčíme, že funkce η je funkcí třídy C_1, která je rovna nule na hranici Q, a proto musí pro ni platit

$$\iint\limits_Q \ldots \int M\eta \, dx_1 \ldots dx_n = 0.$$

Na druhé straně je

$$\iint\limits_Q \ldots \int M\eta \, dx_1 \ldots dx_n = \iint\limits_R \ldots \int M\eta \, dx_1 \ldots dx_n >$$

$$> \frac{c}{2} \int\limits_{a_1}^{b_1} \int\limits_{a_2}^{b_2} \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{\pi (x_i - a_i)}{b_i - a_i} \, dx_1 \ldots dx_n > 0.$$

Tím jsme dospěli ke sporu.

Z pomocné věty a z rovnosti (22) dostaneme: jestliže funkcionál $J(\varphi)$ nabývá extrému pro funkci $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pak funkce $\varphi(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ na oblasti Q musí vyhovovat parciální diferenciální rovnici

$$F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{\varphi_i} = 0 \tag{23}$$

(rovnici Euler-Ostrogradského).

V rozvedené formě nabude rovnice (23) tvaru

$$F_\varphi - \sum_{i=1}^{n} (F_{x_i \varphi_i} + F_{\varphi \varphi_i} \varphi_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{\varphi_i \varphi_j} \varphi_{x_i x_j}) = 0. \tag{24}$$

Kromě toho vyhovuje funkce φ podmínkám na hranici:

$$\varphi(A) = f(A).$$

Příklad 1. Najít plochu o nejmenším povrchu, jdoucí danou čarou

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t). \tag{25}$$

Budiž rovnice plochy

$$z = \varphi(x, y).$$

Podmínkou pro to, aby plocha procházela čarou (25), je:

$$\varphi(x(t), y(t)) = z(t).$$

Povrch je vyjádřen integrálem

$$J(\varphi) = \iint\limits_Q \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} \, dx \, dy.$$

Eulerova rovnice pro tento integrál má tvar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varphi_x}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\varphi_y}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}\right]=0. \tag{26}$$

Podmínka (26) ukazuje, že hledaná plocha o minimálním povrchu (t. zv. minimální plocha) má všude střední křivost rovnou nule.

Příklad 2. Dirichletovým integrálem funkce φ po oblasti Q n-rozměrného prostoru se nazývá integrál

$$\mathrm{D}(\varphi)=\iint_Q\ldots\int\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}^2\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n.$$

Určit podmínky, za nichž funkce φ, nabývající na hranici Q daných hodnot, minimalisuje Dirichletův integrál.

Eulerova rovnice (24) vypadá takto:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_ix_i}=0. \tag{27}$$

Vskutku, v případě $F=\Sigma\varphi_{x_i}^2$ je

$$F_\varphi=F_{\varphi\varphi_i}=F_{x_i\varphi_i}=0,\ F_{\varphi_i\varphi_j}=\begin{cases}2 \text{ pro } i=j,\\ 0 \text{ pro } i\neq j.\end{cases}$$

Použijeme-li Laplaceova operátoru, můžeme zapsat rovnici (27) ve tvaru

$$\Delta\varphi=0.$$

Je tedy Laplaceova rovnice rovnicí Euler-Ostrogradského pro Dirichletův integrál.

Invariance Eulerovy rovnice. Tak jako v případě funkce jedné proměnné, tak i o Eulerově rovnici (23) nebo (24) se můžeme přesvědčit, že je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Vezmeme jako příklad Laplaceovu rovnici, t. j. rovnici Euler-Ostrogradského pro Dirichletův integrál.

Vyšetřme rovinný případ:

$$\mathrm{D}(\varphi)=\iint_Q(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Přejdeme od kartézských souřadnic (x, y) k polárním souřadnicím (ϱ, Θ). Máme:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\cos\Theta,\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial y}=\sin\Theta,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=-\frac{1}{\varrho}\sin\Theta,\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{1}{\varrho}\cos\Theta.$$

Z toho dostaneme

$$D(\varphi) = \iint\limits_Q (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_Q \left[\left(\varphi_\varrho \frac{\partial\varrho}{\partial x} + \varphi_\Theta \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\varphi_\varrho \frac{\partial\varrho}{\partial y} + \varphi_\Theta \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2\right] \varrho\, d\varrho\, d\Theta =$$

$$= \iint\limits_Q \left[\varrho\varphi_\rho^2 + \frac{1}{\varrho}\, \varphi_\Theta^2\right] d\Theta\, d\varrho. \tag{28}$$

Sestavíme-li pro poslední integrál z rovnosti (28) Euler-Ostrogradského rovnici, dostaneme Laplaceovu rovnici v polárních souřadnicích

$$\varphi_\varrho + \varrho\varphi_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho}\, \varphi_{\Theta\Theta} = 0.$$

Analogicky je možno sestrojit pro trojrozměrný případ Laplaceovu rovnici v polárních souřadnicích (nebo v jakékoli jiné soustavě souřadnic, na příklad v eliptických souřadnicích, viz o tom příklad na konci § 30).

KAPITOLA IV.

PŘÍPUSTNÉ ČÁRY S VOLNÝMI KONCOVÝMI BODY. NESPOJITÉ ÚLOHY.

§ 16. Volné konce v nejjednodušší úloze.

Formulace úlohy. Ve všech úlohách, jež jsme probírali, brali jsme za třídu přípustných čar křivky, jejichž koncové body ležely ve dvou pevných bodech. Teď přejdeme k úlohám určování extrémů funkcionálů, při čemž vezmeme za třídu přípustných čar třídu širší.

Budiž dána funkce $F(x, y, y')$, splňující obvyklé podmínky spojitosti a diferencovatelnosti; nechť jsou mimo to dány v rovině xOy dvě křivky φ a ψ:

$$y = \varphi(x), \; y = \psi(x) \tag{1}$$

třídy C_1. Při tomto označení možno naši úlohu formulovat takto:

Vezmeme za třídu přípustných čar soustavu čar γ třídy C_1, které mají své koncové body na křivce φ resp. na křivce ψ. Chceme najít extrém funkcionálu

$$J(\gamma) = \int_{\gamma} F(x, y, y')\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

kde je integrál vzat po čáře γ.

Připomeňme, že použitím výsledků kap. I a II můžeme okamžitě převést tuto úlohu na úlohu vyhledat extrém funkce dvou nezávisle proměnných. Vskutku, jestliže některá křivka γ_0 s konci v bodech A a B řeší položenou úlohu, t. j. jestliže γ_0 udílí integrálu extrém mezi všemi čarami třídy přípustných čar, pak tato čára γ_0 udílí integrálu J extrém i mezi všemi čarami třídy C_1, spojujícími body A a B. Tudíž podle Eulerovy věty pro nejjednodušší úlohu je čára γ_0 extremálou, t. j. vyhovuje Eulerově rovnici

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0. \tag{3}$$

Dále ukážeme, jakým podmínkám na své koncové body musí tento oblouk γ_0 vyhovovat.

Diferenciál $J(\gamma)$ oblouku extremály. Vyšetřujme spolu s γ_0 soustavu $\{\gamma\}$ k ní blízkých extremál, jejichž koncové body leží v některých okolích koncových bodů A a B oblouku γ_0; naše soustava $\{\gamma\}$ oblouků extremál je určena čtyřmi parametry. Předpokládáme-li, že každý oblouk γ z $\{\gamma\}$ je jediný oblouk této soustavy s danými koncovými body, můžeme vzít za parametry oblouku souřadnice x_0, y_0 a x_1, y_1 koncových bodů tohoto oblouku. (Jsou-li mezi parametry nějaké vztahy, bude počet nezávislých parametrů menší než čtyři, na příklad v naší úloze, když x_0, y_0 vyhovují rovnici $y_0 = \varphi(x_0)$ a x_1, y_1 rovnici $y_1 = \psi(x_1)$, budou jenom dva nezávislé parametry.)

Funkcionál $J(\gamma)$ na soustavě $\{\gamma\}$ se stane funkcí proměnných x_0, y_0, x_1, y_1, t. j. souřadnic koncových bodů oblouků γ: $J(\gamma) = J(x_0, y_0, x_1, y_1)$. Diferenciál této funkce, jsou-li diferenciály argumentů rovny $\delta x_0, \delta y_0, \delta x_1, \delta y_1$, bude roven

$$\mathrm{d}J = \left(\frac{\partial J}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \frac{\partial J}{\partial y_0}\,\delta y_0\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial J}{\partial y_1}\,\delta y_1\right). \tag{4}$$

Vyšetřujme z počátku dvojparametrovou podsoustavu $\{\gamma\}$ s pevnými hodnotami x_0 a x_1 (koncové body oblouků γ se posunují na dvou přímkách rovnoběžných s osou Oy).

Na této podsoustavě má náš integrál konstantní meze x_0 a x_1 a můžeme tedy aplikovat theorii již dříve rozvinutou (§ 2).

Diferenciál $\mathrm{d}J$ je na této dvojparametrové soustavě právě roven variaci δJ. Buďte rovnice dvou nekonečně blízkých oblouků extremál této podsoustavy: $y = y(x)$, $y = y(x) + \delta y(x)$. Označme: $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$, $\delta y_0 = \delta y(x_0)$, $\delta y(x_1) = \delta y_1$. Variace δJ při přechodu od oblouku $y = y(x)$ k oblouku $y = y(x) + \delta y(x)$ je rovna integrálu

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,\mathrm{d}x$$

po prvním oblouku. Částečnou integrací výrazu

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y'\,\mathrm{d}x$$

dostaneme

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y'\,\mathrm{d}x = F_{y'}^{(1)} \delta y_1 - F_{y'}^{(0)} \delta y_0 - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right) \delta y\,\mathrm{d}x.$$

Indexy ${}^{(1)}$ a ${}^{(0)}$ zde značí, jako všude v dalším, že se odpovídající funkce bere v počátečním nebo v koncovém bodě oblouku:

$$F_{y'}{}^{(0)} = F_{y'}(x_0, y_0, y'_0),\ F_{y'}{}^{(1)} = F_{y'}(x_1, y_1, y'_1),$$

kde

$$y'_0 = y'(x_0),\ y'_1 = y'(x_1).$$

Je tedy

$$\delta J = F_{y'}{}^{(1)}\delta y_1 - F_{y'}{}^{(0)}\delta y_0 + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x =$$
$$= F_{y'}{}^{(1)}\delta y_1 - F_{y'}{}^{(0)}y_0. \tag{5}$$

Integrální člen ve výrazu (5) je roven nule, protože je na oblouku $y = y(x)$ vyhověno Eulerově rovnici.

Pro naši podsoustavu je funkcionál J funkcí souřadnic koncových bodů extremály (při čemž jsou úsečky pevné), a proto je variace δy právě diferenciálem této funkce. Protože $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$, dostaneme z (4)

$$\delta J = \mathrm{d}J = \frac{\partial J}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial J}{\partial y_1}\delta y_1. \tag{6}$$

Porovnáme-li výrazy (5) a (6), nalezneme parciální derivace

$$\frac{\partial J}{\partial y_0} = -F_{y'}{}^{(0)},\ \frac{\partial J}{\partial y_1} = F_{y'}{}^{(1)}. \tag{7}$$

Abychom našli $\dfrac{\partial J}{\partial x_0}$ a $\dfrac{\partial J}{\partial x_1}$, obrátíme se k jiné podsoustavě $\{\gamma\}$, která se skládá z oblouků jedné a téže extremály s proměnnými konci $y = y(x)$. Souřadnice počátečních a koncových bodů takových oblouků jsou spojeny vztahy

$$\delta y_0 = y'(x_0)\delta x_0 = y'_0\delta x_0,\ \delta y_1 = y'(x_1)\delta x_1 = y'_1\delta x_1.$$

Výraz (4) pro diferenciál $\mathrm{d}J$ nabude na naší podsoustavě tvaru

$$\mathrm{d}J = \left(\frac{\partial J}{\partial x_0} + y'_0\frac{\partial J}{\partial y_0}\right)\delta x_0 + \left(\frac{\partial J}{\partial x_1} + y'_1\frac{\partial J}{\partial y_1}\right)\delta x_1. \tag{8}$$

Na druhé straně podle pravidla o diferencování podle horní a dolní meze integrálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]\, dx$$

máme

$$dJ = F^{(1)}\, dx_1 - F^{(0)}\, dx_0. \tag{9}$$

Porovnáme-li (8) a (9) a užijeme-li formule (7), dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} + y_0' \frac{\partial J}{\partial y_0} = -F^{(0)}, \frac{\partial J}{\partial x_0} = -F^{(0)} - y_0' \frac{\partial J}{\partial y_0} = -(F - y'F_{y'})^{(0)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial J}{\partial y_1} = F^{(1)}, \frac{\partial J}{\partial x_1} = F^{(1)} - y_1' \frac{\partial J}{\partial y_1} = (F - y'F_{y'})^{(1)}.$$

Konečné formule pro parciální derivace

$$\frac{\partial J}{\partial x_0}, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial y_0}, \frac{\partial J}{\partial y_1}$$

a pro totální diferenciál dJ jsou takovéto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x_0} &= -(F - y' F_{y'})^{(0)}, & \frac{\partial J}{\partial y_0} &= -F_{y'}^{(0)}, \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} &= (F - y' F_{y'})^{(1)}, & \frac{\partial J}{\partial y_1} &= F_{y'}^{(1)}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} dJ = &-[(F - y'F_{y'})^{(0)}\delta x_0 + F_{y'}^{(0)}\delta y_0] + \\ &+ [(F - y'F_{y'})^{(1)}\delta x_1 + F_{y'}^{(1)}\delta y_1]. \end{aligned} \tag{11}$$

Poznámka 1. V našich výkladech jsme použili toho (při důkazu formule (5)), že výchozím obloukem je oblouk extremály, avšak nepoužili jsme toho, že posunutý oblouk je obloukem extremály. Budiž nyní dána soustava oblouků, které v obecném případě nejsou oblouky extremál, a nechť tato soustava obsahuje oblouk extremály γ_0. Vyšetřujeme-li na této soustavě funkcionál J jako funkci souřadnic koncových bodů oblouků, pak při přechodu od oblouku γ_0 k jinému oblouku soustavy $\{\gamma\}$ zachová se pro diferenciál dJ jeho vyjádření podle formule (11).

Poznámka 2. Při odvozování formulí (10)—(11) se předpokládalo, že oblouk $\breve{AB}$ extremály, realisující minimum v úloze s volnými konci, je možno zahrnout do čtyrparametrové soustavy extremál, a to takových, že každý pár bodů A' a B', ležících v některém okolí bodů A a B, lze spojit jediným obloukem extremály této soustavy.

Tento předpoklad odstraníme. Je vždycky možné zahrnout oblouk $\breve{AB}$ do čtyrparametrové soustavy oblouků $\breve{A'B'}$ (které nemusí být oblouky extremál) tak, že každý pár bodů A' a B', ležících v některém z okolí bodů A a B, spojuje jeden a jenom jeden oblouk této soustavy. Přitom oblouky závisí na souřadnicích svých koncových bodů spojitě.

Náš funkcionál se na této čtyrparametrové soustavě stane, jako nahoře, funkcí čtyř proměnných — souřadnic koncových bodů A' a B' oblouků γ.

Při přechodu od oblouku extremály $\breve{AB}$ (dávající extrém) k jiné čáře naší soustavy bude diferenciál $\mathrm{d}J$ vyjádřen toutéž formulí (11) jako v předcházejícím případě na základě poznámky 1. Proto můžeme touto soustavou křivek zaměnit níže při odvozování „podmínek transversality" dřívější čtyrparametrovou soustavu extremál.

Podmínky transversality. Vrátíme se k naší úloze. Souřadnice x_0, y_0, x_1, y_1 koncových bodů extremál jsou vázány vztahy $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$ a je tedy

$$\delta y_0 = \varphi'\delta x_0, \quad \delta y_1 = \psi'\delta x_0. \tag{12}$$

Výraz (11) pro $\mathrm{d}J$ nabude tvaru

$$\mathrm{d}J = [F + (\varphi' - y_0')F_{y'}]^0\delta x_0 + [F + (\psi' - y_1')F_{y'}]^{(1)}\delta x_1. \tag{13}$$

Chceme najít mezi našimi oblouky extremál tu, pro niž J nabývá extrému. Pro tento oblouk je $\mathrm{d}J = 0$, ať jsou δx_0 a δx_1 jakákoli. Z toho

$$[F + (\varphi' - y_0')F_{y'}]^{(0)} = 0, \ [F + (\psi' - y_1')F_{y'}]^{(1)} = 0. \tag{14}$$

Podmínky (14) se nazývají *podmínkami transversality*. Získaný výsledek lze formulovat jako větu:

Věta I. *Jestliže křivka γ: $y = y(x)$ vede k extrému integrálu*

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

na třídě přípustných křivek C_1, spojujících dva libovolné body dvou daných křivek $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, pak křivka γ je extremálou a v koncových bodech křivky γ jsou splněny podmínky transversality (14).

Tato věta dává v obecném případě řešení námi položené úlohy. Vskutku, po rozřešení Eulerovy rovnice dostaneme soustavu extremál, $y = f(x, \alpha, \beta)$, závislou na dvou parametrech. Souřadnice koncových bodů x_0, x_1 křivky této dvojparametrové soustavy musí splňovat obě podmínky transversality a rovnice

$$f(x_0, \alpha, \beta) = \varphi(x_0), \ f(x_1, \alpha, \beta) = \psi(x_1);$$

z těchto čtyř rovnic stanovíme x_0, x_1, α, β.

Je-li speciálně $F = A(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$, pak podmínka transversality zní:

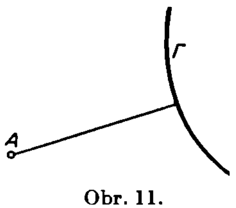
$$A\sqrt{1 + y'^2} + (\varphi' - y')\frac{Ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

neboli

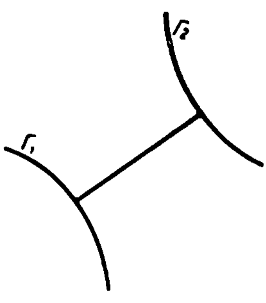
$$A(1 + \varphi' y') = 0.$$

Je-li hodnota A v odpovídajícím koncovém bodě různá od nuly, pak je roven nule druhý činitel a tudíž jsou směry tečen ke křivce γ a ke křivce, po níž se pohybuje počáteční (nebo koncový) bod křivky γ, na sobě kolmé. Podmínka transversality se stane podmínkou orthogonality.

Je-li jeden z koncových bodů křivky pevný, pak musí být podmínka transversality v platnosti jenom pro volný konec.



Obr. 11.



Obr. 12.

Příklad. Najít nejkratší vzdálenost bodu A od křivky Γ (viz obr. 11).

Nejkratší vzdálenosti se dosáhne podél extremály integrálu $\int\sqrt{1 + y'^2}\,dx$, t. j. podél přímky. Podmínka transversality přejde v podmínku orthogonality. Tím se dosáhne nejkratší vzdálenosti podél normály ke křivce Γ jdoucí bodem A.

Analogicky se nejkratší vzdálenosti mezi dvěma křivkami (obr. 12) dosáhne podél jejich společné normály.

Obecnější tvar podmínek transversality. Vyšetřujme podmínky transversality pro obecnější případ, kdy rovnice křivek γ_1 a γ_2 jsou dány v implicitním tvaru

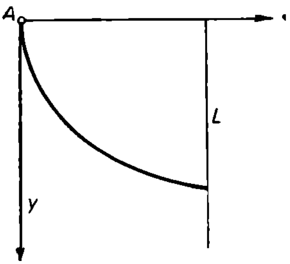
$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

Budeme přitom předpokládat, že funkce φ a ψ mají spojité parciální derivace a že $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 > 0$ a $\psi_x^2 + \psi_y^2 > 0$. V tomto případě mají podmínky transversality tvar

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi_x}\right]_{x=x_0} &= \left[\frac{F_{y'}}{\varphi_y}\right]_{x=x_0}, \\ \left[\frac{F - y'F_{y'}}{\psi_x}\right]_{x=x_1} &= \left[\frac{F_{y'}}{\psi_y}\right]_{x=x_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

Jsou-li speciálně křivky γ_1 a γ_2 přímkami, rovnoběžnými s osou Oy: $x = x_0$ a $x = x_1$, pak podmínky transversality mají tvar

$$[F_{y'}]_{x=x_0} = 0, \quad [F_{y'}]_{x=x_1} = 0. \qquad (14'')$$



Obr. 13.

Příklad 1. Nechť je dán bod A a vertikální přímka L, která nejde bodem A. Po jaké čáře musí padat hmotný bod, vybíhající z bodu A s nulovou rychlostí, aby dostihl přímky L v nejkratší době?

Předpokládejme, že hledaná čára je rovinná, sestrojme pravoúhlou soustavu souřadnic xOy: počátek souřadnic umístíme v bodě A, osu Oy vedeme vertikálně dolů, osa Ox protíná přímku L (obr. 13). Podle provedené hypothesy bude hledaná křivka ležet v rovině xOy.

Budiž $x = a$ rovnice přímky L. V takovém případě vede naše úloha podle formule (3) § 1 k vyhledání křivky, podél níž integrál

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

nabývá minimální hodnoty, při čemž zde bereme za třídu přípustných čar čáry třídy C_1, spojující počátek souřadnic s libovolným bodem přímky L.

Podle obecné theorie, jestliže hledaná křivka existuje, pak je extremálou t. j. v našem případě podle výkladu v § 3 náleží k soustavě cykloid

$$x = r(\Theta - \sin\Theta) + C, \quad y = r(1 - \cos\Theta),$$

kde r a C jsou libovolné konstanty. Z podmínky, že křivka jde počátkem souřadnic, a za předpokladu, že počátečnímu bodu odpovídá $\Theta = 0$, dostaneme, že $C = 0$. Zbývá stanovit r. Použijeme proto podmínky transversality na koncové body.

V našem případě je

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}}.$$

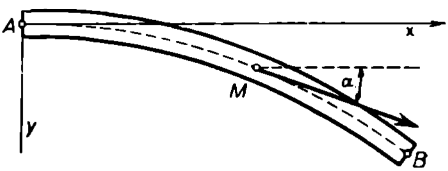
Musí tudíž pro $x = 0$ být podle (14″) $y' = 0$, t. j. v pravém koncovém bodě hledané křivky musí být tečna k této čáře horizontální. Z toho a z tvaru cykloidy nalezneme ihned, že $\pi r = a$.

Má tedy nakonec rovnice hledané křivky tvar

$$x = \frac{a}{\pi}(\Theta - \sin\Theta),$$

$$y = \frac{a}{\pi}(1 - \cos\Theta).$$

Příklad 2. Nosník AB délky l je vetknut na jednom konci A. Druhý jeho konec B je volný (obr. 14). Na volném konci B působíme na nosník zatížením P. Při zanedbání váhy nosníku určit jeho rovnovážnou polohu.



Obr. 14.

Vezmeme-li za osu Ox horizontální průmět nosníku, procházející bodem A, a označíme-li Y pořadnici bodu B a znakem α úhel, který svírá s osou Ox tečna k ose nosníku v libovolném bodě M, máme

$$Y = \int_{AB} dy = \int_0^l \sin\alpha \, ds.$$

Potenciální energie gravitační síly (váhu nosníku zanedbáváme) je rovna

$$PgY = \int_0^l Pg \sin\alpha \, ds.$$

Potenciální energie sil pružnosti je rovna

$$\int_0 J\alpha'^2 \, ds,$$

kde $\alpha' = \dfrac{d\alpha}{ds}$ je křivost nosníku a J modul pružnosti. Tedy celková potenciální energie je

$$U = \int_0^l (J\alpha'^2 + Pg \sin\alpha)\, ds.$$

Konec A je upevněn, v tomto konci je α dáno: $\alpha = \alpha_0$; ve volném konci máme podle již dokázaného $F_{\alpha'} = 0$,[1]) kde F je výraz $J\alpha'^2 + Pg \sin\alpha$ za integračním znamením, t. j.

$$\alpha' = 0.$$

Ve volném konci je křivost nosníku rovna nule.

Eulerova rovnice

$$2J \frac{d^2\alpha}{ds^2} - Pg \cos\alpha = 0$$

s krajovými podmínkami: pro $s = 0$ $\alpha = \alpha_0$, pro $s = l$ $\alpha' = 0$, určuje profil nosníku.

Budiž na příklad $\alpha_0 = 0$. Je-li $y = y(x)$ rovnice profilu nosníku, pak za předpokladu, že je profil nosníku blízký (ve smyslu blízkosti prvního řádu) ose Ox, máme

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} \approx \frac{dy}{dx}$$

(zanedbáváme veličiny druhého řádu v poměru k y a $\dfrac{dy}{dx}$), a rovněž

$$\cos\alpha \approx 1, \frac{d\alpha}{ds} \approx \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2\alpha}{ds^2} \approx \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \approx \frac{d^3y}{dx^3},$$

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx \approx a,$$

kde a je úsečka konce B. Rovnice nosníku nabude nyní tvaru

$$2J \frac{d^3y}{dx^3} - Pg = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(l) = 0.$$

Z toho

$$y = \frac{Pg}{12J} x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

[1]) Rovnice křivky, po níž se pohybuje konec B, má tvar: $s = l$, a proto podmínka transversality se bere podle formule (13).

Krajové podmínky nám dají

$$C_2 = C_3 = 0,\ C_1 = -\frac{Pgl}{4J},$$

a nakonec dostaneme

$$y = \frac{Pg}{12J}(x^3 - 3lx^2).$$

§ 17. Nespojité úlohy.

Vyšetřujme funkcionál J nejjednodušší úlohy

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx.$$

Může se stát, že mezi čarami třídy C_1, spojujícími dva dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, neexistuje čára realisující extrém funkcionálu J. V tomto případě přirozeně zkoumáme, zda se nedosáhne hledaného extrému na čarách třídy obecnější.

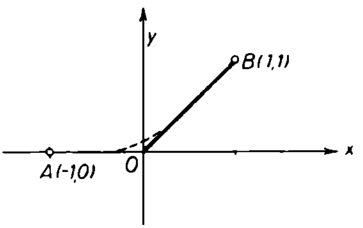
Za takovou třídu vezmeme soustavu po částech hladkých křivek $y = y(x)$; třídu po částech hladkých křivek označíme D_1.

Příklad. Budiž

$$J(y) = \int_0^1 y^2(1 - y'^2)\,dx.$$

Tento funkcionál je definován pro všechny křivky třídy C_1, spojující body $A\,(-1, 0)$ a $B\,(1, 1)$. Pro jakoukoli takovou křivku je zřejmě $J(y) > 0$. Vezmeme-li nyní lomenou čáru $y = y(x)$, definovanou tímto způsobem (obr. 15):

$$y(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } -1 \leqq x \leqq 0, \\ x \text{ pro } \quad 0 \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$



Obr. 15.

pak má pro ni integrál smysl a je roven nule. Je zřejmé, že zaokrouhlíme-li tuto lomenou čáru v bodě O, pak dostaneme křivku třídy C_1, pro niž hodnota integrálu J může být libovolně blízká nule. Tudíž infimum hodnot $J(y)$ pro y, patřící ke třídě C_1, je rovno nule a na křivkách třídy C_1 se ho nedosáhne. Přejdeme-li od třídy C_1 ke třídě D_1, pak tohoto infima se dosáhne a extremální úloha bude mít řešení.

Dokážeme nyní další větu.

Věta 2. *Jestliže mezi všemi po částech hladkými křivkami, spojujícími dva dané body A a B, po částech hladká křivka γ: $y = y(x)$ vede k extrému funkcionálu J, pak* 1) *γ se skládá z konečného počtu oblouků extremál a* 2) *v každém bodě lomu $M(\xi, \eta)$ křivky γ jsou splněny tyto podmínky:*[2])

$$\left.\begin{aligned} [F - y'F_{y'}]_{x=\xi-0} &= [F - y'F_{y'}]_{x=\xi+0}, \\ [F_{y'}]_{x=\xi-0} &= [F_{y'}]_{x=\xi+0}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Bez porušení obecnosti můžeme se zřejmě omezit na případ jediného bodu lomu $M(\xi, \eta)$. Křivka γ, dávající minimum, se skládá ze dvou oblouků třídy C_1, z oblouku γ_1, spojujícího body A a M, a z oblouku γ_2, spojujícího body M a B.

Dokážeme, že oblouk γ_1 minimalisuje funkcionál $J(\gamma_1) = \int_{x_0}^{\xi} F(x, y, y')\, dx$ na soustavě čar $\{\gamma\}$ třídy C_1, spojujících body A a M. K provedení důkazu sporem předpokládejme opak. Nechť existuje ve třídě $\{\gamma\}$ oblouk γ_1', pro který $J(\gamma_1') < J(\gamma_1)$. Potom pro křivku $\gamma' = \gamma_1' + \gamma_2$ je $J(\gamma') = J(\gamma_1') + J(\gamma_2) < J(\gamma_1) + J(\gamma_2) = J(\gamma)$. Křivka γ' spojuje body A a B a má jediný bod lomu v bodě M, t. j. γ' patří ke třídě přípustných čar naší úlohy a nerovnost $J(\gamma') < J(\gamma)$ je ve sporu s předpokladem o tom, že křivka γ realisuje minimum J.

Tedy oblouk γ_1 křivky Γ realisuje minimum J mezi všemi čarami, spojujícími body A a M. Proto γ_1 je extremálou (viz kap. II, str. 55); analogicky i druhý oblouk γ_2 je extremálou.

Vyšetřujme soustavu oblouků s konci v A a B, které obdržíme z γ posunutím bodu lomu. Na této soustavě se funkcionál J stane funkcí souřadnic ξ a η bodu lomu. Tento bod je koncovým pro první oblouk extremály γ_1 a počátečním pro druhý oblouk extremály γ_2. Proto podle formule (14) je:

$$\begin{aligned} dJ(\gamma) &= dJ(\gamma_1) + dJ(\gamma_2) = \\ &= \{[F - y'F_{y'}]_{x=\xi-0}\, \delta\xi + [F_{y'}]_{x=\xi-0}\, \delta\eta\} - \\ &- \{[F - y'F_{y'}]_{x=\xi+0}\, \delta\xi + [F_{y'}]_{x=\xi+0}\, \delta\eta\} = \\ &= \{[F - y'F_{y'}]_{x=\xi-0} - [F - y'F_{y'}]_{x=\xi+0}\}\delta\xi + \\ &+ \{[F_{y'}]_{x=\xi-0} - [F_{y'}]_{x=\xi+0}\}\delta\eta. \end{aligned}$$

---

[2]) Symbolem $[f(x, y, y')]_{x=\xi-0}$ rozumíme limitu $f(x, y(x), y'(x))$ pro $x \to \xi$ zleva, kdežto $[f(x, y, y')]_{x=\xi+0}$ je limita $f(x, y(x), y'(x))$ pro x konvergující k ξ zprava.

Podmínkou pro to, aby γ dávala minimum mezi všemi křivkami této soustavy, je: $\mathrm{d}J(\gamma) = 0$ pro všechny hodnoty $\delta\xi$, $\delta\eta$. Z toho a z nalezeného vyjádření pro $\mathrm{d}J(\gamma)$ plynou vztahy (15).

Podmínky (14) se nazývají podmínkami Weierstrass-Erdmanovými. Čára, skládající se z extremál a taková, že v každém bodě lomu je splněna podmínka Weierstrass-Erdmanova, mají název lomené extremály. Je tedy po částech hladká křivka, realisující extrém J, vždycky lomenou extremálou.

Ponecháváme čtenáři rozebrat s tohoto hlediska shora uvedený příklad.

Hlubší nespojitosti extremál vyšetřoval gruzínský matematik A. M. Razmadze.

Ve svém vyšetřování konstruuje Razmadze theorii, která zahrnuje ty úlohy variačního počtu, jejichž řešením jsou funkce s konečným počtem bodů nespojitosti prvního druhu.

§ 18. Úloha s volnými konci v prostorech o libovolném počtu rozměrů.

Obecné podmínky transversality. V předcházejících paragrafech rozvinutá theorie se lehko zobecní na případ funkcionálů závislých na čarách v prostoru o libovolném počtu rozměrů.

Vyšetřujme prostor o $(n + 1)$-rozměrech se souřadnicemi x, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nechť se třída přípustných křivek $\{q\}$ skládá ze všech možných křivek třídy C_1, definovaných rovnicemi $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, při čemž souřadnice koncových bodů

$$x_0, y_i^{(0)} = y_i(x_0) \text{ a } x_1, y_i^{(1)} = y_i(x_1), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

jsou vázány soustavou vztahů

$$\varphi_j(x_0, y_i^{(0)}, x_1, y_i^{(1)}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, m < 2n + 2. \qquad (16)$$

Na křivkách $q\{y_i(x)\}$ této třídy je dán funkcionál

$$J(q) = \int_q F(x, y_i, y_i') \, \mathrm{d}x.$$

Chceme určit křivku γ_0 naší třídy, pro niž funkcionál J dosahuje extrému.

Křivka γ_0, realisující extrém funkcionálu mezi všemi křivkami třídy $\{\gamma\}$, realisuje zároveň jeho extrém mezi všemi křivkami z $\{\gamma\}$, které mají tytéž koncové body jako křivka γ_0. A proto je křivka γ_0 obloukem extremály.

Pro soustavu $\{q\}$ oblouků extremál stane se funkcionál J funkcí konečného počtu proměnných souřadnic konců těchto oblouků $x_0, x_1, y_i^{(0)}, y_i^{(1)}: J = J(x_0, x_1, y_i^{(0)}, y_i^{(1)})$. Přitom k tomu, aby oblouk extremály patřil do třídy $\{q\}$, je nutné, aby tyto proměnné byly vázány vztahy (16). Je tedy křivka γ_0 tím obloukem extremály, pro který se realisuje extrém $J(x_0, y_i^{(0)}, x_1, y_i^{(1)})$ za podmínek (16). Proto pro oblouk γ_0 musí být

$$\mathrm{d}J = \left(\frac{\partial J}{\partial x_0}\delta x_0 + \sum_i \frac{\partial J}{\partial y_i^{(0)}}\delta y_i^{(0)}\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}\delta x_1 + \sum_i \frac{\partial J}{\partial y_i^{(1)}}\delta y_i^{(1)}\right) = 0$$

pro všechny přípustné hodnoty diferenciálů $\delta x_0, \delta y_i^{(0)}, \delta x_1, \delta y_i^{(1)}$, t. j. takové, pro něž podle (16):

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0}\delta x_0 + \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i^{(0)}}\delta y_i^{(0)} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\delta x_1 + \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i^{(0)}}\delta y_i^{(1)} = 0. \tag{17}$$

Opakujeme-li úvahy předcházejícího paragrafu, dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} = -\,[F - \sum_i y_i' F_{y_i'}]^{(0)}, \quad \frac{\partial J}{\partial y_i^{(0)}} = -\,[F_{y_i'}]^{(0)},$$
$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = [F - \sum_i y_i' F_{y_i'}]^{(1)}, \quad \frac{\partial J}{\partial y_i^{(1)}} = [F_{y_i'}]^{(1)}.$$

V obecném případě je možno použít pravidla Lagrangeových multiplikátorů: existují konstanty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ takové, že je $\mathrm{d}(J - \sum_j \lambda_j\varphi_j) = 0$ pro libovolné hodnoty diferenciálů $\delta x_0, \delta y_i^{(0)}$ a $\delta x_1, \delta y_i^{(1)}$, neboli

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_0}(J + \Sigma\lambda_j\varphi_j) = -\,[F - \Sigma y_i' F_{y_i'}]^{(0)} - \Sigma\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial y_i^{(0)}}(J + \Sigma\lambda_j\varphi_j) = -\,[F_{y_i'}]^{(0)} - \Sigma\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i^{(0)}} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}(J + \Sigma\lambda_j\varphi_j) = [F - \Sigma y_i' F_{y_i'}]^{(1)} - \Sigma\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial y_i^{(1)}}(J + \Sigma\lambda_j\varphi_j) = [F_{y_i'}]^{(1)} - \Sigma\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i^{(1)}} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Tyto podmínky jsou zobecněním podmínek transversality.

Úloha s volnými konci v trojrozměrném prostoru. Vyšetřujme speciálně v trojrozměrném prostoru funkcionál

$$J(\gamma) = \int_{\gamma} F(x, y, z, y', z')\,\mathrm{d}x, \tag{19}$$

když 1) za třídu přípustných čar vezmeme čáry třídy C_1 s koncovými body, položenými na dvou daných křivkách třídy C_1

$$y = \varphi_0(x),\ z = \psi_0(x) \text{ a } y = \varphi_1(x),\ z = \psi_1(x), \tag{20}$$

2) za třídu přípustných čar vezmeme čáry třídy C_1 s koncovými body, ležícími na dvou daných plochách třídy C_1

$$z = \varphi(x, y),\ z = \psi(x, y). \tag{21}$$

V obou případech je hledaná křivka obloukem extremály, t. j. řešením Eulerových rovnic

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0,\ F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'} = 0.$$

Funkcionál J vyšetřujeme jako funkci koncových bodů x_0, y_0, z_0 a x_1, y_1, z_1 oblouků extremál. Problém se převede na úlohu, najít extrém této funkce za podmínek

$$y_0 = \varphi_0(x_0),\ z_0 = \psi_0(x_0),\ y_1 = \varphi_1(x_1),\ z_1 = \psi_1(x_1)$$

v první úloze a

$$z_0 = \varphi(x_0, y_0),\ z_1 = \psi(x_1, y_1)$$

v druhé úloze.

V případě 1) dostaneme:

$$\mathrm{d}(J + \lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \mu_0\psi_0 + \mu_1\psi_1) = 0,$$

kde $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ jsou multiplikátory.

Pro počáteční bod dostaneme:

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} + \lambda_0\varphi_{0x_0} + \lambda_1\varphi_{1x_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial y_0} + \lambda_0\varphi_{0y_0} + \lambda_1\varphi_{1y_0} = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_0'} + \lambda_0\varphi_{0y'_0} + \lambda_1\varphi_{1y'_0} = 0$$

a analogické vztahy dostaneme pro koncový bod.

Máme

$$\mathrm{d}J(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) =$$
$$= -\{[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]^{(0)}\delta x_0 + F_{y'}^{(0)}\delta y_0 + F_{z'}^{(0)}\delta z_0\} +$$
$$+ \{[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]^{(1)}\delta x_1 + F_{y'}^{(1)}\delta y_1 + F_{z'}^{(1)}\delta z_1\}. \tag{22}$$

V případě 1) máme:

$$\mathrm{d}z_0 = \varphi_0'\delta x_0, \ \mathrm{d}y_0 = \psi_0'\delta y_0,$$
$$\mathrm{d}z_1 = \varphi_1'\delta x_1, \ \mathrm{d}y_1 = \psi_1'\delta y_1.$$

Rovnost $\mathrm{d}J = 0$ pro všechny přípustné diferenciály nám dá vztah v počátečních a koncových bodech oblouku, realisujícího extrém — podmínky transversality

$$\left.\begin{aligned} &[F - (y' - \varphi_0')F_{y'} - (z' - \psi_0')F_{z'}]^{(0)} = 0,\\ &[F - (y' - \varphi_1')F_{y'} - (z' - \psi_1')F_{z'}]^{(1)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

V případě 2) jsou přípustné diferenciály souřadnic koncových bodů vázány vztahy

$$\delta z_0 = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]^{(0)}\delta x_0 + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]^{(0)}\delta y_0,$$
$$\delta z_1 = \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]^{(1)}\delta x_1 + \left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]^{(1)}\delta y_1.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty pro δz_0 a δz_1 do vzorce (22) a vyjdeme-li z toho, že pro jakékoli přípustné diferenciály souřadnic koncových bodů oblouku γ_0, dávajícího extrém, je $\mathrm{d}J = 0$, dostaneme vztahy v počátečním bodě $[x_0, y_0, z_0]$ — podmínky transversality:

$$\left.\begin{aligned} \left[F - y'F_{y'} - \left(z' + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)F_{z'}\right]^{(0)} &= 0,\\ \left[F_{y'} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}F_{z'}\right]^{(0)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

a analogické vztahy v koncovém bodě (x_1, y_1, z_1) oblouku γ_0 (zaměníme-li funkci φ funkcí ψ).

Je-li $f = A(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, pak (jako v rovinném případě) se stanou podmínky transversality (23) podmínkami orthogonality odpovídající extremály plochy nebo čáry, po níž se pohybuje její počáteční nebo koncový bod.

§ 19. Podmínky pro koncové body v případě funkcionálů závislých na derivacích vyššího řádu.

Formulace úlohy. Vyšetřujme úlohu: vyhledat extrém funkcionálu

$$J = \int_\gamma F(x, y, y', y'')\, dx, \tag{25}$$

když za třídu přípustných čar vezmeme křivky γ třídy C_2, vyhovující jedné z těchto dvou podmínek:

1. Mezi souřadnicemi a směrnicí tečny v levém resp. v pravém koncovém bodě γ platí vztahy

$$\varphi(x_0, y_0, y_0') = 0 \text{ a } \psi(x_1, y_1, y_1') = 0, \tag{26}$$

kde jsou (x_0, y_0) a (x_1, y_1) souřadnice koncových bodů γ, kdežto y_0' a y_1' směrnice tečen ke křivce γ v těchže bodech a $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0'}$ a $\frac{\partial\psi}{\partial y_1'}$ nejsou rovny nule.

2. Mezi souřadnicemi a směrnicemi tečen v každém koncovém bodě γ platí dva vztahy:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(x_0, y_0, y_0') = 0,\ \psi_0(x_0, y_0, y_0') = 0, \\ \varphi_1(x_1, y_1, y_1') = 0,\ \psi_1(x_1, y_1, y_1') = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

při čemž determinanty $\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_0'} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0'}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_0}$ a $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_0}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_0'} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_0'}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_0}$ nejsou rovny nule.

Analogicky jako ve všech v této kapitole rozebíraných úlohách je hledaná křivka podle věty Euler-Poissonovy extremálou; je tedy pro faktické stanovení hledané křivky třeba najít vztahy pro určení hodnot čtyř libovolných konstant v obecném integrálu Euler-Poissonovy rovnice.

Diferencování integrálu J vzatého po oblouku extremály. Vyšetřujeme soustavu extremál $\{\gamma\}$ o souřadnicích x_0, y_0 a x_1, y_1 koncových bodů a o hodnotách $y_0' = y'(x_0)$ a $y_1' = y'(x_1)$ pro směrnice tečny; nechť každý oblouk soustavy γ je jednoznačně určen svými hodnotami $x_0, y_0, y_0', x_1, y_1, y_1'$. Na soustavě $\{\gamma\}$ stane se funkcionál J funkcí těchto šesti proměnných:

$$J = J(x_0, y_0, y_0', x_1, y_1, y_1'),$$

při čemž

$$\mathrm{d}J = \frac{\partial J}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial J}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial J}{\partial y_0'}\delta y_0' + \frac{\partial J}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial J}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial J}{\partial y_1'}\delta y_1'.$$

Vezmeme počáteční úsečky pevné. Pro dva nekonečně blízké oblouky extremál $y = y(x)$ a $y = y(x) + \delta y(x)$, $x_0 \leqq x \leqq x_1$, máme:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'')\, \mathrm{d}x. \tag{28}$$

Integrujeme-li per partes, dostaneme, označíme-li $\delta y_0 = \delta y(x_0)$, $\delta y_0' = \delta y'(x_0)$, $\delta y_1 = \delta y(x_1)$, $\delta y_1' = \delta y'(x_1)$,

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y'\, \mathrm{d}x = [F_{y'}\delta y]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right) \delta y\, \mathrm{d}x,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\, \delta y''\, \mathrm{d}x = [F_{y''}\, \delta y']_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right) \delta y'\, \mathrm{d}x =$$

$$= [F_{y''}\delta y']_0^1 - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\, \delta y\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''}\right) \delta y\, \mathrm{d}x.$$

Dosadíme-li obdržené výrazy do vzorce (28) a připomeneme-li si, že $y = y(x)$ vyhovuje rovnici Eulerově $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} = 0$, dostaneme

$$\delta J = -\left[\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(0)} \delta y_0 + F_{y''}^{(0)}\, \delta y_0'\right] +$$

$$+ \left[\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(1)} \delta y_1 + F_{y''}^{(1)}\, \delta y_1'\right].$$

Pro naši podsoustavu extremál stane se variace diferenciálem.

Dostaneme:

$$\mathrm{d}J = -\left[\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(0)} \delta y_0 + F_{y''}^{(0)}\, \delta y_0'\right] +$$

$$+ \left[\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(1)} \delta y_1 + F_{y''}^{(1)}\, \delta y_1'\right],$$

z čehož

$$\frac{\partial J}{\partial y_0} = -\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(0)}, \quad \frac{\partial J}{\partial y_0'} = -F_{y''}^{(0)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_1} = \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(1)}, \quad \frac{\partial J}{\partial y_1'} = F_{y''}^{(1)}.$$

Vyšetříme nyní podsoustavu $\{\gamma\}$, skládající se z různých oblouků jedné a téže extremály $y = y(x)$. Pro tuto podsoustavu je

$$\delta y_0 = y_0' \delta x_0, \ \delta y_0' = y_0'' \delta x_0, \ \delta y_1 = y_1' \delta x_1, \ \delta y_1' = y_1'' \delta x_1.$$

Proto při přechodu od jednoho oblouku podsoustavy k jinému nekonečně blízkému je

$$\mathrm{d}J = \left(\frac{\partial J}{\partial x_0} + y_0' \frac{\partial J}{\partial y^0} + y_0'' \frac{\partial J}{\partial y_1}\right) \delta x_0 + \\ + \left(\frac{\partial J}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial J}{\partial y_1} + y_1'' \frac{\partial J}{\partial y_1'}\right) \delta x_1. \tag{29}$$

Na druhé straně podle pravidla o diferencování integrálu $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,\mathrm{d}x$ podle horní a dolní meze máme

$$\mathrm{d}J = - F^{(0)} \delta x_0 + F^{(1)} \delta x_1. \tag{30}$$

Porovnáme-li (29) a (30), dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} + y_0' \frac{\partial J}{\partial y_0} + y'' \frac{\partial J}{\partial y_0'} = F^{(0)}, \quad \frac{\partial J}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial J}{\partial y_1} + y_1'' \frac{\partial J}{\partial y_1'} = F^{(1)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} = -\left[F - y_0'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right) - y_0'' F_{y''}\right]^{(0)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = \left[F - y_1'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right) - y_1'' F_{y''}\right]^{(1)},$$

z čehož

$$\mathrm{d}J = -\left\{\left[F - y_0'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)\right]^{(0)} \delta x_0 + \right. \\ \left. + \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(0)} \delta y_0 + F_{y''}^{(0)} \delta y_0' \right\} + \\ + \left\{\left[F - y_1'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)\right]^{(1)} \delta x_1 + \right. \\ \left. + \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(1)} \delta y_1 + F_{y''}^{(1)} \delta y_1' \right\}.$$

Podmínky transversality. Vyšetříme první z daných úloh. Křivka γ, dávající extrém mezi všemi přípustnými čarami, je extremálou a na soustavě extremál udílí extrém funkci $J(x_0, y_0, y_0', x_1, y_1, y_1')$ za podmínek (26). Podle pravidla pro hledání podmíněného extrému funkce existují konstanty λ_1 a λ_2 takové, že pro oblouk γ_0 platí rovnost

$$d[J + \lambda_1\varphi(x_0, y_0, y_0') + \lambda_2\psi(x_1, y_1, y_1')] = 0$$

(pro jakékoli hodnoty diferenciálů).

Z toho

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} - \lambda_1\varphi_{x_0} = \frac{\partial J}{\partial y_0} - \lambda_1\varphi_{y_0} = \frac{\partial J}{\partial y_0'} - \lambda_1\varphi_{y'_0} = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} : \frac{\partial J}{\partial y_0} : \frac{\partial J}{\partial y_0'} = \varphi_{x_0} : \varphi_{y_0} : \varphi_{y'_0},$$

neboli nakonec

$$\frac{\left[F - y_0'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right) - y_0'' F_{y''}\right]^{(0)}}{\varphi x_0} = \frac{\left[F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right]^{(0)}}{\varphi_{y_0}} = \frac{F_{y''}{}^{(0)}}{\varphi_{y'_0}}. \quad (31)$$

Analogická podmínka platí pro druhý koncový bod.

Každá z těchto podmínek obsahuje po dvou vztazích mezi hodnotami $x_0, y_0, y_0', x_1, y_1, y_1'$. Spolu s podmínkami (26) dostaneme šest rovnic ke stanovení těchto hodnot.

Připomínáme v závěru jeden důležitý případ. Předpokládejme, že vezmeme za třídu přípustných čar funkcionálu J soustavu křivek třídy C_1, spojujících dva dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$. V tomto případě máme $dx_0 = dy_0 = dx_1 = dy_1 = 0$ a tudíž při přechodu od extremály γ_0 ke křivce nekonečně blízké $\bar{\gamma}$ třídy přípustných čar budeme mít

$$dJ = - [F_{y''}]_{x_0}\delta y_0' + [F_{y''}]_{x_1}\delta y_1'.$$

Podmínka $\Delta J = 0$ nás vede k dvěma vztahům pro koncové body:

$$[F_{y''}]_{x_0} = 0, \quad [F_{y''}]_{x_1} = 0. \quad (32)$$

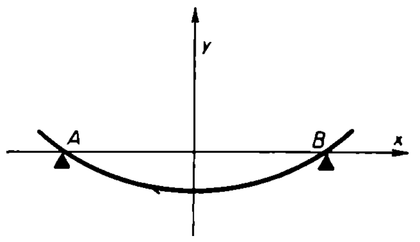
Tyto dva vztahy spolu s podmínkami $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ nám dávají možnost jako dříve určit všechny konstanty v obecném integrálu Euler-Poissonovy rovnice.

Příklad. Na dvou podpěrách A a B, ležících v horizontální rovině, leží volně válcový pružný hmotný nosník (obr. 16). Chceme stanovit tvar prohnuté osy nosníku. Přitom zanedbáme váhu těch částí nosníku, které leží vně podpěr.

Považujeme-li ohyb nosníku za malý a zanedbáme-li veličiny nekonečně malé vyšších řádů, pak na základě úvah provedených v § 14 převede se otázka na úlohu určit funkci $y = y(x)$ minimalisující integrál

$$E = \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{2}\mu y''^2 + \varrho y\right) dx,$$

když za třídu přípustných čar vezmeme čáry $y = y(x)$ třídy C_2 takové, že je $y(-l) = y(l) = 0$.



Obr. 16.

Pro vyšetřovanou úlohu má obecný integrál Eulerovy rovnice tvar (viz příklad v § 14)

$$y = -\frac{\varrho}{24\mu}x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

kde jsou α, β, γ a δ libovolné konstanty. Z podmínek symetrie a z podmínek $y(-l) = y(l) = 0$ najdeme

$$\alpha = \gamma = 0,$$

$$-\frac{\varrho}{24\mu}l^4 + \beta l^2 + \delta = 0;$$

kromě toho podle výsledků uvedeného paragrafu musí být „v koncích" vyhověno vztahům (32), t. j.

$$y''(-l) = y''(l) = 0.$$

Je tudíž

$$-\frac{1}{2}\frac{\varrho}{\mu}l^2 + 2\beta = 0.$$

Pro rovnici hledané prohnuté osy nosníku nakonec dostaneme

$$y = -\frac{\varrho}{24\mu}x^4 + \frac{1}{4}\frac{\varrho}{\mu}l^2x^2 - \frac{5}{24}\frac{\varrho}{\mu}l^4.$$

KAPITOLA V.

PODMÍNĚNÝ EXTRÉM

§ 20. Isoperimetrická úloha.

Příklady isoperimetrických úloh. Řada aplikací vede k úloze vyhledat křivku, pro kterou nabývá integrál

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

extrému, když za třídu připustných čar vezmeme křivky, spojující dva dané body A a B a vyhovující mimo to některým dalším podmínkám.

Začneme vyšetřováním konkretních příkladů. V § 4 jsme řešili úlohu o minimální rotační ploše: mezi všemi jednoznačnými křivkami třídy C_1, které jdou body A a B, najít takovou křivku, aby plocha, vytvořená otáčením této křivky kolem osy Ox, měla nejmenší obsah. Dospějeme k podstatně novým úlohám, budeme-li vyšetřovat jenom ty plochy, které jsou vytvořeny na příklad otáčením křivek předepsané délky nebo jenom těch křivek, které při otáčení kolem osy Ox vytvářejí plochu, omezující spolu s rovinami $x = x_0$, $x = x_1$ těleso daného objemu. Protože délka křivky je vyjádřena integrálem

$$K = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

je možno první z daných úloh formulovat takto:

Mezi všemi křivkami $y = y(x)$ třídy C_1, podél nichž integrál K nabývá dané hodnoty l a které jdou dvěma danými body A a B, určit tu, pro niž integrál J nabývá nejmenší nebo největší hodnoty.

V druhé úloze hledáme rovněž extrém integrálu J za podmínky, že podél každé křivky třídy připustných čar musí mít integrál

$$K_1 = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x$$

předepsanou hodnotu.

Termín „isoperimetrická úloha" pochází od jedné z úloh podobného typu: *mezi všemi zavřenými křivkami délky l najít tu, která omezuje plochu největšího obsahu.* V tomto paragrafu rozřešíme v jednom z příkladů tuto úlohu za předpokladu, že se část hledané křivky skládá z úsečky konstantní délky (viz § 5).

Tyto příklady vedou k tomuto obecnému problému:

Formulace úlohy. *Jsou dány dvě funkce $F(x, y, y')$ a $G(x, y, y')$. Mezi všemi křivkami $y = y(x)$ třídy C_1, podél nichž integrál*

$$K = \int_a^b G(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

nabývá předepsané hodnoty, určit tu, pro niž integrál

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

nabývá extremální hodnoty.

Podobně jako v předcházejících kapitolách je naším úkolem najít pro hledanou křivku takové základní nutné podmínky, aby ji bylo možno na základě těchto podmínek určit (když víme, že existuje).

Dříve než přejdeme k řešení dané úlohy, učiníme několik hypothes obecného charakteru, které jsou nutné k dalšímu výkladu:[1])

1. Funkce F a G nechť mají spojité parciální derivace prvního i druhého řádu pro $a \leqq x \leqq b$ a pro libovolné hodnoty proměnných y, y'.

2. Budeme předpokládat, že hledaná křivka není extremálou integrálu K.

Odůvodníme hypothesu 2. Aby úloha měla smysl, musíme požadovat, aby se předepsaná hodnota integrálu K vůbec nevyskytovala mezi extremálními hodnotami tohoto integrálu, t. j. aby nebyla extremální, neboť je-li daná hodnota integrálu K jeho extremální hodnotou, pak obecně existuje jenom jedna nebo konečný počet křivek, na nichž integrál K nabývá předepsané hodnoty, a tyto křivky tedy vyčerpají

---

[1]) Připomeňme, že zde uvedené důkazy jsou zcela přesné jenom za předpokladu, že hledaná křivka patří ke třídě C_2. Avšak jako při důkazu v kap. II základní rovnice Eulerovy, je vždycky možno upustit od předpokladu o existenci a spojitosti y'', nahradíme-li transformaci Lagrangeovu, jíž jsme pro jednoduchost použili při definici variace funkcionálu, transformací Du Bois-Reymondovou.

celou třídu přípustných čar, takže je patrné, že se methody, které jsme uvedli v předcházejících kapitolách, ukáží v tomto případě zcela nevhodnými (v příkladě s hmotným vláknem (viz dále) a v prvním ze shora uvedených příkladů musíme přirozeně předpokládat, že integrál K — délka křivky — je skutečně větší než vzdálenost mezi danými body). Tedy tam, kde extremála vede na absolutní extrém, je naše podmínka nutná.

Řešení úlohy. Způsob řešení dané úlohy vyplývá z následující věty.

Věta I (Euler). *Jestliže křivka $y = y(x)$ vede k extrému integrálu*

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

za podmínek

$$K = \int_a^b G(x, y, y')\,\mathrm{d}x = l,$$

$$y(a) = a_1, \quad y(b) = b_1$$

a jestliže $y = y(x)$ není extremálou integrálu K, pak existuje taková konstanta λ, že naše křivka je extremálou integrálu

$$L = \int_a^b H(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

kde $H = F + \lambda G$.

Teď si dokážeme, že je-li již dříve známa existence hledané křivky, pak použitím Eulerovy věty lze tuto křivku fakticky určit. Integrujeme-li totiž Eulerovu rovnici pro funkci H, dostaneme obecný integrál závislý na dvou libovolných integračních konstantách α, β a na neznámém parametru λ:

$$y = f(x, \alpha, \beta, \lambda).$$

Podle Eulerovy věty náleží hledaná křivka do této soustavy. Zbývá stanovit α, β, λ. Stačí použít podmínky $K = l$ a podmínky, že křivka jde dvěma danými body A a B.

Přejdeme k důkazu Eulerovy věty. Předpokládejme, že křivka $y = y(x)$ vede k extrému integrálu J za podmínky $K = l$ a že tato křivka není extremálou pro integrál K. Vezměme v intervalu $[a, b]$ dva libovolné body x_1 a x_2 (obr. 17) a hledejme přírůstek funkcionálu J, když $y(x)$ variujeme v okolí bodů x_1 a x_2. Označíme-li ΔJ hledaný přírůstek J, dostaneme v souhlase s formulí (10′) § 10

$$\Delta J = \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_1} + \varepsilon_1\right\} \int_a^b \delta_{x_1} y \,\mathrm{d}x +$$

$$+ \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_2} + \varepsilon_2\right\} \int_a^b \delta_{x_2} y \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_1} + \varepsilon_1\right\} \sigma_1 + \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right]_{x=x_2} + \varepsilon_2\right\} \sigma_2,$$

kde

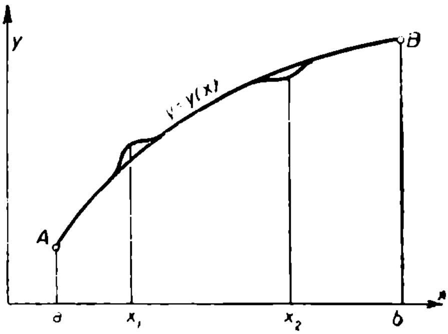
$$\sigma_1 = \int_a^b \delta_{x_1} y \,\mathrm{d}x, \quad \sigma_2 = \int_a^b \delta_{x_2} y \,\mathrm{d}x$$

a ε_1 a ε_2 konvergují k nule spolu se σ_1 a σ_2.

Pro libovolné variace $\delta_{x_1} y$ a $\delta_{x_2} y$ křivka

$$y = y_1(x) = y(x) + \delta_{x_1} y + \delta_{x_2} y$$

nebude obecně patřit do třídy přípustných čar. K tomu, aby variace byla přípustná, je nutné a stačí, aby bylo



Obr. 17.

$$K(y_1) = K(y),$$

t. j. aby

$$\Delta K = K(y_1) - K(y) = \left\{\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x_1} + \varepsilon_1'\right\} \sigma_1 +$$

$$+ \left\{\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x_2} + \varepsilon_2'\right\} \sigma_2 = 0, \tag{1}$$

kde ε_1' a ε_2' konvergují k nule spolu se σ_1 a σ_2.

Zvolíme nyní bod x_2 tak, aby bylo

$$\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right]_{x=x_2} \neq 0;$$

takový bod x_2 existuje, neboť $y = y(x)$ není extremálou pro K. V takovém případě lze dát podmínce (1) tvar

$$\sigma_2 = -\left\{\frac{\left[G_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\right]_{x=x_1}}{\left[G_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\right]_{x=x_2}} + \varepsilon'\right\}\sigma_1, \tag{2}$$

kde ε' konverguje k nule spolu se σ_1.

Položíme-li

$$\lambda = -\frac{\left[F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_2}}{\left[G_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\right]_{x=x_2}}$$

a dosadíme-li do výrazu ΔJ za σ_2 podle (2), můžeme uvést přírůstek ΔJ na tvar

$$\Delta J = \left\{\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]_{x=x_1} + \lambda\left[G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\right]_{x=x_1} + \varepsilon\right\}\sigma_1,$$

kde ε konverguje k nule spolu se σ_1. Protože podle předpokladu křivka $y = y(x)$ dává minimum integrálu J, je $\Delta J \geqq 0$ pro libovolnou přípustnou variaci, t. j. pro jakoukoli dostatečně malou kladnou a zápornou hodnotu σ_1. Tudíž pro jakoukoli hodnotu x musí podél křivky $y = y(x)$ být podle pomocné věty na str. 51, § 8

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \lambda\left(G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y'}\right) = 0. \tag{3}$$

Tím je Eulerova věta dokázána.

Podmíněná extremála. Rovnice (3) vede k úplnému řešení také této úlohy: *mezi všemi křivkami, spojujícími dva dané body, určit křivku, při jejímž variování je $\delta J = 0$, jakmile $\delta K = 0$.*

Nazveme *podmíněnou extremálou* každou křivku, která bude řešením dané úlohy (pro libovolné pevné koncové body).

Věta 2. *Rovnice* (3) *je podmínkou nutnou a postačující k tomu, aby křivka $y = y(x)$ byla podmíněnou extremálou.*

Nejdříve dokážeme, že podmínka (3) je postačující. Vskutku, splňuje-li křivka podmínku (3), pak je $\delta(J + \lambda K) = 0$. A potom z podmínky $\delta K = 0$ plyne $\delta J = 0$, t. j. křivka je podmíněnou extremálou.

Při důkazu, že podmínka je nutná, rozlišujeme dva případy:

$$1)\ G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'} \not\equiv 0 \text{ a}$$

$$2)\ G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'} \equiv 0 \text{ v intervalu } [a, b].$$

V prvním případě se nutnost podmínky (3) dostane doslovným opakováním námi uvedeného důkazu formule (3), založeného na variování křivky ve dvou bodech.

Ve druhém případě má křivka $y = y(x)$ tu vlastnost, že jakákoli její variace dává $\delta K = 0$. A potom na základě toho, že tato křivka je podmíněnou extremálou, je rovněž $\delta J = 0$, t. j. $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0$, a tedy je podmínka (3) rovněž splněna.

Zákon reciprocity. Shora uvedené úvahy ukazují, že isoperimetrická úloha variačního počtu vede k nejjednodušší úloze s funkcí $H = F + \lambda G$. Připomeneme-li, že násobení integrované funkce konstantou nezmění soustavu extremál pro integrál, můžeme funkci H zapsat v symetrickém tvaru:

$$H = \lambda_1 F + \lambda_2 G,$$

kde λ_1 a λ_2 jsou konstanty. Takové vyjádření fukce H nám ukazuje, že funkce F a G ve výrazu H vystupují symetricky. Vyloučíme-li případ $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 0$, pak *soustava extremál bude jedna a táž, budeme-li hledat extrém integrálu J za podmínky, že integrál K má konstantní hodnotu, nebo budeme-li hledat extrém integrálu K za podmínky, že integrál J zachovává konstantní hodnotu.* V tom je obsažen zákon reciprocity ve své nejjednodušší formě.

Je-li $\lambda_2 = 0$, pak H je až na konstantní faktor právě rovno F; podmíněná extremála integrálu J bude identická s nepodmíněnou extremálou téhož integrálu, a tato extremála v obecném případě nebude zřejmě podmíněnou extremálou pro integrál K. Analogicky, jestliže $\lambda_1 = 0$, pak H je rovno G a podmíněná extremála integrálu K bude jeho nepodmíněnou extremálou.

Příklad 1. Jako první příklad provedeme vyšetření tvaru hmotného ohebného neroztažitelného vlákna délky l, které je na obou koncích zavěšeno. Tato úloha zřejmě vede na úlohu stanovit takovou polohu vlákna, při němž těžiště zaujímá nejnižší polohu. Proto za předpokladu, že vlákno leží v rovině xOy a že osa Ox běží horizontálně a osa Oy směřuje vertikálně nahoru, máme následující úlohu: mezi všemi rovinnými čarami délky l, jejichž koncové body leží v daných bodech $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, najít tu, u níž je pořadnice těžiště minimální.

Pořadnice Y těžiště čáry $y = y(x)$ se stanoví z formule

$$Y = \frac{1}{l} \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx;$$

chceme tedy najít minimum integrálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

za podmínky

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l.$$

Funkce H nabude v tomto případě tvaru

$$H(x, y, y') = (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}.$$

Provedeme-li záměnu proměnné

$$y + \lambda = z,$$

nalezneme, že funkce H má tentýž tvar jako integrovaná funkce F v úloze o minimální rotační ploše (viz § 4).

Použijeme-li dříve získaných výsledků, dostaneme soustavu extremál v tomto tvaru:

$$y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{\alpha} - \lambda.$$

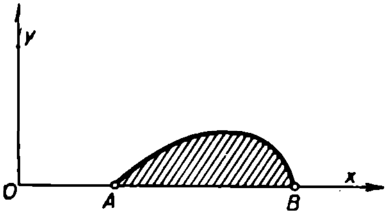
To je obecná rovnice řetězovky. Konstanty se určí z podmínek

$$y_0 = \alpha \operatorname{ch} \frac{x_0 - \beta}{\alpha} - \lambda, \quad y_1 = \alpha \operatorname{ch} \frac{x_1 - \beta}{\alpha} - \lambda,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{\alpha}\, dx = \alpha \left[\operatorname{sh} \frac{x_1 - \beta}{\alpha} - \operatorname{sh} \frac{x_0 - \beta}{\alpha} \right] = l.$$

Příklad 2. Mezi všemi křivkami délky l, spojujícími dva dané body A a B,[2]) určit tu, která omezuje spolu s úsečkou AB plochu největšího obsahu.

Vezmeme za osu Ox přímku, která jde dvěma danými body A a B (obr. 18); potom obsah plochy, ohraničené křivkou $y = y(x)$, o které zřejmě můžeme vždycky předpokládat, že leží celá nad osou Ox, je vyjádřen integrálem



Obr. 18.

$$J = \int_a^b y \, dx,$$

kde a, b jsou úsečky bodů A a B. Vede tedy naše úloha na úlohu hledat maximum integrálu J za podmínky

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx = l$$

a za počátečních podmínek $y(a) = y(b) = 0$. Aplikujeme-li Eulerovu methodu, potřebujeme především určit soustavu extremál pro integrál

$$J = \int_a^b H(y, y') \, dx,$$

kde

$$H(y, y') = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}.$$

První integrál Eulerovy rovnice pro integrál J bude

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - y'\lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \alpha$$

neboli

$$y = \alpha - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Položme

$$y' = \operatorname{tg}\varphi;$$

potom

$$y = \alpha - \lambda \cos\varphi.$$

Derivujeme-li tento vztah podle x, dostaneme

$$y' = \lambda \sin\varphi \frac{d\varphi}{dx} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Z toho

$$x = \lambda \sin\varphi + \beta.$$

---

[2]) Předpokládáme předem, že je $l > \overline{AB}$, protože v opačném případě ztrácí úloha smysl.

Budou tedy rovnice soustavy extremál

$$x = \lambda \sin\varphi + \beta,$$

$$y = -\lambda \cos\varphi + \alpha,$$

neboli po vyloučení φ

$$(x - \beta)^2 + (y - \alpha)^2 = \lambda^2.$$

Jestliže tedy hledaná křivka existuje, pak tato křivka je kružnice. Tři parametry α, β, λ, určující polohu a poloměr kružnice, se najdou zřejmě jednoznačně z toho, že kružnice jde body A a B, a z podmínky, že délka hledané křivky je rovna l.

Zobecnění. Shora rozebranou methodu řešení nejjednodušší isoperimetrické úlohy je možno snadno rozšířit na případ, když za třídu přípustných čar bereme křivky třídy C_1, spojující dva dané body a vyhovující k podmínkám:

$$K_i = \int_a^b G^{(i)}(x, y, y')\,\mathrm{d}x = l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{1'}$$

kde funkce $G^{(i)}$ splňují obvyklé podmínky, kdežto l_i jsou konstanty.

Věta 3. *Jestliže křivka $y = y(x)$ vede k extrému integrálu*

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

na třídě přípustných křivek C_1, splňujících podmínky (1'), a jestliže kromě toho existuje k bodů $x_1, x_2, \ldots, x_k$ v intervalu (a, b) takových, že determinant

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left| G^{(i)}[x_j, y(x_j), y'(x_j)] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G^{(i)}_{y'}[x_j, y(x_j), y'(x_j)] \right|$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

není roven nule, pak existuje k konstant λ_i takových, že křivka $y(x)$ vyhovuje diferenciální rovnici

$$H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y'} = 0,$$

kde

$$H = F + \lambda_1 G^{(1)} + \lambda_2 G^{(2)} + \ldots + \lambda_k G^{(k)}.$$

Důkaz této věty se provede zcela analogicky jako v nejjednodušším případě.

Isoperimetrická úloha s volnými konci. Studujme nyní tuto úlohu. Nechť třída křivek $[\gamma]$ se skládá z těch křivek třídy C_1, pro něž funkcionál $K(\gamma) = \int_\gamma G_1(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ nabývá předepsané hodnoty l a jejichž koncové body leží na křivkách φ a ψ třídy C_1, definovaných rovnicemi $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Na třídě křivek $[\gamma]$ je definován funkcionál $J(\gamma) = \int\limits_{\gamma} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$. Hledáme tu křivku γ_0 třídy $[\gamma]$, pro niž $J(\gamma)$ dosahuje svého extrému.

Opakujeme-li úvahy § 16, zjistíme, že křivka γ_0 realisuje extrém funkcionálu $J(\gamma)$ mezi těmi křivkami třídy $[\gamma]$, které s ní mají společné koncové body, t. j. γ_0 realisuje extrém $J(\gamma)$ mezi křivkami o pevných koncových bodech, pro něž $K(\gamma) = l$.

Podle Eulerovy věty existuje konstanta λ taková, že γ_0 je extremálou pro integrál $J + \lambda K = \int H\,\mathrm{d}x$, t. j. vyhovuje Eulerově rovnici

$$H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y'} = 0.$$

Nyní dokážeme, že v koncových bodech A a B křivky γ_0 jsou splněny podmínky transversality

$$[H + (\varphi' - y_0')H_{y'}]^{(0)} = 0, \quad [H + (\psi' - y_1')H_{y'}]^{(1)} = 0. \tag{4}$$

Sestrojme čtyrparametrovou soustavu oblouků, obsahující extremálu γ_0 a takovou, že každým párem bodů A' a B', ležících v některém okolí bodu A resp. bodu B, je možno vést jeden a jenom jeden oblouk této soustavy, spojitě závislý na jeho koncových bodech.

Pro oblouk γ_0 je

$$K(\gamma_0) = l,$$

avšak již pro oblouky γ této soustavy blízké ke γ_0 je

$$K(\gamma) = K(\gamma_0) + \varepsilon_\gamma = l + \varepsilon_\gamma,$$

kde ε_γ je malé číslo obecně různé od nuly.

Tyto oblouky je možno deformovat, aniž měníme polohu jejich koncových bodů tak, aby po deformaci bylo

$$K(\gamma) = l$$

na všech obloucích soustavy.

Vskutku, oblouk γ_0 není obloukem extremály funkcionálu $K(\gamma)$, proto lze najít takový vnitřní bod $C(x_1, y_1)$ tohoto oblouku, pro který výraz $G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}$ je na příklad větší než nula:

$$G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'} > 0.$$

Pro křivky $y = y(x) + \delta y(x)$ naší soustavy blízké ke γ_0 je rovněž v bodech $(x_1, y_1 + \delta y_1)$ splněna tato nerovnost.

Jestliže zdeformujeme křivku γ v dostatečně malém okolí bodu $(x_1, y_1 + \delta y_1)$, pak přejde v křivku γ_1 s týmiž konci jako γ.

Při tom je

$$K(\gamma_1) - K(\gamma) \approx \left(G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\right) \sigma,$$

kde σ značí plošku mezi γ a γ_1 (pravá strana tohoto výrazu je odpovídající variace v bodě funkcionálu $K(\gamma)$). Protože

$$G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'} \neq 0,$$

pak je možno zvolit σ tak, aby

$$K(\gamma_1) - K(\gamma) = - \varepsilon_\gamma,$$

a tedy

$$K(\gamma_1) = l.$$

Deformace uvedeného tvaru lze provést spojitě na celé soustavě, takže jako výsledek dostaneme soustavu oblouků $\{\gamma_1\}$ takových, že

$$K(\gamma_1) = l.$$

Na soustavě oblouků $\{\gamma_1\}$ je $\mathrm{d}K(\gamma) = 0$. Je tudíž na naší soustavě

$$\mathrm{d}J(\gamma) = \mathrm{d}(J(\gamma) + \lambda K(\gamma)).$$

Křivka γ_0 je extremálou pro funkcionál

$$H = J + \lambda K.$$

Při přechodu od extremály γ_0 k jakékoli jiné křivce soustavy $\{\gamma_1\}$ je $\mathrm{d}J = \mathrm{d}(J + \lambda K)$ vyjádřeno formulí (11) § 16 při záměně J za $J + \lambda K$. Opakujeme-li úvahy § 16, dostaneme podmínky transversality (4).

Příklad. Najít rovnovážnou polohu hmotného pružného neroztažitelného řetězu, jehož konce kloužou po daných čarách φ a ψ.

Jak jsme již viděli (příklad str. 120), vede úloha k hledání minima $J = \int y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ za podmínky $K = \int\sqrt{1 + y'^2}\,dx = l$. Křivka, realisující minimum, je extremálou integrálu $\int(y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}\,dx$, t. j. řetězovka (str. 120). Protože integrovaný výraz má tvar $A\sqrt{1 + y'^2}$, kde $A = y + \lambda$, pak podle výsledku str. 99 podmínky transversality se stanou podmínkami orthogonality. Má tedy řetěz v rovnovážné poloze tvar řetězovky, orthogonální ve svých koncových bodech ke křivkám φ a ψ.

§ 21. Podmíněný extrém.

Formulace úlohy na podmíněný extrém. V § 12 jsme vyšetřovali extrémy funkcionálů, při čemž jsme vzali za třídu přípustných čar soustavu prostorových křivek spojujících buď dva dané body nebo body daných čar. V aplikacích na geometrii a mechaniku mají také velký význam úlohy, kdy za třídu přípustných čar bereme křivky, ležící na dané ploše, nebo pro případ více neznámých funkcí, ležící na některé varietě. Odpovídající variační úlohy mají název úlohy na *podmíněný extrém*. Methodika a hlavní myšlenky řešení se nám úplně objasní, jestliže vyšetříme nejjednodušší případ podobných úloh.

Formulace úlohy. *Mezi všemi křivkami*

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

třídy C_1, spojujícími dva dané body A a B a ležícími na dané ploše

$$\varphi(x, y, z) = 0,^{3)} \tag{5}$$

určit tu křivku, podél níž integrál

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx \tag{6}$$

nabývá extrémní hodnoty.

---

[3]) Budeme předpokládat, že plocha neobsahuje singulární body. Mimo to musíme napříště předpokládat, že

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 > 0,$$

t. j. že tečná rovina plochy ani v jednom bodě není kolmá k ose x. Od tohoto předpokladu lze upustit, řešíme-li úlohu v parametrickém tvaru.

Tuto úlohu lze bez obtíží redukovat na nejjednodušší úlohu variačního počtu o jedné neznámé funkci. Řešíme-li totiž rovnici (5) vzhledem k z a dosadíme-li dosažené výrazy z a z' do funkce F, dostaneme za integračním znamením funkci závislou jenom na x, y, y'.

Takový postup, který je principiálně možný, je však v řadě úloh prakticky nesnadno realisovatelný, neboť při jeho uskutečnění se řeší rovnice často velmi složité. Z toho důvodu se při řešení této úlohy používá postupu analogického odpovídajícím postupům, jichž jsme použili při vyšetřování úloh na podmíněný extrém funkcí více proměnných.

Lagrangeova methoda. Pro bezprostřední řešení shora formulované úlohy navrhl Lagrange methodu, která dostala název methoda neurčitých funkcionálních multiplikátorů. Tato methoda spočívá v následujícím postupu.

Konstruujeme funkci

$$\Phi(x, y, z, y', z') = F + \lambda(x)\varphi,$$

kde $\lambda(x)$ je zatím neurčená funkce proměnné x. Hledáme nepodmíněný extrém integrálu

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} \Phi \, \mathrm{d}x. \tag{6'}$$

Vypíšeme pro tuto úlohu diferenciální rovnice Eulerovy

$$\left.\begin{aligned} \Phi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{y'} &= F_y + \lambda\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0, \\ \Phi_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{z'} &= F_z + \lambda\varphi_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

K soustavě (7) s třemi neznámými funkcemi: $y(x)$, $z(x)$, $\lambda(x)$ přidáme daný vztah

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Řešení tří rovnic (7) a (8) bude obsahovat dvě libovolné konstanty, které se určí z počátečních podmínek. Tato methoda je založena na této větě.

Věta 4. *Jestliže křivka*

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

vede k podmíněnému extrému integrálu J (6), pak existuje multiplikátor $\lambda(x)$ takový, že tato křivka je extremálou úlohy na nepodmíněný extrém integrálu J_1 (6').

Nechť křivka $y = y(x)$ a $z = z(x)$ z třídy přípustných čar realisuje minimum dané úlohy. Je-li $\bar{y} = \bar{y}(x)$, $\bar{z} = \bar{z}(x)$ jiná křivka z třídy přípustných čar, pak

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) = 0, \tag{9}$$

$$\Delta J = J(\bar{y}, \bar{z}) - J(y, z) \geqq 0. \tag{10}$$

Zvolíme libovolný bod x' z intervalu (x_0, x_1) a budeme předpokládat, že funkce $\delta y(x) = \bar{y}(x) - y(x)$, $\delta z(x) = \bar{z}(x) - z(x)$ jsou různé od nuly jenom v některém malém okolí bodu x'. Položíme

$$\sigma_1 = \int_{x_0}^{x_1} \delta y \, \mathrm{d}x, \quad \sigma_2 = \int_{x_0}^{x_1} \delta z \, \mathrm{d}x$$

a nechť v dalším ε_i označují vždycky veličiny nekonečně malé vyššího řádu než největší z hodnot $|\sigma_1|$, $|\sigma_2|$. Pruhem nad funkcemi φ_y, F_y atd. označíme hodnoty těchto funkcí pro hodnoty argumentů rovné x, $y + \Theta_1 \delta y$, $z + \Theta_2 \delta z$ atd., kde $|\Theta_i| \leqq 1$.

Máme

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x, y, \bar{z}) - \varphi(x, y, z)] \, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} (\bar{\varphi}_y \delta_y + \bar{\varphi}_z \delta_z) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \varphi_y|_{x=x'} \sigma_1 + \varphi_z|_{x=x'} \sigma_2 + \varepsilon_1.$$

Předpokládáme, že jeden z koeficientů u σ_1 a σ_2, na příklad φ_z, je různý od nuly; v tom případě

$$\sigma_2 = -\left[\frac{\varphi_y}{\varphi_z}\right]_{x=x'} \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2. \tag{11}$$

Dále z (10), provedeme-li obvyklé transformace, dostaneme

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\bar{F}_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \bar{F}_{y'}\right) \delta y \, \mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} \left(\bar{F}_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \bar{F}_{z'}\right) \delta z \, \mathrm{d}x =$$
$$= \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right)_{x=x'} \cdot \sigma_1 + \left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}\right)_{x=x'} \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \geqq 0. \tag{12}$$

Dosadíme-li σ_2 z (11) do (12), obdržíme

$$\left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} - \frac{\varphi_y}{\varphi_z}\left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}\right)\right]_{x=x'} . \sigma_1 + \varepsilon_4 \geqq 0. \qquad (13)$$

Nerovnost (13) platí pro jakákoli dostatečně malá σ_1 kladná i záporná, kdežto ε_4 konverguje k nule rychleji než σ_1 a tudíž je nutné, aby (viz pomocnou větu § 8)

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} - \frac{\varphi_y}{\varphi_z}\left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}\right) = 0. \qquad (14)$$

To platí pro jakoukoli hodnotu $x = x'$ v intervalu (x_0, x_1), pro kterou $\varphi_z \neq 0$. Jestliže $(\varphi_z)_{x=x'} = 0$, potom $(\varphi_y)_{x=x'} \neq 0$ (viz poznámku na str. 125), a zaměníme-li úlohy y a z dojdeme k vztahu analogickému vztahu (14). Oba tyto vztahy lze zapsat v symetrickém tvaru:

$$\frac{F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}}{\varphi_y} = \frac{F_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}}{\varphi_z}.$$

Označíme-li stejné výrazy pravé a levé strany rovnosti znakem $-\lambda(x)$, obdržíme rovnice (7).

Z podaného důkazu věty je snadné zjistit, že z něho v podstatě plyne ještě tento výsledek: jestliže křivka (4) $y = y(x)$, $z = z(x)$ je taková, že pro jakákoli $\delta y(x)$, $\delta z(x)$, která splňují podmínky

$$\varphi_y(x, y, z)\delta y + \varphi_z(x, y, z)\delta z = 0, \qquad (9')$$

je variace J rovna nule:

$$\delta J = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right)\delta y + \left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'}\right)\delta z\right]\mathrm{d}x = 0, \qquad (10')$$

pak existuje takové $\lambda(x)$, že jsou splněny podmínky (7).

Skutečně, když zintegrujeme (9'), dostaneme jako nahoře vztah (11), a z (10) dojdeme transformacemi analogickými transformacím formulí (12) a (13) ihned ke vztahu (14), c. b. d.

Obráceně, pro každé řešení systému (7) pro jakékoli $\lambda(x)$ rovnice (9') má svým důsledkem (10'). Pro to, abychom se o tom přesvědčili, stačí násobit obě strany rovnic (7) $\delta y(x)$ resp. $\delta z(x)$, provést integraci obou stran a obdržené rovnosti sečíst po členech.

Z toho a ze shora dokázané věty plyne:

K tomu, aby křivka (4) *realisovala podmíněný extrém integrálu* (6) *za podmínky* (5), *je nutné, aby pro ni*

$$\delta J = 0$$

pro všechny variace $\delta y(x)$, $\delta z(x)$, *vyhovující vztahu* (9').

Hledání geodetických čar. Úloha najít oblouk γ:

$$y = y(x),\ z = z(x)$$

nejmenší délky, t. zv. geodetický oblouk, spojující body $A(x_0, y_0, z_0)$ a $B(x_1, y_1, z_1)$ plochy $\varphi(x, y, z) = 0$, vede k úloze najít minimum integrálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

za podmínky

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

a za podmínek pro koncové body

$$y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0,$$
$$y(x_1) = y_1,\ z(x_1) = z_1.$$

Podle Lagrangeovy methody multiplikátorů vede tato úloha na hledání extremál integrálu

$$\int_{x_0}^{x_1} \{ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda\varphi(x, y, z)\}\, dx.$$

Sestavíme Eulerovy rovnice:

$$\lambda(x)\varphi_y = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\lambda(x)\varphi_z = \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Na základě známých vzorců Serret-Frenetových nabudou tyto rovnice tvaru

$$\lambda(x)\varphi_y = \frac{\cos\alpha_2}{r},$$

$$\lambda(x)\varphi_z = \frac{\cos\alpha_3}{r},$$

kde označujeme $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ směrové kosiny hlavní normály ke křivce γ a kde r je poloměr křivosti křivky γ. Z toho

$$\varphi_y : \varphi_z = \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3. \tag{15}$$

Dále z $\varphi(x, y, z) = 0$ plyne, že podél křivky γ: $y = y(x)$, $z = z(x)$ máme

$$\varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_z z' = 0. \tag{16}$$

Protože tedy hlavní normála ke křivce γ je kolmá k tečně téže křivky a směrnice tečny jsou úměrné $1, y', z'$, je

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 y' + \cos\alpha_3 z' = 0. \tag{17}$$

Z (15), (16) a (17) obdržíme

$$\varphi_x : \varphi_y : \varphi_z = \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3.$$

Protože však $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ jsou zároveň úměrné směrovým kosinům normály plochy $\varphi = 0$, dostaneme odtud tento výsledek: hlavní normály ke geodetickým čarám v každém bodě jsou současně normálami plochy.

§ 22. Obecný Lagrangeův problém.

Lagrangeovy methody multiplikátorů použijeme i v těch úlohách, v nichž bereme za třídu přípustných čar čáry, vyhovující některé soustavě diferenciálních rovnic.

Hledejme extrém integrálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,\mathrm{d}x,$$

když za třídu přípustných čar vezmeme prostorové křivky třídy C_1, vyhovující diferenciálnímu vztahu

$$\varphi(x, y, z, y', z') = 0 \tag{18}$$

a splňující na svých koncích některé další podmínky (t. j. pro $x = x_0$, $x = x_1$). Potom platí věta, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 5. *Jestliže křivka γ_0 činí funkcionál J extrémním za podmínky* (18) *a jestliže podél γ_0 jedna z derivací $\varphi_{y'}$ nebo $\varphi_{z'}$ není rovna nule, pak existuje funkce proměnné x, $\lambda(x)$, taková, že γ_0 bude integrální křivkou soustavy rovnic*

$$H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y'} = 0,\; H_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{z'} = 0, \tag{19}$$

kde

$$H = F + \lambda\varphi.$$

Tato věta udává methodu pro stanovení hledané křivky γ_0. Řešíme-li totiž současně rovnice (18) a (19), nalezneme neznámé funkce y, z, λ.

K odhadu počtu libovolných konstant v řešení naší soustavy rovnic a tedy počtu nutných počátečních podmínek zavedeme nové neznámé funkce:

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}. \tag{20}$$

Dojdeme k soustavě čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu (19) a (20) vzhledem k λ, y, z, u, v a k jednomu konečnému vztahu (18): $\varphi(y, z, u, v) = 0$.

Pokud jeden z výrazů $\varphi_u = \varphi_{y'}$ nebo $\varphi_v = \varphi_{z'}$ je různý od nuly, jak přirozeně předpokládáme, můžeme jednu z funkcí u nebo v vyjádřit ostatními a vyloučit ji ze soustavy (19) a (20). Dostaneme soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu o čtyřech neznámých funkcích, jejíž obecný integrál v obecném případě obsahuje čtyři libovolné konstanty.

Tři z nalezených funkcí, totiž

$$y = y(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

$$z = z(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

$$\lambda = \lambda(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

budou zřejmě obecným řešením soustav (18) a (19). Stačí tedy k vyloučení libovolných konstant klást na koncové body čtyři podmínky (na příklad podmínky, že křivka prochází dvěma danými body prostoru).

Tak to bude vypadat v obecném případě. Avšak v některých problémech se může počet libovolných konstant snížit. Vyšetříme na příklad případ, když rovnice (18) má integrál

$$\psi(x, y, z) = C \tag{21}$$

(na příklad, má-li tato rovnice tvar $\psi_x + \psi_y y' + \psi_z z'$).

Má-li křivka dávající extrém procházet dvěma určenými body $A(x_0, y_0, z_0)$ a $B(x_1, y_1, z_1)$, pak lze v rovnici (21) stanovit konstantu C z rovnosti

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = C.$$

Koncový bod $B(x_1, y_1, z_1)$ křivky dávající extrém musí rovněž patřit k ploše $\psi(x, y, z) = C$ a tedy čtyři podmínky pro koncové body

$$y_0 = y(x_0),\ z_0 = z(x_0),\ y_1 = y(x_1),\ z_1 = z(x_1)$$

nejsou mezi sebou nezávislé; mezi nimi platí vztah

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = \psi(x_1, y_1, z_1). \tag{21'}$$

Po stanovení C můžeme řešit naši úlohu jako úlohu na extrém tvaru rozebíraného v § 21. (Extrém integrálu za podmínky, že křivka dávající extrém leží na dané ploše.) A v tom případě integrování odpovídajících rovnic nám dá dvě libovolné konstanty (viz str. 126). Přidáme-li k nim C, dostaneme tři libovolné konstanty, které se určí z podmínek na koncové body, jež jsou rovněž jenom tři (podle (21')).

Formulace úlohy. Shora uvedenou methodu lze rozšířit rovněž na úlohy obecnější. Hledejme na příklad extrém integrálu

$$\int_a^b F(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\, \mathrm{d}x \tag{22}$$

za podmínky, že všechny čáry třídy přípustných křivek vyhovují soustavě k diferenciálních rovnic:

$$\varphi_j(x; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k) \tag{23}$$

a některým podmínkám pro koncové body v počtu $2n + k$.

Podobně jako v rozebraném nejjednodušším případě je možno dokázat, že *existuje-li hledaná křivka γ_0 a je-li podél křivky jeden z hlavních determinantů funkcionální matice*

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}\right) \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, k, \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

vždycky různý od nuly, pak γ_0 je integrální křivka následující soustavy $n + k$ diferenciálních rovnic:

$$\left.\begin{aligned} H_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y'_i}{}' = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \varphi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

kde $H = F + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j$ a kde λ_j jsou některé funkce x.

Tato věta umožňuje jako v nejjednodušších případech dříve rozebíraných skutečně určit hledanou křivku, předpokládáme-li, že hledaná křivka existuje. Neboť soustava (24) udává $n + k$ diferenciálních rovnic, z nichž k je prvního řádu a n druhého řádu, a tudíž obecný integrál této soustavy

$$y = f_i(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+k}) \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

bude obsahovat $2n + k$ libovolných konstant. Podle věty náleží hledaná křivka γ_0 do této soustavy a k jejímu stanovení zbývá najít hodnoty konstant α. K tomuto cíli zřejmě stačí použít podmínek pro koncové body, jichž má být podle předpokladu právě $2n + k$.

Je-li počet podmínek pro koncové body větší než $2n + k$, pak je úloha obecně neřešitelná. Je-li těchto podmínek méně než $2n + k$, pak můžeme buď volit zbývající konstanty α tak, aby pro tyto hodnoty integrál J vzatý podél křivky γ_0 nabýval extremální hodnoty nebo, jak to činíme v § 18, hledat methodou variací další podmínky — zobecnit pojem transversality.

Uvedená úloha má název obecný Lagrangeův problém.[4])

Příklad. *Po jaké zavřené křivce musí letět letadlo, jež má vlastní rychlost v_0, aby v časovém intervalu T obletělo plochu největšího obsahu; při tom se předpokládá, že rychlost větru je konstantní a má konstantní směr.*

Nechť osa Ox jde ve směru rychlosti větru. Označme α úhel mezi vlastním směrem letadla a osou Ox a $x(t)$, $y(t)$ souřadnice polohy letadla v okamžiku t. Rychlost v letadla je geometrickým součtem jeho vlastní rychlosti v_0 a rychlosti větru. Protože komponenty v jsou rovny x' a y', je

$$x' = v_0 \cos\alpha + a, \quad y' = v_0 \sin\alpha. \tag{25}$$

Plocha, omezená zavřenou trajektorií letadla, má obsah vyjádřený integrálem

$$\tfrac{1}{2}\int_0^T (xy' - yx')\,dt. \tag{26}$$

Naše úloha vede k úloze najít maximum (26) za dvou podmínek (25). K tomu je třeba nalézt nepodmíněný extrém integrálu

$$\int_0^T [xy' - yx' + \lambda_1(x' - v_0 \cos\alpha - a) + \lambda_2(y' - v_0 \sin\alpha)]\,dt; \tag{27}$$

zde jsou hledanými funkcemi: $x(t)$, $y(t)$, $\alpha = \alpha(t)$.

---

[4]) Geometrický výklad obecné úlohy podmíněného extrému podal v r. 1934 ve své práci L. A. Ljusternik.

Podmínky kladené na funkci znamenají geometricky ve funkcionálním prostoru některou „varietu" N. Body extrému funkcionálu $J(\gamma)$ na „varietě" N jsou ty její body, v nichž se dotýká hyperplochy $J(\gamma) = \text{const}$. Z toho je zřejmo, jaký je geometrický význam pravidla Lagrangeových multiplikátorů. (Pozn. red. Gostechizdat, Moskva, Leningrad 1950.)

Sestavíme pro ně Eulerovy rovnice. Označíme-li F výraz za integračním znamením v (27), máme

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 \text{ neboli } y' - \frac{d}{dt}(-y + \lambda_1) = 0, \tag{28}$$

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0 \text{ neboli } -x' - \frac{d}{dt}(x + \lambda_2) = 0, \tag{29}$$

$$F_\alpha = 0 \text{ neboli } \lambda_1 \sin\alpha - \lambda_2 \cos\alpha = 0. \tag{30}$$

Z (28) a (29) plyne, že

$$2x + C_2 = \lambda_2,\ 2y + C_1 = -\lambda_1. \tag{31}$$

Rovnoběžným posunutím počátku souřadnic lze dosáhnout, aby se konstanty C_1 a C_2 ve výrazech (31) pro x a y staly rovnými nule; potom je

$$x = \frac{\lambda_2}{2},\ y = -\frac{\lambda_1}{2}. \tag{32}$$

Přejdeme k polárním souřadnicím. Označíme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a φ průvodič a argument bodu (x, y), udávajícího polohu letadla v některém časovém okamžiku. Protože

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

dostaneme z (32)

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{33}$$

Z (30) plyne na druhé straně:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{34}$$

Porovnáme-li (33) a (34), obdržíme

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

Směr letadla je kolmý k průvodiči. Substituce (35) do výrazu (25) vede k soustavě:

$$x' = -v_0 \sin\varphi + a,\ y' = v_0 \cos\varphi. \tag{36}$$

Násobíme-li první rovnici x, druhou y a dosadíme-li $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, dostaneme po sečtení

$$xx' + yy' = ax = ar\cos\varphi = ar\sin\alpha$$

neboli

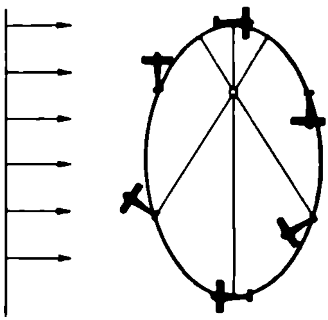
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2=r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=ar\sin\alpha.$$

Použijeme-li formule (25), máme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{a}{v_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$r=\frac{a}{v_0}y+C. \tag{37}$$

To je rovnice kuželosečky s ohniskem v počátku souřadnic. Protože $\frac{a}{v_0}$ musíme podle smyslu úlohy považovat za číslo menší než jedna (rychlost letadla musí převyšovat rychlost větru), pak rovnice (37) znamená elipsu o výstřednosti $\frac{a}{v_0}$ a s velkou osou probíhající ve směru osy Oy (obr. 19).



Obr. 19.

Je tedy křivka s maximální velikostí obsahu oblétnuté plochy elipsou s velkou osou kolmou na směr větru a s výstředností rovnou poměru rychlosti větru k rychlosti letadla, při čemž směr letadla musí být kolmý k průvodiči elipsy.

Souvislost mezi problémem isoperimetrickým a Lagrangeovým. Isoperimetrický problém lze převést na problém Lagrangeův.[5])

Chtějme najít extrém integrálu

$$J=\int_a^b F(x;\, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k_1)};\; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)} \ldots;$$
$$y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)})\,\mathrm{d}x,$$

máme-li předepsány podmínky pro koncové body a další podmínky

$$K_i=\int_a^b F_i(x;\, y_1, y_1', \ldots;\, y_n, y_n', \ldots)\,\mathrm{d}x=l_i \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Označíme-li

$$\Psi_i(t)=\int_a^t F_i\,\mathrm{d}x \quad (i=1,2,\ldots,m),$$

[5]) Lagrangeovu úlohu nelze na isoperimetrický problém převést.

máme

$$\Psi_i'(x) = F_i(x; y_1, y_1', \ldots; y_n, y_n', \ldots), \tag{38}$$

při čemž

$$\Psi_i(a) = 0,\ \Psi_i(b) = l_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{39}$$

Je tedy naše isoperimetrická úloha ekvivalentní úloze Lagrangeově: najít soustavu $n + m$ funkcí: $y_1, y_2, \ldots, y_n; \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$, spojených vztahy (38) a splňujících odpovídající podmínky pro koncové body pro funkce y_i a podmínky (39) pro funkce Ψ_i, a to takovou, aby za daných podmínek realisovala extrém integrálu

$$\int_a^b F \, \mathrm{d}x.$$

V souhlase s methodou Lagrangeovou vede naše úloha na problém vyhledat nepodmíněný extrém integrálu

$$\int_a^b [F - \Sigma\lambda_i(\Psi_i' - F_i)] \, \mathrm{d}x,$$

kde $\lambda_i(x)$ jsou nějaké funkce; F_i a F nezávisí na Ψ_i a jejich derivacích. Soustava $n + m$ rovnic pro naši Eulerovu úlohu se rozpadne na soustavu n rovnic vzhledem k funkcím y_i:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}[F + \Sigma\lambda_i F_i] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y_i'}[F + \Sigma\lambda_i F_i] - \ldots = 0$$

a na soustavu m rovnic vzhledem k funkcím Ψ_i, které nabudou tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda_i = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

t. j. koeficienty λ_i se stanou konstantními čísly.

VARIAČNÍ ÚLOHY V PARAMETRICKÉM TVARU

§ 23. Parametrické vyjádření rovnic křivek a podmínky homogenity.

Předběžné poznámky. V rovinných úlohách jsme vyšetřovali soustavu připustných čar vyjádřených rovnicemi

$$y = y(x).$$

Ježto jsme $y(x)$ brali jako jednoznačnou funkci proměnné x, musili jsme se omezit na čáry, které protínají přímky rovnoběžné s osou Oy jenom v jednom bodě. Toto omezení při aplikacích na geometrii příliš zmenšovalo okruh našich úvah: ustavičně jsme se setkávali s extrémy na čarách, které této podmínce nevyhovovaly. Na příklad v isoperimetrickém problému (§ 20) o čáře dané délky, omezující spolu s danou úsečkou osy Ox rovinný obor největšího obsahu, se extrému dosahuje na oblouku kružnice, jehož je naše úsečka sečnou. Kdyby délka oblouku převyšovala délku úsečky násobenou $\frac{1}{2}\pi$, pak by již příslušný oblouk kružnice nesplňoval shora formulovanou podmínku. Dodejme, že při našich úvahách souřadnice x, y byly nerovnoprávné, a proto formule, které jsme obdrželi, byly nesymetrické vzhledem k x a y (na příklad podmínky transversality). Avšak v geometrických úlohách jsou souřadnice obecně rovnoprávné.

Abychom tato omezení odstranili, přejdeme k parametrickému vyjádření rovnic křivek

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

V tomto případě lze jednu a tutéž křivku vyjádřit nekonečně mnoha způsoby v parametrickém tvaru, při čemž jeden z druhého dostaneme transformací parametru t. Provedeme-li tuto transformaci pomocí rovnice $t = \chi(\tau)$, kde τ je nový parametr, přejdou rovnice křivky v nové rovnice:

$$x = \varphi[\chi(\tau)] = \varphi_1(\tau), \; y = \psi[\chi(\tau)] = \psi_1(\tau),$$

při čemž

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\chi'(\tau), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\chi'(\tau).$$

Požadavek, aby mezi parametry t a τ byla vzájemně jednoznačná korespondence, t. j. aby také τ bylo jednoznačnou funkcí t, vede k požadavku, aby $\chi(\tau)$ byla ryze monotonní funkcí. Jestliže mimo to žádáme, abychom při růstu obou parametrů probíhali oblouk v jednom a témže směru, musí být $\chi(\tau)$ funkcí rostoucí. Mimo to budeme předpokládat, že $\chi(\tau)$ má spojitou derivaci $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \chi'(\tau)$,[1] která je zřejmě nezáporná. Tato derivace musí být podstatně kladná proto, aby existovala spojitá derivace inversní funkce:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\chi'(\tau)}.$$

Příklad. Rovnice kružnice

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\} \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

transformací $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = u$ neboli $t = 2\operatorname{arctg} u$ přejdou v rovnice:

$$x = \frac{a(1 - u^2)}{1 + u^2}, \quad y = \frac{2au}{1 + u^2}.$$

Přejdeme nyní k vyšetřování funkcionálu definovaného pro čáry dané v parametrickém tvaru. Pro nejjednodušší úlohu lze takový funkcionál napsat ve tvaru křivočarého integrálu

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t, \tag{1}$$

po oblouku křivky (2)

$$x = x(t), \; y = y(t), \tag{2}$$

odpovídajícím hodnotám parametru t, ležícím mezi t_0 a $t_1 > t_0$. Tento integrál vyšetřujeme jako funkci *čáry* dané v parametrickém vyjádření

[1]) Ale v některých případech budeme předpokládat, že $\chi(t)$ má spojité derivace téhož řádu, jaký mají mít podle podmínek úlohy funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$.

a nikoli jako funkcionál závislý na dvou funkcích x a y parametru t (tento případ jsme již studovali v § 12 kap. III). Z toho plyne, že se tento funkcionál nesmí změnit, když transformujeme parametr t. Tento požadavek klade některá omezení na funkci F. K jejich odvození nyní přejdeme.

Odvození podmínek homogenity. Budiž $t = \chi(\tau)$; potom integrál J přejde v integrál

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{x'(\tau)}{\chi'(\tau)}, \frac{y'(\tau)}{\chi'(\tau)}\right) \chi'(\tau)\, d\tau,$$

kde τ_0 a τ_1 odpovídají hodnotám t_0 a t_1 parametru t. S druhé strany funkcionál J jako funkce čáry musí zůstat beze změny, t. j.

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(x, y, x'(\tau), y'(\tau))\, d\tau.$$

Musí tudíž platit rovnost

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{x'(\tau)}{\chi'(\tau)}, \frac{y'(\tau)}{\chi'(\tau)}\right) \chi'(\tau)\, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(x, y, x'(\tau), y'(\tau))\, d\tau.$$

Žádáme-li, aby nezávislost integrálu J na volbě parametru platila pro jakýkoli oblouk naší křivky, pak tato rovnost bude platit pro jakékoli hodnoty horní a dolní meze (jen když je $\tau_0 < \tau_1$ a funkce $x(\tau)$, $y(\tau)$ jsou pro příslušné hodnoty τ definovány). Bereme-li dolní mez τ_0 pevně, budeme vyšetřovat oba integrály jako funkce horní meze. Rovnost těchto funkcí má za následek rovnost jejich derivací, t. j.

$$F\left(x, y, \frac{x'}{\chi'}, \frac{y'}{\chi'}\right) \chi' = F(x, y, x', y').$$

Zde je $\chi'(\tau) > 0$ a pro odpovídající volbu funkce $\chi(\tau)$ může χ' nabýt libovolné kladné hodnoty. Je tedy pro jakékoli $k > 0$

$$kF\left(x, y, \frac{x'}{k}, \frac{y'}{k}\right) = F(x, y, x', y')$$

nebo, klademe-li $\frac{1}{k} = k_1$,

$$F(x, y, k_1 x', k_1 y') = k_1 F(x, y, x', y'). \tag{3}$$

Je tedy funkce F čtyř proměnných x, y, x', y' kladně homogenní rozměru jedna vzhledem k x', y'.[2]) Podle Eulerovy věty o homogenních funkcích je

$$F = x'F_{x'} + y'F_{y'}. \tag{4}$$

Napříště budeme všude předpokládat, že je podmínka homogenity splněna. V tomto případě integrál

$$J = \int F(x, y, x', y')\,dt$$

podél některého oblouku, definovaného rovnicí (2), závisí jenom na tomto oblouku, ale nezávisí na jeho parametrickém vyjádření. To lehko dokážeme, provedeme-li shora uvedené úvahy v opačném pořadí.

Analogicky pro integrál

$$J = \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n')\,dt$$

v n-rozměrném prostoru podél křivky:

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

podmínka nezávislosti na volbě parametrického vyjádření poslední křivky bude:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; kx_1', kx_2', \ldots, kx_n') =$$
$$= kF(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n').$$

Z toho plyne, že

$$F(x_1, \ldots, x_n; x_1', \ldots, x_n')\,dt = F(x_1, \ldots, x_n; dx_1, \ldots, dx_n),$$

kde $dx_i = x_i'\,dt$. Integrál J je tak možno uvést na tvar:

$$J = \int F(x_1, \ldots, x_n; dx_1, dx_2, \ldots, dx_n);$$

F je kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k $dx_1, dx_2, \ldots$ $\ldots, dx_n$.

Uvedeme řadu příkladů na funkce čáry $J = \int F\,dt$, kdy F splňuje podmínky homogenity.

---

[2]) Kladně homogenní funkcí rozměru p vzhledem k proměnným $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se nazývá funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_n)$ vyhovující podmínce

$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_m; x_{m+1}, \ldots, x_n) = k^p f(x_1, x_2, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

pro $k > 0$.

Příklad 1. Obsah rovinného oboru, ohraničeného zavřenou křivkou, je vyjádřen integrálem

$$\tfrac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

podél této křivky.

Příklad 2. Délka oblouku křivky v n-rozměrném eukleidovském prostoru je vyjádřena integrálem

$$\int \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \ldots + \mathrm{d}x_n^2}$$

(před odmocninou je vždy znaménko plus).

Příklad 3. Délka oblouku křivky v n-rozměrném Riemannově prostoru je vyjádřena integrálem

$$\int \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k},$$

kde a_{ik} jsou některé bodové funkce.

Ve všech třech příkladech jsou výrazy za integračním znamením kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k diferenciálům.

Speciální parametrická vyjádření. Integrál

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

nejjednodušší úlohy po zavedení parametru t, pomocí něhož je vyjádřeno x a rovněž i y, nabude tvaru

$$J = \int f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) x'\,\mathrm{d}t.$$

Je zřejmé, že $x'f\left(x, y, \dfrac{y'}{x'}\right)$ je homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k x', y', protože násobíme-li x' a y' konstantou k, dostaneme $kx'f\left(x, y, \dfrac{y'}{x'}\right)$.

Obráceně budiž dán integrál

$$I = \int F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t$$

podél některé čáry. Je-li možno za parametr t vzít souřadnici x, pak

$$x' = 1,\ y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$F(x, y, x', y') = F(x, y, 1, y') = f(x, y, y'),$$

a dostaneme

$$\int F(x, y, x', y')\, \mathrm{d}t = \int f(x, y, y')\, \mathrm{d}x.$$

Tedy integrály $\int F(x, y, x', y')\, \mathrm{d}t$ při speciální volbě parametru $t = x$ přejdou v integrály tvaru $\int f(x, y, y')\, \mathrm{d}x$, které jsme studovali v předcházejících kapitolách, a obráceně, zavedeme-li do integrálů $\int f(x, y, y')\, \mathrm{d}x$ parametrické vyjádření křivky, dojdeme k funkcionálům, pro něž je splněna podmínka (3).

V mnoha úlohách se volí za parametr na křivce γ délka s (oblouk počítaný od počátečního bodu křivky do daného jejího bodu). V tomto případě je

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\Theta, \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\Theta,$$

kde Θ je úhel, který svírá tečna ke křivce γ s osou Ox.

Máme

$$\int_\gamma F(x, y, x', y')\, \mathrm{d}t = \int_\gamma F(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta)\, \mathrm{d}s = \int_\gamma f(x, y, \Theta)\, \mathrm{d}s,$$

kde je

$$f(x, y, \Theta) = F(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta).$$

Důsledky podmínek homogenity. Jelikož F je homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k x' a y', plyne z Eulerovy věty o homogenních funkcích

$$F = x'F_{x'} + y'F_{y'}. \tag{4}$$

Diferencujeme-li (4) podle x' a y', dostaneme po zjednodušení

$$\left.\begin{aligned} x'F_{x'x'} + y'F_{x'y'} &= 0,\\ x'F_{x'y'} + y'F_{y'y'} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Z (5) plyne

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = F_1, \tag{6}$$

kde $F_1 = F_1(x, y, x', y')$ je kladně homogenní funkce rozměru -3 vzhledem k x', y'. Vskutku, při diferencování podle x', y' se rozměr homogenní funkce po každé sníží o jednotku; proto $F_{x'}$, $F_{y'}$ jsou homogenní funkce rozměru nula; $F_{x'x'}$, $F_{x'y'}$, $F_{y'y'}$ mají rozměr -1.

Protože F_1 se dostane z funkcí rozměru — 1 jejich dělením homogenními výrazy rozměru 2, je F_1 kladně homogenní funkce rozměru — 3.

Diferencování (4) podle x a y nám dá

$$\left.\begin{aligned} F_x &= x'F_{xx'} + y'F_{xy'}, \\ F_y &= x'F_{yx'} + y'F_{yy'}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

§ 24. Extrémy funkcí čáry.

Okolí křivek. Splňuje-li F podmínku homogenity, pak je $\int F \, \mathrm{d}t$ funkce čáry, protože závisí jenom na integrační křivce, avšak nezávisí na volbě jejího parametrického vyjádření. Je přirozené, že rozšiřujeme shora rozvinutou theorii extrémů funkcí čáry

$$\int f(x, y, y') \, \mathrm{d}x$$

na naše nové funkce čáry.

Řekneme: křivky patří do třídy C_1, jsou-li dány v parametrickém vyjádření rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce třídy C_1. Předpokládáme také, že $x'(t)$ a $y'(t)$ nejsou současně rovny nule ($x'^2 + y'^2 > 0$), takže v každém bodě křivky je definována tečna, která svírá s osou x úhel $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ (je-li $x'(t) = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$). Úhel φ závisí spojitě na t. Říkáme: křivka má spojitě se měnící tečnu.

Definujeme především pojem ε-okolí křivky třídy C_1.

Řekneme, že křivka γ_1 leží v ε-vzdálenosti nultého řádu od křivky γ, lze-li mezi všemi body γ a γ_1 ustanovit vzájemně jednoznačnou a vzájemně spojitou korespondenci tak, aby vzdálenost mezi body sobě odpovídajícími nepřevyšovala ε. Řekneme (analogicky), že křivka γ_1 leží v ε-okolí prvního řádu křivky γ, lze-li mezi všemi body γ a γ_1 ustanovit vzájemně jednoznačnou a vzájemně spojitou korespondenci tak, aby:

1) vzdálenost mezi body sobě odpovídajícími nepřevýšila číslo ε,

2) úhel mezi tečnami (menší než $\frac{1}{2}\pi$) ke křivce γ a γ_1, vedenými v bodech sobě odpovídajících, nebyl větší než ε.

Odvození nutných podmínek. Na základě pojmu ε-okolí můžeme automaticky rozšířit základní pojmy kapitoly II: absolutní extrém, relativní extrém, slabý a silný extrém, na funkce čáry

$$J = \int F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t$$

vyšetřované v této kapitole.

Začneme jako obyčejně odvozením nutných podmínek, jimž musí vyhovovat křivka realisující extrém. Při tom ihned vezmeme za třídu přípustných čar všechny křivky třídy C_1, spojující body dvou daných křivek.

Budiž dána třída $\{\gamma\}$ přípustných čar se spojitě se měnícími tečnami, jejichž koncové body leží na daných křivkách Γ_1 a Γ_2, definovaných rovnicemi

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

Na křivkách třídy $\{\gamma\}$ je definován funkcionál

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t = \int_\gamma F(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y), \tag{8}$$

kde F je spojitá funkce, která má spojité parciální derivace prvních dvou řádů podle argumentů x, y, x', y'; mimo to je F kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k x', y'.

Věta I. *Jestliže křivka γ, definovaná v parametrickém tvaru rovnicemi*

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

realisuje extrém funkcionálu $J(\gamma)$, pak:

1) *$x(t)$ a $y(t)$ vyhovují Eulerovým rovnicím*

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x'} &= 0, \\ F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{y'} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

2) *v koncových bodech křivky γ jsou splněny vztahy*

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_{x'}}{\varphi_x} &= \frac{F_{y'}}{\varphi_y} \quad (\textit{v koncovém bodě ležícím na křivce } \Gamma_1), \\ \frac{F_{x'}}{\psi_x} &= \frac{F_{y'}}{\psi_y} \quad (\textit{v koncovém bodě ležícím na křivce } \Gamma_2). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Jestliže jedna z křivek Γ_1 nebo Γ_2 nebo obě se redukují na bod (koncový bod je pevný), zamění se příslušná podmínka (10) požadavkem, aby křivka γ procházela tímto bodem. Vztahy (10) se nazývají podmínkami *transversality*.

Křivka γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ vyhovují rovnicím Eulerovým, se nazývá extremálou pro funkcionál $J(\gamma)$. Naši větu lze formulovat také takto:

K tomu, aby křivka γ vedla k extrému integrálu $J(\gamma)$, je nutné, aby γ byla extremálou a aby ve volných koncových bodech splňovala podmínky transversality.

K důkazu vyšetřujme náš funkcionál jako funkci prostorové křivky

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

v prostoru (t, x, y) a použijme výsledků kap. III a IV.

Nechť γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

je libovolná rovinná křivka třídy C_1 v rovině xOy, spojující bod křivky Γ_1 s bodem křivky Γ_2. Označme Q, Φ a Ψ válcové plochy, ležící v prostoru (t, x, y), které jsou vytvořeny paprsky rovnoběžnými s osou Ot a jež protínají rovinu xOy v křivkách γ resp. Γ_1 resp. Γ_2. Označme γ_1 prostorovou křivku (prostoru (t, x, y)) definovanou rovnicemi:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Křivka γ_1 leží zřejmě na ploše Q a spojuje body ploch Φ a Ψ; průmět γ_1 na rovinu (x, y) je křivka γ.

Všem možným parametrickým vyjádřením rovinné křivky γ budou odpovídat v prostoru (t, x, y) všechny možné křivky γ_1, ležící na válci Q a spojující body válců Φ a Ψ. Jelikož funkcionál $J(\gamma)$ závisí jenom na tvaru křivky γ a nezávisí na jejím parametrickém vyjádření, bude funkcionál prostorové křivky

$$J_1(\gamma_1) = \int_{\gamma_1} F(x, y, x', y') \, \mathrm{d}t$$

záviset jenom na tvaru válce Q. Z toho plyne, že vede-li křivka γ k extrému funkcionálu $J(\gamma)$ na třídě C_1 rovinných čar, spojujících libovolný bod křivky Γ_1 s libovolným bodem křivky Γ_2, pak prostorová křivka γ_1 realisuje extrém funkcionálu $J_1(\gamma_1)$ mezi všemi prostorovými křivkami

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

třídy C_1, spojujícími libovolný bod válcové plochy Φ s libovolným bodem válcové plochy Ψ.

Na základě theorie extrémů pro prostorové čáry máme podél extremální čáry

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x'} &= 0, \\ F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{y'} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

a v koncových bodech platí podmínky transversality

$$(F - x'F_{x'} - y'F_{y'})\,\mathrm{d}t + F_{x'}\,\mathrm{d}x + F_{y'}\,\mathrm{d}y = 0, \tag{12}$$

kde $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ jsou přírůstky souřadnic pro přípustný posun konce křivky γ_1.

Z podmínek homogenity (rovnosti (4)) dostaneme

$$F - x'F_{x'} - y'F_{y'} = 0,$$

a podmínka (12) nabude tvaru

$$F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y = 0.^{3)} \tag{13}$$

Pro koncový bod, ležící na křivce Γ_1, přírůstky δx a δy jsou ve vztahu

$$\varphi_x\delta x + \varphi_y\delta y = 0. \tag{14}$$

Z (13) a (14) plyne

$$\frac{F_{x'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y}. \tag{15}$$

Analogicky pro koncový bod, ležící na křivce Γ_2:

$$\psi_x\delta x + \psi_y\delta y = 0,$$

[3]) Podmínku (13) lze obdržet z podmínky (12) bez použití podmínky homogenity. Zvolíme parametr t pro přípustné křivky tak, že počátečním bodům všech těchto křivek odpovídá jedna a táž hodnota t_0 tohoto parametru, a koncovým bodům těchto křivek jedna a táž hodnota t_1.

Potom v (12) budeme mít $\mathrm{d}t = 0$, což vede k podmínce (13).

z čehož

$$\frac{F_{x'}}{\psi_x} = \frac{F_{y'}}{\psi_y}. \qquad (15')$$

Tím je naše věta úplně dokázána.

Weierstrassův tvar Eulerových rovnic. Snadno nahlédneme, že rovnice (11) jsou nezávislé. Máme-li totiž pro prostorovou křivku γ_1:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

$\delta J_1(\gamma_1) \equiv 0$, pak pro každou křivku $\bar{\gamma}_1$:

$$x = x[f(t)], \quad y = y[f(t)]$$

rovněž máme $\delta J_1(\bar{\gamma}_1) \equiv 0$, kde $f(t)$ má kladnou derivaci. Je-li tudíž křivka

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

integrálem systému (11), pak křivka

$$x = x[f(t)], \quad y = y[f(t)]$$

pro libovolnou funkci $f(t)$ bude rovněž integrálem systému (11). Z toho soudíme, že jednu z funkcí $x(t)$, $y(t)$ lze udat libovolně a na jejím podkladě lze najít druhou funkci integrací kterékoli z rovnic systému (11). Analyticky tato okolnost vyplývá z toho, že obě rovnice (11) jsou důsledky jediné rovnice.

Ze vzorců (6) a (7) předcházejícího paragrafu plyne

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x'} = (x'F_{xx'} + y'F_{xy'}) - (x'F_{xx'} + y'F_{yx'} + x''F_{x'x'} + y''F_{x'y'}) =$$
$$= y'[F_{xy'} - F_{x'y} - F_1(x'y'' - x''y')]. \qquad (16)$$

Analogicky

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{y'} = - x'[F_{xy'} - F_{x'y} - F_1(x'y'' - x''y')]. \qquad (16')$$

Ježto obě derivace x', y' nemohou být současně rovny nule, jsou rovnice (14) ekvivalentní jediné rovnici

$$F_{xy'} - F_{x'y} - F_1(x'y'' - x''y') = 0. \qquad (17)$$

To je tak zvaný *Weierstrassův tvar* Eulerových rovnic.

Weierstrassův tvar Eulerových rovnic zapisujeme rovněž v tomto tvaru:

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{xy'} - F_{yx'}}{F_1(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{17'}$$

kde r je poloměr křivosti extremály.

Příklad. Budiž $F = A(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}$, t. j. $J = \int_q A(x, y)\, \mathrm{d}s$. Máme:

$$F_{xy'} = A_x \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = A_x \cos\alpha$$

(kde α je úhel, který svírá tečna k extremále s osou Ox),

$$F_{yx'} = A_y \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = A_y \sin\alpha, \quad F_1 = -\frac{AF_{y'x'}}{x'y'} = -\frac{A}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

z čehož

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{A}(A_y \cos\alpha - A_x \sin\alpha).$$

Je-li φ úhel, který svírá normála plochy $A(x, y) = \text{const}$ s osou Ox, pak $A_x = \frac{\partial A}{\partial n} \cos\varphi$, $A_y = \frac{\partial A}{\partial n} \sin\varphi$ a dostaneme

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial n} \sin(\alpha - \varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial n} \lg A\right) \sin(\alpha - \varphi).$$

Pro světelný paprsek je podle Fermatova principu integrál $\int \frac{\mathrm{d}s}{v(x, y)}$ minimální, takže jeho rovnice má tvar:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial n} \lg v\right) \sin(\varphi - \alpha).$$

Pro integrál účinku $\int v\, \mathrm{d}s = \int v(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x$ z (11) máme:

$$v_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v \cos\alpha) = 0, \quad v_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v \sin\alpha) = 0$$

neboli

$$\operatorname{grad} v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{v},$$

kde $\bar{v}$ je vektor rychlosti. Obdrželi jsme důkaz vlastnosti zrychlení pohybu bodu v rovinném potenciálovém poli, kterou jsme uvedli na str. 25.

Invariance Weierstrassovy formy rovnice. Upozorníme teď na jednu důležitou vlastnost rovnice (17'): *Weierstrassova forma Eulerových rovnic zůstává invariantní vzhledem k transformaci parametru.*

Křivost $\frac{1}{r}$ křivky totiž nezávisí na jejím parametrickém tvaru. Funkce $F_{xy'}$, $F_{yx'}$ a jejich rozdíl jsou funkce kladně homogenní rozměru nula vzhledem k x', y' a funkce F_1 je homogenní rozměru -3 a $(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$ homogenní rozměru $+3$ vzhledem k x', y'. Pravá strana rovnice (17') je tudíž funkce kladně homogenní rozměru nula vzhledem k x', y', t. j. nemění se násobením argumentů x', y' kladnými čísly. Avšak přechod od parametru t k parametru τ znamená násobit x' a y' výrazem $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$, který považujeme za kladný.

Legendreova podmínka. Vzpomeneme nyní výsledků § 13. Nutnou podmínkou minima funkcionálu J je nezápornost druhé variace. Tato podmínka vyžaduje, aby v určitém případě byla kvadratická forma (viz str. 79)

$$A = F_{x'x'}\delta x'^2 + 2F_{x'y'}\delta x'\delta y' + F_{y'y'}\delta y'^2$$

nezáporná. Z formule (6) plyne

$$A = F_1(y'\delta x' - x'\delta y')^2.$$

Podmínky $A \geqq 0$ vedou k podmínce $F_1 \geqq 0$.

Z toho plyne

Věta 2 (obdoba Legendreovy podmínky). *Nutnou podmínkou minima je splnění požadavku* $F_1 \geqq 0$.

§ 25. Zobecnění a aplikace.

Isoperimetrická úloha. Použijeme-li výsledků kap. V, můžeme snadno dostat základní nutné podmínky pro isoperimetrickou úlohu v parametrickém tvaru. Hledejme mezi čarami γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

třídy C_1, spojujícími dva dané body A a B a vyhovujícími podmínce

$$K(\gamma) = \int_\gamma G(x, y, x', y') \mathrm{d}t = l = \text{const},$$

takovou čáru, podél níž integrál

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, x', y') \, \mathrm{d}t$$

nabývá extrémní hodnoty. Přitom jako dříve předpokládáme, že funkce F a G splňují podmínky homogenity a diferencovatelnosti.

Věta 3. *Dává-li křivka γ hledaný extrém, pak existuje takové konstantní číslo λ, že γ je extremálou pro funkcionál*

$$J_1(\gamma) = \int_\gamma (F + \lambda G) \, \mathrm{d}t.$$

Příklad. Mezi všemi zavřenými křivkami, omezujícími rovinný obor daného obsahu, najíti tu, jejíž délka je minimální.

Zavřenou křivkou rozumíme čáru, jejíž počáteční bod je totožný s jejím bodem koncovým. Nechť tedy jsou rovnice

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \quad [x(t_0) = x(t_1)], \\ y &= y(t) \quad [y(t_0) = y(t_1)], \end{aligned}\right\} t_0 \leqq t \leqq t_1$$

rovnicemi libovolné zavřené čáry. Hledejme extrém integrálu

$$\int (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t$$

za podmínky

$$\int (xy' - yx') \, \mathrm{d}t = C.$$

Označíme-li znakem F veličinu

$$F = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} + \lambda(xy' - x'y),$$

najdeme

$$\frac{1}{2} (F_{xy'} - F_{yx'}) = \lambda, \quad F_1 = \frac{F_{x'y'}}{x'y'} - = (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pro křivku dávající extrém plyne z podmínky (17′) předcházejícího paragrafu

$$\frac{1}{r} = 2\lambda.$$

Křivost je podél naší zavřené křivky konstantní. To znamená, že je to kružnice.

Případ n nezávisle proměnných. Vyšetříme integrál

$$\int F(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n') \, \mathrm{d}t$$

podél některé křivky

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

v němž F je kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem ke všem x_i'. Za těchto podmínek závisí náš integrál jenom na integrační cestě, ale nezávisí na jejím parametrickém vyjádření.

Provedeme-li úvahy analogické předcházejícím, dostaneme základní nutné podmínky pro extrém tohoto integrálu ve tvaru

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

V rozvedeném tvaru rovnice (18) bude

$$F_{x_i} - \sum_j x_j' F_{x_i' x_j} - \sum_j x_j'' F_{x_i' x_j'} = 0. \tag{19}$$

n rovnic soustavy (18) nebo (19) je nezávislých. Jsou ve vztahu

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \left[F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x_i'} \right] = \sum_i x_i' F_{x_i} - \sum_{i,j} x_i' x_j' F_{x_i' x_j} - \sum_{i,j} x_i' x_j'' F_{x_i' x_j'} \equiv 0. \tag{20}$$

Tato identita je důsledkem podmínek homogenity. Z Eulerovy rovnice totiž dostaneme

$$F = \sum_i x_i' F_{x_i'}. \tag{21}$$

Derivujeme-li (21) podle x_j a x_j', nalezneme:

$$F_{x_j} = \sum_i x_i' F_{x_i' x_j}, \tag{22}$$

$$F_{x_j'} = \sum_i x_i' F_{x_i' x_j'} + F_{x_j'}, \text{ t. j. } \sum_i x' F_{x_i' x_j'} = 0. \tag{23}$$

Substitucí (22) a (23) do pravé strany (20) je tato identita dokázána.

Geodetické čáry. Budiž na n-rozměrné Riemannově varietě délka oblouku definována integrálem

$$\int \mathrm{d}s,$$

kde

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_k.\text{[4]}$$

[4]) Zde jsou a_{ik} spojité diferencovatelné funkce argumentů $x_1, \ldots, x_n$. Mimo to předpokládáme o formě $\mathrm{d}s^2$, že je positivně definitní.

Čáry, podél nichž $\delta\int \mathrm{d}s = 0$, se nazývají geodetickými.

Ježto

$$\int \mathrm{d}s = \int \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t,$$

kde t je parametr, určí se geodetické čáry z rovnice

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \frac{a_{ij}}{\sqrt{g}} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{24}$$

kde je pro stručnost položeno

$$g = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}.$$

Je-li parametrem délka oblouku s, pak je $g = 1$ a rovnice (24) přejde v

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sum_i a_{ij} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s},$$

neboli

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = \sum_{i,k} \frac{\partial a_{ij}}{\mathrm{d}x_k} \frac{\partial x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} + \sum_i a_{ij} \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2}. \tag{25}$$

Uvedeme rovnice (25) na přehlednější tvar tím, že je rozřešíme vzhledem k $\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2}$. Jelikož při dvojité sumaci podle i a k je

$$\sum_{i,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = \sum_{i,k} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s},$$

je součet

$$\sum_{i,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s},$$

a můžeme tedy napsat rovnice (25) v tomto tvaru:

$$\sum_i a_{ij} \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{26}$$

Jsou-li a^{hj} elementy determinantu inversního k determinantu $|a_{ij}|$, je, jak známo,

$$\sum_i a^{hj} a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pro } h \neq i, \\ 1 \text{ pro } h = i. \end{cases} \tag{27}$$

Násobíme-li rovnosti (26) elementy a^{hj} a sečteme-li je (podle j), dostaneme

$$\sum_j \sum_i a^{hj} a_{ij} \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2} \sum_j a^{hj} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Z toho dostaneme, změníme-li v prvním sčítanci pořádek sumace a použijeme-li (27),

$$\frac{d^2x_h}{ds^2} + \frac{1}{2}\sum_j a^{hj}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\right)\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Zavedeme-li označení

$$T^j_{ik} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j},$$

obdržíme tento konečný tvar rovnic geodetické čáry

$$\frac{d^2x_h}{ds^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} a^{hj}T^j_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Hamilton-Ostrogradského princip. Nechť je dán systém n hmotných bodů. Označíme x_i, y_i, z_i, m_i souřadnice resp. hmotu i-tého bodu. Nechť systém splňuje m vazebních podmínek

$$\varphi_i(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{28}$$

a nechť na tuto soustavu působí síly, předpokládající potenciál U závislý na souřadnicích a na čase t tak, že na i-tý bod působí síla o komponentách

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\ Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \tag{29}$$

Dále budeme předpokládat, že systém se přemístí z jedné polohy, odpovídající časovému okamžiku t_0, do jiné polohy, odpovídající časovému okamžiku t_1, při čemž se toto přemístění děje v souhlase s vazbami.

Jinými slovy, souřadnice bodů soustavy x_i, y_i, z_i jsou funkcemi času t, vyhovujícími soustavě (28).

Budeme rozlišovat skutečný pohyb systému pod vlivem sil (29) od jiných možných pohybů v souhlase s vazbami.

Označíme-li T kinetickou energii systému

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2), \tag{30}$$

kde

$$x' = \frac{dx}{dt},\ y' = \frac{dy}{dt},\ z' = \frac{dz}{dt},$$

dospějeme k této větě, tvořící princip Hamilton-Ostrogradského pro dynamický systém s vazbami:

K tomu, aby pohyb

$$x_i = x_i(t),\ y_i = y_i(t),\ z_i = z_i(t) \quad (t_0 \leqq t \leqq t_1) \tag{31}$$

byl skutečným pohybem systému pod vlivem sil (29), *je nutné a stačí, aby pro křivky* (31) *platila rovnost*

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T + U)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{32}$$

za podmínky, že za třídu přípustných čar (možných pohybů) vezmeme čáry třídy C_1, *spojující dva pevné body* $(t_0, x_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$, $(t_1, x_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)})$ *a náležející varietě* (28).

Je totiž podle theorie podmíněného extrému rovnice (32) ekvivalentní této soustavě diferenciálních rovnic:

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x_i'} = 0,\ F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{y_i'} = 0,$$

$$F_{z_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{z_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

kde

$$F = T + U + \Sigma\lambda_i(t)\varphi_i \tag{34}$$

a $\lambda_i(t)$ jsou funkce proměnné t. Dosadíme-li do rovnic (33) místo F jeho vyjádření z (34), dostaneme známou soustavu diferenciálních rovnic Lagrangeových, definujících pohyb systému s vazbami. Bylo by možno obráceně přijmouti za východisko princip Hamilton-Ostrogradského a z něho pak odvoditi Lagrangeovy rovnice pomocí neurčitých součinitelů $\lambda(x)$.

Je-li poloha soustavy určena ν nezávislými Lagrangeovými parametry $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ $(\nu = 3n - m)$, pak potenciál U a kinetická energie T přejdou ve funkce parametrů q_i, jejich derivací q_i' a času t:

$$T = T_1(q_1, \ldots, q_\nu, q_1', \ldots, q_\nu', t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}q_i'q_j',$$

$$U = U_1(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t).$$

Rovnice (32) nabude tvaru

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T_1 + U_1)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{35}$$

při čemž za třídu přípustných čar jsou vzaty čáry

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

třídy C_1, spojující dva dané body

$$(t_0, q_1^{(0)}, \ldots, q_\nu^{(0)}) \text{ a } (t_1, q_1^{(1)}, \ldots, q_\nu^{(1)}),$$

kdežto rovnice pohybu systému budou

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(T_1 + U_1) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial q_i'}T_1\right) = 0. \tag{36}$$

Princip nejmenší akce ve tvaru Lagrangeově a Jacobiově. Předpokládejme nyní, že ani v rovnicích vazeb ani ve vyjádření potenciálu U čas t není explicitně obsažen. V takovém případě nebude výraz za integračním znamením v (35) obsahovat explicitně nezávisle proměnnou t; rovnice (36) umožňují provést první integraci (viz str. 78)

$$T_1 + U_1 - \Sigma q_i' \left(\frac{\partial}{\partial q_i'} T_1\right) = -C = \text{const}, \tag{37}$$

avšak, ježto mimo to je T_1 homogenní kvadratická forma vzhledem k q_i', je

$$\Sigma q_i' \left(\frac{\partial}{\partial q_i'} T_1\right) = 2T_1,$$

a tedy nabude rovnice (37) tvaru

$$H = -U_1 + T_1 = C = \text{const},$$

t. j. za shora uvedených předpokladů zůstává celková energie systému po dobu každého skutečného pohybu systému konstantní.

Dosadíme-li do (35) místo U_1 jeho vyjádření

$$U_1 = T_1 - C$$

a vezmeme-li za třídu přípustných čar

$$q_i = q_i(t),\ q_i(t_0) = q_i^{(0)},\ q_i(t_1) = q_i^{(1)}$$

čáry, pro něž celková energie H zůstává konstantní, zjistíme, že (35) je ekvivaletní podmínce

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T_1 \, \mathrm{d}t = 0, \tag{35'}$$

což je Lagrangeův tvar principu nejmenší akce.

Použijeme-li znovu vztahu (37), dostaneme

$$T_1 = \sqrt{C + U_1}\sqrt{T_1},$$

a rovnici (35′) lze přepsati takto:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2U + h}\ \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} q_i' q_j'}\, \mathrm{d}t = 0,$$

kde h je konstantní. Integrál

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2U + h}\ \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} q_i' q_j'}\, \mathrm{d}t$$

se nazývá integrálem účinku (akce). Vezmeme nyní místo prostoru $t, q_1, \ldots, q_\nu$ pouze prostor parametrů $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ a budeme v tomto prostoru studovat křivky (38), kde t je parametr. Ježto integrovaný výraz v J je homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k q'_i, závisí hodnota J jenom na tvaru čáry (38) v našem prostoru a nezávisí na jejím parametrickém vyjádření (nezávisí na tom, podle jakého zákona se děje pohyb na této čáře). Z toho podle (35) dospějeme k větě, jež je principem nejmenší akce v Jacobiově tvaru.

THEORIE POLE

§ 26. Geometrický způsob vyjadřování. Kanonický tvar Eulerových rovnic.

V dalších úvahách budeme nazývat „*J-délkou*" křivky γ, jejíž rovnice je $y = y(x)$, hodnotu funkcionálu

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

podél křivky γ. Mimo to budeme neustále předpokládat, že čáry γ náleží do třídy C_1 a že funkce F má spojité parciální derivace podle všech tří argumentů do třetího řádu včetně.

Připomínáme, že když $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$, je J-délka křivky její obyčejnou délkou. V tomto posledním případě jsou extremálami přímky. V obecném případě budeme každou extremálu funkcionálu J nazývat *J-přímkou* a hodnotu $J(\gamma)$ podél extremály γ, spojující dva dané body A a B, budeme nazývat *J-vzdáleností* mezi body A a B. Tato terminologie vedle výhodnosti je založena na hlubokých úvahách, jichž se však zde nedotkneme.

Analogické pojmy zavedeme pro funkcionál $I(\gamma)$:

$$I(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t = \int_\gamma F(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y), \tag{2}$$

kde F je kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k x' a y'. Hodnotu $I(\gamma)$ nazveme I-délkou γ. Každou extremálu nazveme I-přímkou a I-délku extremály nazveme vzdáleností jejích koncových bodů.

Budeme nyní vyšetřovati čtyrparametrovou soustavu J-přímek $\{\gamma\}$, z jejichž koncových bodů jeden bod $A(x_0, y_0)$ leží v nějakém daném oboru D_0 a druhý v jiném oboru D_1. Předpokládejme, že libovolný pár bodů $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, patřících do D_0 resp. do D_1, spojuje jedna a jenom jedna extremála soustavy

$$\gamma \equiv \gamma(x_0, y_0, x_1, y_1).$$

Za provedených předpokladů J-délka libovolné extremály soustavy bude jednoznačnou funkcí čtyř proměnných — souřadnic jejích koncových bodů:

$$J(\gamma) = J(x_0, y_0, x_1, y_1).$$

Označíme

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y, y') &= F(x, y, y') - y'F_{y'}(x, y, y'), \\ p(x, y, y') &= F_{y'}(x, y, y'); \end{aligned} \tag{3}$$

potom lze zapsat vzorce (10) kap. IV takto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x_0} &= -\bar{H}(x_0, y_0, y_0') = -\bar{H}_0, \\ \frac{\partial J}{\partial y_0} &= -p(x_0, y_0, y_0') = -p_0, \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} &= \bar{H}(x_1, y_1, y_1') = \bar{H}_1, \\ \frac{\partial J}{\partial y_1} &= p(x_1, y_1, y_1') = p_1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\mathrm{d}J = -(\bar{H}_0\delta x_0 + p_0\delta y_0) + (\bar{H}_1\delta x_1 + p_1\delta y_1). \tag{5}$$

Vzhledem k základní roli, kterou hrají funkce $p = F_{y'}(x, y, y')$ a $\bar{H} = F - y'F_{y'}(x, y, y')$ v theorii soustavy extremál, je nejlépe uvést Eulerovu rovnici na tvar, v níž by explicitně vystupovaly funkce p a $\bar{H}$. Budeme tedy spolu s proměnnými x, y, y' vyšetřovati proměnné x, y a $p = F_{y'}(x, y, y')$. Každou funkci $u(x, y, y')$ tří argumentů x, y, y' můžeme vyšetřovati, používajíce vztahu $p = F_{y'}$, rovněž jako funkci proměnných x, y, p.[1]) V souhlase s tím označíme $H(x, y, p)$ výsledek substituce do $\bar{H}(x, y, y')$ výrazu y' vyjádřeného pomocí p a x, y. Abychom zjednodušili psaní, umluvíme se, že napříště budeme označovati jako obvykle $u_x, u_y, u_{y'}$ parciální derivace každé funkce $u(x, y, y')$, když ji pokládáme za funkci proměnných x, y, y', kdežto $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial p}$ odpovídající parciální derivace, když u pokládáme za funkci proměnných x, y, p.

[1]) Pokud je $F_{y'y'} \neq 0$, pak podle věty o implicitních funkcích z rovnice $p = F_{y'}(x, y, y')$ můžeme vyjádřit y' jako funkci x, y, p.

Při těchto označeních nalezneme v případě argumentů x, y, y'

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\overline{H} &= \mathrm{d}F - y'\,\mathrm{d}p - p\,\mathrm{d}y' = \\ &= F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + p\,\mathrm{d}y' - y'\,\mathrm{d}p - p\,\mathrm{d}y' = \\ &= F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}p. \end{aligned} \tag{6}$$

S druhé strany platí pro proměnné x, y, p:

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial H}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial H}{\partial p}\,\mathrm{d}p.$$

Dostaneme tedy, ježto $\mathrm{d}\overline{H} = \mathrm{d}H$,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = -\,y'. \tag{7}$$

Obdržené vztahy umožňují uvésti Eulerovu rovnici

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0$$

na takovýto tvar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\partial H}{\partial p} &= -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Soustava rovnic (8) se nazývá Hamiltonovou neboli kanonickou formou Eulerovy rovnice. Nahrazuje Eulerovu rovnici druhého řádu s jednou neznámou funkcí dvěma rovnicemi prvního řádu s neznámými funkcemi $y = y(x)$ a $p = p(x)$.

Z (6), (7) a (8) vyplývá, že podél extremály je

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Speciálně, jestliže ani F, a tedy ani H nezávisí explicitně na x, je podél extremály

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = 0, \ H = \text{const.}$$

Zobecnění. Shora uvedené pojmy lze bez obtíží rozšířit na případ funkcionálů čar prostoru o n rozměrech a také na případ obecného Lagrangeova problému. Probereme Lagrangeovu úlohu pro funkcionál

$$J = \int_\gamma F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}x,$$

kde funkce $y_i(x)$ splňují podmínky

$$\varphi_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ m < n.$$

Jak je zvykem, budeme napříště za znaky funkcí F a φ_j zkráceně psát jenom tři argumenty x, y, y': $F(x, y, y')$ a $\varphi_j(x, x, y')$. Zavedeme-li Lagrangeovy součinitele $\lambda_j(x)$, položme

$$\Phi(x, y, y', \lambda) = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j.$$

Nyní, užijeme-li vztahů $\varphi_j = 0$, zavedeme místo proměnných x, y_i, y_i' proměnné $x, y_j, p_i = \Phi_{y_i'}$ a vyjádříme v nových proměnných funkci $\overline{H} = \Phi - \sum_i y_i' \Phi_{y_i'}$. Na jedné straně budeme míti

$$\begin{aligned} d\overline{H} &= d\Phi - \sum_i d(y_i' p_i) = \\ &= (\Phi_x\,dx + \sum_i \Phi_{y_i}\,dy_i + \sum_i p_i\,dy_i') - (\sum_i p_i\,dy_i' + y_i'\,dp_i) = \\ &= \Phi_x\,dx + \sum_i \Phi_{y_i}\,dy_i - \sum_i y_i'\,dp_i. \end{aligned} \tag{6'}$$

Na druhé straně při přechodu k proměnným x, y_i, p_i máme:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i}\,dy_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dp_i.$$

Porovnání dosaženého výsledku se vzorcem (6′) nám dá:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \Phi_x,\quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = F_{y_i},\quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -y_i'. \tag{7'}$$

Formule (7) umožňují soustavu Eulerových rovnic

$$\Phi_{y_i} = \frac{d}{dx}\Phi_{y_i'},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

napsati ve tvaru

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = \frac{dp_i}{dx},\quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{dy_i}{dx},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8'}$$

To je právě obecný kanonický tvar Euler-Lagrangeových rovnic.

§ 27. Pole extremál a transversály.

Pojem pole extremál. Zavedeme řadu pojmů, které budou hráti základní roli v geometrii extremál.

Mějme soustavu $\{\gamma\}$ oblouků γ křivek třídy C_1 a jednoduše souvislou oblast D, které mají následující vlastnosti:

1. Koncové body oblouků soustavy $\{\gamma\}$ leží na hranici D.

2. Každým bodem oblasti D prochází jeden a jenom jeden oblouk soustavy.

Za těchto podmínek řekneme, že vyšetřovaná soustava $\{\gamma\}$ tvoří *pole* a že toto pole *pokrývá* oblast D. Jestliže oblouky γ jsou extremály a tvoří pole, pak toto pole nazveme *polem extremál*.

Regulární pole. V dalších úlohách budou hráti zvláštní úlohu pole extremál speciálnějšího typu. Mějme jednoparametrovou soustavu oblouků $\{\gamma\}$ extremál funkcionálu J, jejichž rovnice mají tvar

$$y = \varphi(x, \alpha), \quad \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2, \quad x_0(\alpha) \leqq x \leqq x_1(\alpha). \tag{9}$$

Soustavu (9) budeme nazývati *regulárním polem extremál* neboli jednoduše *polem extremál*, jestliže budou splněny tyto podmínky:

1. Koncové body oblouků křivek (9) opisují křivky Γ_1 a Γ_2 třídy C_1.
2. Pro

$$\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2, \quad x_0(\alpha) \leqq x \leqq x_1(\alpha),$$

má funkce φ spojité derivace $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\alpha}$, při čemž

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} > 0.$$

Připomeňme, že splňuje-li soustava čar (9) tyto dvě podmínky, může být rovnice $y = \varphi(x, \alpha)$ rozřešena vzhledem k α,

$$\alpha = \alpha(x, y), \tag{10}$$

při čemž funkce $\alpha(x, y)$ bude jednoznačná a bude míti parciální derivace prvního a druhého řádu v uzavřené oblasti omezené křivkami Γ_1, Γ_2, $y = \varphi(x, \alpha_1)$ a $y = \varphi(x, \alpha_2)$.

Je jasné, že mimoto každá soustava čar, která má vlastnosti 1, 2, bude rovněž polem.

Centrální pole. Jiným speciálním typem pole je tak zvané *centrální pole*. Předpokládejme, že všechny křivky soustavy extremál $\{\gamma\}$ vycházejí z jediného bodu $A(x_1, y_1)$, t. j.

$$\varphi(x_1, \alpha) = y_1 \quad (\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2),$$

a předpokládejme dále, že soustava čar

$$y = \varphi(x, \alpha) \begin{cases} x_1' \leqq x \leqq x_2, \\ \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2 \end{cases}$$

tvoří regulární pole pro libovolné $x_1' > x_1$.

Potom soustava čar

$$y = \varphi(x, \alpha) \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2 \end{cases}$$

tvoří centrální pole extremál.

Pole funkcionálu *I*. Při použití pojmu pole k studiu funkcionálu I definovaného výrazem (2) budeme se rovněž jako v případě funkcionálu J zabývat poli, která vyhovují řadě theoreticko-funkcionálních podmínek. Zastavíme se u těchto podmínek. Budiž $\{\gamma\}$ jednoparametrová soustava extremál funkcionálu I:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, \alpha), \\ y &= \psi(t, \alpha). \end{aligned} \tag{11}$$

Předpokládejme, že při změnách t a α v mezích

$$\left.\begin{aligned} t_1 \leqq t \leqq t_2, \\ \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

vytvoří vyšetřovaná soustava čar $\{\gamma\}$ pole. V aplikacích budeme bez výslovného prohlášení předpokládat, že v uzavřeném obdélníku (12) funkce φ a ψ jsou spojité spolu se svými parciálními derivacemi prvního a druhého řádu a že mimoto v tomtéž obdélníku je

$$\begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_\alpha \\ \psi_t & \psi_\alpha \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Označíme Q oblast pokrytou polem. Z přijatých podmínek o funkcích φ a ψ vyplývá řešitelnost systému (11) vzhledem k t a α: existují funkce

$$\begin{aligned} t &= z(x, y), \\ \alpha &= u(x, y), \end{aligned}$$

definované a spojité spolu se svými derivacemi v oblasti Q a takové, že

$$\begin{aligned} x &= \varphi[z(x, y), u(x, y)], \\ y &= \psi[z(x, y), u(x, y)]. \end{aligned}$$

Připomeňme, že jestliže čáry $\{\gamma\}$, definované systémem (11), tvoří centrální pole extremál, pak pro jakékoli t_1', kde $t_1 < t_1' < t_2$, čáry γ, definované systémem

(11) a podmínkami $t_1' \leqq t \leqq t_2$, tvoří pole, vyhovující všem shora připomenutým theoreticko-funkcionálním podmínkám.

Transversála pole. Budiž $\{\gamma\}$ pole extremál funkcionálu J nebo I. Říkáme, že čára Γ je *transversála* pole $\{\gamma\}$, jestliže každá extremála γ pole, protínající Γ, protíná ji transversálně.

Zastavíme se podrobně u funkcionálu J. Jak známo, má podmínka transversality v případě funkcionálu J tvar (viz § 16)

$$F(x, y, y') - y'F_{y'}(x, y, y') + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} F_{y'}(x, y, y') = 0 \tag{14}$$

neboli

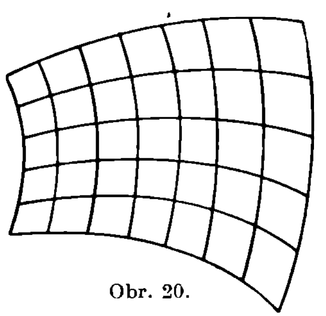
$$\overline{H}\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y = 0. \tag{14'}$$

Tato podmínka váže směrnici y' tečny k extremále se směrnicí $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ transversálního směru. Z toho soudíme, že máme-li dáno pole $y = \varphi(x, \alpha)$, v jehož každém bodě je $\overline{H}^2 + p^2 \neq 0$, je nám pak v každém bodě pole znám směr transversály pole, procházející tímto bodem. Všechny transversály pole dostaneme jako řešení diferenciální rovnice prvního řádu:

$$F_{y'}[x, \varphi(x, \alpha), \varphi_x'(x, \alpha)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$$

$$= \varphi_x'(x, \alpha)\,F_{y'}[x, \varphi(x, \alpha), \varphi_x'(x, \alpha)] - F[x, \varphi(x, \alpha), \varphi_x'(x, \alpha)], \tag{15}$$

kde za parametr α, určující extremály pole, je třeba dosaditi vyjádření tohoto parametru souřadnicemi bodů pole. Z toho, uvědomíme-li si shora učiněné předpoklady o poli, obdržíme, že každým bodem pole prochází jedna a jenom jedna transversála. Tedy za podmínky $\overline{H}^2 + p^2 \neq 0$ soustava transversál je jednoparametrová soustava křivek tvořících pole. Takové pole budeme napříště nazývat *polem transversál*.



Obr. 20.

Je-li $F \neq 0$, pak, jak snadno nahlédneme ze vzorce (15), protíná transversála extremálu v úhlu různém od nuly a soustava extremál a transversál tvoří síť křivek, pokrývající oblast (obr. 20). Pro funkcionály speciálního typu

$$F = A(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$

kde $A \neq 0$, stane se podmínka transversality podmínkou orthogonality: soustavy extremál a transversál tvoří orthogonální síť křivek.

Platí-li v bodě $B(x, y = \varphi(x, \alpha))$ pole vztah $F(x, \varphi, \varphi'_x) = 0$, pak v tomto bodě je směrnice $\frac{dy}{dx}$ tečny k transversále rovna $\varphi'_x(x, \alpha)$, t. j. v bodě B se transversála dotýká extremály. V tomto případě již nelze mluviti o „síti“ extremál a transversál. Protože v řadě otázek theorie pole je pro nás však podstatnou existence sítě, budeme předpokládat, že v poli je splněn vztah

$$F(x, \varphi(x, \alpha), \varphi'_x(x, \alpha)) \neq 0.$$

Poznámka. Ve většině aplikací theorie pole lze toto omezení odstranit takto. Označíme znakem M supremum $|F(x, \varphi, \varphi'_x)|$ pro všechny body oblasti pokryté polem a zavedeme funkci

$$F_1(x, y, y\ ) = F(x, y, y\ ) + M + 1.$$

Ve všech bodech pole budeme míti

$$F_1(x, \varphi, \varphi'_x) \geqq 1 > 0.$$

Kromě toho je zřejmé, že soustavy extremál funkcionálů $\int F\, dx$ a $\int F_1\, dx$ jsou identické a že v úloze o pevných koncích křivka, činící $\int F\, dx$ extremálním, bude udílet extrém $\int F_1\, dx$, a obráceně.

Právě tak je možno odstranit omezení $\overline{H}^2 + p^2 \neq 0$. Budiž totiž $\overline{M}$ supremum $|F_{y'}(x, \varphi(x, \alpha), \varphi'(x, \alpha))|$ pro všechny body téže oblasti. Zavedeme funkci

$$\overline{F}(x, y, y') = F(x, y, y') + (\overline{M} + 1)y'.$$

Máme: $\overline{F}_{y'} = F_{y'} + \overline{M} + 1$. Na základě definice $\overline{M}$ je $\overline{p} = \overline{F}_{y'} > 0$, z čehož plyne, že $\overline{H}^2 + \overline{p}^2 > 0$ všude v naší oblasti. Je však $\overline{F}_y = F_y, \frac{d}{dx}\overline{F}_{y'} = \frac{d}{dx}\ F_{y'}$, proto extremály funkcionálů $\int \overline{F}\, dx$ a $\int F\, dx$ jsou stejné. Dále $\int\limits_{\gamma} \overline{F}\, dx = \int\limits_{\gamma} F\, dx + (\overline{M} + 1)(y_1 - y_0)$, kde

y_1 a y_0 jsou pořadnice koncového a počátečního bodu křivky γ. Na křivkách se společnými koncovými body se funkcionály $\int \overline{F}\, dx$ a $\int F\, dx$ liší o konstantní hodnotu a křivky, realisující extrém v úloze s pevnými konci, jsou pro oba integrály stejné.

Konstrukce pole extremál podle transversály. Použijeme-li podmínky transversality, můžeme také řešit úlohu obrácenou k úloze vyšetřované: *je dána transversála pole Γ; chceme konstruovat toto pole.* Podmínka transversality nám udává v každém bodě transversály Γ směr extremály pole. Tedy úloha sestrojit pole podle dané transversály vede k sestrojení soustavy integrálů Eulerovy rovnice, vycházejících z bodů Γ v daných směrech. Je-li pro body Γ a pro směry transversální ke Γ, $F_{y'y'} \neq 0$, t. j. koeficient u y'' v Eulerově rovnici je různý od nuly, pak lze v tomto případě uvedenou úlohu řešit jednoznačným způsobem. Z toho plyne výsledek: *transversála pole určuje toto pole jednoznačně.*[2])

Viděli jsme dříve, že pole extremál určuje pole transversál jednoznačným způsobem; tudíž každá transversála pole extremál určuje jednoznačně celé pole transversál.

Uvedeme několik příkladů polí extremál a transversál.

Příklad 1. Svazek rovnoběžných přímek, extremál integrálu

$$\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

tvoří pole pokrývající celou rovinu. Transversálami pole budou přímky orthogonální k přímkám svazku.

Příklad 2. Budiž D konvexní oblast, neobsahující bod A. Soustava úseček, ležících v D a současně na polopaprscích vycházejících z A, tvoří pole extremál integrálu $\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, pokrývající D.[2']) Jestliže A neleží na hranici D, pak je pole regulární; jestliže A leží na hranici D, pak pole je centrální. V obou případech jsou transversálami pole oblouky kružnic se středem v bodě A.

Příklad 3. Budiž Γ křivka třídy C_2. Vedeme každým bodem Γ přímku γ kolmou ke Γ. V dostatečném malém okolí Γ tvoří sestrojené přímky pole

---

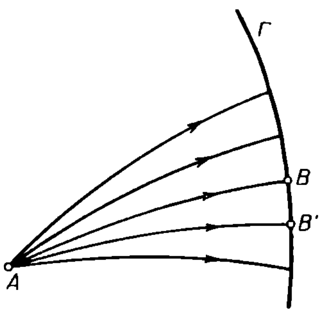
[2]) Vytkněme ty podmínky, za nichž jsme tento výsledek dostali: 1) abychom určili směr extremály v bodě transversály Γ, potřebujeme, aby y' bylo možno vyjádřit ze (14) pomocí x a y jednoznačně; 2) podél Γ musíme mít pro y' určené z (14)

$$F_{y'y'} \neq 0.$$

[2']) Za parametr α, definující přímku — extremálu pole, lze vzít směrnici této přímky.

extremál funkcionálu $\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$; čára Γ bude transversálou tohoto pole. Jestliže na každou přímku pole, počínaje bodem ležícím na Γ, naneseme úsečku konstantní délky h, pak, jak je známo, tvoří geometrické místo koncových bodů těchto úseček čáru orthogonální ke všem přímkám pole, t. j. konstruované geometrické místo bodů je transversálou pole. Nabývá-li h všech možných hodnot, dostáváme pole transversál. Ukázaná zde methoda konstrukce pole transversál, jak uvidíme níže, se dá rozšířiti na funkcionály obecného typu.

Věty o transversálách. Uvedeme základní věty o vlastnostech pole extremál a pole transversál. Všechny tyto věty platí jak pro případ extremál funkcionálu J, tak i pro případ extremál funkcionálu I. Důkazy vět v obou případech jsou zcela analogické; uvedeme je pro případ funkcionálu J.



Obr. 21.

Budiž $\{\gamma\}$ centrální pole extremál se středem v bodě A. Naneseme na všechny extremály tohoto pole oblouky stejné J-délky za předpokladu, že počáteční body všech těchto oblouků leží v bodě A. Geometrické místo koncových bodů těchto oblouků je jistá čára Γ (obr. 21).

Věta I. *Čára Γ je transversálou našeho pole, t. j.* (pro případ funkcionálu J)

$$F\, x, y, y') - \left(y' - \frac{dy}{dx}\right) F_{y'}(x, y, y') = 0,$$

kde y' a $\frac{dy}{dx}$ jsou směrnice tečny k extremále γ a tečny ke křivce Γ v bodě, v němž se obě čáry protnou.

Označíme-li totiž $J(B)$ J-vzdálenost bodu B křivky Γ od středu pole A, máme pro všechny body křivky Γ

$$J(B) = \text{const},$$

kde $J(B)$ je integrál $\int F(x, y, y')\, dx$ podél oblouku AB extremály γ. Při přechodu od bodu $B(x, y)$ k blízkému bodu $B'(x + dx, y + dy)$ křivky Γ máme tudíž

$$dJ = 0.$$

Avšak v daném případě je

$$\mathrm{d}J(B) = \overline{H}^{(1)}\,\mathrm{d}x + p^{(1)}\,\mathrm{d}y$$

a rovnice $\mathrm{d}J(B) = 0$ se stane podmínkou transversality v bodě B oblouku extremály γ a křivky Γ.

Platí i věta obrácená:

Věta 2. *Je-li křivka Γ transversálou centrálního pole se středem v bodě A, pak oblouky extremál od bodu A do Γ mají stejnou J-délku.*

Jestliže totiž $J(B)$ je J-délka oblouku extremály od bodu A do bodu $B(x, y)$ transversály Γ, pak při přechodu k nekonečně blízkému oblouku extremály AB', kde $B' \subset \Gamma$ má souřadnice $x + \mathrm{d}x$, $y + \mathrm{d}y$, platí:

$$\mathrm{d}J(B) = \overline{H}^{(1)}\,\mathrm{d}x + p^{(1)}\,\mathrm{d}y.$$

Na základě transversality křivek γ a Γ je

$$\mathrm{d}J(B) = 0, \text{ z čehož } J(B) = \text{const.}$$

Příklad 1. Je-li $F = \sqrt{1 + y'^2}$, pak jsou extremály γ přímkami, procházejícími bodem A, a čára Γ je kružnice; podmínka transversality je podmínkou orthogonality a naše poslední věta nás poučuje o známém faktu, že kružnice je orthogonální ke svým poloměrům.

Příklad 2. Jsou-li extremály geodetickými čarami na ploše, pak transversálami centrálního pole jsou geodetické kružnice; transversalita jako dříve znamená orthogonalitu a dostaneme, že geodetická kružnice je orthogonální ke geodetickým poloměrům.

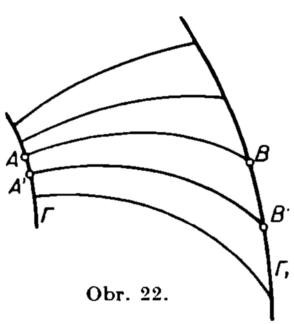
Příklad 3. V případě Fermatova principu je centrálním polem extremál svazek světelných paprsků, vycházejících ze svítícího bodu A, čára Γ je vlnovou křivkou, t. j. geometrickým místem bodů ležících ve stejné optické vzdálenosti od A, t. j. geometrické místo bodů, do nichž se současně dostane světelný signál vyslaný z bodu A. Transversalita v tomto případě znamená orthogonalitu. Náš předpoklad vede na zvláštní případ Malusova principu — vlnová křivka je kolmá na paprsky.

Příklad 4. V případě principu Maupertuis-Eulerova je centrálním polem extremál svazek trajektorií, vycházejících z bodu A za stejných počátečních rychlostí. Čára Γ je tak zvaná křivka stejného účinku. Je orthogonální ke všem trajektoriím svazku, neboť i v tomto případě znamená transversalita orthogonalitu.

Věta 3. *Budiž Γ transversálou pole $\{\gamma\}$. Naneseme-li na všechny extremály γ našeho pole v jednom směru oblouky téže J-délky s počátečními* *body na Γ, pak koncové body těchto oblouků tvoří rovněž transversálu pole $\{\gamma\}$.*

Označíme Γ_1 geometrické místo bodů B, stejně J-vzdálených od Γ (obr. 22). Přejdeme od oblouku $\widehat{AB}$ extremály γ k blízkému extremálnímu oblouku $\widehat{A'B'}$ pole téže délky, při čemž A a A' leží na Γ. Ježto diferenciál J-délky je při přechodu od $\widehat{AB}$ k $\widehat{A'B'}$ roven nule, pak, označíme-li dx_1, dy_1 a dx_2, dy_2 diferenciály souřadnic bodů A a B, máme při tomto přechodu:

$$0 = dJ = -(\overline{H}_1\, dx_1 + p_1\, dy_1) + (\overline{H}_2\, dx_2 + p_2\, dy_2).$$



Obr. 22.

První závorka je rovna nule vzhledem k transversalitě γ a Γ. Je tudíž rovný nule i výraz ve druhé závorce, z čehož vyplývá transversalita γ a Γ_1.

Uvědomíme-li si, že každým bodem pole prochází jenom jedna transversála, dostaneme také obrácené tvrzení:

Věta 4. *Jsou-li Γ_1 a Γ_2 dvě transversály pole $\{\gamma\}$, pak úseky extremál pole mezi Γ_1 a Γ_2 mají stejnou J-délku.*

Příklad. Vyšetřujme případ, kdy $J = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Zde je polem extremál transversálním ke křivce svazek normál ke křivce. Věta 4 nás poučuje o rovnosti úseků normál mezi dvěma křivkami o společných normálách. Naneseme-li na všechny normály k dané křivce stejné úseky, pak podle věty 2 dostaneme novou transversálu, jež má společné normály s první transversálou. Větu 4 lze rozšířit i na geodetické normály ke křivkám na ploše.

§ 28. Konjugované body. Konstrukce pole.

Konjugovaný bod. Budiž dán oblouk extremály γ_0: $y = y(x)$, $x_0 \leqq x$ o počátečním bodě $A(x_0, y_0)$. Sestrojme svazek extremál $\{\gamma\}$, $y = y(x, \alpha)$, $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, které mají s γ_0 společný počátek A. Tato konstrukce je vždycky možná, je-li pro souřadnice x_0, y_0 bodu A a pro směrnici tečny y_0' k oblouku γ_0 v bodě A splněna nerovnost

$$F_{y'y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0.$$

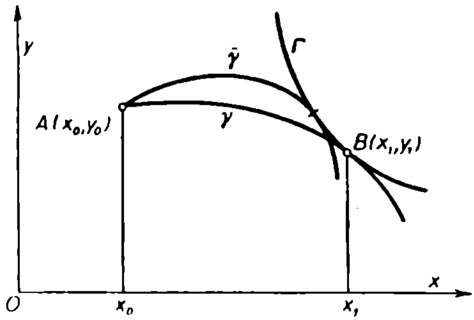
Vskutku, potom i $F_{y'y'}(x_0, y_0, y'_0)$ bude různé od nuly pro všechny hodnoty y' dostatečně blízké k y'_0; bude tudíž Eulerova rovnice vyhovovati všem podmínkám věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice, a proto lze sestrojit integrální křivky této rovnice procházející bodem A, které mají směrnici v bodě A rovnu předepsané hodnotě y' (dostatečně blízké k y'_0). Soustava těchto křivek vytvoří žádaný svazek extremál; γ_0 bude obsažena v tomto svazku, t. j. pro některé α_0, $\alpha_1 \leqq \alpha_0 \leqq \alpha_2$,

$$y(x, \alpha_0) = y(x).$$

Budeme předpokládat, že parametr α je směrnicí tečny extremály v bodě A

$$y'(x_0, \alpha) = \alpha. \tag{16}$$

Má-li obálka Γ svazku $\{\gamma\}$ s γ_0 společný bod $B(x_1, y_1)$ (různý od A), pak se B nazývá bodem *konjugovaným* s A (obr. 23). Jinak řečeno, s bodem A konjugovaný bod B extremály γ_0 je bod, v němž se γ_0 protíná s nekonečně blízkou extremálou $\bar{\gamma}$, procházející tímtéž bodem A.



Obr. 23.

Uvidíme později, že možnost konstruování pole, obsahujícího daný oblouk extremály γ_0, je úplně zajištěna tím, když γ_0 obsahuje bod konjugovaný s jejím počátkem.

Je-li bod $B(x_1, y_1)$ extremály γ_0 konjugován s bodem $A(x_0, y_0)$ téže extremály, pak říkáme, že x_1 je hodnota konjugovaná s hodnotou x_0 vzhledem k extremále γ_0.

Hledání konjugovaných bodů. Jacobiovy rovnice. Máme-li rovnici svazku extremál vycházejících z bodu A, není těžké dostat vztahy ke stanovení souřadnic bodu B, konjugovaného s A. Musíme totiž podle známého pravidla diferenciální geometrie v každém bodě obálky Γ míti

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \tag{17}$$

Speciálně v bodě B, ležícím na křivkách Γ a γ_0, budeme míti

$$\frac{\partial y(x_1, \alpha_0)}{\partial \alpha} = 0. \tag{17'}$$

Tedy všechny hodnoty x_1 konjugované s x_0 pro extremálu γ_0 budou kořeny rovnice (17').

Definice konjugovaných bodů z rovnice (17') má dvě vady: 1) kromě samotné extremály potřebujeme znáti celý svazek extremál vycházejících z jejího koncového bodu a 2) podmínka (17') je pouze nutnou podmínkou pro existenci obálky a tedy, máme-li kořeny rovnice (17'), je třeba ještě navíc vyšetřit, vedou-li skutečně tyto kořeny ke konjugovaným hodnotám.[3])

Opíráme-li se o rovnice Eulerovy, lze uvésti přímou methodu ke stanovení konjugovaných hodnot.

Zachováme-li dřívější označení, označme navíc znakem $\eta(x)$ funkci

$$\eta(x) = \left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha = \alpha_0}.$$

Všechny funkce $y(x, \alpha)$ vyhovují Eulerově rovnici

$$F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) = 0, \tag{18}$$

při čemž tato rovnice je splněna pro každé α (pro $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$).

Diferencujeme-li obě části rovnice (18) podle α a užijeme-li toho, že diferencování podle α a totální diferenciaci podle x lze zaměnit, obdržíme

$$F_{yy}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} + F_{yy'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial x} -$$
$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big\{ F_{yy'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} +$$
$$+ F_{y'y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha}\Big\} = 0.$$

[3]) Uvedeme nejjednodušší příklad soustavy čar $y = y(x, \alpha)$, pro kterou (17) určuje křivku, která není obálkou soustavy. Položme

$$y = \alpha x^2 + \alpha^3 \quad \text{pro } x \geqq 0,$$
$$y = \alpha^3 \quad \text{pro } x < 0.$$

Rovnice (17) nám dá zápornou část osy Ox, avšak zároveň tato soustava je polem, které zaplní celou rovinu a nemá tedy obálku.

Avšak

$$\left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} = \eta(x), \quad \left[\frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} = \eta'(x),$$

a tedy pro $\eta(x)$ dostaneme tuto rovnici:

$$F_{yy}\eta + F_{yy'}\eta' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F_{yy'}\eta + F_{y'y'}\eta'] = 0.$$

V této rovnici je položeno:

$$\left.\begin{aligned} F_{yy} &= F_{yy}\,[x, y(x, \alpha_0), \ y'(x, \alpha_0)], \\ F_{yy'} &= F_{yy'}\,[x, y(x, \alpha_0), \ y'(x, \alpha_0)], \\ F_{y'y'} &= F_{y'y'}[x, y(x, \alpha_0), \ y'(x, \alpha_0)]. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Označíme-li pravé strany (19) $P = P(x, \alpha_0)$ resp. $Q = Q(x, \alpha_0)$ resp. $R = R(x, \alpha_0)$ a odstraníme-li závorky, obdržíme nakonec

$$\left(P - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q\right)\eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(R\eta') = 0. \qquad (20)$$

Rovnice (20) s neznámou funkcí η se nazývá *Jacobiova rovnice*. Je to lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Označme $\Delta(x_0, x)$ integrál Jacobiovy rovnice (20), vyhovující těmto počátečním podmínkám:

$$\Delta(x_0, x_0) = 0, \quad \Delta'(x_0, x_0) = 1.$$

Dokážeme nyní tuto základní větu.

Věta 5. *Jestliže podél extremály γ_0 je veličina $R \neq 0$, pak k tomu, aby hodnota x_1, $x_1 \neq x_0$, byla hodnotou konjugovanou s x_0* (vzhledem ke γ_0), *je nutné a stačí, aby x_1 bylo kořenem rovnice*

$$\Delta(x_0, x) = 0.$$

Dokážeme nutnost podmínky. Je-li x_1 hodnota konjugovaná s x_0, pak vyhovuje vztahu (17'), t. j.

$$\eta(x_1) = 0.$$

Dokážeme, že

$$\eta(x) \equiv \Delta(x_0, x). \qquad (21)$$

Vskutku, obě funkce vyhovují Jacobiově rovnici; mimo to podle definice funkce η a podle toho, že je $y(x_0, \alpha) \equiv y_0$, máme

$$\eta(x_0) = 0 = \Delta(x_0, x_0),$$

a protože podle (16)

$$\eta'(x) = \frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x_0, \alpha) = 1 = \Delta'(x_0, x_0),$$

pak podle jednoznačnosti řešení rovnice Jacobiovy dostaneme (21).

Dokážeme nyní dostatečnost podmínky. Předpokládejme, že je

$$\Delta(x_0, x_1) = 0, \quad x_1 \neq x_0,$$

a dokažme, že pro dostatečně malé hodnoty $\delta\alpha$ všechny extremály

$$y = y(x, \alpha_0 + \delta\alpha)$$

protínají extremálu $y = y(x, \alpha_0)$ v libovolně malém okolí bodu $B(x_1, y(x_1, \alpha_0))$.

Vezměme funkci

$$\psi(x, \alpha) = \frac{y(x, \alpha) - y(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \text{ pro } \alpha \neq \alpha_0,$$

$$\psi(x, \alpha_0) = \left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} = \Delta(x_0, x) \text{ pro } \alpha = \alpha_0.$$

Tímto způsobem definovaná funkce $\psi(x, \alpha)$ je spojitá podle obou argumentů a mimo to má podle nich spojité parciální derivace (spojitá diferencovatelnost ψ podle α plyne z toho, že $y(x, \alpha)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná podle α).

Dále je

$$\left.\begin{aligned} \psi(x_1, \alpha_0) &= \Delta(x_0, x_1) = 0 \\ \frac{\partial\psi(x_1, \alpha)}{\partial x} &= [\Delta'_x(x_0, x)]_{x=x_1} \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Kdyby totiž řešení $\Delta(x_0, x)$ lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu bylo rovno nule pro $x = x_1$ spolu se svou derivací, pak by z věty o jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic vyplývalo, že $\Delta(x_0, x) \equiv 0$.

Z (22) plyne, že rovnice

$$\psi(x, \alpha) = 0$$

definuje x jako implicitní funkci α v okolí (x_0, α_0), při čemž pro $\alpha \to \alpha_0$ je $x \geqq x_1$. Píšeme-li tuto rovnici ve tvaru

$$\psi(x_1 + \varepsilon, \alpha + \delta\alpha) = 0, \tag{22'}$$

bude ε jakožto spojitá funkce $\delta\alpha$ libovolně malé pro dostatečně malé $\delta\alpha$. Vzhledem k definici ψ znamená rovnice (22'):

$$y(x_1 + \varepsilon, \alpha_0 + \delta\alpha) = y(x_1 + \varepsilon_1, \alpha_0).$$

To znamená, že se křivky $y = y(x, \alpha_0 + \delta\alpha)$ a $y(x, \alpha_0)$ protínají pro dostatečně malé $\delta\alpha$ v bodě $B_\varepsilon(x_1 + \varepsilon, y(x_1 + \varepsilon, \alpha + \delta\alpha))$ libovolně blízkém k bodu $B(x_1, y(x_1, \alpha_0))$.

Z dokázané věty a ze známých vlastností lineárních rovnic vyplývá řada důležitých vlastností konjugovaných hodnot (samozřejmě za podmínky $R \neq 0$). Uvedeme je :

1) Je-li x_1 hodnota konjugovaná s x_0, pak je x_0 hodnota konjugovaná s x_1.

2) Nechť $x_1, x_1 > x_0$ a $x_1', x_1' > x_0'$ jsou nejmenší z hodnot konjugovaných k x_0 resp. k x_0'. Je-li $x_0' > x_0$, pak také $x_1' > x_1$.[4])

3) Budiž $x_1, x_1 > x_0$ nejmenší z hodnot konjugovaných s x_0. Hodnota x_1 je spojitá funkce jak proměnné x_0 tak i obou parametrů definujících extremálu, vzhledem k níž bereme konjugovanou hodnotu.[5])

Budeme říkati, že *oblouk γ_0 extremály $y = y(x)$ ležící mezi x_0 a x_1 vyhovuje podmínce Jacobiově, je-li pro $x_0 < x < x_1$*

$$\Delta(x_0, x) \neq 0. \tag{22''}$$

Budeme rovněž říkat, že *oblouk γ_0 extremály vyhovuje zesílené Jacobiově podmínce, jestliže nerovnost* (22") *platí pro $x_0 < x \leqq x_1$.*

Poznámka 1. Jsou-li $y = y(x)$ a $y = y(x) + \eta(x)$ dvě nekonečně blízké extremály, pak lze dokázat, že až na veličinu nekonečně malou řádu vyššího

---

[4]) To ihned plyne z věty Sturmovy. Viz V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic, kap. VI, § 2. (Přeložil univ. prof. Dr Eduard Čech.)

[5]) To je přímým důsledkem vět o spojité závislosti řešení diferenciální rovnice na libovolných konstantách a na daných počátečních podmínkách.
Viz V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic, kap. VII, § 3 (přeložil prof. Dr Eduard Čech).

než je vzdálenost druhého řádu funkcí $y(x)$ a $y(x) + \eta(x)$ vyhovuje funkce $\eta(x)$ Jacobiově rovnici.

Funkce $y(x)$ a $y(x) + \eta(x)$ vyhovují totiž Eulerově rovnici

$$F_y(x, y, y') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}(x, y, y') = 0,$$

$$F_y(x, y + \eta, y' + \eta') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}(x, y + \eta, y' + \eta') = 0.$$

Odečteme-li člen po členu první rovnici od druhé, nalezneme

$$F_y(x, y + \eta, y' + \eta') - F_y(x, y, \eta) -$$
$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [F_{y'}(x, y + \eta, y' + \eta') - F_{y'}(x, y, y')] = 0,$$

neboli, zanedbáme-li nekonečně malé veličiny vyššího řádu,

$$F_{yy}\eta + F_{yy'}\eta' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [F_{yy'}\eta + F_{y'y'}\eta'] = 0,$$

což je zřejmě identické s rovnicí (20).

Jestliže obě nekonečně blízké extremály procházejí bodem $A(x_0, y_0)$, pak je $\eta(x_0) = 0$. Jestliže se protínají v bodě $B(x_1, y_1)$, pak je $\eta(x_1) = 0$. Dostaneme tak znovu přechod od dřívější definice k definici nové.

Poznámka 2. Analogicky se definuje konjugovaný bod v případě funkcionálu I, t. j.: *bod B extremály γ je konjugován s bodem A téže extremály, jestliže obálka Γ svazku extremál $\{\gamma\}$ vycházejících z bodu A se dotýká křivky γ v bodě B.*

Existence pole. Řekneme, že extremála γ je *obklopena polem extremál*, jestliže existuje pole extremál $\{\gamma\}$, které má tyto vlastnosti:

1. Extremála γ je jedním z oblouků pole $\{\gamma\}$.
2. Extremála γ leží ve vnitřku oblasti pokryté polem.

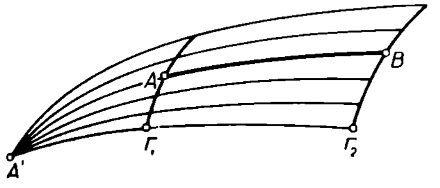
Tato definice se hodí jak pro případ extremál funkcionálu J (obyčejný tvar), tak i pro případ funkcionálu I (parametrický tvar).

Při použití tohoto pojmu budeme předpokládat, že pole $\{\gamma\}$, jímž je γ obklopena, je vlastní pole, t. j. pole extremál vyhovujících podmínkám uvedeným v § 27.

Zastavme se podrobně u případu funkcionálu J.

Nechť je dána extremála γ spojující dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$ (obr. 24). Řešme otázku, za jakých podmínek je možno extremálu γ

obklopit polem extremál. Předpokládejme, že ani bod B ani žádný jiný vnitřní bod extremály γ není bodem konjugovaným s A, t. j. bod, pro nějž $\Delta(x_0, x_1) = 0$ (viz nahoře). Nechť je kromě toho podél extremály γ a v jejích koncových bodech A a B $F_{y'y'} > 0$. V tomto případě existuje bod $A'(x_0', y_0')$, $x_0' < x_0$ ležící na prodloužení extremály γ za bod A tak, že extremální oblouk $A'B$ (spolu s koncem B) neobsahuje body konjugované s A' (viz vlastnost 3) konjugovaných hodnot na str. 173).



Obr. 24.

Oblouk $A'B$ označíme znakem γ'. Konstruujme svazek extremál procházejících bodem A', určených rovnicemi

$$y = y(x, \alpha),$$

kde je vzata za parametr směrnice tečny k extremále v bodě A'

$$y_x'(x_0', \alpha) = \alpha$$

(viz str. 169). Podél extremály γ' pro $x_0 \leqq x \leqq x_1$ máme

$$\left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha = \alpha_0} > 0.$$

V tomto případě však na základě spojitosti $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ existuje takové číslo h, $h > 0$, že pro $|\alpha - \alpha_0| \leqq h$ a $x_0 \leqq x \leqq x_1$ jest

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} > 0.$$

Mimo to podle věty o diferencovatelnosti integrálu podle počátečních[6]) daných podmínek jako parametrů bude míti funkce $y(x, \alpha)$

---

[6]) Viz V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic, § 3. Avšak k tomu, aby bylo možno přímo aplikovat větu tam uváděnou na náš případ, je třeba zavedením nové proměnné $z = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ převést Eulerovu rovnici na soustavu dvou rovnic prvního řádu a řešit tuto soustavu vzhledem k $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, což je možné vzhledem k podmínce $F_{y'y'} \neq 0$.

spojité derivace $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}$ a rovněž ovšem i derivaci $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Jinými slovy, sestrojený svazek extremál tvoří regulární pole, jímž je obklopena extremála γ' (viz str. 161). Dostaneme tímto způsobem další výsledek.

Věta 6. *K tomu, aby extremálu γ bylo lze obklopit polem extremál, stačí, aby*

1) *podél extremály* (i v jejích koncových bodech) *platilo*: $F_{y'y'} > 0$ (resp. $F_{y'y'} < 0$),

2) *oblouk γ spolu s jedním ze svých koncových bodů neobsahoval bod konjugovaný s druhým koncovým bodem.*

Aniž bychom něco měnili na uvedených úvahách, dostaneme v případě funkcionálu I takovouto podmínku pro existenci pole obklopujícího extremálu.

Věta 6'. *K tomu, aby extremálu γ funkcionálu I bylo možno obklopit polem extremál, stačí, aby*

1) *podél γ* (i na jejích koncích) *platilo* $F_1 > 0$ (resp. $F_1 < 0$, viz § 23 (6));

2) *oblouk γ spolu s jedním ze svých koncových bodů neobsahoval bod konjugovaný s druhým koncovým bodem.*

§ 29. Věta o obálce.

Mějme křivku Γ třídy C_1, která se může ve zvláštním případě redukovat na bod. Nechť je dále $\{\gamma\}$ jednoparametrová soustava extremál funkcionálu

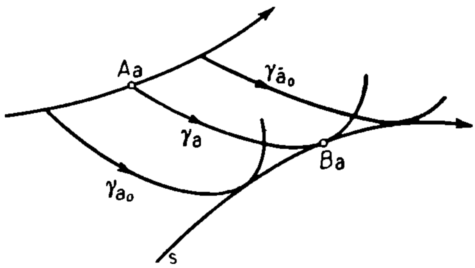
$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

Funkce F vyhovuje obvyklým podmínkám spojitosti a diferencovatelnosti. Předpokládejme, že extremály γ jsou transversální k Γ a mají obálku s třídy C_1 (soustava $\{\gamma\}$ zřejmě netvoří pole extremál, viz obr. 27). Označíme znakem α parametr určující křivky naší soustavy a nechť rovnice soustavy má tvar

$$y = \varphi(x, \alpha),\ \alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1.$$

Budeme předpokládat, že v uzavřené oblasti D omezené křivkami Γ,

s, γ_{α_0}, γ_{α_1} funkce $\varphi(x, \alpha)$ má spojité parciální derivace prvního řádu a spojitou smíšenou derivaci druhého řádu a nechť γ_α jest křivka soustavy odpovídající hodnotě α. Označíme dále $A_\alpha(x_0, y_0)$ (obr. 25) bod, v němž se protnou γ_α a Γ a $B_\alpha(x_1, y_1)$ bod, v němž se protnou γ_α a s. Zavedeme na čarách γ a s kladné směry. Na čáře γ_α vezmeme za kladný směr od A_α k B_α. Kladný směr na s určíme tak, aby v bodech B_α kladné směry na γ_α a s souhlasily. Parametr α budeme všude v dalším považovat za tak zvolený, aby se s jeho růstem bod B_α pohyboval v kladném směru po s.



Obr. 25.

Označíme znakem J_α J-délku $\overset{\frown}{A_\alpha B_\alpha}$ extremály γ_α. Ve zvláštním případě, když J-délka je obvyklá délka, náš svazek extremál transversálních ke křivce Γ se změní ve svazek normál ke Γ a obálka s tohoto svazku se změní v evolutu křivky Γ (křivka Γ je pak evolventou s).

Jak známo, je délka oblouku evoluty rovna rozdílu délek úseků normál, ležících mezi evolutou a evolventou a dotýkajících se evoluty v koncových bodech tohoto oblouku. Uvedená vlastnost evoluty umožňuje široké zobecnění. Platí tato věta.

Věta 7 (Kneser). *Mějme soustavu extremál transversálních k čáře Γ třídy C_1, které mají obálku s třídy C_1. Buďte γ_1 a γ_2 dva oblouky s koncovými body A_1 a A_2 na Γ a B_1 a B_2 na s. Při tomto označení, jestliže bod B_1 leží před bodem B_2 na s, pak rozdíl J-délek γ_2 a γ_1 je roven J-délce oblouku obálky ležícího mezi body B_1 a B_2.*

Důkaz. Zachovejme předcházející označení a J_α nechť označuje J-délku úseku $\overset{\frown}{A_\alpha B_\alpha}$ extremály γ_α ležící mezi Γ a s. Přejdeme od hodnoty parametru α k nekonečně blízké hodnotě $\alpha + \mathrm{d}\alpha$. Souřadnice (x_0, y_0) a (x_1, y_1) bodů A_α a B_α vzrostou při tom o diferenciální přírůstky $\mathrm{d}x_0$, $\mathrm{d}y_0$ a $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}y_1$ (posun A_α nastane po transversále Γ, posun B_α po obálce s). Na základě vzorců (6) a (10) § 16 máme:

$$\mathrm{d}J_\alpha = -(\overline{H}_0\, \mathrm{d}x_0 + p_0\, \mathrm{d}y_0) + (\overline{H}_1\, \mathrm{d}x_1 + p_1\, \mathrm{d}y_1).$$

Vzhledem k transversalitě γ_α a Γ vymizí první výraz v závorkách a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}J_\alpha &= \overline{H}_1\, \mathrm{d}x_1 + p_1\, \mathrm{d}y_1 = \\ &= [F(x_1, y_1, y_1') + (\overline{y}' - y_1')\, F_{y'}(x_1, y_1, y_1')]\, \mathrm{d}x_1, \end{aligned} \tag{23}$$

kde $\overline{y}' = \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}$ a y_1' jsou směrnice tečen ke křivkám γ_α resp. s v bodě B_α. Protože se ale v bodě B_α obě křivky dotýkají, je

$$\mathrm{d}J_\alpha = F(x, y, y')\, \mathrm{d}x = F(x, y, \overline{y}')\, \mathrm{d}x \tag{24}$$

(kde píšeme x, y, y' místo x_1, y_1, y_1'). Integrujeme-li obě strany (24) v mezích od α_0 do α_1, dostaneme odtud

$$J_{\alpha_1} - J_{\alpha_0} = \int_s F\, \mathrm{d}x,$$

kde se integrál na pravé straně bere po oblouku $\overparen{B_{\alpha_0}B_{\alpha_1}}$ křivky s. Podle naší definice je tento integrál J-délka oblouku $\overparen{B_{\alpha_0}B_{\alpha_1}}$ obálky s. Tím je věta dokázána.

Případ degenerace. Jestliže křivka Γ degeneruje v bod A, pak soustava extremál $\{\gamma\}$ v předcházející větě se změní ve svazek extremál, vycházející z bodu A; dostaneme tento mezný případ věty 7:

Věta 7'. *Mějme svazek extremál vycházejících z bodu A, které mají obálku s třídy C_1. Buďte γ_1 a γ_2 dvě extremály naší soustavy s koncovými body B_1 a B_2 na s. Při těchto označeních, jestliže bod B_1 leží před bodem B_2, je rozdíl J-délek γ_1 a γ_2 roven J-délce oblouku $\overparen{B_1B_2}$ obálky s.*

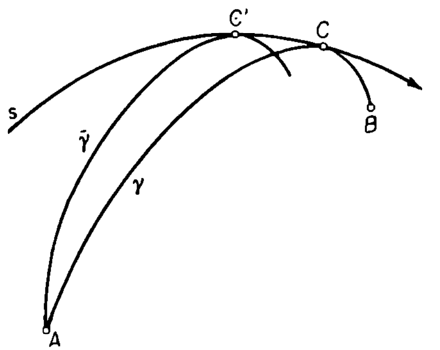
Jiný důležitý zvláštní případ věty 7 obdržíme, když předpokládáme, že obálka degeneruje v bod B, t. j. když všechny čáry procházejí bodem B. V tomto případě soustava $\{\gamma\}$ degeneruje ve svazek extremál vycházejících z B a transversálních ke Γ. Ve formuli (23) je člen $F(x, y, y')\, \mathrm{d}x$ potom roven nule, ježto $\mathrm{d}x = 0$; stejnou úvahou, jako v uvedeném důkazu zjistíme, že J-délky všech úseků extremál vycházejících z B a transversálních ke Γ jsou si rovny. Jestliže navíc předpokládáme, že se i čára Γ redukuje v bod A, pak se soustava změní v soustavu extremál spojujících body A a B. I v tomto případě J-délky všech těchto čar si budou rovny. Na příklad svazek hlavních kružnic na povrchu koule, vycházejících z jakéhokoli bodu povrchu koule, je realisací posledního případu.

Příklad 1. V případě geodetických čar na ploše (extremál pro $\int ds$) změní se soustava $\{\gamma\}$ v soustavu geodetických normál ke křivce Γ, jejichž obálka je tak zvaná geodetická evoluta křivky γ. Věta 7 se změní v Gaussovu větu:

Délka oblouku geodetické evoluty ke křivce Γ je rovna rozdílu délek úseků geodetických normál křivky Γ dotýkajících se evoluty v koncových bodech tohoto oblouku.

Nutná podmínka Jacobiova. Jak bylo dříve dokázáno, zesílená Legendreova podmínka $F_{y'y'} > 0$ a zesílená podmínka Jacobiova: $\Delta(x_0, x) > 0$ pro $x_0 < x \leq x_1$ stačí obě dohromady k tomu, aby daný oblouk extremály bylo možno obklopit polem extremál. Později dokážeme, že tyto podmínky jsou také postačující pro to, aby daný oblouk dával slabý extrém. Použijeme-li teď věty 7, dokážeme, že Jacobiova podmínka je podmínkou nutnou k tomu, aby daný oblouk dával slabý extrém.

Věta 8. *Jestliže podél oblouku extremály γ_0 s koncovými body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$ výraz $F_{y'y'} \neq 0$ a jestliže interval (x_0, x_1) obsahuje hodnotu konjugovanou s x_0, pak γ_0 nedává ani minimum ani maximum.*



Obr. 26.

Předpokládejme totiž, že oblouk γ_0 obsahuje bod C konjugovaný s koncovým bodem A oblouku γ_0 a různý od koncového bodu B. Vyšetříme svazek extremál vycházejících z bodu A. Geometrické místo bodů těchto extremál konjugovaných s bodem A je obálka s naší soustavy. Geometricky jsou možné čtyři případy:

1) obálka s se neredukuje na bod a dotykový bod extremály γ s obálkou s je regulárním bodem křivky s (obr. 26);[7]

2) obálka se neredukuje na bod, bod C je bodem vratu pro s (obr. 27), při čemž body oblouku extremály $\overset{\frown}{AC}$ blízké k C a body křivky s blízké k C leží po téže straně normály ke křivce s v bodě C;

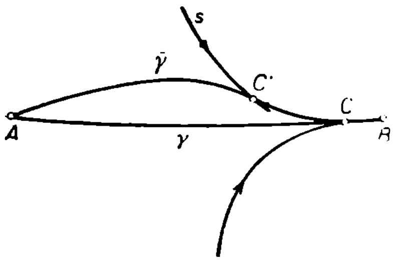
---

[7]) T. j. v okolí bodu C je křivka s křivkou třídy C_1.

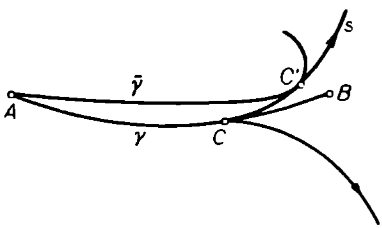
3) obálka s se neredukuje na bod, bod C je bod vratu pro s, při čemž body oblouků $\overset{\frown}{AC}$ a s blízké k C leží na různých stranách od normály k s v bodě C (obr. 28);

4) obálka s degeneruje v bod (obr. 29). Případy 2), 3), 4) lze považovat za „singulární" případy. Zůstaneme pro jednoduchost pouze u případů 1), 2), 4).

První případ. Z našeho předpokladu plyne, že se extremála γ dotýká obálky s v bodě C. Budiž $\overset{\frown}{AC'}$ extremálou svazku, která se



Obr. 27.



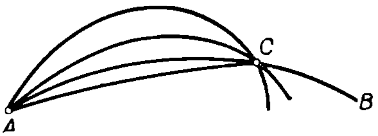
Obr. 28.

dotýká s v bodě C'. Z toho, že bod C je regulárním bodem s, plyne existence extremály $\overset{\frown}{AC'}$ svazku, dotýkající se s v bodě C', předcházejícím bodu C a k němu blízkém. Podle věty 7 J-délka $\overset{\frown}{AC'}$ plus J-délka $\overset{\frown}{CC'}$ obálky s je rovna J-délce $\overset{\frown}{AC}$.

Oblouk $\overset{\frown}{CC'}$ obálky s není extremálou. Předpokládáme-li totiž opak, dostali bychom, že bodem C procházejí dvě extremály s a γ, které mají v bodě C společnou tečnu. To je ale nemožné, neboť v bodě C máme pro směr y' extremály γ $F_{y'y'} \neq 0$, a tudíž je možno bodem C ve směru y' vésti jedinou integrální křivku Eulerovy rovnice, t. j. jedinou extremálu. Odtud plyne, že body C' a C lze spojit obloukem $\overset{\frown}{C'C}$ (různým od oblouku $\overset{\frown}{C'C}$ obálky s), jenž má menší J-délku než oblouk $\overset{\frown}{C'C}$ (zrovna tak existuje oblouk, jenž má větší J-délku než oblouk $\overset{\frown}{C'C}$); tudíž křivka $\bar{\gamma}$ skládající se z oblouků $\overset{\frown}{AC'}$ a $\overset{\frown}{C'C}$ má menší J-délku než oblouk $\overset{\frown}{AC'C}$, skládající se z oblouku extremály $\overset{\frown}{AC'}$ a z oblouku $\overset{\frown}{C'C}$ obálky nebo než jí rovný vzhledem k J-délce oblouk $\overset{\frown}{AC}$ extremály γ, t. j. $\overset{\frown}{AC}$ nedává minimum J-délek oblouků spojujících

A a C. Tudíž tím spíše oblouk $\overset{\frown}{AB}$ extremály γ nedává minimum délek oblouků spojujících A a B (jde zřejmě o slabé minimum, neboť křivky A a B leží ve vzdálenosti prvního řádu). Analogicky se dokazuje, že $\overset{\frown}{AB}$ nedává maximum.

Druhý případ převede se na první. K tomu stačí odmysliti si část obálky, počínající bodem C a obsahující body následující za bodem C, a vyšetřovat jenom část, předcházející bodu C. Potom jsou splněny všechny podmínky jako v prvním případě a tedy soudíme, že oblouk $\overset{\frown}{AB}$ nemůže dávat minimum funkcionálu J.



Obr. 29.

Čtvrtý případ. Vyšetříme nyní případ, když se obálka s redukuje na jediný bod C ležící mezi A a B. Bodem C v probíraném případě prochází spolu s obloukem $\overset{\frown}{AC}$ extremály γ celá soustava blízkých extremálních oblouků. Budiž $\overset{\frown}{AC}$ jeden z takových oblouků; J-délka $\overset{\frown}{AC}$ je rovna J-délce $\overset{\frown}{AC}$; J-délka lomené čáry $\overset{\frown}{ACB}$, skládající se z oblouku $\overset{\frown}{AC}$ a z části $\overset{\frown}{CB}$ extremály γ je rovna J-délce extremály $\overset{\frown}{AB}$.

Dokážeme, že v bodě C lomu čáry $\overset{\frown}{ACB}$ není vyhověno nutné podmínce Weierstrass-Erdmanově (viz § 17) pro lomené extremály. Vskutku podle podmínky $F_{y'y'}(x, y, \bar{y}') \neq 0$ pro $\bar{y}'$ dostatečně blízká k y' (y' je směrnicí γ v bodě C) máme v bodě C (označíme-li znakem $\tilde{y}'$ veličinu ležící mezi y' a $\bar{y}'$)

$$F_{y'}(x, y, \bar{y}') - F_{y'}(x, y, y') = (\bar{y}' - y')\, F_{y'y'}(x, y, \tilde{y}') \neq 0,$$

neboli

$$F_{y'}(x, y, \bar{y}') \neq F_{y'}(x, y, y').$$

Odtud soudíme, že $\overset{\frown}{ACB}$ nemůže dávat relativní minimum J-délek křivek spojujících body A a B. Existuje křivka blízká k $\overset{\frown}{ACB}$ (a tudíž k $\overset{\frown}{ACB} \equiv \overset{\frown}{AB}$) spojující tytéž body A a B, jejíž J-délka je menší než J-délka $\overset{\frown}{ACB}$ a tedy než délka $\overset{\frown}{AB}$. Věta je tímto způsobem dokázána i v tomto případě.

Uvedené úvahy nás vedou také k dalšímu výsledku, doplňujícímu shora formulovanou Jacobiovu podmínku. Jestliže oblouk $\overset{\frown}{AB}$ extremály γ dává slabé minimum funkcionálu J a je-li na $\overset{\frown}{AB}$, obsahujícím i bod B, $F_{y'y'} > 0$, a dále, je-li bod C dotyku obálky s (svazku extremál vycházejících z A) s extremálou γ regulárním bodem křivky s, pak C leží zcela vně $\overset{\frown}{AB}$.

Jacobiova podmínka pro úlohy s volnými konci. Věta 7 umožňuje rozšířit nutnou podmínku Jacobiovu slabého minima také na případ úlohy s volným koncem.

Mějme soustavu $\{\gamma\}$ extremál transversálních ke křivce Γ. Nechť $\overset{\frown}{AB}$ je oblouk jedné z těchto extremál γ_0, kde A leží na Γ. Jestliže obálka s soustavy $\{\gamma\}$, která se může skládat z jediného bodu, protíná $\overset{\frown}{AB}$ v bodě C ležícím mezi A a B, pak oblouk $\overset{\frown}{AB}$ nevede k minimu J-vzdálenosti bodu B od křivky Γ. Důkaz je zcela analogický předcházejícímu; liší se od něho jenom tím, že se věta 7 aplikuje na soustavu extremál transversálních ke křivce Γ. Odtud obdržíme nutnou Jacobiovu podmínku: *k tomu, aby oblouk extremály $\overset{\frown}{AB}$, transversální v bodě A ke křivce Γ, minimalisoval J-vzdálenosti mezi bodem B a křivkou Γ, je nutné, aby se $\overset{\frown}{AB}$ neprotínal s transversální extremálou nekonečně blízkou ke Γ.*

Na příklad k tomu, aby úsek normály k některé křivce Γ minimalisoval vzdálenosti bodu M od křivky Γ, je nutné, aby se nedotýkal evoluty křivky Γ.

§ 30. Integrování Eulerovy rovnice.

J-hyperboly. Buďte dány dvě křivky Γ_1 a Γ_2. Veďme z různých bodů A roviny oblouky γ_1, γ_2 extremál, protínajících Γ_1 a Γ_2 transversálně. Označíme znaky $J(\gamma_1)$ a $J(\gamma_2)$ jejich J-délky. Potom geometrické místo bodů A, pro něž rozdíl J-vzdáleností od křivek Γ_1 a Γ_2, t. j. $J(\gamma_1) - J(\gamma_2)$, je konstantní:

$$J(\gamma_1) - J(\gamma_2) = C = \text{const},$$

nazveme J-hyperbolou. Budeme předpokládati všude dále, že soustavy extremál, na nichž určujeme vzdálenosti A od Γ_1 a Γ_2, vyhovují podmínkám 2, str. 161 (viz § 27). Potom $J(\gamma_1)$ a $J(\gamma_2)$, vyšetřované jako funkce koncových bodů oblouků γ_1 a γ_2, mají totální diferenciál. Předpokládejme kromě toho, že všude ve vyšetřované části roviny platí $F_{y'y'} \neq 0$ a že podél každé z extremál, kterou vyšetřujeme, je $F(x, y, y') \neq 0$ (viz str. 164).

Křivky Γ_1 a Γ_2 budeme nazývat fokálními křivkami hyperboly.

Podél J-hyperboly platí

$$\mathrm{d}J(\gamma_1) - \mathrm{d}J(\gamma_2) = 0,$$

z čehož podle toho, že γ_1, γ_2 jsou extremály, které protínají Γ_1 a Γ_2 transversálně, nalezneme, že v bodě A je

$$\overline{H}_1\, \mathrm{d}x + p_1\, \mathrm{d}y - (\overline{H}_2\, \mathrm{d}x + p_2\, \mathrm{d}y) = 0$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\overline{H}_1 - \overline{H}_2}{p_1 - p_2}, \tag{25}$$

kde $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$ a p_1, p_2 jsou hodnoty funkcí $\overline{H} = F - y'F_{y'}$ a $p = F_{y'}$ v bodě A pro extremály γ_1 a γ_2, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ směrnice tečny k hyperbole v bodě A.

Funkce $\overline{H}_1$ a $\overline{H}_2$ můžeme studovat jako funkce proměnných x, y, p. V tomto případě lze klásti $\overline{H}_1 = H(x, y, p_1)$, $\overline{H}_2 = H(x, y, p_2)$, kde (x, y) jsou souřadnice bodu A; rovnice (25) nabude potom tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{H(x, y, p_2) - H(x, y, p_1)}{p_2 - p_1}. \tag{26}$$

Budiž nyní $s(\Gamma_1, \Gamma_2)$ oblouk hyperboly s fokálními křivkami Γ_1 a Γ_2, jdoucí pevným bodem A. Bude-li se Γ_1 neomezeně přibližovat ke Γ_2 tak, že pro jakkoli malé ε bude, počínaje známým okamžikem, ležet Γ_1 v ε-okolí prvního řádu křivky Γ_2, pak se bude v tomto případě oblouk hyperboly $s(\Gamma_1, \Gamma_2)$ neomezeně přibližovat k extremále procházející bodem A, která je transversální ke Γ_1. Jinými slovy: při splynutí obou fokálních křivek každý oblouk hyperboly degeneruje v oblouk extremály. Tato vlastnost J-hyperboly je přirozeným zobecněním případů degenerace obyčejné hyperboly.

Při provádění důkazu upozorňujeme na toto: jestliže Γ_1 splyne s Γ_2, pak γ_2 splyne s γ_1; tedy p_1 konverguje k p_2 a rovnice (26) přejde v rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{27}$$

V této rovnici ve výrazu $p = F_{y'}(x, y, y')$ x a y jsou souřadnice bodu A a y' je směrnice tečny ke γ_1 v bodě A. Rovnice (27) je jednou z rovnic kanonického tvaru Eulerovy rovnice.

Abychom dostali druhou rovnici, sestrojme svazek extremál $\{\gamma\}$ transversálních ke Γ_1; čára γ_1 bude zřejmě patřit k tomuto svazku. Označíme znakem $J(x, y)$ J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky Γ_1. Potom vzhledem k transversalitě γ a Γ najdeme podle rovnosti (5)

$$\mathrm{d}J = H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y;$$

přitom je $H = H(x, y, p)$ a $p = F_{y'}(x, y, y')$; y' je rovno směrnici tečny k extremále svazku $\{\gamma\}$.[8]) Odtud, použijeme-li podmínky totálního diferenciálu, dostaneme

$$\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{28}$$

Zaměníme-li podle (27) $\frac{\partial H}{\partial p}$ označením $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, obdržíme

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{29}$$

Nahradíme-li pravou stranu rovnice (29) úplnou derivací $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, pak nám dá spolu s (27) hledané Eulerovy rovnice v kanonickém tvaru.

Tak jsme dostali výsledek:

Věta 9. *Jestliže fokální křivka Γ_2 splývá s fokální křivkou Γ_1, pak větev J-hyperboly procházející bodem A se změní v extremálu, procházející bodem A, která je transversální ke Γ_2.*[9])

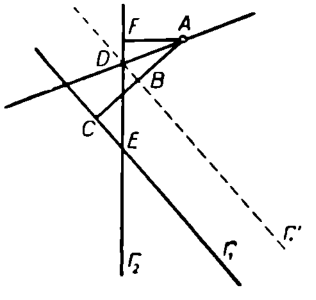
Příklad 1. Nechť Γ_1 a Γ_2 degenerují ve dva body a budiž $J = \int \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$. Potom extremálami budou přímky, J-hyperbola se stane jednou větví obyčejné

[8]) Bereme extremálu svazku, procházejícího bodem A, a tečnu vedeme v bodě A.

[9]) Viz L. Ljusternik, Zamečanija k nekotorym variacionnym zadačam, Učennye zapiski MGU, vyp. II.

hyperboly s ohnisky Γ_1 a Γ_2 procházející daným bodem A. Přibližujme nyní neomezeně Γ_2 ke Γ_1; potom zřejmě hyperbola degeneruje ve dvojici přímek, z nichž jedna, procházející body Γ_1 a A, bude extremálou určující vzdálenost A od Γ_1.

Příklad 2. Buďte opět $J = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, Γ_1 a Γ_2 dvě protínající se přímky a A daný bod (obr. 30). J-hyperbola je přímkou procházející bodem A a bodem D, v němž se přímka Γ_2 protne s přímkou Γ_1', kterou obdržíme posunutím přímky Γ_1 o vzdálenost CB, rovnou rozdílu délek kolmic, spuštěných s A na Γ_1 a Γ_2. Jestliže se přímka Γ_2 při otáčení kolem bodu E setká s přímkou Γ_1', pak J-hyperbola přejde v přímku kolmou ke Γ_1.



Obr. 30.

Příklad 3. Jsou-li extremály geodetickými čarami na ploše, pak věta uvádí přirozené zobecnění vlastností obyčejné hyperboly na vlastnosti geodetické „hyperboly" geometrie na ploše.

Z dokázané věty dostaneme jako důsledek takovýto výsledek:

Věta 10. *Je-li $J(x, y, \alpha)$ J-vzdálenost*[10]*) bodu A od čáry Γ_α: $y = \varphi(x, \alpha)$, kde α je parametr, a jestliže $\varphi(x, \alpha)$ spolu se svými parciálními derivacemi je spojitá, pak je*

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta$$

pro konstantní β rovnicí extremály.

Rovnice

$$J(x, y, \alpha') - J(x, y, \alpha) = \text{const} \tag{30}$$

určuje totiž některou J-hyperbolu. Konstantní veličinu v (30) zvolíme rovnou $\beta(\alpha' - \alpha)$. Rovnice naší J-hyperboly nabude tvaru

$$\frac{J(x, y, \alpha') - J(x, y, \alpha)}{\alpha' - \alpha} = \beta. \tag{30'}$$

Jestliže $\alpha' \to \alpha$, t. j. křivka $\Gamma_{\alpha'}$ konverguje ke křivce Γ_α, přejde

[10]) Vzdálenost bodu od čáry se měří podél extrémály protínající danou čáru transversálně.

J-hyperbola v extremálu. Z rovnice (30′) plyne, že podél této extremály jest

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \beta.$$

Methoda integrace Jacobi-Ostrogradského. Se shora uvedených úvah velmi jednoduše lze ustanovit vztah mezi úlohou integrovat Eulerovy rovnice (obyčejné rovnice) a integrovat parciální diferenciální rovnice.

Dokážeme předběžně dvě věty.

Věta II. *Je-li Γ křivka třídy C_1, pak J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky Γ vyhovuje následující parciální diferenciální rovnici:*

$$\frac{\partial J}{\partial x} = H\left(x, y, \frac{\partial J}{\partial y}\right), \tag{31}$$

kde H je funkce proměnných x, y, p definovaná v § 26.

J-vzdálenost je totiž J-délkou oblouku extremály γ, spojující bod A s křivkou Γ a transversální ke Γ. Budiž bod B koncovým bodem oblouku γ, ležícím na křivce Γ. Přejdeme od bodu A k blízkému bodu $A'(x + \mathrm{d}x,\ y + \mathrm{d}y)$. Označíme znakem γ' extremálu $A'B'$, spojující bod B' s křivkou Γ transversální k poslední křivce. Nechť souřadnice koncového bodu B extremály γ, ležícího na Γ, při přechodu k oblouku Γ vzrostou o přírůstky $\mathrm{d}x_0$, $\mathrm{d}y_0$; potom přírůstek J-vzdálenosti při přechodu od A k A' bude

$$\mathrm{d}J = (H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y) - (H_0\,\mathrm{d}x_0 + p_0\,\mathrm{d}y_0).$$

Avšak druhá závorka vzhledem k transversalitě γ ke Γ je rovna nule. Je tudíž

$$\mathrm{d}J = H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y.$$

Z toho je

$$H = \frac{\partial J}{\partial x},\ p = \frac{\partial J}{\partial y}.$$

Bereme-li H jako funkci proměnných x, y, p a zaměníme-li v ní p derivací $\frac{\partial J}{\partial y}$, dostaneme hledanou rovnici

$$\frac{\partial J}{\partial x} = H\left(x, y, \frac{\partial J}{\partial y}\right). \tag{31}$$

Věta 12 (obrácená). *Jestliže $J(x, y)$ je funkce proměnných x, y spojitá spolu se svými parciálními derivacemi a vyhovuje rovnici* (31), *pak pro konstantní K funkce $J(x, y) - K$ vyjadřuje J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky $J(x, y) \doteq K$.*

Označme totiž znakem Γ křivku, vyjádřenou rovnicí $J(x, y) = K$; podle věty 11 J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky Γ, kterou označíme J_1, vyhovuje rovnici (31). Poněvadž J nevystupuje explicitně v rovnici (31), je nutně $J^* = J(x, y) - K$ rovněž integrálem rovnice (31). Na základě geometrického významu $J^*(x, y)$ a podmínek věty máme podél Γ

$$J_1 = J^* = 0.$$

Avšak z theorie parciálních diferenciálních rovnic tvaru (31) je známo, že souhlasí-li integrály podél některé křivky, pak jsou všude identické, takže je $J_1(x, y) = J^*(x, y)$; věta je tím dokázána.

Tuto větu lze dokázat bez použití theorie parciálních diferenciálních rovnic. Je možno na příklad zjistit přímo, že každá čára, protínající transversálně všechny čáry soustavy $J(x, y) = K$, je extremálou. Z toho bude vyplývat, že soustava $J(x, y) = K$ je polem transversál. Zbude dokázat, že J-vzdálenost mezi transversálami $J = K_1$ a $J = K_2$ je právě rovna $K_2 - K_1$.

Rovnice (31) má název Hamiltonova rovnice.

Jacobi po prvé dokázal, že problém integrace rovnice (31) vede k úloze integrovati Eulerovu rovnici a obráceně.

Věta 13. *Známe-li úplný integrál Hamiltonovy rovnice* (31), *lze najíti obecný integrál Eulerovy rovnice* (8), *a obráceně, známe-li obecný integrál rovnice Eulerovy, lze najíti úplný integrál Hamiltonovy rovnice.*

Mysleme si, že jsme našli obecné řešení Eulerovy rovnice, t. j. že jsme nalezli soustavu extremál závislých na dvou parametrech:

$$y = y(x, \alpha, \beta);$$

každým bodem (x, y) v kterémkoli směru lze vésti extremálu této soustavy. Mějme libovolnou křivku Γ třídy C_1. V každém bodě této křivky lze vésti směr transversální ke Γ. Tímto směrem lze vésti extremálu soustavy transversální ke křivce Γ, a tím tedy určit pojem

J-vzdálenosti libovolného bodu (x, y) od Γ. Tato J-vzdálenost vyhovuje Hamiltonově rovnici

$$\frac{\partial J}{\partial x} = H\left(x, y, \frac{\partial J}{\partial y}\right). \tag{32}$$

Protože v rovnici (32) nevystupuje samotná funkce J, nýbrž pouze její derivace, bude pro libovolné konstantní K funkce $J(x, y) + K$ rovněž řešením rovnice (32).

Vyšetřujme nyní jednoparametrovou soustavu Γ_α rovinných křivek, která netvoří pole transversál v žádné části roviny. Označme $J(x, y, \alpha)$ J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky Γ_α. Ježto umíme řešit Eulerovu rovnici, můžeme, jak jsme to již viděli, určit funkci $J(x, y, \alpha)$. Přidáme-li konstantu β, dostaneme řešení $J(x, y, \alpha) + \beta$ rovnice (32) závislé na dvou parametrech (tak zvaný úplný integrál této rovnice). Z podmínky, že Γ_α netvoří pole transversál, plyne, že dvě libovolné konstanty α a β nelze redukovat na jednu.

K provedení důkazu předpokládejme opak. Ježto zřejmě β nezávisí na α, stanou se α a β jenom tehdy jedinou konstantou, když α bude rovněž aditivní konstantou, t. j. když

$$J(x, y, \alpha) = J(x, y) + \alpha.$$

Potom však, jestliže Γ_α a Γ_{α_1} jsou dvě libovolné křivky soustavy, je jejich vzdálenost rovna výrazu (znaky x, y jsou označeny souřadnice libovolného bodu A roviny)

$$J(x, y, \alpha_1) - J(x, y, \alpha) = \alpha_1 - \alpha,$$

t. j. J-vzdálenost Γ_1 od Γ je konstantní a tedy je soustava Γ_α soustavou transversál, což je nemožné.

Nechť obráceně je dán úplný integrál rovnice (32). Tento integrál vzhledem k tomu, že J se v rovnici explicitně nevyskytuje, lze psáti ve tvaru

$$J = J(x, y, \alpha) + \beta.$$

Na základě věty 12 pro dané α vyjadřuje funkce $J(x, y, \alpha) - K$ J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od křivky $J(x, y, \alpha) = K$, kde K je nějaká konstanta. Podle věty 10, položíme-li $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ rovné konstantě, dostaneme extremálu

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta. \tag{33}$$

Tato extremála závisí na dvou parametrech α a β. Tímto způsobem formule (33) dává obecný integrál Eulerovy rovnice.[11])

Dodatek. Jak je známo, nazývá se obecným integrálem parciální diferenciální rovnice prvního řádu integrál rovnice, v jehož vyjádření je obsažena libovolná funkce.

Vyšetřujme J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od libovolné čáry Γ třídy C_1. Funkce $J(x, y)$, která je integrálem Hamiltonovy rovnice, závisí na libovolné čáře Γ, t. j. na libovolné funkci. Tedy podle definice obecného integrálu je $J(x, y)$ obecným integrálem Hamiltonovy rovnice.

Tudíž, známe-li obecný integrál Eulerovy rovnice, můžeme sestrojiti obecný integrál odpovídající rovnice Hamiltonovy.

Příklad 1. Budiž

$$F = \sqrt{1 + y'^2};$$

v tomto případě je

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{1 - p^2},\ p = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Rovnice (32) má tvar

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = 1. \tag{34}$$

Za čáry Γ_α vezměme přímky procházející počátkem souřadnic:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = 0;$$

v takovém případě J-vzdálenost $J(x, y, \alpha)$ bodu $A(x, y)$ od Γ_α bude obyčejnou vzdáleností A od přímky:

$$J(x, y, \alpha) = x \cos\alpha + y \sin\alpha.$$

Podle věty 13 integrál rovnice (34) má tvar

$$J = x \cos\alpha + y \sin\alpha + \beta,$$

kde α a β jsou libovolné konstanty.

---

[11]) Je patrno, že v rovnici (33) nelze libovolné konstanty α, β převést na jedinou libovolnou konstantu; v opačném případě by měl daný integrál rovnice (32) tvar $J(x, y) = \varphi(\alpha) + \beta$, t. j. nebyl by úplným integrálem.

Příklad 2. Budiž

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} \quad \text{(Fermatův princip)};$$

v tomto případě

$$p = \frac{y'}{v\sqrt{1 + y'^2}}, \quad H^2 + p^2 = \frac{1}{[v(x, y)]^2}.$$

Hamiltonova rovnice má tvar

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2}.$$

J-vzdálenost bodu $A(x, y)$ od libovolné křivky Γ vyjadřuje pak optickou vzdálenost A od Γ.

Vyšetříme ještě zvláštní případ, kdy je $v = y$; v tomto případě jsou extremálami úlohy kružnice orthogonální k ose Ox. Za křivky Γ_α vezmeme znovu přímky

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = 0;$$

potom optická vzdálenost $J(x, y, \alpha)$ bodu $A(x, y)$ od křivky Γ_α nabude tvaru

$$J(x, y, \alpha) = \varrho(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha - \varphi),$$

kde ϱ a φ jsou polární souřadnice bodu A. Odtud dostaneme úplný integrál rovnice (31) pro $v = y$

$$J = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\alpha_1 - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) + \beta,$$

kde α_1 a β jsou libovolné konstanty.

Případ separace proměnných. Dokážeme teď tuto větu:

Věta 14. *Jestliže rovnici* (32) *lze uvést na tvar*

$$\Phi\left(x, \frac{\partial J}{\partial x}\right) + \overline{\Phi}\left(y, \frac{\partial J}{\partial y}\right) = 0,$$

pak rovnice Hamiltonovu a Eulerovu lze řešit kvadraturami.

Položíme totiž

$$\Phi\left(x, \frac{\partial J}{\partial x}\right) = \alpha, \quad \overline{\Phi}\left(y, \frac{\partial J}{\partial y}\right) = -\alpha,$$

kde α je libovolná konstanta. Řešíme-li každou z těchto rovnic vzhledem k $\dfrac{\partial J}{\partial x}$ resp. $\dfrac{\partial J}{\partial y}$, obdržíme

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \Phi_1(x, \alpha), \quad \frac{\partial J}{\partial y} = \overline{\Phi}_1(y, \alpha).$$

Z toho ihned dostaneme úplný integrál rovnice (32)

$$J = \int \Phi_1(x, \alpha)\,\mathrm{d}x + \int \overline{\Phi}_1(y, \alpha)\,\mathrm{d}y.$$

Použijeme-li věty 10, dostaneme obecný integrál odpovídající Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial \Phi_1(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\partial \overline{\Phi}_1(y, \alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}y = \beta.$$

Integrování rovnice geodetické čáry. Nechť má element čáry na ploše tvar

$$\mathrm{d}s^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

Rovnice (32) nabude tvaru

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y);$$

J je délka geodetické čáry, t. j.

$$J = \int \mathrm{d}s = \int \sqrt{[\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}.$$

Klademe

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 = \varphi_1(x) - \alpha,\quad \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = \alpha + \varphi_2(y);$$

odtud dostaneme úplný integrál rovnice (32)

$$J = \int \sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}\,\mathrm{d}x + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}\,\mathrm{d}y. \tag{35}$$

Rovnice geodetických čar nabude tvaru

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}} = \beta. \tag{36}$$

Tyto vzorce nalezl Liouville.

Lze tedy i rovnice geodetické čáry (36) a výraz (35) pro její délku vyjádřit kvadraturami.

Na Liouvilleův případ se převede také integrování rovnice geodetických čar, má-li element délky tvar

$$\mathrm{d}s^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(y)][\psi_1(x)\,\mathrm{d}x^2 + \psi_2(y)\,\mathrm{d}y^2].$$

Klademe-li totiž

$$\psi_1(x)\,\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}u^2,\quad \psi_2(y)\,\mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}v^2$$

a vyjádříme-li x pomocí u, y pomocí v, obdržíme

$$\mathrm{d}s^2 = \{\varphi_1[x(u)] + \varphi_2[y(v)]\}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2).$$

Dospěli jsme k případu Liouvilleově. Délka geodetické čáry je vyjádřena integrálem

$$\begin{aligned} J &= \int \sqrt{\varphi_1[x(u)] - \alpha}\,\mathrm{d}u + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2[y(v)]}\,\mathrm{d}v = \\ &= \int \sqrt{\varphi_1(x) - \alpha}\,\sqrt{\psi_1(x)}\,\mathrm{d}x + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2(y)}\,\sqrt{\psi_2(y)}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Rovnice geodetické čáry $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta$ nabude tvaru

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)-\alpha}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{\varphi_2(y)}{\alpha+\varphi_2(y)}}\,\mathrm{d}y = \beta.$$

Příklad. Geodetické čáry na elipsoidu. Nechť a_1, a_2, a_3 jsou různá libovolná reálná čísla $a_1 > a_2 > a_3 > 0$. Vyšetřujme systém ploch S_k druhého stupně

$$\frac{x^2}{k-a_1} + \frac{y^2}{k-a_2} + \frac{z^2}{k-a_3} = 1. \tag{37}$$

Je-li $k > a_1$, je S_k elipsoid; pro $a_1 > k > a_2$ je S_k jednodílný hyperboloid; pro $a_2 > k > a_3$ dvojdílný hyperboloid; pro k rovné jednomu z čísel a_1, a_2, a_3 degenerují plochy S_k ve dvojici identických rovin.

Je-li $A(x, y, z)$ pevný bod, pak rovnice (37) určuje takovou hodnotu k, že pro ni S_k prochází bodem A. Rovnice (37) je rovnice třetího řádu vzhledem ke k:

$$P(k) = (k-a_1)(k-a_2)(k-a_3) - \{x^2(k-a_2)(k-a_3) +$$
$$+ y^2(k-a_3)(k-a_1) + z^2(k-a_1)(k-a_2)\} = 0.$$

Mění-li se k od $+\infty$ do a_3, změní mnohočlen $P(k)$, jak si snadno ověříme, třikráte znaménko tak, že kořeny rovnice $P(k) = 0$ leží v pořadí:

$$k_1 > a_1 > k_2 > a_2 > k_3 > a_3,$$

při čemž se předpokládá, že je $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Z toho plyne, že každým bodem A, který neleží na žádné ze souřadnicových rovin, procházejí tři plochy: S_{k_1}, S_{k_2}, S_{k_3} — elipsoid, jednodílný hyperboloid a dvojdílný hyperboloid.[12]) Přitom můžeme vyjádřit souřadnice x, y, z bodu A pomocí k_1, k_2, k_3. Je možno totiž napsat

$$k_1k_2k_3 = a_1a_2a_3\left(1 + \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3}\right),$$

$$k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 =$$
$$= a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 + x^2(a_2 + a_3) + y^2(a_3 + a_1) + z^2(a_1 + a_2),$$
$$k_1 + k_2 + k_3 = a_1 + a_2 + a_3 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Odtud najdeme

$$x^2 = \frac{(k_1-a_1)(k_2-a_1)(k_3-a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

a analogické výrazy pro y^2 a z^2, které dostaneme z uvedeného výrazu cyklickou

[12]) Leží-li bod A na jedné za souřadnicových rovin, pak pro $x = 0$ je $k_1 = a_1$; pro $y = 0$ je $k_2 = a_2$, atd. Odpovídající plocha degeneruje při tom ve dvojici splynuvších rovin, totožných se souřadnicovou rovinou, v níž leží bod A.

záměnou. Pak není těžké vyjádřiti element oblouku ds pomocí dk_1, dk_2, dk_3:

$$ds^2 = \frac{1}{4}\, \mathbf{S}\, \frac{(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)}{(k_1 - a_1)(k_1 - a_2)(k_1 - a_3)}\, dk_1^2.$$

Znak $\mathbf{S}$ označuje sumu, v níž se z prvního členu uvedeného za znakem $\mathbf{S}$ ostatní dva dostanou cyklickou záměnou.

Lze tedy k_1, k_2, k_3 chápati jako soustavu křivočarých souřadnic v prostoru. Tyto souřadnice se nazývají eliptickými. Souřadnicové plochy, jak lze nahlédnouti z výrazu pro ds^2, se protínají orthogonálně.

Klademe-li $k_1 = \text{const}$, obdržíme elipsoid S_{k_1}; k_2, k_3 jsou křivočarými souřadnicemi na tomto elipsoidu. Jeho rovnici lze napsat takto:

$$\frac{x^2}{k_1 - a_1} + \frac{y^2}{k_1 - a_2} + \frac{z^2}{k_1 - a_3} = 1 \quad (k_1 > a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 > 0);$$

element oblouku ds křivky na elipsoidu je vyjádřen výrazem

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)}\, dk_2^2 + \frac{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)}\, dk_3^2\right].$$

Klademe-li

$$\varphi_1 = k_2, \quad \varphi_2 = -k_3,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\, \frac{k_2 - k_1}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)},$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{4}\, \frac{k_3 - k_1}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)},$$

dostaneme

$$ds^2 = (\varphi_1 + \varphi_2)(\psi_1\, dk_2^2 + \psi_2\, dk_3^2).$$

Na základě předcházejícího výsledku je délka geodetické čáry na elipsoidu vyjádřena integrálem

$$J = \int \sqrt{\varphi_1 - \alpha}\, \sqrt{\psi_1}\, dk_2 + \int \sqrt{\alpha + \varphi_2}\, \sqrt{\psi_2}\, dk_3,$$

neboli

$$J = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{(k_2 - \alpha)(k_2 - k_1)}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)}}\, dk_2 + {}$$
$$+ \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{(\alpha - k_3)(k_1 - k_3)}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)}}\, dk_3.$$

Rovnice geodetické čáry má tvar (který našel Jacobi)

$$-\frac{1}{4} \int \sqrt{\frac{k_2 - k_1}{(k_2 - a_1)(k_2 - a_2)(k_2 - a_3)(k_2 - \alpha)}}\, dk_2 + {}$$
$$+ \frac{1}{4} \int \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{(k_3 - a_1)(k_3 - a_2)(k_3 - a_3)(k_3 - \alpha)}}\, dk_3 = \beta = \text{const.}$$

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY SILNÉHO A SLABÉHO EXTRÉMU

§ 31. Některé pojmy theorie pole.

Theorie pole, již jsme rozvinuli v §§ 26—28, umožňuje nám v této kapitole rozvinouti theorii postačujících podmínek extrému. Byly nalezeny Jacobim pro případ slabého extrému a Weierstrassem pro případ silného extrému.

Zachováme-li označení předcházejících kapitol, budeme předpokládati, že je dán funkcionál

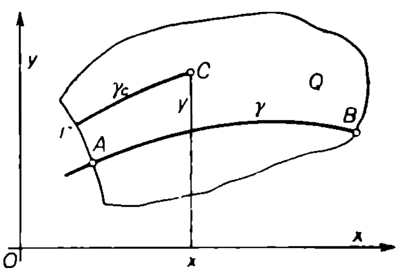
$$J(\gamma) = \int_{\gamma} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

dále dva body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$ a extremála γ

$$y = y(x) \tag{2}$$

integrálu (1) spojující body A a B. Předpokládáme, že lze extremálu (2) obklopit vlastním polem extremál $\{\gamma\}$, pokrývajícím některou oblast Q, a že podél extremál pole je $F(x, y, y') \neq 0$ (viz. str. 164). Každým bodem $C(x, y)$ této oblasti lze vést extremálu γ_C našeho pole: $y = y_C(x)$. Označíme znakem $u(C) = u(x, y)$ směrnici tečny ke křivce γ_C v bodě C:

$$u(C) = u(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y_o(x). \tag{3}$$



Obr. 31.

Podle podmínek, jimž vyhovuje pole $\{\gamma\}$, je $u(x, y)$ definována v celé oblasti Q, při čemž v této oblasti je spojitou funkcí spolu se svými parciálními derivacemi. Funkce $u = u(x, y)$ hraje v theorii pole podstatnou úlohu; nazývá se *směrovou funkcí pole* $\{\gamma\}$. Hodnotu $u(x, y)$ v bodě $C(x, y)$ nazveme *směrem pole* v bodě C. Pro body výchozí extremály (2) je $u[x, y(x)] = y'(x)$. Veďme bodem $A(x_0, y_0)$ transversálu Γ našeho pole.

Na základě podmínky $F \neq 0$ transversála pole protíná všechny extremály pole v úhlu různém od nuly. Vezměme jakýkoli bod $C(x, y)$ pole. Jím prochází extremála γ_C pole. J-délka úseku γ_C mezi Γ a C (obr. 31), neboli jinak, J-vzdálenost C od Γ je funkce souřadnic (x, y) bodu C, definovaná v celé oblasti Q; tuto funkci označíme

$$J(C) = J(x, y).$$

Podle vzorců (5) § 26 (viz rovněž str. 163) máme pro libovolné posunutí dx, dy bodu $C(x, y)$:

$$dJ(x, y) = H[x, y, u(x, y)]\, dx + p[x, y, u(x, y)]\, dy. \tag{4}$$

(Píšeme zde $u(x, y)$ místo y'; členy této formule odpovídající koncovému bodu úseku extremály γ_C, ležícímu na Γ, jsou rovny nule vzhledem k transversalitě γ_C a Γ.) Ježto je

$$H(x, y, u) = F(x, y, u) - uF_{y'}(x, y, u)$$

a

$$p(x, y, u) = F_{y'}(x, y, u),$$

je možno (4) napsati v takovémto tvaru:

$$dJ(x, y) = \left\{F[x, y, u(x, y)] + \left[\frac{dy}{dx} - u(x, y)\right] F_{y'}[x, y, u(x, y)]\right\} dx. \tag{5}$$

Avšak pravá strana rovností (4) a (5) je úplný diferenciál; proto platí tato věta:

Věta I (Hilbertova). *Integrál*

$$\int \left\{F(x, y, u) + \left[\frac{dy}{dx} - u(x, y)\right] F_{y'}(x, y, u)\right\} dx \tag{6}$$

podél jakékoli křivky třídy C_1, ležící v Q, závisí jenom na koncových bodech křivky $\bar{\gamma}$, avšak nezávisí na volbě křivky spojující tyto koncové body.[1])

Napříště, podobně jako v některých předešlých případech, budeme označovati znakem y' jenom směrnici tečny výchozí extremály, kdežto pro všechny ostatní křivky budeme označovat směrnice jako $\frac{dy}{dx}$.

---

[1]) Protože je $J(x, y)$ J-vzdáleností bodu $C(x, y)$ od transversály Γ, je $dJ(x, y)$ rozdílem vzdáleností dvou nekonečně blízkých bodů C od Γ a integrál (6) je roven rozdílu J-vzdáleností koncových bodů křivky γ od transversály Γ.

Jestliže vezmeme za křivku $\bar{\gamma}$ výchozí extremálu γ, pak je

$$u(x, y) = y'(x) = \frac{dy}{dx},$$

a tudíž výraz za integračním znamením v (6) se změní v $F(x, y, y')$ a sám integrál přejde v

$$\int_\gamma F(x, y, y')\,dx = J(\gamma).^{2)} \tag{1}$$

Pro libovolnou křivku $\bar{\gamma}$ třídy C_1, ležící v Q a spojující body A a B, platí na základě věty 1 tato rovnost:

$$\int_\gamma F(x, y, y')\,dx = \int_{\bar{\gamma}} \left[F(x, y, u) + \left(\frac{dy}{dx} - u\right) F_{y'}(x, y, u)\right] dx. \tag{7}$$

Rozšíříme větu 1 na případ funkcionálu I. Budiž γ_0 extremálou integrálu I. Zůstaneme u geometrických konstrukcí, uvedených při důkazu věty 1 pro případ funkcionálu J. Označíme-li znakem γ extremálu pole $\{\gamma\}$ obklopujícího extremálu γ_0 procházející bodem $M(x, y)$, znaky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ směrové kosiny tečny ke křivce γ v bodě M a jako dříve znakem $I(x, y)$ I-vzdálenost bodu $M(x, y)$ od transversály pole Γ_1 (procházející koncovým bodem γ_0), dostaneme (viz § 24):

$$dI(x, y) = F_{x'}[x, y, u(x, y), v(x, y)]\,dx + F_{y'}[x, y, u(x, y), v(x, y)]\,dy =$$
$$= H\,dx + p\,dy.$$

Bude tedy v probíraném případě výraz $H\,dx + p\,dy$ rovněž totálním diferenciálem. Z toho soudíme, že dosadíme-li ve shora uvedené formulaci věty 1 místo H a p výrazy $F_{x'}$ resp. $F_{y'}$, bude věta platiti pro funkcionály I.

Funkce E (Weierstrassova). Funkci čtyř proměnných x, y, ξ, η:

$$\mathbf{E}(x, y, \xi, \eta) = F(x, y, \eta) - F(x, y, \xi) - (\eta - \xi)F_{y'}(x, y, \xi) \tag{8}$$

nazveme Weierstrassovou funkcí (pro funkcionál J).

Použijeme-li věty 1, ukáže se, že je možno najíti velmi jednoduše přírůstek funkcionálu $J(\gamma)$ pomocí Weierstrassovy funkce.

Budiž γ extremála spojující body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$. Nechť mimo to lze extremálu γ obklopiti polem extremál $\{\gamma\}$ pokrývajícím oblast Q.

---

[2]) To znamená, že rozdíl J-vzdáleností koncových bodů extremály γ od transversály Γ (viz předcházející poznámku) je roven J-délce γ.

V takovém případě na základě věty 1, ať je čára $\bar{\gamma}$ třídy C_1 spojující body A a B a ležící v oblasti Q jakákoli, máme

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\bar{\gamma}} \left\{F(x, y, u) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - u\right) F_{y'}(x, y, u)\right\} \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Avšak je

$$J(\bar{\gamma}) = \int_{\bar{\gamma}} F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x.$$

Je tedy

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) =$$

$$= \int_{\bar{\gamma}} \left\{F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - F(x, y, u) - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - u\right) F_{y'}(x, y, u)\right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}\left(x, y, u, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x. \tag{9}$$

V tomto výrazu $u = u(x, y)$ je směr pole v bodě (x, y) křivky $\bar{\gamma}$ a $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ je směrnice tečny ke křivce $\bar{\gamma}$ v tomtéž bodě.

Budiž

$$y = \bar{y}(x)$$

rovnice křivky $\bar{\gamma}$. Ve vzorci (9) můžeme přejít od křivočarých integrálů k obyčejným (zaměníme-li $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ výrazem $\bar{y}'(x)$). Potom

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{E}\{x, \bar{y}(x), u[x, \bar{y}(x)], \bar{y}'(x)\}\,\mathrm{d}x. \tag{9'}$$

Z formule (9′) dostaneme přímo následující výsledek: *lze-li extremálu γ obklopiti polem extremál, pak k tomu, aby γ dávala silný extrém, je nutné a stačí, aby každá čára $\bar{\gamma}$, $y = \bar{y}(x)$, třídy C_1, ležící v poli a spojující koncové body γ, splňovala vztah*

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{E}(x, \bar{y}, u, \bar{y}')\,\mathrm{d}x \geqq 0 \text{ resp. } \leqq 0. \tag{10}$$

Uvedené kriterium pro silný extrém je samo o sobě pro svoji pracnost prakticky málo vhodné, avšak z tohoto kriteria, jak uvidíme dále, se jednoduše odvodí nové nutné podmínky pro silné minimum a také se dostanou prakticky cenné postačující podmínky.

Geometrický smysl funkce $\mathbf{E}(x, y, u, \bar{u})$. Vraťme se k poli $\{\gamma\}$ a k funkci $J(x, y)$. Čáry $J(x, y) = C$ (geometrická místa bodů stejně vzdálených od transversály Γ) jsou transversálami pole (věta 3, § 27).

Mějme dány body $M(x, y)$ a $M'(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$, které leží na blízkých transversálách Γ_1 a Γ_2. Při přechodu od M k M' (od Γ_1 k Γ_2) vzroste J o přírůstek:

$$\mathrm{d}J = H\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y = [F(x, y, \bar{u}) - (\bar{u} - u)F_{y'}(x, y, u)]\,\mathrm{d}x,$$

kde $\bar{u}$ je směr $\overline{MM'}$ a $u = u(x, y)$.

Přírůstek $\mathrm{d}J$ je roven J-délce nekonečně malého úseku extremály pole mezi Γ_1 a Γ_2. Na druhé straně má úsečka $\overline{MM'}$ J-délku $F(x, y, \bar{u})\,\mathrm{d}x$.

Rozdíl $F(x, y, \bar{u})\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}J = \mathbf{E}(x, y, u, \bar{u})\,\mathrm{d}x$ nám udává, o co je větší J-délka elementu $\overline{MM'}$ než J-vzdálenost mezi transversálami procházejícími body M a M'.

Udává tedy $\int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}(x, y, u, \bar{u})\,\mathrm{d}x$, o co je větší J-délka křivky $\bar{\gamma}$ než J-vzdálenost mezi transversálami procházejícími koncovými body $\bar{\gamma}$.

Funkce E pro funkcionál I. V případě funkcionálu I se funkcí Weierstrassovou nazývá funkce šesti proměnných $x, y, \xi, \eta, \bar{\xi}, \bar{\eta}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(x, y, \xi, \eta, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = {} & \bar{\xi}[F_{x'}(x, y, \bar{\xi}, \bar{\eta}) - F_{x'}(x, y, \xi, \eta)] + \\ & + \bar{\eta}[F_{y'}(x, y, \bar{\xi}, \bar{\eta}) - F_{y'}(x, y, \xi, \eta)].\end{aligned} \tag{11}$$

Při zachování označení, která jsou analogická předcházejícím, máme podle věty 1

$$\int_{\gamma_0} F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\bar{\gamma}} F_{x'}[x, y, u(x, y), v(x, y)]\,\mathrm{d}x + F_{y'}[x, y, u(x, y), v(x, y)]\,\mathrm{d}y.$$

Označíme-li $\mathrm{d}s$ element oblouku čáry γ a $\bar{u}(x, y)$ a $\bar{v}(x, y)$ směrové kosiny ke křivce $\bar{\gamma}$ v bodě (x, y):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \bar{u}(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \bar{v}(x, y),$$

máme

$$\int_{\gamma_0} F\,\mathrm{d}x = \int_{\bar{\gamma}} [F_{x'}(x, y, u, v)\bar{u} + F_{y'}(x, y, u, v)\bar{v}]\,\mathrm{d}s.$$

Odtud, vezmeme-li za parametr délku oblouku, dostaneme

$$I(\bar{\gamma}) - I(\gamma_0) =$$

$$= \int_{\bar{\gamma}} \{F(x, y, \bar{u}, \bar{v}) - \bar{u}F_{x'}(x, y, u, v) - \bar{v}F_{y'}(x, y, u, v)\} \, ds.$$

Použijeme-li podmínek homogenity, lze funkci F vyjádřiti takto:

$$F(x, y, \bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}F_{x'}(x, y, \bar{u}, \bar{v}) + \bar{v}F_{y'}(x, y, \bar{u}, \bar{v}).$$

Dosadíme-li tento výraz pro F za integrační znamení a zavedeme-li funkci $\mathbf{E}_1$, dostaneme nakonec

$$I(\bar{\gamma}) - I(\gamma_0) = \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}_1(x, y, u, v, \bar{u}, \bar{v}) \, ds. \tag{12}$$

To je obdoba formule (9′) pro funkcionál I.

Z formule (12) plyne, že v případě funkcionálu I nutná a postačující podmínka pro minimum (10) přejde v podmínku

$$\int_{\gamma_0} \mathbf{E}_1(x, y, u, v, \bar{u}, \bar{v}) \, ds \geqq 0. \tag{12′}$$

§ 32. Nutná podmínka silného extrému.

Nechť extremála γ_0 spojuje body A a B. Opíráme-li se o úvahy předcházejícího paragrafu, stanovíme novou nutnou podmínku, pocházející od Weierstrassa, k tomu, aby γ_0 realisovala silné minimum.

Věta 2. *K tomu, aby extremála γ_0 realisovala silné minimum funkcionálu J, je nutné, aby podél γ_0 pro jakékoli hodnoty η bylo vyhověno nerovnosti*

$$\mathbf{E}(x, y, y', \eta) \geqq 0.^{3)} \tag{13}$$

Budeme předpokládati opak. Nechť v některém bodě $M_1(x, y)$ extremály γ_0 a pro některou hodnotu $\bar{\eta}$ platí obrácená nerovnost:

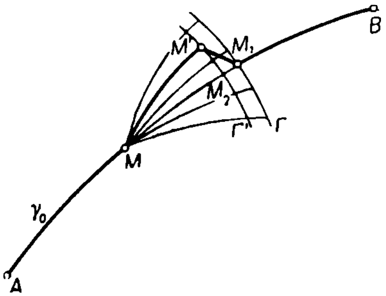
$$\mathbf{E}(x, y, y', \bar{\eta}) < 0. \tag{14}$$

Můžeme předpokládat, že bod M_1 je různý od koncových bodů A a B extremály γ_0; v opačném případě na základě spojitosti funkce $\mathbf{E}$ by bylo možno zaměnit bod M_1 blízkým bodem extremály, který

---

[3]) Tato nerovnost musí být splněna vzhledem k podmínkám věty „podél“ γ_0, t. j. v libovolném bodě (x, y) křivky γ_0 pro hodnotu y' rovnou směrnici tečny ke γ_0 vedené bodem (x, y) a pro libovolné η.

je již různý od koncových bodů A, B a který by jako dříve splňoval nerovnost (14). Analogicky můžeme předpokládat, že směr o směrnici $\bar{\eta}$ není směrem tečným nebo transversálním k naší extremále v bodě γ_0. Zvolíme na extremále γ_0 bod M ležící mezi M_1 a A takový, že oblouk $\overset{\frown}{MM_1}$ extremály γ_0 neobsahuje dvojici konjugovaných bodů (obr. 32). V takovém případě můžeme konstruovati pole extremál $\{\gamma\}$ se středem v bodě M, obsahující oblouk $\overset{\frown}{MM_1}$ extremály γ_0. Vedeme transversály Γ' a Γ pole $\{\gamma\}$, protínající γ_0 v bodech M_2 a M_1, kde M_2 leží mezi M a M_1. Dále z bodu M_1 vedeme paprsek M_1M' o směrnici $\bar{\eta}$ do bodu, v němž se protnou s transversálou Γ' v bodě M'. Jestliže body M_1 a M_2, neboli, což je totéž, čáry Γ' a Γ jsou dostatečně blízké, pak konstrukce je možná a J-délka úsečky $M'M_1$ je menší než J-vzdálenost mezi transversálami Γ a Γ', t. j. J-délka $M'M_1$ je menší než J-délka



Obr. 32.

oblouku M_1M_2 extremály γ_0. To vyplývá z geometrické definice funkce **E** a z podmínky $\mathbf{E} < 0$ (viz § 31, str. 198). Spojíme nyní bod M' s bodem M extremálou $\overset{\frown}{MM'}$ pole $\{\gamma\}$. J-délky extremálních oblouků $\overset{\frown}{MM'}$ a $\overset{\frown}{MM_2}$ jsou si rovny (ježto to jsou dvě extremály centrálního pole, jejichž koncové body M' a M_2 leží na jedné transversále Γ'). Z toho plyne: lomená čára $MM'M_1$ skládající se z oblouku $\overset{\frown}{MM'}$ a úsečky $\overline{M'M_1}$ má menší J-délku než oblouk $\overset{\frown}{MM_1}$ extremály γ_0. Zaměníme-li v γ_0 oblouk $\overset{\frown}{MM_1}$ lomeným obloukem $MM'M_1$, dostaneme křivku spojující tytéž body A a B, jejichž J-délka je menší než J-délka γ_0.

Tato křivka nepatří k třídě přípustných čar, ježto má tři úhlové body. Avšak na této křivce je hodnota funkcionálu J menší než jeho hodnota J_0 na původním oblouku extremály. Tuto křivku je možno „zaokrouhliti“ tím, že ji zaměníme křivkou třídy C_1, která s ní souhlasí všude, až na intervaly obklopující tři body lomu. Tyto intervaly lze učiniti tak malými, že rozdíl hodnot J pro lomenou křivku i „zaokrouhlenou“ křivku třídy C_1 bude jakkoli malý. Tak je možno dostati křivku třídy C_1, pro niž hodnota J bude jako dříve menší než J_0. Dojdeme ke sporu s podmínkou věty, a tedy nerovnost (14) nemůže platit. Tím je věta dokázána.

Je zřejmé, že pro případ maxima je třeba nerovnost (13) zaměniti nerovností obrácenou.

Zcela analogicky lze dokázati, že pro případ extremály γ_0 funkcionálu I spočívá nutná podmínka minima I v tom, že podél γ_0 pro libovolné Θ platí vztah:

$$\mathbf{E}_1(x, y, u, v, \cos\Theta, \sin\Theta) \geqq 0.$$

§ 33. Postačující podmínky silného extrému.

Přejdeme k odvození postačujících podmínek pro silné minimum. Dokážeme tuto základní větu.

Věta 3 (Weierstrassova). *K tomu, aby extremála γ spojující body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$ vedla k minimu J-délek křivek (třídy C_1), spojujících body A a B stačí, aby:*

1) *γ bylo možno obklopiti vlastním polem extremál $\{\gamma\}$;*

2) *existovalo okolí extremály γ, v jehož každém bodě (x, y) by pro libovolnou hodnotu η platila nerovnost*

$$\mathbf{E}[x, y, u(x, y), \eta] \geqq 0, \tag{15}$$

kde $u(x, y)$ je směrová funkce pole.

Vskutku pro dostatečně malé ε každá křivka $\bar{\gamma}$ ze třídy přípustných čar, náležející do ε-okolí nultého řádu čáry γ, bude náležeti do oblasti pokryté polem $\{\gamma\}$. Tudíž podle formule (9') pro $\bar{\gamma}$ máme

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) = \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}\left(x, y, u, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x.$$

Avšak podle druhé podmínky věty pro ε dostatečně malé podél $\bar{\gamma}$ je

$$\mathbf{E}\left(x, y, u, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \geqq 0.$$

Existuje tedy takové $\varepsilon > 0$, že pro libovolnou křivku $\bar{\gamma}$ třídy přípustných křivek, patřících do ε-okolí nultého řádu extremály γ, máme

$$J(\bar{\gamma}) \geqq J(\gamma).$$

Tím je věta úplně dokázána.

Zjednodušená postačující podmínka. Jestliže je možno danou extremálu γ obklopit polem extremál, pak otázka, zda bude dávat extremála minimum, se tím převede na úlohu určit znaménko funkce **E**. Vzhledem k tomu, že funkce **E** má libovolně složitý tvar, zaměňují se často Weierstrassovy podmínky podmínkou hrubší, ale jednodušší.

Rozvedeme-li rozdíl $F(x, y, \eta) - F(x, y, \xi)$ v Taylorovu řadu podle mocnin $(\eta - \xi)$ s druhým zbytkovým členem, vyjádříme funkci Weierstrassovu ve tvaru

$$\mathbf{E}(x, y, \xi, \eta) = \tfrac{1}{2}(\eta - \xi)^2 F_{y'y'}(x, y, \bar{\eta}), \tag{16}$$

kde $\bar{\eta}$ leží mezi ξ a η. Upozorňujeme, že pro kladnost funkce **E** stačí, aby pro jakékoli $\bar{\eta}$ platila nerovnost

$$F_{y'y'}(x, y, \bar{\eta}) \geqq 0.$$

Odtud dostaneme následující zjednodušené kriterium pro existenci minima: *K tomu, aby extremála γ spojující body A a B dávala silné minimum J-délek křivek spojujících body A a B, stačí, aby bylo možno extremálu γ obklopiti polem extremál, v jehož každém bodě (x, y) pro jakékoli $\bar{\eta}$*

$$F_{y'y'}(x, y, \bar{\eta}) \geqq 0.$$

Poznámka. Nutná podmínka Weierstrassova (13) zejména podél extremály pro jakékoli η

$$\mathbf{E}(x, y, y', \eta) \geqq 0$$

po rozložení funkce **E** podle vzorce (16) nabývá tohoto tvaru:

$$F_{y'y'}(x, y, \bar{\eta}) \geqq 0,$$

kde $\bar{\eta}$ leží mezi y' a η. Pro $\eta \to y'$ je $\bar{\eta} \to y'$; proto poslední nerovnost přejde v tuto nerovnost:

$$F_{y'y'}(x, y, y') \geqq 0.$$

A to je nám již známá podmínka Legendreova (viz. str. 69).

Postačující podmínky silného minima funkcionálu *I*. Tyto podmínky jsou zcela analogické podmínkám formulovaným na začátku paragrafu pro funkcionál J, zaměníme-li v nich nerovnost (15) nerovností (pro jakékoli Θ)

$$\mathbf{E}_1(x, y, u, v, \cos\Theta, \sin\Theta) \geqq 0.$$

§ 34. Postačující podmínky slabého extrému.

Ze shora rozvedené theorie lze odvoditi také postačující podmínky pro slabé minimum.

Věta 4 (Jacobiova). *K tomu, aby křivka γ: $y = y(x)$ udílela slabé minimum integrálu $J(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ mezi křivkami, které mají s ní společné koncové body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, stačí:*

1) *aby γ byla extremálou;*

2) *aby podél γ platila zesílená Legendreova podmínka $F_{y'y'}(x, y, y') > 0$;*

3) *aby interval $[x_0, x_1]$ neobsahoval hodnoty konjugované s x_0* (t. j. aby bylo $\Delta(x_0, x) \neq 0$ pro $x_0 < x \leqq x_1$).

Především upozorňujeme, že zde žádáme splnění některých podmínek pouze podél samotné křivky. Dále jsou tyto postačující podmínky velmi blízké nutným podmínkám Legendreovým a Jacobiovým; důležitým zůstává jen případ, kdy $F_{y'y'}$ je rovno nule podél extremály a když samotné x_1 je hodnota konjugovaná s x_0.

Důkaz. Z podmínek 2) a 3) plyne možnost sestrojení pole extremál $\{\gamma\}$ obklopujícího oblouk γ. Existuje takové číslo $\varepsilon_1 > 0$, že každá oblast definovaná nerovnostmi $x_0 \leqq x \leqq x_1$, $y(x) - \varepsilon_1 \leqq y \leqq y(x) + \varepsilon_1$ je pokryta polem extremál.

V oblasti Q je definována funkce $u(x, y)$, která je směrem pole a která podél γ souhlasí s $y'(x)$: $u[x, y)] = y'(x)$. Podle předpokladu (podmínka 2) jest:

$$F_{y'y'}[x, y(x), y'(x)] > 0. \tag{17}$$

Vzhledem ke spojitosti $F_{y'y'}$ existuje takové číslo $\varepsilon_2 > 0$, že pro všechna $\bar{y}$ a k vyhovující nerovnostem

$$|\bar{y} - y(x)| \leqq \varepsilon_2, \quad |k - y'(x)| \leqq \varepsilon_2, \tag{18}$$

jest:

$$F_{y'y'}(x, \bar{y}, k) > 0. \tag{19}$$

Dále vzhledem k spojitosti funkce u existuje takové číslo $\varepsilon_3 > 0$, že pro $|\bar{y} - y(x)| \leqq \varepsilon_3$ je

$$|u(x, \bar{y}) - u[x, y(x)]| = |u(x, \bar{y}) - y'(x)| \leqq \varepsilon_2. \tag{20}$$

Označíme znakem ε nejmenší ze tří čísel ε_1, ε_2, ε_3; podle definice ε_1 a ε je oblast $\overline{Q}$, definovaná nerovnostmi

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \; y(x) - \varepsilon \leqq y \leqq y(x) + \varepsilon,$$

pokryta polem extremál $\{\gamma\}$.

Budiž nyní $\bar{\gamma}$ určené vztahem $y = \bar{y}(x)$ libovolná křivka spojující A a B a ležící v ε-okolí prvního řádu křivky γ, t. j.

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leqq \varepsilon, \; |\bar{y}'(x) - y'(x)| \leqq \varepsilon. \tag{21}$$

Tato křivka leží v oblasti $\overline{Q}$ pokryté polem extremál $\{\gamma\}$.

Proto na základě výsledků předcházejících paragrafů je

$$\begin{aligned} J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) &= \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{E}(x, \bar{y}, u(x, \bar{y}), \bar{y}'] \,\mathrm{d}x = \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{\bar{\gamma}} [u(x, \bar{y}) - \bar{y}'(x)]^2 F_{y'y'}(x, \bar{y}, k) \,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{22}$$

kde k leží mezi $\bar{y}'(x)$ a $u(x, \bar{y})$.

Vzhledem k nerovnostem (21) a (20) máme, že $\bar{y}'(x)$ a $u(x, \bar{y})$ leží současně mezi $y'(x) - \varepsilon_2$ a $y'(x) + \varepsilon_2$ a tedy leží k v těchže mezích:

$$|k - y'(x)| \leqq \varepsilon_2; \tag{23}$$

z (18), (19), (21) a (23) plyne

$$F_{y'y'}(x, \bar{y}, k) < 0,$$

a tedy (viz (22))

$$J(\bar{\gamma}) \geqq J(\gamma).$$

Tím je věta dokázána.

Uvedené podmínky nestačí ovšem pro silné minimum.

Zcela analogický charakter mají postačující podmínky slabého minima funkcionálu I, zaměníme-li podmínku 2) podmínkou $F_1 > 0$.

Porovnáme-li nutné podmínky s podmínkami postačujícími, vidíme, že nutné podmínky — podmínka Jacobiova a Weierstrassova — kladou omezení na funkci $\mathbf{E}$ v bodech studované extremály; mezi postačujícími podmínkami zesílená podmínka Jacobiova rovněž klade omezení na funkci $\mathbf{E}$ v bodech samotné extremály, a co se týče podmínky Weierstrassovy, pak k jejímu aplikování je třeba znáti průběh funkce $\mathbf{E}$ v některém určitém okolí studované extremály. Odtud přirozeně vzniká otázka, zda nelze tuto první podmínku nahraditi zesílenou nutnou podmínkou Weierstrassovou:

$$\mathbf{E}(x, y, y', k) > 0$$

podél extremály.

Uvedeme příklad, který ukáže, že připomenuté oslabení v nutných podmínkách provést nelze. Tento příklad rovněž ukáže nedostatečnost zeslabené podmínky, jestliže navíc předpokládáme, že podél extremály je $\mathbf{E}(x, y, y', k) > 0$.[4])

Příklad. Položíme úlohu: najíti minimum funkcionálu

$$J = \int_0^1 (y'^2 - 4yy'^3 + 2xy'^4)\, dx,$$

tvoří-li třídu přípustných čar čáry třídy C_1 spojující body $A(0, 0)$ a $B(1, 0)$.

Eulerova rovnice má tvar: $y''(12xy'^2 - 12yy' + 2) = 0$ neboli $y'' = 0$. To znamená, že přímky $y = ax + b$ jsou extremálami pro J. Extremála γ_0 spojující body A, B, je úsečka $[0, 1]$ osy Ox a tato extremála může zřejmě být obklopena polem extremál (soustava přímek rovnoběžných s osou Ox). Mimo to máme

$$\mathbf{E}(x, y, y', \eta) = (\eta - y')^2\{1 - 8yy' + 6xy'^2 - 4\eta(y - xy') + 2x\eta^2\}.$$

Podél γ_0 dostaneme

$$F_{y'y'} = 2 > 0,$$
$$\mathbf{E} = \eta^2(1 - 2x\eta^2) > 0 \ \ (\text{pro } \eta \neq 0).$$

Vyhovuje tedy extremála γ_0 první z postačujících podmínek a rovněž zesílené nutné podmínce Weierstrassově. Dokážeme, že přesto γ_0 nedává silné minimum. Abychom dokázali toto tvrzení, sestrojíme lomenou čáru AMB, jejíž vrchol umístíme do bodu M o souřadnicích $h > 0$ a k. Potom, použijeme-li formule (9′) a shora napsaného výrazu pro $\mathbf{E}$, dostaneme

$$J(\bar{\gamma}) - J(\gamma_0) = k^2 \left[-\frac{k^2}{h^2} + \frac{1}{h} + \frac{1}{1-h} - \frac{k^2(1+h)}{(1-h)^3} \right].$$

Zde je $\bar{\gamma}$ lomená čára AMB, γ_0 úsečka $[0, 1]$. Odtud soudíme, že pro jakékoli k lze vždycky zvolit h natolik malé, aby bylo $J(\bar{\gamma}) - J(\gamma) < 0$. Křivka γ_0 nedává silné minimum J mezi čarami třídy D_1 a tudíž ani mezi čarami třídy C_1.

Slabý extrém pro oblouky malé délky, princip nejmenší akce. Budiž γ_0 extremála funkcionálu J vycházející z bodu $A(x_0, y_0)$ a nechť je podél křivky γ_0 splněna zesílená Legendreova podmínka $F_{y'y'} > 0$. Bod C

---

[4]) Tato okolnost je odchylným rysem theorie extrému J ve srovnání s theorií silného extrému I.

extremály γ_0 konjugovaný s A leží v určité vzdálenosti od bodu A různé od nuly. Každý oblouk $\overset{\frown}{AB}$ extremály γ_0, ležící na oblouku $\overset{\frown}{AC}$ s koncovým bodem B různým od C, povede k slabému minimu funkcionálu J. Je tedy Legendreova podmínka $F_{y'y'} > 0$ postačující podmínkou pro slabé minimum, je-li příslušný oblouk extremály dostatečně malý.

Připomenuté tvrzení lze rozšířiti také na případ funkcionálů definovaných na prostorových křivkách; při platnosti Legendreovy podmínky (viz § 13) dostatečně malé oblouky extremál vždycky realisují minimum. Jako příklad vyšetříme integrál účinku (akce) (viz formuli (18) § 2)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2U + h}\, \sqrt{a_{11}q_1'^2 + 2a_{12}q_1'q_2' + a_{22}q_2'^2}\, dt.$$

Snadno nahlédneme, že pro funkcionál J je Legendreova podmínka vždy splněna, a tedy pro dostatečně malé části trajektorie skutečného pohybu *integrál účinku* (akce) podél těchto částí *dosahuje slabého minima*. Tím je právě oprávněn sám název principu.

Není těžké ukázat na příkladech, že dostatečně veliká konečná část trajektorie skutečného pohybu nemusí minimalisovat integrál účinku. Vyšetřujme na příklad setrvačný pohyb bodu na povrchu koule. V tomto případě integrál účinku nabude tvaru

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Trajektoriemi-extremálami jsou oblouky hlavních kružnic na kouli. Oblouk extremály dává účinek minimální tehdy a jenom tehdy, když tento oblouk neobsahuje oba koncové body průměru koule.

§ 35. Přehled nutných a postačujících podmínek pro extrém.

Shrneme hlavní nutné a postačující podmínky pro minimum funkcionálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx,$$

které jsme v předcházejících úvahách obdrželi.

K tomu, aby čára γ třídy C_1, spojující body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, mezi křivkami třídy C_1, spojujícími body A a B, dávala *slabé minimum*, je nutné, aby:

1) čára γ byla extremálou, t. j. aby byla integrálem rovnice Eulerovy

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0;$$

2) podél γ byla splněna Legendreova podmínka

$$F_{y'y'} \geqq 0;$$

3) je-li podél γ splněn vztah $F_{y'y'} > 0$, γ vyhovovala podmínce Jacobiově, t. j. aby neobsahovala body konjugované se svým koncovým bodem, neboli analyticky, aby integrální křivka Jacobiovy rovnice

$$\left(P - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q\right) \eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (R\eta') = 0,$$

vycházející z bodu $(x_0, 0)$, neprotínala osu x v bodech intervalu

$$x_0 < x < x_1.$$

Aby γ dávala *silné minimum*, je dále nutné, aby

4) podél γ pro libovolné hodnoty k platilo

$$\mathbf{E}(x, y, y', k) \geqq 0.$$

K tomu, aby čára γ dávala *slabé minimum*, stačí, aby

1) γ byla extremálou;

2) podél γ (včetně koncových bodů) byla splněna zesílená Legendreova podmínka

$$F_{y'y'} > 0;$$

3) γ vyhovovala zesílené podmínce Jacobiově: t. j. aby integrál rovnice Jacobiovy, vycházející z bodu $(x_0, 0)$, neprotínal osu x v bodech zprava uzavřeného intervalu

$$x_0 < x \leqq x_1.$$

Pro *silné minimum* stačí, aby ještě

4) existovalo okolí křivky γ, v jehož každém bodě (x, y) pro libovolné hodnoty η platí

$$\mathsf{E}(x, y, u(x, y), \eta) \geqq 0,$$

kde $u(x, y)$ je směr pole obklopujícího γ.

Příslušné podmínky pro maximum se dostanou změnou smyslu nerovností.

Příklad 1. Úloha o brachystochroně. Jak vyplývá z výsledků § 2, jsou pro tuto úlohu pro jakoukoli polohu bodů

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2)$$

podmínky Legendreovy a Jacobiovy splněny a tedy extremálu, spojující body A a B, lze obklopit polem extremál. Mimo to je pro tuto úlohu

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\cdot (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

pro jakékoli y a y'; tudíž extremála γ_0 dává silné minimum.

Příklad 2. Úloha o refrakci. Pro tuto úlohu funkce $F(x, y, y')$ má tvar

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} \quad (v(x, y) > 0).$$

Zde je podmínka Weierstrassova vyplněna pro kteroukoli funkci $v > 0$:

$$F_{y'y'} = \frac{1}{v} (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Tedy otázka, zda extremála γ_0 minimalisuje J-délky, se zcela převede na otázku, je-li možno γ_0 obklopit polem extremál. Speciálně, když rychlost šíření světla je nepřímo úměrná y, jsou extremálami polokružnice orthogonální k ose x. V tomto případě pro jakoukoli polohu bodů A a B lze sestrojit extremálu, spojující tyto body, a je možno také sestrojit pole extremál, obklopující extremálu γ_0. Oblouk kružnice dává silné minimum.

Příklad 3. Úloha o geodetických čarách. Funkce F má tvar

$$F = \sqrt{A + 2By' + Cy'^2},$$

kde A, B, C jsou spojité funkce proměnných x, y a forma

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

je kladná v libovolném bodě (x, y), t. j. $B^2 - AC < 0$. Pro tuto úlohu je

$$F_{y'y'} = \frac{AC - B^2}{(A + 2By' + Cy'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tedy každá geodetická čára γ_0, kterou lze obklopit polem geodetických čar (t. j. každá čára neobsahující konjugované body) dává silné minimum délek oblouků, spojujících body A a B.

Příklad 4. Minimální rotační plocha. Stejně jako v příkladě 2 je podmínka Weierstrassova splněna pro libovolnou extremálu; tudíž mezi dvěma extremálami, spojujícími body A a B, dává horní extremála silné minimum obsahu rotační plochy.

Příklad 5. Eulerovo kritické zatížení. Mějme dánu vertikální válcovou pružnou tyč AB. Nechť je vetknutí spodního konce A tuhé a nechť horní konec B se může volně pohybovat po vertikální přímce tak, aby tečna k čáře ohybu, vedená bodem B, zůstala stále konstantní. Předpokládáme nyní, že na horní konec B působí síla P směřující vertikálně dolů. Tyč bude v rovnováze pro jakoukoli sílu P, avšak tato rovnováha bude stabilní pouze pro některé hodnoty P. Supremum hodnot P, pro něž vertikální poloha tyče dává stabilní rovnováhu, se nazývá *kritickým zatížením* tyče. K definici kritického zatížení použijeme principu:

K tomu, aby soustava byla ve stavu stabilní rovnováhy, je nutné a stačí, aby daná poloha soustavy mezi všemi jinými polohami odpovídajícími vazbám dávala její potenciální energii nejmenší hodnotu.[5])

Jak je známo, potenciální energie ohýbané tyče, působí-li na ni síla P, má tvar

$$E = \int_0^l k\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds + PY,^{6)} \tag{24}$$

kde l je délka tyče, k konstanta závislá na vlastnostech tyče, φ úhel, který svírá tečna k ose ohybu tyče s vertikálou a Y vzdálenost horního konce tyče od některé pevné horizontální roviny. Zřejmě lze položit

$$Y = \int_0^l \cos\varphi \, ds.$$

Z toho

$$E = \int_0^l \left[k\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + P\cos\varphi\right] ds. \tag{25}$$

Tím se naše úloha převede na následující variační problém: *pro jaké hodnoty P funkce $\varphi \equiv 0$ bude dávat minimum funkcionálu E, jestliže za třídu přípustných funkcí vezmeme funkce $\varphi = \varphi(s)$ třídy C_1 pro $0 \leqq s \leqq l$ vyhovující počátečním podmínkám: pro $s = 0$ je $\varphi = 0$ a pro $s = l$ je $\varphi = 0$.*

---

[5]) Tento princip v obecném tvaru platí pouze v řadě dodatečných podmínek, které zde neuvedeme. Tyto podmínky v každém případě jsou v naší úloze splněny.

[6]) Váhu nosníku zanedbáváme a s jeho stlačením nepočítáme (viz příklad v § 14).

Pro jakoukoli hodnotu P přímka $\varphi \equiv 0$ je extremálou funkcionálu E. Označíme-li znakem $F(\varphi, \varphi')$ integrovanou funkci, budeme mít

$$F > 0, \; F_{\varphi'\varphi'} = k > 0.$$

Naše otázka se tedy převede na úkol ověřit splnění Jacobiových podmínek. Rovnice Jacobiova naší úlohy má tvar

$$Pu + 2ku'' = 0. \tag{26}$$

Integrál $\varDelta(0, s)$ této rovnice, splňující podmínky $\varDelta(0, 0) = 0$, $\varDelta'(0, 0) = 1$, bude

$$\varDelta(0, s) = \sin \sqrt{\frac{P}{2k}}\, s.$$

Tedy úsečku l' bodu, v němž se protne extremála $\varphi = 0$ s nekonečně blízkou extremálou, určíme z rovnice

$$\sin \sqrt{\frac{P}{2k}}\, l' = 0. \tag{27}$$

Použijeme-li toho, že l' musí být ze všech kladných kořenů rovnice (27) k nule nejblíže, dostaneme nakonec

$$l' = \pi \sqrt{\frac{2k}{P}}.$$

Tedy k tomu, aby přímka $\varphi = 0$ dávala hledané minimum, je nutné, aby

$$\pi \sqrt{\frac{2k}{P}} - l \geqq 0,$$

a stačí, aby

$$\pi \sqrt{\frac{2k}{P}} - l > 0.$$

Z toho pro hledané kritické zatížení P_0 nalezneme následující hodnotu:

$$P_0 = \frac{2k\pi^2}{l^2}.$$

LINEÁRNÍ VARIAČNÍ ÚLOHY

§ 36. Rovnice Sturm-Liouvilleovy.

Věnujeme se nyní těm variačním úlohám, pro které Eulerovy rovnice jsou lineární.

Vyšetřujme kvadratický funkcionál

$$K(y) = \int_a^b [P(x)y^2 + R(x)y'^2]\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Eulerova rovnice pro tento funkcionál je známá Jacobiova rovnice

$$Py - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry') = 0. \tag{2}$$

Vyšetřujeme-li isoperimetrický problém, jak najít podmíněnou extremálu funkcionálu K za podmínky

$$\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x = 1, \tag{3}$$

jsme vedeni k úloze hledat nepodmíněnou extremálu funkcionálu

$$\int_a^b (Ry'^2 + Py^2 - \lambda y^2)\,\mathrm{d}x$$

(λ je konstantní). Příslušná Eulerova rovnice

$$Py - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry') = \lambda y \tag{4}$$

(neboli $Ry'' + R'y' - Py + \lambda y = 0$) se nazývá rovnicí Sturm-Liouvilleovou.

Napříště se omezíme na nejjednodušší případ počátečních podmínek

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{5}$$

Dále budeme předpokládat, že funkce $R(x)$ a $P(x)$ patří do třídy C_1, a mimo to budeme předpokládat, že je $R(x) > 0$ pro $a \leqq x \leqq b$.

Pišme krátce:

$$Py - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry') \equiv L(y). \tag{6}$$

Rovnice Jacobiova (2) a Sturm-Liouvilleova (4) nabudou nyní tvaru

$$L(y) = 0, \quad L(y) = \lambda y.$$

$L(y)$ se obyčejně nazývá operátorem Sturm-Liouvilleovým. Tento operátor je lineární: pro dvě libovolné funkce y_1 a y_2 třídy C_2 platí

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Pro jakoukoli konstantu α je

$$L(\alpha y) = \alpha L(y).$$

Kvadratické a bilineární funkcionály. Zavedeme označení

$$K(y, z) = \int_a^b (Ry'z' + Pyz)\, dx. \tag{7}$$

Funkcionál $K(y, z)$ je bilineárním funkcionálem funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$, t. j. K je lineární jak vzhledem k $y(x)$, tak i vzhledem k $z(x)$. Pro $y(x) = z(x)$

$$K(y, y) = K(y)$$

Připomeňme následující identitu:

$$K(a_1 y + a_2 z) = a_1^2 K(y) + 2a_1 a_2 K(y, z) + a_2^2 K(z), \tag{8}$$

kterou si snadno ověříme přímo. Tuto identitu lze zobecnit, a to:

$$K\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 K(y_i) + 2\sum_{j>i} K(y_i, y_j). \tag{8'}$$

Vzhledem k počátečním podmínkám (5) dostaneme:

$$\int_a^b Ry'z'\, dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} Ry'\right) z\, dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} Rz'\right) y\, dx.$$

Lze tedy integrál (7) napsat v tomto tvaru:

$$K(y, z) = \int_a^b L(y) z\, dx, \tag{9}$$

kde $L(y)$ je definována rovností (6). Je zřejmé, že lze také napsat

$$K(y, z) = \int_a^b L(z) y\, dx,$$

a tedy

$$\int_a^b L(y)z \, \mathrm{d}x = \int_a^b L(z)y \, \mathrm{d}x. \tag{10}$$

Speciálně pro $y = z$

$$K(y) = \int_a^b L(y)y \, \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Symetrické operátory. Budiž na třídě funkcí $[y(x)]$, $a \leqq x \leqq b$, definován lineární operátor $Ay(x)$. Operátor Ay se nazývá *symetrickým*, jestliže pro libovolné funkce $y(x)$ a $z(x)$ naší třídy platí

$$\int_a^b (Ay)z \, \mathrm{d}x = \int_a^b (Az)y \, \mathrm{d}x.$$

Formule (10) ukazuje, že operátor Sturm-Liouvilleův na naší třídě funkcí je symetrickým operátorem.

Analogicky lze dokázat, že operátor Ly na třídě funkcí $[y(x)] \subset C_1$, vyhovujících obecnějším počátečním podmínkám, na příklad

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0,$$

je operátor symetrický. Právě tak je tento operátor symetrický na třídě funkcí, u nichž krajové podmínky jsou podmínkami periodicity s periodou $\omega = (b - a)$:

$$y(b) = y(a), \quad y'(b) = y'(a).$$

Jako jiný případ symetrického operátoru lze definovat operátor Fredholmův K, definovaný na všech funkcích třídy C:

$$K(y(x)) = \int_a^b K(x, s) \, y(s) \, \mathrm{d}s$$

se symetrickým jádrem $K(x, s) = K(s, x)$.

Je totiž

$$\int_a^b (Ky) \, z(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \, y(s) \, z(x) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b (Kz) \, y(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \, z(s) \, y(x) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x.$$

Vzhledem k symetričnosti jádra $K(x, s) = K(s, x)$ jsou si oba dvojné integrály rovny a je $\int_a^b (Ky)z \, \mathrm{d}x = \int_a^b (Kz)y \, \mathrm{d}x$.

Orthogonalita. Dvě funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ se nazývají *orthogonálními* v intervalu $[a, b]$ *s vahou* $\varrho(x)$, jestliže

$$\int_a^b \varrho(x)\, y_1(x)\, y_2(x)\, dx = 0.$$

Funkce $y_1(x)$ se nazývá *normovanou* v intervalu $[a, b]$ *s vahou* $\varrho(x)$, je-li

$$\int_a^b \varrho(x)\, y_1^2(x)\, dx = 1.$$

Napříště budeme považovat váhu za nezápornou a přitom v intervalu $[a, b]$ nerovnou identicky nule, $\varrho(x) \geqq 0$.

V případě váhy $\varrho(x) \equiv 1$ mluvíme jednoduše o *orthogonalitě* dvojice funkcí $y_1(x)$ a $y_2(x)$ v intervalu $[a, b]$, je-li

$$\int_a^b y_1 y_2\, dx = 0 \quad \text{pro} \quad y_1(x) \neq y_2(x)$$

a o *normovanosti* funkce $y(x)$ v $[a, b]$, je-li

$$\int_a^b y^2\, dx = 1.$$

Posloupnost funkcí se nazývá *orthonormovanou* v intervalu $[a, b]$ *s vahou* $\varrho(x)$, je-li

$$\int_a^b y_i(x)\, y_j(x)\, \varrho(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Příklady: 1. Posloupnost

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ldots$$

je orthonormovaná posloupnost o váze 1 v $[0, 2\pi]$.

2. Posloupnost $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\right\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, je orthonormovaná posloupnost o váze 1 v $[0, 2\pi]$.

Pro jednoduchost se napříště všude omezíme, bez dalších poznámek, na případ váhy $\varrho(x) \equiv 1$. Ale všechno, co v této kapitole dokážeme, lze automaticky přenést na případ jakékoholi kladné váhy $\varrho(x)$.

§ 37. Vlastní hodnoty a vlastní funkce.

Rovnice (4) za podmínek (5) pro jakékoli reálné nebo komplexní λ má vždy triviální řešení

$$y(x) \equiv 0.$$

Avšak pro některé hodnoty λ může mít tato rovnice pro počáteční podmínky (5) také netriviální (t. j. nikoli identicky rovné nule) řešení: $y(x) \not\equiv 0$.

Příslušné hodnoty λ se nazývají *vlastními hodnotami* pro operátor L.

Příklad. Budiž

$$K(y) = \int_a^b (cy^2 + c_1 y'^2)\, dx, \; \varrho = 1,$$

kde $c_1 > 0$ (c, c_1 jsou konstanty). Rovnice Sturm-Liouvilleova má nyní takový tvar:

$$y'' + \frac{\lambda - c}{c_1} y = 0. \tag{12}$$

Z toho je

$$y = A_1 e^{mx} + A_2 e^{-mx},$$

kde

$$m^2 = -\frac{\lambda - c}{c_1}. \tag{13}$$

Počáteční podmínky (5) vedou k páru homogenních rovnic vzhledem k A_1 a A_2, a to:

$$A_1 e^{ma} + A_2 e^{-ma} = 0, \; A_1 e^{mb} + A_2 e^{-mb} = 0. \tag{14}$$

K tomu, aby systém (12) měl netriviální řešení, je nutné a stačí, aby jeho determinant se rovnal nule, t. j. aby

$$e^{m(a-b)} = e^{-m(a-b)} \text{ neboli } e^{2m(a-b)} = 1.$$

Je tedy $m(a - b) = n\pi i$ ($i = \sqrt{-1}$), kde n je libovolné celé číslo. Proto lze řešení rovnice (11) vzhledem k λ napsat v takovémto tvaru:

$$\lambda = \frac{c_1 n^2 \pi^2}{(b-a)^2} + c. \tag{15}$$

Řešení rovnice (12) za podmínek (5) lze dát tvar

$$y = A \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \tag{16}$$

kde A je libovolná konstanta. Pro n celé různé od nuly dostaneme netriviální řešení.

Budou tedy vlastními hodnotami všechna čísla tvaru (15).

Vlastní funkce. Každé netriviální řešení rovnice Sturm-Liouvilleovy

$$L(y) = \lambda y$$

pro $y(a) = y(b) = 0$, odpovídající vlastní hodnotě λ, se nazývá *vlastní funkcí* operátoru Ly. Vlastní funkce $y(x)$ se nazývá *normovanou*, je-li

$$\int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Pro předcházející příklad budou funkce (16) vlastními funkcemi.

Základní vlastnosti vlastních hodnot a vlastních funkcí. Stanovíme předběžně řadu důležitějších vlastností pro vlastní funkce.

1. *Je-li $y(x)$ vlastní funkce, pak je*

$$y'(a) \neq 0,$$

$$y'(b) \neq 0.$$

Jelikož totiž rovnice Sturm-Liouvilleova je rovnicí druhého řádu a koeficient při y'' je různý od nuly, je podmínkami $y(a) = 0$, $y'(a) = 0$ nebo $y(b) = 0$, $y'(b) = 0$ integrál určen jednoznačným způsobem. Avšak stejným počátečním podmínkám vyhovuje triviální řešení $y \equiv 0$ a tedy za předpokladu, že pro vlastní funkci $y = y(x)$ je $y(a) = 0$ a $y'(a) = 0$, dostaneme, že tato funkce je identicky rovna nule, což je ve sporu s definicí.

2. *Jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ vlastní funkce, odpovídající jedné a téže vlastní hodnotě, pak jejich lineární kombinace*

$$y = y(x) = c_1y_1 + c_2y_2,$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, je buď vlastní funkcí nebo triviálním řešením.

Na základě vlastností homogenních lineárních rovnic je totiž $y(x)$ integrálem rovnice (4), a mimo to je

$$y(a) = c_1y_1(a) + c_2y_2(a) = 0,$$

$$y(b) = c_1y_1(b) + c_2y_2(b) = 0.$$

Je-li tedy $y(x) \not\equiv 0$, je tato funkce vlastní funkcí.

3. *Jestliže $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou vlastní funkce funkcionálu K, odpovídající jedné a téže vlastní hodnotě, pak y_1 a y_2 jsou lineárně závislé, při čemž*

$$y_2(x)\, y_1'(a) - y_1(x)\, y_2'(a) \equiv 0. \tag{17}$$

Skutečně, funkce

$$y(x) = y_2(x)\, y_1'(a) - y_1(x)\, y_2'(a)$$

je řešením rovnice (4) pro příslušné λ. Protože kromě toho je pro ni $y(a) = y'(a) = 0$, pak na základě jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice rovněž dostaneme (17).

4. *Pro každou vlastní hodnotu λ existují jenom dvě normované vlastní funkce. Tyto funkce se od sebe liší jenom znaménkem.*

Vyplývá totiž z vlastností 1 a 3, že jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě vlastní funkce, příslušné jedné a téže vlastní hodnotě λ, je

$$y_2(x) = k y_1(x),$$

kde $k \neq 0$ je některá konstanta. Z rovnosti

$$\int_a^b y_2^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b y_1^2 \,\mathrm{d}x = 1$$

plyne, že je $k = \pm 1$.

Nyní dokážeme řadu elementárních, ale důležitých vět.

Věta 1. *Jsou-li λ_1 a λ_2 dvě různé vlastní hodnoty pro K a $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jim odpovídající vlastní funkce, pak jsou tyto funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ orthogonální, t. j. splňují rovnost*

$$\int_a^b y_1 y_2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Vskutku je

$$L(y_1) = \lambda_1 y_1,$$

$$L(y_2) = \lambda_2 y_2.$$

Násobíme-li obě strany první rovnice činitelem $y_2(x)$ a druhé rovnice činitelem $y_1(x)$, integrujeme-li v mezích od a do b a odečteme-li od sebe dosažené výsledky, obdržíme

$$\int_a^b [(Ly_1)y_2 - (Ly_2)y_1] \,\mathrm{d}x = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b y_1 y_2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

a protože je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, máme tedy

$$\int_a^b y_1 y_2 \, dx = 0.$$

Věta 2. *Všechny vlastní hodnoty K jsou reálné.*[1])

Budiž λ komplexní vlastní hodnota funkcionálu K, v kterém ovšem předpokládáme, že funkce P a R jsou reálné, a budiž $y(x)$ příslušná vlastní funkce. Označíme-li $\bar{\lambda}$ a $\bar{y}(x)$ veličiny s nimi konjugované, pak z rovnice

$$L(y) = \lambda y$$

dostaneme

$$L(\bar{y}) = \bar{\lambda}\bar{y},$$

t. j. $\bar{\lambda}$ je rovněž vlastní hodnota funkcionálu K a $\bar{y}$ je odpovídající vlastní funkce. Avšak na základě věty 1 pro $\lambda \neq \bar{\lambda}$ máme

$$\int_a^b y\bar{y} \, dx = \int_a^b |y^2| \, dx = 0.$$

Poslední rovnost je možna jenom tehdy, když je $|y|$ identicky rovno nule, což je ve sporu s našimi předpoklady. Je tedy $\bar{\lambda} = \lambda$, t. j. λ je číslo reálné.

Věta 3. *Je-li λ vlastní hodnotou K a $y(x)$ příslušná normovaná vlastní funkce, je*

$$K[y(x)] = \lambda.$$

Vskutku je

$$L(y) = \lambda y. \tag{18}$$

Z toho podle formule (11) máme

$$K(y) = \int_a^b L(y) y \, dx = \lambda \int_a^b y^2 \, dx = \lambda.$$

Věta 4. *Je-li $y(x)$ vlastní funkce K a $y_1(x)$ k $y(x)$ orthogonální funkce, je $K(y, y_1) = 0$.*

Násobíme-li totiž obě strany rovnosti (4) výrazem y_1, pak po integraci podle rovnosti (9) dostaneme

$$K\,(y, y_1) = \int_a^b L\,(y)\, y_1 \, dx = \lambda \int_a^b y y_1 \, dx = 0.$$

[1]) Věty 1 a 2 platí pro všechny symetrické operátory.

Hledejme nyní křivku $y = y(x)$, která náleží ke třídě C_1 (nebo D_1, viz §6), a splňuje podmínky (3) a (5) a činí $K(y)$ minimálním. Lze dokázat, že vždycky existuje funkce $y = y_1(x)$ třídy C_1 [1'] dávající integrálu $K(y)$ minimum.[2] Tato funkce musí vyhovovat Eulerově rovnici (4) pro některou hodnotu parametru $\lambda = \lambda_1$. Tudíž pro rovnici Sturm-Liouvilleovu vždycky existuje jak vlastní funkce $y_1(x)$, tak i k ní příslušná vlastní hodnota. Podle věty 3 je

$$K(y_1) = \lambda_1.$$

Avšak podle definice $y_1(x)$ λ_1 je minimum funkcionálu K za podmínek (3) a (5). Jiné vlastní hodnoty podle téže věty jsou také hodnoty funkcionálu K (různé od minimálních) pro některé funkce, vyhovující těmže podmínkám (3) a (5).

λ_1 je proto nejmenší z vlastních hodnot. Tak jsme došli k následující větě.

Věta 5. *Nejmenší z vlastních hodnot je právě minimum funkcionálu K za podmínek* (3) *a* (5).

Věta 6. *Je-li λ_1 nejmenší z vlastních hodnot funkcionálu K, $y_1(x)$ příslušná vlastní funkce, pak pro jakoukoli funkci $y(x)$ třídy C_1 nebo D_1, vyhovující počátečním podmínkám* (5), *je splněna nerovnost*

$$K(y) \geqq \lambda_1 \int_a^b y^2 \, dx, \tag{19}$$

při čemž znamení rovnosti platí jenom v tom případě, když je $y(x) \equiv \pm k y_1(x)$, kde $k^2 = \int_a^b y^2 \, dx$.

Je-li $\int_a^b y^2 \, dx = 1$, pak je podle věty 5 $K(y) \geqq \lambda_1$. Nechť je nyní $\int_a^b y^2 \, dx = m^2 \neq 0$; potom je $\int_a^b \left(\frac{1}{m} y\right)^2 dx = 1$, a proto

$$\frac{1}{m^2} K(y) = K\left(\frac{1}{m} y\right) \geqq \lambda_1,$$

[1'] Funkce dávající minimum integrálu K patří ke třídě C_1. Vskutku, v každém bodě lomu c rovnost Weierstrassova-Erdmanova (§ 17) má tvar $R(c)y'(c - 0) = R(c)y'(c + 0)$. Avšak je $R(c) > 0$, a tedy $y'(c - 0) = y'(c + 0) = y'(c)$.

[2] Důkaz existence takové funkce lze najít na příklad v naší knize „Osnovy variacionnogo isčislenija“, sv. I, č. II, str. 255—260 nebo 386—394.

z čehož plyne (19). Je-li nyní $K(y) = \lambda_1 \int_a^b y^2 \, dx$, pak klademe $\int_a^b y^2 \, dx = k^2$ a $\bar{y}(x) = \frac{1}{k} y(x)$. Potom je $K(\bar{y}) = \lambda_1$ a tedy $\bar{y}(x)$ činí funkcionál K minimálním. Tedy tato funkce patří ke třídě C_1 a je řešením rovnice (4) pro $\lambda = \lambda_1$ a za podmínek (3) a (5). Na základě vlastnosti 4 je $\bar{y}(x) = \pm y_1(x)$, t. j. $y(x) = \pm k y_1(x)$.

§ 38. Extremální theorie vlastních hodnot.

Věta 5 uvádí extremální definici nejmenší vlastní hodnoty. Jinými slovy, vlastní hodnota je minimum funkcionálu K na křivkách třídy $C_1(D_1)$ za podmínek (3) a (5) a příslušnou vlastní funkcí je funkce třídy C_1, pro niž se tohoto minima dosahuje. Nyní dokážeme, že lze definovat zbývající vlastní hodnoty jako minima funkcionálu K na křivkách třídy C_1 za některých dodatečných podmínek, a příslušné vlastní funkce jako ty funkce třídy C_1, pro něž toto minimum nastává. Důkaz existence takových funkcí nebudeme opět provádět.

Věta 7. *Všechny vlastní hodnoty funkcionálu K mohou být sestaveny v rostoucí nekonečnou posloupnost*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \ldots$$

Při tom, jestliže $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n, \ldots$ je posloupnost příslušných normovaných vlastních funkcí, pak pro každé n je vlastní hodnota λ_n rovna minimu funkcionálu $K(y)$ za podmínek

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b y^2 \, dx = 1, \quad \int_a^b y y_i \, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ y(a) = y(b) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

a funkce $y(x)$, realisující toto minimum, je rovna y_n.

Ustanovili jsme totiž v § 37, že minimum funkcionálu K za podmínek (3) a (5) je rovno nejmenší vlastní hodnotě λ_1. Podmínky (3) a (5) mohou být zřejmě vyšetřovány jako zvláštní případ podmínek (20) pro $n = 1$. Tudíž druhá část naší věty je správná pro $n = 1$. Budeme nyní předpokládat, že jsme určili vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ a jim příslušné vlastní funkce $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, při čemž $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1}$, a že neexistuje již žádná jiná vlastní hodnota, ležící mezi λ_1 a λ_{n-1}. Potom dokážeme, že minimum funkcionálu K za podmínek (20) je vlastní hodnota následující přímo za λ_{n-1} a že funkce dávající minimum je příslušná vlastní funkce.

Na základě výsledků kap. V funkce $y(x)$, realisující minimum funkcionálu K za podmínek (20), musí být nepodmíněnou extremálou funkcionálu

$$\int_a^b [(Ry'^2 + Py^2) - \mu y^2 - \sum_{i=1}^{n-1} 2\nu_i y_i y] \, dx,$$

kde μ a $2\nu_i$ jsou Lagrangeovy multiplikátory. Euler-Lagrangeova rovnice dává

$$L(y) = \mu y + \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i y_i. \tag{21}$$

Násobíme-li obě strany rovnice (21) činitelem y_j a integrujeme-li v mezích od a do b, dostaneme potom tuto rovnost:

$$\int_a^b L(y) y_j \, dx = \mu \int_a^b y y_j \, dx + \nu_j \int_a^b y_j^2 \, dx + \sum_{i \neq j} \nu_i \int_a^b y_i y_j \, dx. \tag{22}$$

Protože podle věty 1

$$\int_a^b L(y) y_j \, dx = K(y, y_j) = 0$$

a též podle věty 1

$$\int_a^b y_i y_j \, dx = 0 \quad \text{pro } i \neq j,$$

nalezneme pak na základě podmínek věty z rovnosti (22) vztah

$$\nu_j = 0.$$

Rovnice (21) se tedy stane rovnicí Sturm-Liouvilleovou, funkce $y(x)$ realisující minimum za podmínek (20) je vlastní funkce a činitel μ je příslušná vlastní hodnota, která je podle věty 3 rovna velikosti hledaného podmíněného minima:

$$K(y) = \mu.$$

Dokážeme, že μ je vlastní hodnota, která bezprostředně následuje podle velikosti za hodnotami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Předpokládejme totiž naopak, že existuje ještě vlastní hodnota λ funkcionálu K menší než μ a různá od $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Budiž $\bar{y}(x)$ příslušná vlastní normovaná funkce. Potom je

$$\int_a^b \bar{y}^2 \,\mathrm{d}x = 1, \quad \int_a^b \bar{y}y_i \,\mathrm{d}x = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

a

$$\bar{y}(a) = \bar{y}(b) = 0.$$

Funkce $\bar{y}(x)$ je tedy jedna z přípustných funkcí naší isoperimetrické úlohy a je pro ni $\lambda = K(\bar{y}) < \mu = K(y)$, což je ve sporu s definicí $y(x)$ jakožto funkce, realisující naše podmíněné minimum. S druhé strany μ nemůže být rovno ani jednomu z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, neboť kdyby bylo $\mu = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$, pak by z vlastnosti 4 str. 217 vyplývalo, že $y(x) = \pm\, y_i(x)$, a z podmínek (20), že

$$\int_a^b yy_i \,\mathrm{d}x = \pm \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

což je nemožné. Je tudíž $\mu > \lambda_{n-1}$ a přitom je μ nejbližší vlastní hodnota následující za λ_{n-1}. Označíme ji znakem λ_n. Necháme-li nyní n probíhat postupně hodnoty 2, 3, ..., budou všechna tvrzení věty úplně dokázána.

Věta 8. *Je-li funkce $y(x)$ třídy C_1 (nebo D_1) orthogonální k prvním $(n - 1)$ vlastním funkcím a vyhovuje-li podmínkám (5), pak je pro ni*

$$K(y) \geqq \lambda_n \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x, \tag{23}$$

při čemž znamení rovnosti platí jenom tehdy, když je $y(x) \equiv \pm\, ky_n(x)$, kde $k^2 = \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x$. Důkaz je zcela analogický důkazu věty 6.

Věta 9. *Vzrostou-li koeficienty $P(x)$ a $R(x)$ o kladné přírůstky $\delta P(x)$ a $\delta R(x)$, pak n-tá vlastní hodnota λ_n vzroste $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.*

Přejděme totiž od funkcionálu $K(y) = \int_a^b [P(x)y^2 + R(x)y'^2] \,\mathrm{d}x$ k funkcionálu

$$K_1 = \int_a^b [(P + \delta P)y^2 + (R + \delta R)y'^2] \,\mathrm{d}x =$$
$$= K(y) + \int_a^b (\delta P y^2 + \delta R y'^2) \,\mathrm{d}x;$$

budiž $y_n(x)$ n-tá vlastní funkce, odpovídající původnímu funkcionálu $K(y)$, a $\bar{y}_n = y_n(x) + \delta y_n(x)$ funkce, odpovídající změněnému funkcionálu. Při tom zůstane hodnota $\int_a^b y_n^2 \, \mathrm{d}x$ nezměněna (rovna 1) a je

$$\delta \int_a^b y_n^2 \, \mathrm{d}x = 2 \int_a^b y_n \delta y_n \, \mathrm{d}x = 0. \tag{24}$$

Variace $\lambda_n = K(y_n)$ při změně funkcionálu se skládá ze dvou částí:

$$\delta\lambda_n = K_1(\bar{y}_n) - K(y) = [K_1(\bar{y}_n) - K_1(y_n)] + [K_1(y_n) - K(y_n)]$$

1) z variace $\delta K(y_n, \delta y_n) = 2\int_a^b [R y_n' \delta y_n' + P y_n \delta y_n'] \, \mathrm{d}x$, vyplývající ze změny integrované funkce,

2) z výrazu $\int_a^b (\delta P y_n^2 + \delta R y_n'^2) \, \mathrm{d}x$, vytvořeného změnou samotného funkcionálu, t. j.

$$\delta\lambda_n = 2\int_a^b (R y_n' \delta y_n' + P y_n \delta y_n) \, \mathrm{d}x + \int_a^b [(\delta P) y_n^2 + (\delta R) y_n'^2] \, \mathrm{d}x. \tag{25}$$

První integrál ve vzorci (25) je roven nule, neboť podle vztahu $L y_n = \lambda_n y_n$ a podle vztahu (24) je roven výrazu

$$2K(y, \delta y) = \int_a^b (L y_n) \delta y \, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b y_n \delta y_n \, \mathrm{d}x = 0.$$

Je tedy

$$\delta\lambda_n = \int_a^b [(\delta R) y_n'^2 + (\delta P) y_n^2] \, \mathrm{d}x;$$

pro $\delta R(x) > 0$ je $\delta P(x) > 0$, $\delta\lambda_n > 0$. Věta je dokázána.

Tedy vlastní hodnoty λ_n neklesají ani v tom případě, když je $\delta P_n(x) \geqq 0$, $\delta R_n(x) \geqq 0$.

Důsledek. Odhadneme shora i zdola vlastní hodnotu λ_n, odpovídající funkcionálu

$$\int_a^b [R(x) y'^2 + P(x) y^2] \, \mathrm{d}x.$$

Nechť c, c_1 označují minima a C, C_1 maxima funkcí $P(x)$ a $R(x)$.

Vyšetříme funkcionály

$$\int_a^b (cy^2 + c_1 y'^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b (Cy^2 + C_1 y'^2)\,\mathrm{d}x.$$

Buďte λ_n' a λ_n'' n-té vlastní hodnoty, odpovídající těmto funkcionálům. Na základě předešlé věty je

$$\lambda_n' \leqq \lambda_n \leqq \lambda_n''.$$

Z rovnosti (15) plyne:

$$\lambda_n' = \frac{n^2\pi^2 c_1}{(b-a)^2} + c, \quad \lambda_n'' = \frac{n^2\pi^2 C_1}{(b-a)^2} + C,$$

z čehož

$$\frac{n^2\pi^2 c_1}{(b-a)^2} + c \leqq \lambda_n \leqq \frac{n^2\pi^2 C_1}{(b-a)^2} + C. \tag{26}$$

Z formule (26) plyne (poněvadž je $c_1 > 0$), že pro $n \to \infty$ je $\lambda_n \to \infty$, t. j. *posloupnost vlastních hodnot konverguje kladnými hodnotami k nekonečnu jako* n^2; tedy jenom konečný počet vlastních hodnot může být záporný.

Věta 10 (Courant). *Vlastní hodnota $\lambda_n(b)$, n-tá podle velikosti, je monotonně klesající funkce horní meze b.*

V § 20 jsme odvodili formule pro diferenciál dJ integrálu J, vzatého podél extremály pro $(J + \lambda K)$ za podmínky, že integrál $K = \text{const}$.

Nechť $y_n^b(x)$ je n-tá vlastní funkce, odpovídající n-té vlastní hodnotě λ_n^b. Máme:

$$\lambda_n^b = K_b[y_n^b].$$

y_n^b je extremála funkcionálu $[K_b - \lambda_n^b I_b]$, kde je $I_b(y) = \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x$ a $I_b(y_n^b) = 1$. V koncovém bodě b máme:

$$y_n(b) = 0, \quad y_n'(b) \neq 0. \tag{27}$$

Označíme: $H = Ry'^2 + Py^2 - \lambda y^2$; potom

$$H - y'H_{y'} = -Ry'^2 + Py^2 - \lambda_n^b y^2.$$

Pro křivku $y = y_n^b(x)$ při $x = b$ máme podle (27):

$$(H - y'H_{y'})^{(1)} = -R(b)[y'(b)]^2 < 0.$$

Při přechodu od y_n^b k y_n^{b+db} vzrostou souřadnice koncových bodů o přírůstky:

$$dx_0 = da = 0,\ dy_0 = 0;\ dx_1 = db,\ dy_1 = 0,$$

proto

$$d\lambda_n^b = dK_b(y_n^b) = (H - y'H_{y'})^{(1)}\,db = -R(b)[y'(b)]^2\,db.$$

Z toho plyne, že λ_n^b pro rostoucí b klesá. Analogicky se dokazuje, že vlastní hodnoty, vyšetřované jako funkce dolní meze a, jsou funkcemi rostoucími. Jestliže b konverguje klesajícími hodnotami k a, pak $\lambda_n(b)$ roste. Z formule (26) plyne trochu více, a to:

$$\lambda_n(b) \to \infty \text{ pro } b \to a. \tag{28}$$

§ 39. Závislost vlastní hodnoty na integračních mezích. Oscilační věta.

Budeme nyní předpokládat, že horní mez ve vzorcích (1), (3) a (5) je proměnná. Abychom to zdůraznili, napišme u znaku K jakožto index písmeno b:

$$K_b = \int_a^b (Py^2 + Ry'^2)\,dx. \tag{1'}$$

Pokud vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ závisí na téže mezi b, budeme je označovat takto:

$$\lambda_1(b),\ \lambda_2(b),\ \lambda_3(b),\ \ldots$$

Věta II (oscilační). *Vlastní funkce $y_n(x)$, odpovídající vlastní hodnotě $\lambda_n(b)$, n-té podle velikosti, se anuluje uvnitř intervalu (a, b) $(n - 1)$-krát.*

Důkaz je založen na této větě:

Pomocná věta. *Je-li $z_\nu(x)$ netriviální řešení rovnice*

$$L(z) = \nu z \tag{29}$$

(ν je konstanta), *vyhovující podmínce $z_\nu(a) = 0$, pak nulové body funkce z_ν, t. j. kořeny rovnice $z_\nu(c) = 0$, větší než a, jsou právě kořeny rovnic $\lambda_i(c) = \nu$.*

Budiž pro $c > a$ $z_\nu(c) = 0$. Protože mimo to $z_\nu(a) = 0$ a ježto

$z_\nu(x)$ je netriviálním řešením rovnice (29), je $z_\nu(x)$ vlastní funkce pro K_c a číslo ν je jedna z vlastních hodnot: $\nu = \lambda_i(c)$.

Nechť je obráceně pro některé přirozené i

$$\lambda_i(c) = \nu.$$

Jednou z vlastních hodnot funkcionálu K_c je hodnota ν, jíž odpovídá vlastní funkce $\bar{z}_\nu(x)$ vyhovující rovnici (27) a počátečním podmínkám daným vztahy $\bar{z}_\nu(a) = 0$, $\bar{z}_\nu(c) = 0$. Protože dvě netriviální řešení lineární diferenciální rovnice (27) druhého řádu, která jsou současně rovna nule pro $x = a$, se liší jenom o konstantu různou od nuly, mají tato řešení společné kořeny. Je proto $z_\nu(c) = 0$. Pomocná věta je dokázána.

Vraťme se nyní k naší větě. Budiž $\lambda_n(b) = \nu$. Znakem c_k budeme označovat bod uvnitř intervalu (a, b), pro který je $\lambda_k(c_k) = \nu$ (jestliže takový bod existuje). Dokážeme, že existuje právě $(n - 1)$ takových bodů.

Vskutku, protože $\lambda_n(\xi)$ je funkce monotonně klesající, je $\lambda_n(\xi) > \lambda_n(b) = \nu$ pro $a < \xi < b$ a tím spíše pro $k > n$, $\lambda_k(\xi) > \lambda_n(\xi) > \nu$.

Tedy pro $k \geqq n$ uvnitř intervalu (a, b) neexistují body c_k.

Obráceně, je-li $1 \leqq i \leqq n - 1$, pak je $\lambda_i(b) < \lambda_n(b) = \nu$; současně pro $\xi \to b$ je $\lambda_i(\xi) \to +\infty$ (viz formule (26)). Pro ξ dostatečně blízké k b je $\lambda_i(\xi) > \nu$. Funkce $\lambda_i(\xi)$ přejde uvnitř intervalu (a, b) od hodnot větších než ν k hodnotám menším než ν. Existuje takové c_i, $a \leqq c_i \leqq b$, že je $\lambda_i(c_i) = \nu$. Existuje tedy právě $(n - 1)$ čísel c_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Všechna jsou od sebe různá, neboť je-li $j > i$, pak je $\lambda_j(c_i) > \lambda_i(c_i) = \nu$, a tedy $c_i \neq c_j$.

Podle pomocné věty těchto $(n - 1)$ čísel $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ a jenom těchto $(n - 1)$ čísel je nulovými body funkce $y_n(x) = z_\nu(x)$ uvnitř intervalu (a, b). Oscilační věta je tím dokázána.

§ 40. Vyšetřování druhé variace.

V § 11 jsme objasnili, že pro extremálu $y = y(x)$ funkcionálu

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

přírůstek funkcionálu

$$J(y + \eta) - J(y)$$

až na veličinu nekonečně malou druhého řádu ve srovnání s $r(y, y + \eta)$ je roven druhé variaci

$$\delta^2 J = \int_a^b (P\eta^2 + R\eta'^2)\,\mathrm{d}x = K(\eta),$$

kde je

$$R = F_{y'y'},\ P = F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'y'}.$$

Budeme předpokládat, že podél extremály je vyhověno zesílené Legendreově podmínce

$$F_{y'y'} = R > 0.$$

K vyšetřování druhé variace dokážeme předběžně několik dalších vlastností funkcionálu $K(\eta)$.

Řekneme, že tento funkcionál je *positivně definitní* nebo prostě *kladný*, když pro jakoukoli funkci $\eta(x) \not\equiv 0$ třídy C_1 (nebo D_1), vyhovující podmínkám $\eta(a) = \eta(b) = 0$, je $K(\eta) > 0$.

Věta 12. *K tomu, aby funkcionál $K_b(\eta)$ byl kladný, je nutné a stačí, aby jeho nejmenší vlastní hodnota byla kladná*

$$\lambda_1(b) > 0.$$

Nutnost této podmínky vyplývá z toho, že vlastní hodnota λ_1 je hodnotou funkcionálu K pro příslušnou vlastní funkci. Z nerovnosti (19) vyplývá, že podmínka je postačující.

Věta 13. *Pro každý kladný funkcionál K_b existují takové kladné konstanty d_1 a d_2, že pro všechny funkce třídy C_1* (nebo D_1), *vyhovující podmínkám $\eta(a) = \eta(b) = 0$,* platí vztahy:

$$K_b(\eta) \geqq 2d_1 \int_a^b \eta^2\,\mathrm{d}x, \tag{30}$$

$$K_b(\eta) \geqq 2d_2 \int_a^b \eta'^2\,\mathrm{d}x, \tag{30'}$$

$$K_b(\eta) \geqq d_1 \int_a^b \eta^2\,\mathrm{d}x + d_2 \int_a^b \eta'^2\,\mathrm{d}x. \tag{31}$$

Nerovnost (31) je důsledkem dvou předcházejících nerovností. (30) plyne z (19) a z věty 12: $2d_1 = \lambda_1(b)$.

Dokážeme nerovnost (30'). Máme

$$K_b(\eta) \geqq c\int_a^b \eta^2 \, dx + c_1\int_a^b \eta'^2 \, dx, \tag{32}$$

kde c a c_1 ($c_1 > 0$) jsou minima funkcí $P(x)$ a $R(x)$ v intervalu $[a, b]$. Je-li $c \geqq 0$, pak stačí položit $2d_2 = c_1$. Budiž $c = -c_2$, $c_2 > 0$. Vyšetříme oba možné případy:

1) $c_2\displaystyle\int_a^b \eta^2 \, dx \leqq \frac{c_1}{2}\int_a^b \eta'^2 \, dx$; potom z (32) plyne

$$K_b(\eta) \geqq \frac{c_1}{2}\int_a^b \eta'^2 \, dx. \tag{33}$$

2) $c_2\displaystyle\int_a^b \eta^2 \, dx > \frac{c_1}{2}\int_a^b \eta'^2 \, dx$; potom z (30) dostaneme

$$K_b(\eta) \geqq \lambda_1(b)\int_a^b \eta^2 \, dx \geqq \frac{c_1\lambda_1(b)}{2c_2}\int_a^b \eta'^2 \, dx. \tag{34}$$

Položíme-li $2d_2$ rovno menšímu z čísel $\dfrac{c_1}{2}$ a $\dfrac{c_1\lambda_1(b)}{2c_2}$, dostaneme jako výsledek z (33) a (34) vztah (30').

Souvislost s theorií Jacobiovy rovnice. Jacobiova rovnice (2) je zvláštním případem rovnice Sturm-Liouvilleovy pro $\lambda = 0$. Označíme jako v předešlých kapitolách znakem $\Delta(a, x)$ netriviální řešení Jacobiovy rovnice, pro které

$$\Delta(a, a) = 0, \quad \Delta'_x(a, a) = 1.$$

Všechna netriviální řešení Jacobiovy rovnice, která jsou rovna nule pro $x = a$, se dostanou z $\Delta(a, x)$, násobíme-li je konstantou různou od nuly.

Hodnotami *konjugovanými* s a budeme nazývat kořeny rovnice $\Delta(a, x) = 0$ různé od a.

Věta 14. *Počet záporných vlastních hodnot $\lambda_\nu(b)$ funkcionálu K_b je roven počtu hodnot konjugovaných s a a ležících uvnitř intervalu (a, b).*

Počet nekladných vlastních hodnot K_b je roven počtu hodnot, konjugovaných s a v intervalu $(a, b]$ zprava uzavřeném.

Podle definice konjugovaných hodnot a podle pomocné věty na str. 225 jsou hodnoty konjugované s a větší než a kořeny rovnic $\lambda_i(\xi) = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Každé konjugované hodnotě c, $a < c < b$, odpovídá index i, pro nějž $\lambda_i(c) = 0$. Vzhledem k monotonnímu poklesu funkce $\lambda_i(\xi)$ je $\lambda_i(b) < 0$, t. j. každé hodnotě konjugované s a uvnitř intervalu (a, b) odpovídá záporná vlastní hodnota $\lambda_i(b)$.

Obráceně každé záporné vlastní hodnotě $\lambda_i(b)$ odpovídá uvnitř intervalu (a, b) bod c, pro který $\lambda_i(c) = 0$ (ježto při konvergenci ξ k a změní se $\lambda_i(\xi)$ ze záporné hodnoty na kladnou, při čemž konverguje k $+\infty$); podle naší pomocné věty je c hodnota konjugovaná s a.

Tím je první část věty dokázána.

K důkazu druhé části připomeneme ještě podle téže pomocné věty, že nulové vlastní hodnotě $\lambda_k(b) = 0$ (jestliže taková existuje) odpovídá konjugovaná hodnota $c = b$, která souhlasí s koncovým bodem našeho intervalu. Obráceně, je-li b hodnota konjugovaná s a, pak existuje vlastní hodnota $\lambda_k(b) = 0$ (podle téže pomocné věty); je tedy věta dokázána.

Z toho vyplývá:

Věta 14'. *K tomu, aby všechny vlastní hodnoty byly nezáporné, je nutné a stačí, aby interval (a, b) neobsahoval hodnoty konjugované s a.*

K tomu, aby všechny vlastní hodnoty byly kladné, je nutné a stačí, aby interval $(a, b]$ zprava uzavřený neobsahoval hodnoty konjugované s a.

Z druhé části věty a z nerovnosti (19) plyne dále:

Věta 15. *K tomu, aby K_b byl kladným funkcionálem, je nutné a stačí, aby zprava uzavřený interval $(a, b]$ neobsahoval hodnoty konjugované s a.*

Postačující podmínka Jacobiova. Věta 15 je ekvivalentní postačující Jacobiově podmínce pro minimum funkcionálu v nejjednodušší úloze (viz § 35).

Předpokládejme totiž, že podél extremály $y = y_0(x)$, $a \leqq x \leqq b$, je $F_{y'y'} = R > 0$, a dále, že je podél ní vyhověno Jacobiově podmínce

— že totiž neexistují hodnoty konjugované s a v intervalu $[a, b]$. Podle věty 15 je druhá variace

$$\delta^2 J = K_b(\eta) = \int_a^b (P\eta^2 + R\eta'^2)\,dx$$

kladným funkcionálem proměnné η, t. j. (věta 13)

$$\delta^2 J = K_b(\eta) \geqq \int_a^b (d_1\eta^2 + d_2\eta'^2)\,dx. \tag{35}$$

Porovnáme-li nerovnost (35) s rovností (15′) § 11, dostaneme

$$J(y + \eta) - J(y) =$$
$$= \delta^2 J + \int_a^b (\varepsilon_1\eta^2 + \varepsilon_2\eta'^2)\,dx \geqq \int_a^b [(d_1 + \varepsilon_1)\eta^2 + (d_2 + \varepsilon_2)\eta'^2]\,dx.$$

Zde ε_1 i ε_2 konvergují stejnoměrně k nule spolu s $r(y, y + \eta)$. Pro dostatečně malé $r(y, y + \eta)$ stanou se koeficienty u η'^2 a η^2 kladnými a dostaneme

$$J(y + \eta) - J(y) \geqq 0.$$

Ještě jednodušeji se dokáže nutná podmínka Jacobiova (viz § 29). Nechť uvnitř intervalu (a, b) existuje hodnota konjugovaná s a. Potom podle věty 14′ existují záporné vlastní hodnoty pro druhou variaci $\delta^2 J = K_b(\eta)$. Jinými slovy, druhá variace může nabývat i záporných hodnot. Avšak v takovém případě vůbec nemáme případ minima.

Klasifikace extremál. Morse navrhl klasifikovat extremály podle počtu záporných vlastních hodnot jejich druhé variace.

Omezíme se na oblouky extremál, u nichž není koncový bod konjugován s bodem počátečním (t. j. u nichž má druhá variace vlastní hodnoty různé od nuly). Extremálu budeme nazývat *extremálou k-tého řádu*, jestliže druhá variace obsahuje právě k záporných vlastních hodnot. Podle věty 14 je to ekvivalentní s podmínkou, aby oblouk extremály obsahoval právě k bodů konjugovaných s počátkem. Extremálami nultého řádu jsou extremály realisující minimum.

Příklad. Veďme dvěma body A a B na povrchu koule, které neleží na konci průměru, hlavní kružnici q. Body A a B ji rozdělí na oblouky ACB a ADB. Menší z těchto oblouků ACB je extremálou nultého řádu pro funkcionál vyjadřující délku oblouku na kouli, větší ADB je extremálou prvního řádu.

§ 41. Steklovova věta o úplnosti systému orthonormovaných funkcí.

Budeme vyšetřovat *orthonormální* soustavu $z_k(x)$, t. j. soustavu, pro niž

$$\int_a^b z_i z_j \, dx = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \tag{36}$$

Z (36) plyne rovnost

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n a_i z_i\right)^2 dx = \sum_{i=1}^n a_i^2. \tag{37}$$

Fourierovými koeficienty pro funkci $y(x)$ vzhledem k posloupnosti $\{z_i\}$ se nazývají čísla

$$c_i = \int_a^b y z_i \, dx.$$

Řada $\sum_{i=1}^\infty c_i z_i(x)$ se nazývá *Fourierovou řadou* pro funkci $y(x)$ a $\sum_{i=1}^n c_i z_i(x)$ *částečným součtem této řady*. Označíme znakem $R_n(x)$ rozdíl

$$y(x) - \sum_{i=1}^n c_i z_i(x) = R_n(x);$$

potom je pro $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_a^b R_n z_j \, dx = \int_a^b \left(y - \sum_{i=1}^n c_i z_i\right) z_j \, dx = c_j - c_j = 0,$$

t. j. $R_n(x)$ je orthogonální ke všem funkcím

$$z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x).$$

Proto z (36) najdeme

$$\int_a^b y^2 \, dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n c_i z_i + R_n\right)^2 dx = \sum_{i=1}^n c_i^2 + \int_a^b R_n^2 \, dx.$$

Z toho plyne, že je

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \leqq \int_a^b y^2 \, dx \tag{38}$$

pro jakékoli n. To znamená, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ konverguje, při čemž

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqq \int_a^b y^2 \, dx. \tag{38'}$$

To je tak zvaná *Parcevalova nerovnost.*

Jestliže Parcevalova nerovnost pro libovolnou funkci $y(x)$ třídy C_2 se změní v rovnost,[3]) pak říkáme, že systém $z_n(x)$ je *úplným* orthonormálním systémem. V tomto případě je $\int_a^b R_n^2 \, dx \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, t. j. částečný součet Fourierovy řady funkce $y(x)$ $\sum_{i=1}^{n} c_i z_i(x)$ konverguje *podle středu* k $y(x)$.

A. M. Ljapunov první dokázal Parcevalovu rovnost pro soustavu trigonometrických funkcí.

Pro systém vlastních funkcí rovnice Sturm-Liouvilleovy platí následující důležitá věta o úplnosti, zahrnující jako zvláštní případ větu Ljapunovou.

Věta 16 (V. A. Steklov). *Posloupnost normovaných vlastních funkcí rovnice Sturm-Liouvilleovy tvoří úplnou orthonormální soustavu.*

Mějme totiž funkcionál $K(y) = \int_a^b (Py^2 + Ry'^2) \, dx$. Vyšetřujme jeho prvních n vlastních funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ a libovolnou funkci $y(x)$ třídy C_2. Zachováme-li předcházející označení, ($y = \sum c_i y_i + R_n$) (viz (8')), máme

$$K(y) = K(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i + R_n) = K(R_n) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 K(y_i) +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n} c_i K(y_i, R_n) + 2\sum_{i \neq j} c_i c_j K(y_i, y_j).$$

Avšak podle věty 3 § 37 je $K(y_i) = \lambda_i$. Dále (věta 4 téhož paragrafu) je

$$K(y_i, R_n) = 0, \quad K(y_i, y_j) = 0 \text{ pro } j \neq i$$

(neboť y_i je orthogonální k y_j pro $j \neq i$, zbytek R_n je orthogonální ke všem y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$).

---

[3]) V tomto případě se změní v rovnost i pro všechny funkce s integrovatelnými čtverci.

Je tedy

$$K(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 + K(R_n). \tag{39}$$

Protože $R_n(x)$ je orthogonální k $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, je podle formule (23)

$$K(R_n) \geqq \lambda_{n+1} \int_a^b R_n^2 \, dx. \tag{40}$$

Čísla $\lambda_n \to +\infty$, a proto, počínaje od některého indexu, jsou všechna kladná. Řada $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2$, počínaje s některého místa, může jenom růst a výraz

$$K(R_n) = K(y) - \sum_{r=1}^{n} \lambda_i c_i^2, \tag{41}$$

počínaje některým místem, může jenom klesat.

Z (40), (41) plyne nerovnost

$$\int_a^b R_n^2 \, dx \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left[K(y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 \right]. \tag{42}$$

Protože výraz (41) neroste a λ_{n+1} konverguje k $+\infty$, je

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b R_n^2 \, dx = 0,$$

a tím je Steklovova věta dokázána.

Steklovova věta platí i při přechodu od váhy 1 k libovolné kladné váze $\varrho(x)$.

§ 42. Souvislost s integrálními rovnicemi.

Inversní operátor. Vyšetřujme operátor Sturm-Liouvilleův:

$$Ly(x) = [R(x) y'(x)]' + P(x) \, . \, y(x),$$

definovaný na soustavě funkcí $\{y(x)\}$ třídy C_2, vyhovujících krajovým podmínkám

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{43}$$

Budeme předpokládat, že b není bodem konjugovaným s a. *Inversní operátor* L^{-1} je definován vztahem

$$L^{-1}[Ly(x)] = y(x). \tag{44}$$

Budeme hledat inversní operátor L^{-1} k diferenciálnímu operátoru L mezi integrálními operátory se spojitým jádrem $K(x, s)$

$$L^{-1}z(x) = \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, \mathrm{d}s. \tag{45}$$

Potom lze rovnici zapsat ve tvaru

$$\int_a^b K(x, s) Ly(s)\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^b K(x, s)\{[R(s)y'(s)]'_s + P(s)y(s)\}\, \mathrm{d}s = y(x). \tag{46}$$

Rovnost (46) musí platit pro všechny funkce z $\{y(x)\}$.

Na výraz stojící za integračním znamením užijme transformací Lagrangeovy a Du Bois-Reymondovy.

Tak integrací po částech dostaneme:

$$\int_a^b K(x, s)[R(s)y'(s)]'_s\, \mathrm{d}s =$$

$$= [K(x, s)R(s)y'(s)]_{s=a}^{s=b} - \int_a^b K'_s(x, s)R(s)y'(s)\, \mathrm{d}s.$$

Předpokládáme-li, že $K(x, s)$ vyhovuje krajovým podmínkám, analogickým podmínkám (43):

$$K(x, a) = K(x, b) = 0, \tag{43'}$$

pak

$$\int_a^b K(x, s)[R(s)y'(s)]'_s\, \mathrm{d}s = -\int_a^b K'_s(x, s)R(s)y'(s)\, \mathrm{d}s.$$

Dále při označení $U(x, s) = \int_a^s K'_s(x, t)P(t)\, \mathrm{d}t$, t. j. $U'_s(x, s) = K(x, s)P(s)$, máme (vzhledem k podmínce (43')):

$$\int_a^b K(x, s)P(s)y(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^b U'_s(x, s)y(s)\, \mathrm{d}s = -\int_a^b U(x, s)y'(s)\, \mathrm{d}s.$$

Nakonec můžeme napsat

$$y(x) = \int_a^x y'(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^x T(x, s)y'(s)\, \mathrm{d}s,$$

kde je

$$T(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a \leqq s \leqq x, \\ 0 & \text{pro } x < s \leqq b. \end{cases}$$

Po provedených transformacích nabude rovnice (46) tvaru

$$\int_a^b [R(s)K'(x, s) + U(x, s) + T(x, s)]y'(s)\,ds = 0. \tag{47}$$

Tato rovnice je splněna pro libovolnou funkci $y(x)$ z $\{y(x)\}$. Podle věty Du Bois-Reymondovy je:

$$R(s)K'(x, s) + U(x, s) + T(x, s) = C = \text{const}$$

neboli podle definice $T(x, s)$:

$$\left.\begin{aligned} &R(s)K'(x, s) + U(x, s) + 1 = C \quad \text{pro } a \leqq s \leqq x, \\ &R(s)K'(x, s) + U(x, s) = C \qquad\ \ \text{pro } x < s \leqq b. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Na intervalu $a \leqq x \leqq s$ $U(x, s)$ je diferencovatelná podle s, $U'_s(x, s) = P(s)$. . $K(x, s)$, což znamená, že i $R(s)K'(x, s)$ je diferencovatelná podle s, při čemž

$$[R(s)K'(x, s)]' + P(x)K(x, s) = 0,$$

t. j. $K(x, s)$, funkce K vyhovuje pro $a \leqq x \leqq s$ Jacobiově rovnici; při tom (viz (43')) je $K(x, a) = 0$; z toho

$$K(x, s) = c_1 \Delta(a, s) \text{ pro } a \leqq s \leqq x. \tag{49}$$

Analogicky v intervalu $x < s \leqq b$ $K(x, s)$ vyhovuje Jacobiově rovnici; při tom je $K(x, b) = 0$; z toho

$$K(x, s) = c_2 \Delta(b, s) \text{ pro } x < s \leqq b. \tag{49'}$$

Podle předpokladu je $K(x, s)$ spojitou funkcí v s a proto v bodě $s = x$ máme

$$K(x, s - 0) = K(x, s + 0). \tag{50}$$

Z (50) plyne (vzhledem ke spojitosti $R(s)$ a $T(x, s)$ v s):

$$\begin{aligned} R(x)K'(x, x - 0) + U(x, x) + 1 &= C, \\ R(x)K'(x, x + 0) + U(x, x) \qquad &= C, \end{aligned}$$

z čehož

$$K'_s(x, x + 0) - K'_s(x, x - 0) = \frac{1}{R(x)}. \tag{51}$$

Tedy funkce $K(x, s)$ jakožto funkce proměnné s vyhovuje rovnici Jacobiově v intervalu (a, x) a (x, b) při počátečních podmínkách (43') a v bodě $s = x$ má její derivace skok rovný $\frac{1}{R(x)}$.

Protože podle předpokladu není b hodnota konjugovaná s a, jsou $\Delta(a, s)$

a $\Delta(b, s)$ dvě nezávislá řešení rovnice Jacobiovy a odpovídající Wronského determinant:

$$W(s) = \Delta(a, s)\Delta'_s(b, s) - \Delta(b, s)\Delta'_s(a, s)$$

není nikde roven nule v intervalu (a, b). Snadno vyčíslíme $W(s)$; vyhovuje rovnici

$$W'(s) = -\frac{R'(s)}{R(s)} W(s),$$

z čehož

$$(\lg W(s) + \lg R(s))' = 0 \text{ a } W(s)R(s) = c = \text{const},$$

na příklad $W(s)R(s) \equiv W(b)R(b)$. Protože ale $\Delta(b, b) = 0$, $\Delta'_s(b . b) = 1$, pak je $W(b) = \Delta(a, b)$, z čehož

$$W(s)R(s) \equiv R(b)\Delta'(a, b).$$

Podle (50) a (51) napíšeme rovnosti (49) a (49′) ve tvaru

$$c_2\Delta(b, x) - c_1\Delta(a, x) = 0, \quad c_2\Delta'(b, x) - c_1\Delta'(a, x) = \frac{1}{R(x)}.$$

Řešíme-li tyto rovnice vzhledem k c_1 a c_2, dostaneme:

$$c_1 = \frac{\Delta(b, x)}{R(x)W(x)} = \frac{\Delta(b, x)}{R(b)\Delta(a, b)},$$

$$c_2 = \frac{\Delta(a, x)}{R(x)W(x)} = \frac{\Delta(a, x)}{R(b)\,\Delta(a, b)}.$$

Je tedy

$$K(x, s) = \begin{cases} \dfrac{\Delta(b, x)\Delta(a, s)}{R(b)\Delta(a, b)} & \text{pro } a \leqq x \leqq s, \\[2ex] \dfrac{\Delta(a, x)\Delta(b, s)}{R(b)\Delta(a, b)} & \text{pro } s \leqq x \leqq b. \end{cases} \tag{52}$$

Jádro $K(x, s)$ se nazývá *Greenovou funkcí* pro rovnici $Ly = 0$ za krajových podmínek (43′). Lze se snadno přesvědčit, že je symetrické:

$$K(x, s) = K(s, x).$$

Příklad. Pro rovnici $y'' = 0$ $R = 1$, $\Delta(a, x) = x - a$, $\Delta(b, x) = x - b$, $\Delta(a, b) = b - a$, a proto

$$K(x, s) = \begin{cases} \dfrac{(b - x)(s - x)}{b - a} & \text{pro } a \leqq x \leqq s, \\[2ex] \dfrac{(x - a)(b - s)}{b - a} & \text{pro } s \leqq x \leqq b. \end{cases}$$

Jestliže $y(x)$ je vlastní funkce operátoru L za podmínek (43):

$$Ly(x) = \lambda y(x),$$

pak, aplikujeme-li na obě části operátor L^{-1}, dostaneme

$$y(x) = \lambda L^{-1}y(x) = \lambda\int_a^b K(x, s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

$y(x)$ je vlastní funkce a číslo λ je *charakteristické číslo* jádra $K(x, s)$.

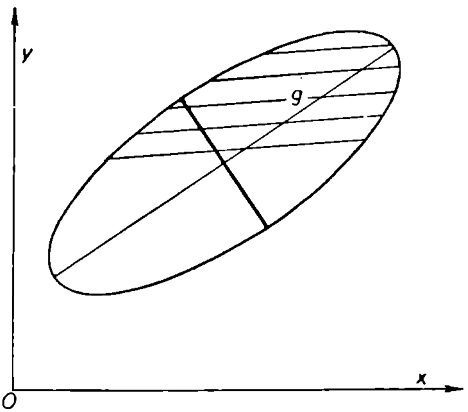
Vyšetřování rovnice Sturm-Liouvilleovy může být převedeno na vyšetřování integrálních rovnic s jádrem rovným Greenově funkci. Úplná theorie rovnic typu Sturm-Liouvilleova s jejich zobecněním na případ rovnic vyšších řádů na základě theorie jedné třídy integrálních rovnic je uvedena v pracích sovětského matematika M. G. Krejna.

ÚLOHY NA MINIMUM MAXIM

§ 43. Formulace úloh.

Dosud jsme vyhledávali maxima nebo minima funkcí a funkcionálů. P. L. Čebyšev po prvé počal vyšetřovat extremální úlohy obecnějšího charakteru, úlohy na „minimum maxim" (viz § 44) nebo, jak se dnes nazývají, úlohy na „minimax". Studium obecných úloh na minimaxy bylo podstatně rozvinuto v posledním desetiletí hlavně v pracích sovětských matematiků (viz sborník „Matematika v SSSR za XV let" a „Matematika v SSSR za XXX let").

Budiž dána funkce f několika proměnných. Považujeme některé z těchto proměnných za pevné (nazveme je proměnnými skupiny A) a najdeme maximum f jako funkci ostatních proměnných (proměnných skupiny B). Toto maximum, které označíme znakem C, závisí na volbě pevně vzatých proměnných skupiny A. Budeme nyní hledat minimum C jako funkce proměnných skupiny A (místo o maximu nebo minimu budeme jindy mluvit o horní a dolní hranici).



Obr. 33.

Uvedeme nejjednodušší příklady podobných úloh.

Příklad 1. Vyšetřujme konvexní rovinnou oblast G. Soustava všech sečen, spojujících dva body hranice, závisí na dvou parametrech — na úhlu, který svírá sečna s osou x a na příklad na parametru y pořadnice středu sečny. Mezi všemi vzájemně rovnoběžnými sečnami (odpovídajícími pevnému úhlu α s osou x) najdeme tu, pro niž délka l je největší (maximum l podle y). Pak zvolíme ten úhel α, pro který příslušná maximální tečna nabývá nejmenší z možných hodnot l_0 (minimum podle α):

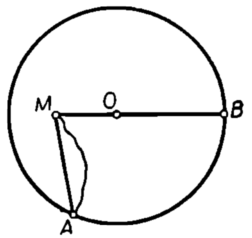
$$l_0 = \min_{\alpha} \max_{y} l.$$

Číslo l_0 se nazývá šířkou konvexního obrazce G. Je-li G elipsa, pak je l_0 právě délka menší osy elipsy (obr. 33).

Příklad 2. Vyšetřujme soustavu průměrů elipsoidu procházejících jeho středem. Každý centrální rovinný řez elipsoidu je elipsa; největší centrální sečna takového elipsoidu je jeho velká osa. Minimální z velkých os pro všechny elipsy centrálních průseků elipsoidu je jeho střední osa.

Lze vyšetřovat úlohy na minimax nejenom pro funkce o konečném počtu proměnných, nýbrž také pro funkcionály.

Příklad 3. Budiž M bod uvnitř kruhu různý od středu (obr. 34). Nejkratší z čar, spojujících M s pevným bodem A kružnice, je úsečka $\overline{MA}$. Nejdelší z těchto úseček je úsečka MB průměru (obsahující střed kruhu).



Obr. 34.

Analogicky, budiž dán bod M a křivka Γ. Minimum hodnot funkcionálu $J = \int F(x, y, y')\, dx$ mezi všemi křivkami, spojujícími bod M s pevným bodem C křivky Γ, je extremála $\overset{\frown}{AC}$. Maxima hodnot J na obloucích extremál $\overset{\frown}{AC}$ pro proměnný bod C, klouzající po Γ, se dosáhne na extremále transversální ke Γ.

Příklad 4. Buďte q a q_1 dvě rovinné křivky dané v parametrickém tvaru rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_0(t), \text{ a } x = x_1(t), \\ y &= y_0(t) \quad\ \ y = y_1(t), \end{aligned} \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Vyšetřujme maximum ϱ výrazu $\sqrt{[x_1(t) - x_0(t)]^2 + [y_1(t) - y_0(t)]^2}$, t. j. maximum vzdáleností mezi body na q a q_1, odpovídajícími jedné a téže hodnotě parametru t. Číslo ϱ závisí na volbě parametrického vyjádření křivek q a q_1. Infimum takových maxim vzhledem ke všem možným parametrickým vyjádřením křivek q a q_1 se nazývá vzdálenost nultého řádu křivek q a q_1. Analogicky se definuje vzdálenost prvního a obecně n-tého řádu těchto křivek. Na str. 42 jsme definovali ε-okolí nultého řádu dané křivky. Skládá se ze všech křivek, jejichž vzdálenost nultého řádu nepřevyšuje ε.

§ 44. Nejlepší polynomiální aproximace podle Čebyševa.

P. L. Čebyšev studoval následující úlohu. Budiž dána v intervalu $[a, b]$ funkce $f(x)$. *Aproximací* funkce $f(x)$ polynomem $P_n(x)$ n-tého stupně se nazývá maximum absolutní hodnoty rozdílu $|f(x) - P_n(x)|$ v intervalu $[a, b]$ (t. j. podle naší terminologie vzdálenost nultého řádu $f(x)$ a $P_n(x)$). Existuje takový mnohočlen n-tého stupně $P_n(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$ (t. j. existují takové jeho koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_n$), pro nějž tato aproximace nabývá nejmenší z možných hodnot. Tato nejmenší hodnota se nazývá *nejlepší aproximací* funkce $f(x)$ polynomy $P_n(x)$ a příslušný mnohočlen $P_n^{(0)}(x)$ je *mnohočlenem nejlepší aproximace* pro $f(x)$. Nejlepší aproximace funkce $f(x)$ polynomy n-tého stupně (v daném intervalu) se označuje E_nf:

$$E_nf = \min_{c_0, c_1, \ldots, c_n} \max|f(x) - (c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n)|.$$

Budiž $E_nf = h$; předpokládejme, že existuje polynom nejlepší aproximace, označme jej

$$P_n^{(0)}(x) = c_0^{(0)}x^n + c_1^{(0)}x^{n-1} + \ldots + c_n^{(0)}.$$

Máme:

$$\max|f(x) - P_n^{(0)}(x)| = h.$$

Uvedeme několik důležitých Čebyševových vět.

Věta 1. *Existuje systém* $(n + 2)$ *čísel* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, *kde* $a \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqq b$, *pro něž rozdíl* $f(x) - P_n^{(0)}(x)$ *nabývá střídavě hodnot* $\pm h$.

Důkaz této věty je založen na dvou pomocných větách, které nyní uvedeme.

Všechny body úsečky $[a, b]$, v nichž je

$$|f - P_n^{(0)}| = h,$$

se rozpadnou na dvě skupiny:

1) na body, pro které je $f - P_n^{(0)} = h$; budeme je nazývat (+)-body;

2) na body, pro které je $f - P_n^{(0)} = -h$; budeme je nazývat (—)-body.

Úsečku, obsahující (+)-body a neobsahující (—)-body, budeme nazývat (+)-úsečkou; analogicky se definuje (—)-úsečka. Symboly $(-1)^k$ - bod, $(-1)^k$ - úsečka označují (+)-bod nebo (—)-bod, (+)-úsečku nebo (—)-úsečku, a to v závislosti na znamení $(-1)^k$.

Pomocná věta I. *Úsečku* $[a, b]$ *lze rozdělit na posloupnost střídajících se* $(+)$ *a* $(-)$*-úseček* $[a, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2], \ldots, [\xi_{k-1}, \xi_k]$, $[\xi_k, b]$, *kde* ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *jsou nulové body funkce* $f - P_n^{(0)}$.

Důkaz. Protože spojitá funkce $|f(x) - P_n^{(0)}(x)|$ dosahuje svého maxima rovného h, pak úsečka $[a, b]$ obsahuje $(+)$ nebo $(-)$-body. Jestliže tato úsečka obsahuje jenom $(+)$ nebo jenom $(-)$-body, pak je sama $(+)$ nebo $(-)$-úsečkou a pomocná věta je tak dokázána.

Nechť nyní úsečka $[a, b]$ obsahuje jak $(+)$, tak $(-)$-body. Označíme x_0 bod ležící nejdále nalevo ze všech $(+)$ a $(-)$-bodů (x_0 může být rovno a). Předpokládejme pro určitost, že x_0 je $(+)$-bodem (případ, když x_0 je $(-)$-bodem, se rozebere podobně).

Označme nyní znakem x_1 bod ležící nejdále nalevo z $(-)$-bodů. Je zřejmé, že $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b$. Připomeňme, že ježto v $(+)$ a $(-)$-bodě rozdíl $(f - P_n^{(0)})$ nabývá hodnot opačných co do znaménka, pak musí být mezi těmito body nulový bod tohoto rozdílu.

Znakem ξ_1 označíme ten nulový bod funkce $f - P_n^{(0)}$, který leží nejblíže zleva k bodu x_1. Ježto x_0 je $(+)$-bod a x_1 je $(-)$-bod, pak mezi nimi musí existovat nulový bod této funkce, a tedy nulový bod ξ_1, který je zleva nejblíže k x_1, leží mezi x_0 a x_1; t. j. $x_0 < \xi_1 < x_1$.

Úsečka $[a, \xi_1]$ *je* $(+)$*-úsečka.* Obsahuje totiž $(+)$-bod x_0 a neobsahuje $(-)$-body, ježto nejdále ležící vlevo z $(-)$-bodů bod x_1 leží napravo od ξ_1: $x_1 > \xi_1$.

Předpokládejme, že jsme již sestrojili posloupnost $(-1)^k$-bodů: $x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_k$. x_i je nejdále vlevo ležící z $(-1)^i$-bodů, které jsou vpravo od x_{i-1}. Mezi body x_{i-1} a x_i, které mají opačná znamení, leží nulový bod rozdílu $f - P_n^{(0)}$. Označíme znakem ξ_i bod, který leží nejblíže zleva k x_i a který je kořenem tohoto rozdílu, t. j. $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Dále nechť je x_{i+1} nejdále nalevo ležící z těch $(-1)^{i+1}$-bodů, které leží napravo od x_i. Mezi x_i a x_{i+1} existuje nulový bod ξ_{i+1} rozdílu $f - P_n^{(0)}$, který leží nejblíže nalevo od x_{i+1}; zřejmě je $x_i < \xi_{i+1} < x_{i+1}$.

Úsečka $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ *je* $(-1)^i$*-úsečka.* Vskutku tato úsečka obsahuje $(-1)^i$-bod x_i. Úsečku $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ neobsahuje $(-1)^{i+1}$-body, t. j. body s opačným znamením. Totiž ten bod z těchto bodů, který je zprava nejblíže bodu x_i, totiž bod x_{i+1}, leží napravo od této úsečky: $x_{i+1} > \xi_{i+1}$. Dále mezi

ξ_{i-1} a x_i nemůže ležet $(-1)^{i+1}$-bod x', který má opačné znamení; potom totiž mezi x' a x_i by musil být nulový bod ξ' funkce $f - P_n^{(0)}$ a měli bychom $\xi_i < x' < \xi' < x_i$, zatím co ξ_i je nulovým bodem této funkce a leží nejblíže nalevo od bodu x_i. Tedy úsečka $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ neobsahuje $(-1)^{i+1}$-body. Dokázali jsme, že tato úsečka je $(-1)^i$-úsečkou.

Nechť nyní pro konstruovaný bod x_k podle předepsaného pravidla nelze konstruovat bod x_{k+1}: pak neexistují napravo od x_k $(-1)^{k+1}$-body. Potom úsečka $[\xi_k, b]$ je $(-1)^k$-úsečkou. A tak sestrojíme posloupnost úseček $[a, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$, ..., $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, ..., $[\xi_k, b]$, které jsou střídavě $(+)$ a $(-)$-úsečkami. Pomocná věta je dokázána.

Pomocná věta 2. *Číslo k v předcházející konstrukci není menší než* $n + 1$.

Budiž totiž $k \leqq n$. Potom

$$Q_n(x) = (-1)^k (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_k)$$

je polynom stupně $\leqq n$. Q_n je kladný pro všechny body všech $(+)$-úseček a záporný pro všechny body všech $(-)$-úseček, konstruovaných při důkazu předešlé pomocné věty. Vskutku, jestliže x leží na $(-1)^i$-úsečce (ξ_i, ξ_{i+1}), pak mezi činiteli $(x - \xi_1)$, $(x - \xi_2)$, ..., $(x - \xi_n)$ je i kladných a $k-i$ záporných; znaménko polynomu $Q_n(x)$ je stejné se znaménkem $(-1)^k (-1)^{k-i} = (-1)^{-i} = (-1)^i$. Dále, jestliže x leží na $(+)$-úsečce (a, ξ_1), pak $Q_n(x)$ je kladné; jestliže x leží na $(-1)^k$-úsečce (ξ_k, b), pak je znamení $Q_n(x)$ rovno znamení $(-1)^k$.

Pro všechny body každé $(+)$-úsečky je $f - P_n^{(0)} > -h$, a pro všechny body každé $(-)$-úsečky je $f - P_n^{(0)} < h$. Existuje takové kladné číslo ε, že pro všechny body všech našich $(+)$-úseček

$$f(x) - P_n^{(0)}(x) \geqq -h + \varepsilon \tag{1}$$

a pro všechny body všech $(-)$-úseček

$$f(x) - P_n^{(0)}(x) \leqq h - \varepsilon. \tag{1'}$$

Dále zvolíme tak malé kladné číslo α, aby všude na $[a, b]$ byla splněna nerovnost

$$|\alpha Q_n(x)| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{2}$$

Budeme vyšetřovat rozdíl $f - [P_n^{(0)} + \alpha Q_n] = (f - P_n^{(0)}) - \alpha Q_n$. Tento rozdíl (rovný nule v bodech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$) je pro všechny body všech (+)-úseček menší než h. Vskutku, tento rozdíl dostaneme odečtením kladného čísla $\alpha Q_n(x)$ od $f(x) - P_n^{(0)}(x) \leqq h$ (kromě bodů ξ_i, kde je tento rozdíl roven nule a proto menší než h). Na druhé straně podle (1) a (2) je

$$f(x) - P_n(x) - \alpha Q_n(x) \geqq (-h + \varepsilon) - \tfrac{1}{2}\varepsilon = -h + \tfrac{1}{2}\varepsilon > -h.$$

Tedy ve všech bodech (+)-úseček je

$$|f(x) - (P_n(x) - \alpha Q_n(x))| < h. \tag{3}$$

Analogicky se dokazuje, že nerovnost (3) je splněna i na všech (—)-úsečkách. To znamená, že je tato nerovnost vždy splněna na $[a, b]$. Avšak potom je

$$\max|f(x) - P_n^{(0)}(x) - \alpha Q_n(x)| < h. \tag{4}$$

$P_n^{(0)}(x) + \alpha Q_n(x)$ jako součet dvou mnohočlenů stupně $\leqq n$ je mnohočlen stupně $\leqq n$. Aproximace funkce $f(x)$ tímto mnohočlenem je menší než h, t. j. menší než aproximace $f(x)$ mnohočlenem $P_n^{(0)}(x)$. To je ve sporu s předpokladem, že $P_n^{(0)}$ je mnohočlenem n-tého stupně, který dává nejlepší aproximaci funkce $f(x)$.

Tím je pomocná věta 2 dokázána.

Existuje ne méně než $(n + 1)$ bodů $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$. To znamená, že existuje ne méně než $(n + 2)$ bodů $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, které jsou střídavě (+) a (—)-body, při čemž $a \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b$. Věta 1 Čebyševova je dokázána.

Věta 2 (obrácená k větě 1). *Jestliže pro mnohočlen n-tého stupně $P_n(x)$ je maximum $|f(x) - P_n(x)|$ na úsečce $[a, b]$ rovno h a jestliže rozdíl $f(x) - P_n(x)$ nabývá na úsečce střídavě $(n + 2)$-krát hodnot $+h$ a $-h$, pak $P_n(x)$ je polynom n-tého stupně nejlepší aproximace pro funkci $f(x)$ na $[a, b]$.*

Nechť totiž mnohočlen n-tého stupně $Q_n(x)$ dává lepší aproximaci než $P_n(x)$ k funkci $f(x)$, t. j.

$$|f(x) - Q_n(x)| < h$$

všude na $[a, b]$.

Podle předpokladu existuje $(n + 2)$ bodů x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$, $a \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < b$, takových, že je

$$f(x_i) - P_n(x_i) = (-1)^i h \text{ (nebo } (-1)^{i+1} h),$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Vyšetřujme rozdíly

$$Q_n(x_i) - P_n(x_i) = [f(x_i) - P_n(x_i)] - [f(x_i) - Q_n(x_i)].$$

První hranatá závorka v pravé části má absolutní hodnotu větší než druhá. Proto jejich rozdíl má znaménko jako první závorka, t. j. znaménko $(-1)^i$. To znamená, že $Q_n(x) - P_n(x)$ pro $x = x_i$ a x_{i+1} nabývá opačných znamení. Proto mezi x_i a x_{i+1} leží kořen ξ_i polynomu $Q_n(x) - P_n(x)$, $x_i < \xi_i < x_{i+1}$. Tedy mnohočlen $Q_n(x) - P_n(x)$ má $(n + 1)$ kořenů $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Avšak $P_n(x)$ a $Q_n(x)$ a tedy i $Q_n(x) - P_n(x)$ jsou mnohočleny stupně $\leqq n$. Tedy poněvadž $Q_n(x) - P_n(x)$ je rovno nule v $(n + 1)$ bodech, musí být rovno nule identicky, t. j. $P_n(x)$ je identické s $Q_n(x)$, což odporuje účiněnému předpokladu. Tím je věta dokázána.

Věta 3. *Existuje jenom jediný polynom n-tého stupně nejlepší aproximace k funkci $f(x)$ na úsečce $[a, b]$.*

Budiž totiž $E_n f = h$ a nechť existují dva polynomy n-tého stupně $P_n(x)$ a $Q_n(x)$, pro něž

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq h, \quad |f(x) - Q_n(x)| \leqq h \text{ všude v } [a, b].$$

Aritmetický průměr $\frac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]$ je rovněž mnohočlenem n-tého stupně, při čemž

$$\begin{aligned} |f(x) - \tfrac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]| &= \\ = \tfrac{1}{2}|[f(x) - P_n(x)] + [f(x) - Q_n(x)]| &\leqq \\ \leqq \tfrac{1}{2}[|f(x) - P_n(x)| + |f(x) - Q_n(x)|] &\leqq h. \end{aligned}$$

Maximum absolutní hodnoty rozdílu

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]|$$

nemůže být menší než h podle definice h. To znamená, že je

$$\max|f(x) - \tfrac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]| = h, \quad a \leqq x \leqq b,$$

t. j. $\frac{1}{2}[P_n(x) + Q_n(x)]$ je rovněž mnohočlen n-tého stupně nejlepší aproximace $f(x)$. Podle věty (1) existují $n + 2$ body x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n + 1$, v nichž

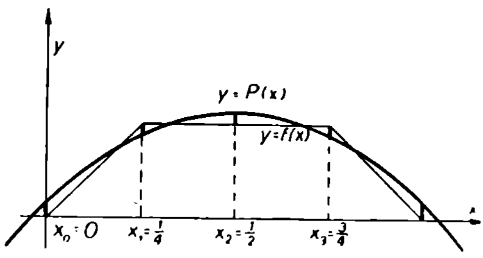
$$\tfrac{1}{2}\{[f(x_i) - P_n(x_i)] + [f(x_i) - Q_n(x_i)]\} =$$
$$= f(x_i) - \tfrac{1}{2}[P_n(x_i) + Q_n(x_i)] = h \text{ nebo } = -h$$

Protože $[f(x_i) - P_n(x_i)]$ a $[f(x_i) - Q_n(x_i)]$ leží mezi $-h$ a $+h$, pak k tomu, aby aritmetický průměr těchto výrazů se rovnal h nebo $-h$, je třeba, aby se $f(x_i) - P_n(x_i)$ a $f(x_i) - Q_n(x_i)$ současně rovnaly h nebo $-h$. Je tedy $P_n(x_i) = Q_n(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$. Polynomy n-tého stupně $P_n(x)$ a $Q_n(x)$, jejichž hodnoty jsou v $(n + 2)$ bodech stejné, jsou identické, t. j. $P_n(x) \equiv Q_n(x)$. Tím je jednoznačnost mnohočlenu nejlepší aproximace dokázána.

Příklad. Vyšetřujme na úsečce $[0, 1]$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } \frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}, \\ 1 - x & \text{pro } \frac{3}{4} \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Vyšetřujme mnohočlen $P(x) = x^2 - x + \frac{1}{32}$. V pěti bodech $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$ je rozdíl $f(x) - P(x)$ roven postupně $\frac{1}{32}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{32}$. Při tom, tak je patrno z obr. 35, jsou tyto body maxima rozdílu $f(x) - P(x)$. Podle vět 2 a 3 je $P(x)$ jediný mnohočlen stupně $\leqq 3$, který dává nejlepší aproximaci funkce $f(x)$ na úsečce $[0, 1]$, a tato nejlepší aproximace jest $E_3 f(x) = \frac{1}{32}$. Pro jakýkoli jiný mnohočlen $Q(x)$ stupně $\leqq 3$ je $\max|f(x) - Q(x)| > \frac{1}{32}$.



Obr. 35.

Mnohočleny minimálně se lišící od nuly. Vyšetříme aproximaci v intervalu $[-1, 1]$ funkce x^n polynomy $P_{n-1}(x)$ stupně $\leqq n - 1$. Rozdíl $x^n - P_{n-1}(x)$ je polynom n-tého stupně, u něhož je koeficient u nejvyššího stupně roven jedné. Obráceně, každý takový mnohočlen $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ se dá vyjádřit ve tvaru $x^n - P_{n-1}(x)$, kde $P_{n-1}(x) = -a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n$. Nejlepší aproximací $E_n x^n$ je infimum $\max|x^n - P_{n-1}(x)|$ pro všechny mnohočleny P_{n-1} stupně $\leqq n - 1$

v intervalu $[-1, 1]$, neboli, což je totéž, infimum maxim $|x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n|$ v intervalu $[-1, 1]$ vzhledem ke všem mnohočlenům n-tého stupně s koeficientem 1 u x^n:

$$E_n x^n = \inf_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n|.$$

Mnohočlen $x^n - P_n^{(0)}(x) = x^n + a_1^{(0)}x^{n-1} + a_2^{(0)}x^{n-2} + \ldots + a_n^{(0)}$, pro který je $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |x^n - P_n^{(0)}(x)| = E_n x^n$, se nazývá mnohočlenem *minimálně se lišícím od nuly.*

Jak dokázal P. L. Čebyšev, mnohočlen minimálně se lišící od nuly n-tého stupně je roven výrazu

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$$

a minimální odchylka je

$$E_n x^n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pomocná věta. *Funkce*

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

je mnohočlenem n-tého stupně

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-4} + \ldots,$$

a je sudý nebo lichý podle toho, je-li funkce x^n sudá nebo lichá, při čemž koeficient u nejvyšší mocniny tohoto mnohočlenu je roven 2^{n-1}.

Dokážeme tuto větu methodou matematické indukce. Máme

$$T_1(x) = \cos \arccos x = x,$$
$$T_2(x) = \cos 2 \arccos x = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Věta platí pro $n = 1, 2$.

Nechť věta platí pro všechna T_i pro $i \leq n - 1$. Dokážeme její platnost pro T_n.

Podle tohoto předpokladu je

$$T_{n-1} = \cos[(n-1) \arccos x] = $$
$$= 2^{n-2}x^{n-1} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-5} + \ldots,$$
$$T_{n-2} = \cos[(n-2) \arccos x] = $$
$$= 2^{n-3}x^{n-2} + c_1x^{n-4} + \ldots$$

Protože je

$$\cos nt + \cos(n - 2)t = 2\cos(n - 1)t \cos t,$$
$$\cos nt = 2\cos t \cos(n - 1)t - \cos(n - 2)t,$$

máme

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos n\,(\arccos x) = \\ &= 2\cos \arccos x \cos[(n-1)\arccos x] - \\ &- \cos[(n-2)\arccos x] = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Použijeme-li formulí pro T_{n-1} a T_{n-2}, obdržíme:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 2x(2^{n-2}x^{n-1} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-5} + \ldots) - \\ &\quad - (2^{n-3}x^{n-2} + c_1x^{n-4} + \ldots) = \\ &= 2^{n-1}x^n + (2b_1 - 2^{n-3})x^{n-2} + (2b_2 - c_1)x^{n-4} + \ldots, \end{aligned}$$

t. j. $T_n(x)$ je rovněž mnohočlen n-tého stupně s koeficientem 2^{n-1} u x^n a $T_n(x)$ je funkce lichá nebo sudá podle toho, zda x^n je lichá nebo sudá. Pomocná věta je dokázána.

Dokážeme, že mnohočlen $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + c_n x^{n-1} + \ldots$ *je mnohočlenem n-tého stupně, který se minimálně liší od nuly,* neboli, když píšeme

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n - P_{n-1}^{(0)}(x),$$

že mnohočlen $P_n^{(0)}(x)$ je mnohočlenem stupně $\leqq n - 1$, který dává nejlepší aproximaci pro funkci x^n v intervalu $[0, 1]$.

Máme $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos nt$, kde $t = \arccos x$. Když x probíhá úsečku $[0, 1]$, $t = \arccos x$ probíhá úsečku $[0, \pi]$. Zřejmě v intervalu $[0, \pi]$ $\cos nt$ nabývá střídavě $(n + 1)$kráte maxim a minim rovných $+1$ a -1 (v bodě $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi$). Tedy mnohočlen $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos nt$ nabývá střídavě $(n + 1)$kráte maxim a minim rovných $\frac{1}{2^{n-1}}$ v bodech $\cos \frac{i\pi}{n}$, $i = n, n - 1, \ldots, 2, 1, 0$. Podle věty 2 mnohočlen $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n - P_n^{(0)}(x)$ je mnohočlenem n-tého stupně minimálně se lišícím od nuly neboli, což je totéž, $P_{n-1}^{(0)}(x)$ dává nejlepší aproximaci funkce x^n v intervalu $[-1, 1]$ mezi všemi mnohočleny stupně $\leqq n-1$.

Protože je

$$\cos nt = \tfrac{1}{2}[\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n + (\cos t - \mathrm{i}\sin t)^n],$$
$$\mathrm{i}\sin t = \sqrt{-1}\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\cos t - 1},$$

jest

$$\cos nt = \tfrac{1}{2}[(\cos t + \sqrt{\cos^2 t - 1})^n + (\cos t - \sqrt{\cos t^2 - 1})^n].$$

Klademe-li $\cos t = x$ a tedy $\cos nt = T_n(x)$, dostaneme

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n].$$

Uvedeme vyjádření pro mnohočleny několika prvních stupňů minimálně se lišící od nuly:

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= x,\\
\tfrac{1}{2}T_2(x) &= x^2 - \tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{4}T_3(x) &= x^3 - \tfrac{3}{4}x,\\
\tfrac{1}{8}T_4(x) &= x^4 - \tfrac{1}{8}x^2,\\
\tfrac{1}{16}T_5(x) &= x^5 - \tfrac{5}{4}x^3 + \tfrac{5}{16}x.
\end{aligned}$$

S chybou menší než $\frac{1}{16}$ můžeme nahradit v intervalu $[-1, 1]$ polynom x^5 polynomem $\frac{5}{4}x^3 - \frac{5}{16}x$, při čemž tento polynom mezi všemi mnohočleny stupně $\leqq 4$ nejlépe aproximuje funkci x^5 v intervalu $[-1, 1]$.

§ 45. Minimaxová theorie vlastních hodnot.

Jako druhý příklad extremálních úloh na minimaxy uvedeme theorii vlastních hodnot. V § 38 uvedená extremální definice n-té vlastní hodnoty λ_n Sturm-Liouvilleova operátoru L je definice rekurentní. Uvedeme jinou její extremální definici.

Buďte $\varrho_1(x), \varrho_2(x), \ldots, \varrho_{n-1}(x)$ funkce třídy C, definované v intervalu $[a, b]$. Označíme znakem $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$ minimum funkcionálu

$$K(y) = \int_a^b (Ry'^2 + Py^2)\,\mathrm{d}x$$

za podmínek

$$\int_a^b y^2\,dx = 1,\quad \int_a^b \varrho_i(x)\,y(x)\,dx = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$y(a) = y(b) = 0.$$

Věta 4. *Supremum $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$ pro libovolné funkce ϱ_i je rovno λ_n.*

K důkazu pokládejme z počátku funkce $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ za pevné. Buďte $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ normované vlastní funkce odpovídající prvním n vlastním hodnotám $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Vyšetřujme n-parametrovou soustavu funkcí:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

a zvolme c_i tak, aby bylo vyhověno $(n-1)$ podmínkám:

$$\int_a^b \varrho_i\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\Big)\,dx = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b \varrho_i y_j\,dx = 0,\quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5}$$

Rovnice (5) tvoří vzhledem k n neznámým c_j soustavu $(n-1)$ lineárních homogenních rovnic. Proto vždy existuje soustava hodnot $c_1, c_2, \ldots, c_n$, při čemž $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$, vyhovujících těmto rovnicím. Násobením konstantou lze dosíci, aby tato soustava hodnot c_i vyhovovala rovněž rovnicím

$$\int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\Big)^2 dx = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1. \tag{6}$$

Funkce $Y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, odpovídající těmto hodnotám c_i, je funkce třídy přípustných funkcí ve shora uvedené variační úloze, pro které infimum hodnot funkcionálu K je rovno $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$, a proto

$$\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}) \leqq K\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\Big). \tag{7}$$

Dále je

$$K\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 K(y_i) + 2\sum_{i\neq j} c_i c_j K(y_i y_j).$$

Avšak na základě věty 4 § 37 a podle orthogonality vlastních funkcí y_i a y_j je $K(y_i, y_j) = 0$. Dále je $K(y_j) = \lambda_j$.

Proto máme

$$\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}) \leqq K(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j^2.$$

Pravou stranu (7') zvětšíme, když zaměníme koeficienty u c_j^2 největším z těchto koeficientů, t. j. koeficientem λ_n:

$$\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}) \leqq \lambda_n \sum_{j=1}^{n} c_j^2 = \lambda_n.$$

Budiž nyní $\varrho_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Věta 7 § 38 tvrdí, že je

$$\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \lambda_n.$$

Tedy supremum $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$ je rovno λ_n a dosahuje se ho, když je $\varrho_i(x) = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Tedy

$$\lambda_n = \sup_{\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}} \inf_{y(x) \subset C(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})} K(y).$$

Z minimaxové definice vlastních hodnot plyne věta 9 § 38. Vskutku, jestliže $P(x)$ a $R(x)$ ve výrazu $K(y) = \int_a^b (Ry'^2 + Py^2)\, dx$ rostou, pak roste pro každou funkci $y(x)$ hodnota $K(y)$, což znamená, že roste i supremum $K(y)$ pro funkce $y(x)$, vyhovující podmínkám (5), (6), t. j. $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$, a i roste infimum $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$, t. j. λ_n.

Právě tak plyne z minimaxové definice vlastních hodnot věta *o klesání vlastních hodnot $\lambda_n(b)$ při růstu horní meze b.*

Budiž totiž $a < b_1 < b$. $\lambda_1(b)$ se definuje jako supremum $\lambda(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$ minim $K_i(y)$ za konstantních podmínek

$$\int_a^b y^2\, dx = 1, \quad y(a) = y(b) = 0 \tag{8}$$

a proměnných podmínek

$$\int_a^b \varrho_i y\, dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{9}$$

λ_{b_1} je supremum $\lambda^{(b_1)}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1})$, kde $\lambda^{(b_1)}(\varrho_1\ \varrho_2\ \ldots\ \varrho_{n-1})$ je definováno jako minimum K_{b_1} za podmínek, které dostaneme záměnou horní meze b menším číslem b_1. Lze říci, že $\lambda^{(b_1)}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1})$ se definuje jako minimum K_b za podmínek (8), (9) a za dodatečné podmínky:

$$y(x) = 0 \text{ pro } b_1 < x < b. \tag{9'}$$

Zavedení dodatečné podmínky zužuje třídu funkcí, mezi nimiž se hledá minimum, a proto minimum může jenom vzrůsti, t. j.:

$$\lambda^{(b_1)}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}) \geqq \lambda^{(b)}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}). \tag{10}$$

Proto i suprema výrazů, stojících na levé a pravé straně nerovnosti (10), jsou v témže vztahu:

$$\lambda_n(b_1) \geqq \lambda_n(b). \tag{11}$$

Zbývá dokázat, že rovnost

$$\lambda_n(b_1) = \lambda_n(b) = \lambda \tag{12}$$

pro $b_1 > b$ nemůže nastat. Vskutku, podle (9′) plyne: pro všechna b', ležící mezi b_1 a b, je $\lambda_n(b') = \lambda$.

Označíme jako $z_\lambda(x)$ netriviální řešení rovnice Sturm-Liouvilleovy $Ly = \lambda y$, vyhovující krajové podmínce $y(a) = 0$. Všechna jiná řešení naší rovnice o téže krajové podmínce (až na konstantního činitele) jsou totožná s $z_\lambda(x)$. Speciálně pro jakékoli b' z intervalu $[b_1, b]$ je vlastní funkce Ly při krajových podmínkách $y(a) = y(b') = 0$, odpovídající n-té vlastní hodnotě $\lambda_n(b') = \lambda$, rovna $z_\lambda(x)$. Je tedy $z_\lambda(b') = 0$ pro $b_1 \leqq b' \leqq b$. Avšak řešení $z_\lambda(x)$, které je identicky rovno nule v intervalu $[b_1, b]$, je identicky rovné nule na celé přímce vzhledem k definici $z_\lambda(x)$.

Tak předpoklad $\lambda_n(b_1) = \lambda_n(b)$ vede ke sporu. Platí ostrá nerovnost $\lambda_n(b_1) > \lambda_n(b)$.

Tvar uvedené minimaxové definice vlastních hodnot lze nepatrně změnit.

Budeme vyšetřovat lineární funkcionál $J(y)$, definovaný na funkcích $y(x)$, $a \leqq x \leqq b$, třídy C_2. Příkladem takového lineárního funkcionálu může být funkcionál

$$J(y) = \int_a^b \varrho(x)\, y(x)\, dx,$$

kde $\varrho(x)$ je funkce třídy C_2. Jiným příkladem může sloužit hodnota funkce $y(x)$ v pevném bodě x_0 úsečky $[a, b]$:

$$J(y) = y(x_0)$$

atp.

Označíme znakem $\lambda(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1})$ infimum funkcionálu $K(y)$ za pevných podmínek

$$y(a) = y(b) = 0; \int_a^b y^2 \, dx = 1$$

a za $(n - 1)$ proměnných podmínek $J_i(y) = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Stejně jako nahoře dokážeme

$$\lambda(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}) \geqq \lambda_n.$$

Na druhé straně, jestliže

$$J_i^{(0)}(y) = \int_a^b y_i(x) \, y(x) \, dx, \; i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

kde $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ je prvních $(n - 1)$ vlastních funkcí operátoru L, máme

$$\lambda(J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \ldots, J_{n-1}^{(0)}) = \lambda_n,$$

t. j. *n-tá vlastní hodnota λ_n je supremum funkce $\lambda(J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \ldots, J_{n-1}^{(0)})$ pro libovolné lineární funkcionály $J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \ldots, J_{n-1}^{(0)}$:*

$$\lambda_n = \sup_{J_0, J_1, \ldots, J_{n-1}} \; \inf_{\substack{J_i(y) = 0, \, i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ y(a) = y(b) = 0, \; \int_a^b y^2 \, dx = 1}} K(y)$$

Krajové podmínky $y'(a) = y'(b) = 0$. Budeme nyní vyšetřovat místo krajových podmínek $y(a) = y(b) = 0$ jiné krajové podmínky, a to:

$$y'(a) = y'(b) = 0. \tag{13}$$

Rovnici Sturm-Liouvilleovu:

$$Ly = \lambda y \tag{14}$$

pro krajové podmínky $y'(a) = y'(b) = 0$ dostaneme, jestliže budeme řešit úlohu o extrému funkcionálu $K(y)$ pro „isoperimerickou“ podmínku $\int_a^b y^2 \, dx = 0$ a pro volné konce, t. j. když třídu přípustných křivek tvoří libovolné křivky třídy C_1, vyhovující podmínce $\int_a^b y^2 \, dx = 1$, jejichž koncové body leží na přímkách $x = a$, $x = b$.

Vlastní funkcí pro L při krajových podmínkách (13) se nazývá netriviální řešení rovnice (14) za podmínek (13), odpovídající hodnota λ se nazývá *vlastní hodnotou* L. Operátor L za podmínek (11) se jeví jako dříve symetrickým.

Věty § 38 a věty § 39 zůstanou v platnosti i při přechodu ke krajovým podmínkám (13). Nechť vlastní hodnoty operátoru L, uspořádané podle velikosti, jsou $\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \dots$

Označíme znakem $\bar{\lambda}(J_1, J_2, \dots, J_{n-1})$ supremum funkcionálu $K(y) = \int_a^b (Ry'^2 + Py^2) \, dx$ za pevných podmínek $\int_a^b y^2 \, dx = 1$ a dodatečných podmínek

$$J_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

kde J_i jsou libovolné lineární funkcionály. Tak jako dříve ukážeme, že

$$\bar{\lambda}_n = \sup \bar{\lambda}(J_1, J_2, \dots, J_{n-1}),$$

a tohoto suprema se dosáhne, když je

$$J_i(y) = \int_a^b y_i(x) \, y(x) \, dx, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Vlastní hodnoty $\bar{\lambda}_n$ jsou vázány s vlastními hodnotami λ_n dřívější krajové úlohy těmito vztahy:

$$\lambda_n \geqq \bar{\lambda}_n \geqq \lambda_{n-2}. \tag{15}$$

Vskutku, $\lambda_n(J_1, J_2, \dots, J_{n-1})$ a $\bar{\lambda}_n(J_1, J_2, \dots, J_{n-1})$ se definují jako infima funkcionálu $K(y)$ za jistých podmínek, při čemž v definici $\lambda_n(J_1, J_2, \dots, J_{n-1})$ jsou položeny pevné dodatečné podmínky $y(a) = y(b) = 0$. Zavedení dodatečných podmínek zužuje třídu přípustných čar a může infimum jenom zvětšit, t. j.

$$\lambda_n(J_1, J_2, \dots, J_{n-1}) \geqq \bar{\lambda}_n(J_1, J_2, \dots, J_{n-1}).$$

Přejdeme-li v obou stranách nerovnosti k supremu, dostaneme první z nerovností (15):

$$\lambda_n \geqq \bar{\lambda}_n$$

Dále $\lambda_{n-2}(J_3, J_4, \dots, J_{n-1})$ se definuje jako infimum $K(y)$ za podmínky

$\int\limits_a^b y^2 \, dx = 1$, $(n - 3)$ proměnných podmínek $J_3(y) = J_4(y) = \ldots =$ $= J_{n-1}(y) = 0$ a dvou pevných podmínek

$$J_1^*(y) = y(a) = 0, \; J_2^*(y) = y(b) = 0.$$

Můžeme napsat

$$\lambda_{n-2}(J_3, J_4, \ldots, J_{n-1}) = \bar{\lambda}_n(J_1^*, J_2^*, J_2, J_4 \ldots, J_{n-1}),$$

$\bar{\lambda}_n$ je supremum $\lambda(J_1, J_2, J_3, \ldots, J_{n-1})$ pro všechny možné $J_1, J_2, J_3, \ldots$ $\ldots, J_{n-1}$; λ_{n-2} je supremum $\bar{\lambda}_n(J_1^*, J_2^*, J_3, \ldots, J_{n-1})$ pro pevná J_1^*, J_2^* a libovolné funkcionály $J_3, \ldots, J_{n-1}$. Ponecháme-li část proměnných konstantní, můžeme supremum jenom zmenšit, z čehož plyne, že

$$\bar{\lambda}_n \geqq \lambda_{n-2}.$$

Dokázali jsme tak druhou z nerovností (15).

Příklad. Pro rovnici $y'' - \lambda y = 0$ při krajových podmínkách $y'(0) = y'(1) = 0$ jsou vlastními funkcemi 1, $\cos \pi x$, $\cos 2\pi x$, $\ldots$, $\cos(n - 1)\pi x$, $\ldots$; příslušnými vlastními hodnotami jsou hodnoty $0, \pi^2, 4\pi^2, \ldots, (n - 1)^2\pi^2, \ldots$ Zde je $\bar{\lambda}_n =$ $= (n - 1)^2\pi^2$.

Na druhé straně pro tutéž rovnici za podmínek $y(0) = y(1) = 0$ jsou vlastními funkcemi funkce $\sin n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$, a $\lambda_n = n^2\pi^2$. Nerovnost $\lambda_n \geqq \lambda_n \geqq \lambda_{n-2}$ přejde zde ve zřejmou nerovnost

$$n\pi^2 > (n - 1)^2\pi^2 > (n - 2)^2\pi^2.$$

Jiná extremální definice λ_n a $\bar{\lambda}_n$. Lze uvést jinou definici vlastních hodnot λ_n (a $\bar{\lambda}_n$).

Budiž $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$, $a \leqq x \leqq b$, n lineárně nezávislých funkcí třídy C_2 splňujících podmínky

$$z(a) = z(b) = 0.$$

Označíme znakem $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ soustavu funkcí $y(x)$ tvaru $\sum\limits_i c_i z_i(x)$ vyhovujících podmínce $\int\limits_a^b y^2 \, dx = 1$ a znakem $\lambda_n\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ maximum $K(y)$ pro funkce $y(x)$ ze soustavy $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.

Lze zvolit n konstant c_i tak, aby funkce $y(x) = \sum\limits_{i=1}^n c_i z_i(x)$ byla orthogonální k $(n - 1)$ vlastním funkcím $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n-1}(x)$. Lze tudíž dosíci, aby funkce $y(x) = \sum c_i z_i$ vyhovovala podmínce normování. Na základě věty 4 máme:

$$K(y) \geqq \lambda_n.$$

Je však $y(x) \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Platí tudíž

$$\lambda\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} = \max_{y \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}} K(y) \geqq \lambda_n.$$

Jestliže $z_i(x) = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pak $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ obsahuje n-tou normovanou vlastní funkci $y_n(x)$. Dokázali jsme již, že maximum $K(y)$ pro $y \subset \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ je rovno λ_n.

Tedy *n-tá vlastní hodnota λ_i je minimum $\lambda\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, jehož se dosahuje, když $z_i(x) = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\lambda_n = \min_{[\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}]} \max_{y \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}} K(y). \tag{16}$$

Definice $\bar{\lambda}_n$ je dána formulí, analogickou formuli (16), jenom na funkce $z_1, z_2, \ldots, z_n$, definující soustavu $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, se již nekladou krajové podmínky.

VĚCNÝ REJSTŘÍK

OBSAH

K R U H

svazek

40

M. A. Lavrent'jev a L. A. Ljusternik

KURS VARIAČNÍHO POČTU

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952. Hlavní redaktor Dr Milan Skalník, redaktorka Zora Knichalová, odborně přehlédl Dr Václav Alda a Dr Jiří Seitz, technický redaktor František Končický, literární redaktorka Marta Střídová, graficky upravil Miloš Hrbas. - Z nové sazby písmem Extended vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 05 - I. vydání, náklad 2200 výtisků (1—2200), 30103/2—67094/51/2/III/1 - 194 - 1% - Sazba 31. III. 1952, tisk 30. X. 1952 - 16,25 plánovacích archů, 10,90 autorských archů, 11,16 vydavatelských archů - 260 stran, 35 obrázků
Papír 221-07, formát 61 × 86, 80 g

Cena brož. 196 Kčs

DT 519

KRUH

svazek

40

Cena brož. 196 Kčs

301 03-2

DT 519