Úvod do integrálního počtu

Vojtěch Jarník (author): Úvod do integrálního počtu. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1938.

KRUH

SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ

JEDNOTOU ČSL. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za redakce

B. Bydžovského, M. Valoucha a A. Žáčka

Svazek 12

Vojtěch Jarník

ÚVOD DO INTEGRÁLNÍHO POČTU

ÚVOD
DO INTEGRÁLNÍHO POČTU

Napsal

dr. VOJTĚCH JARNÍK

profesor Karlovy university v Praze

NÁKLADEM

JEDNOTY ČSL. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

TISKL „PROMETHEUS“ PRAHA VIII

V PRAZE 1938

Obsah.

KAPITOLA V.

Obsah rovinných oborů a délka rovinné křivky.

DODATEK.

Předmluva.

Tato knížka je myšlena jako první úvod do integrálního počtu pro začátečníky, a to jako pokračování Kösslerova „Úvodu do počtu diferenciálního" (Kruh, sv. 4, 1926). Předpokládám ovšem znalost diferenciálního počtu v rozsahu asi Kösslerovy knížky, přes to však v kap. I opakuji některé věty z Kösslerovy knížky a připojuji k nim některé doplňky; tak zvláště dokazuji v I. kap. větu o horní a dolní hranici, která v Kösslerově knížce není. V kap. II probírám Cauchy-Riemannovu teorii určitého integrálu, v kap. III teorii neurčitého integrálu, v kap. IV konečně integrály funkcí racionálních a některé jiné integrály, jež lze na integrály racionálních funkcí převésti. Z geometrických aplikací uvádím v kap. V jen dvě drobné ukázky.

Neměl jsem v úmyslu podati nic více než co možná spolehlivý a při tom snadno srozumitelný výklad prvních počátků integrálního počtu; proto jsem výběr látky velmi omezil. To jsem mohl učiniti tím spíše, že máme v české literatuře výborný a obšírný spis o integrálním počtu od prof. K. Petra (Počet integrální, 2. vyd., 1931); doufám, že čtenář, který moji knížku prostuduje, bude si moci bez obtíží své vědomosti doplniti z Petrovy knihy. Vedle Cauchy-Riemannovy teorie určitého integrálu, na kterou jsem se omezil, existují ještě jiné novější teorie, z nichž teorie Lebesgueova je dnes již nepostradatelnou pro každého matematika, zabývajícího se analysí. Vzorná kniha prof. E. Čecha „Bodové množiny, díl I" (1936), jež poskytuje čtenáři jasný přehled moderní nauky o funkcích, spočívající na množinovém základě, obsahuje ve své čtvrté kapitole obšírný výklad Lebesgueovy teorie integrálu.

Podotýkám, že jsem se ve své knížce omezil zásadně jen na čísla reálná. Pouze v odst. 1 a 2 kapitoly IV, jež vlastně patří do algebry[1]) a ne do integrálního počtu, jsem připustil též čísla komplexní. Byl bych se sice i zde mohl komplexním číslům vy-

[1]) V těchto odstavcích jsem si také bez důkazu vypůjčil některé věty z algebry.

hnouti, ale zvolený způsob se mně zdál pro začátečníka nejsnáze srozumitelným.

Čtenáři, který se z této knížky po prvé učí integrálnímu počtu, doporučuji, aby současně se studiem knížky propočítal též všechna cvičení (prosím též čtenáře, aby nevynechával poznámky pod čarou); cvičení jsou volena většinou jako bezprostřední aplikace vyložené látky.[2]) Pouze cvičení ke kap. II a cvičení 20—23 ke kap. III jsou trochu jiného rázu, rozšiřujíce látku v knížce probranou; komu by tato cvičení dělala svojí obecností obtíže, učiní dobře, nebude-li se jimi při prvním čtení knížky příliš zdržovati a vrátí-li se k nim — a též ke kap. II — ještě jednou po prostudování celé knížky. Věty 1—68 jsou očíslovány jen pro lepší přehled. Čtenář je má ovšem všechny ovládati, ale tím není řečeno, že by se jim musil učit nazpaměť: mnohé z nich jsou tak snadné (na př. většina vět z kap. I i II), že si je čtenář dovede vždy vybaviti, i když se jim nikdy neučil, jen když si je a jejich důkazy jednou v životě s porozuměním pročetl.

Nebude-li tato knížka obsahovati příliš mnoho omylů, je to především zásluhou těch, kteří četli můj rukopis nebo korektury a jimž jsem zavázán díky za mnohé cenné podněty a rady; jsou to pp. prof. dr. J. Kaucký, doc. dr. Vl. Knichal, prof. dr. Vl. Kořínek, dr. K. Rössler a dr. Št. Schwarz.

Pp. dr. Knichal a dr. Schwarz pořídili rejstřík a slovníček, p. dr. Schwarz narýsoval obrazce. Jednotě čsl. matematiků a fysiků děkuji za přijetí této knížky do sbírky Kruh a tiskárně Prometheus za vzorné vytištění knížky.

V Praze, v listopadu 1937.

Vojtěch Jarník.

---

[2]) Cvičení, jež vyžadují více vtipu, najde čtenář v knize Petrově.

Vysvětlivky.

Knížka je rozdělena na pět kapitol, číslovaných římskými číslicemi. Jednotlivé kapitoly jsou rozděleny na odstavce, číslované arabskými číslicemi. Věty jsou číslovány jednotně (věta 1 až 68), s výjimkou vět A, B, C a A', B', C' na str. 22—23 a 24—25; to jsou speciální věty o „složených funkcích", kterých se užívá jen na jednom místě (ve větě 61, 62, 64). Číslování vět slouží jen k jednoduššímu citování; kde tento důvod odpadá, nejsou věty číslovány (tak hlavně v kap. IV, odst. 3—8, v kap. V a v závěrečné „Poznámce"). Vzorce (1), (2), ... jsou číslovány v každé kapitole zvláště, propočítané příklady mají zvláštní číslování v každém odstavci.

Knížka je myšlena jako pokračování knížky M. Kösslera „Úvod do počtu diferenciálního" (Kruh, sv. 4, 1926); tuto knížku cituji slovem „Kössler" a udáním stránky. Předpokládám ovšem, že čtenář ovládá látku, obsaženou v Kösslerově knížce. Přes to však opakuji v I. kap. některé věci z této knížky a připojuji k nim některé doplňky. Tato I. kap. má tedy charakter kapitoly přípravné; integrálním počtem se zabývají kap. II—V.

V celé knize mluvím jen o *reálných* číslech; slovo „číslo" značí tedy vždy reálné číslo, slova „všechna čísla" značí „všechna reálná čísla" atd. Jedinou výjimku tvoří odst. 1 a 2 v kap. IV, které se netýkají integrálního počtu, nýbrž jsou věnovány některým pomůckám z algebry; v těchto dvou odstavcích (ale též *jen* v těchto dvou odst.) značí slovo „číslo" obecně číslo komplexní a předpokládá-li se, že jde o číslo reálné, je tato okolnost vždy zvláště vytčena.

V souhlase s Kösslerovou knížkou (Kössler 16) užívám často slova „bod" místo slova „reálné číslo". Je-li $x \geqq 0$, nazývám číslo x *nezáporným*; je-li $x \leqq 0$, nazývám číslo x *nekladným*. Pro zlomky užívám leckdy pro úsporu místa dělítka místo zlomkové čáry; tak píši někdy $a : b$ místo $\frac{a}{b}$, nebo $(a + b) : (c + d)$ místo $\frac{a+b}{c+d}$; činím to však jen v nejjednodušších případech, kde tím netrpí přehlednost. Z téhož důvodu užíváme někdy šikmé zlomkové čáry, píši tedy a/b místo $\frac{a}{b}$. Jest ovšem $a+b/c=$ $= a + \frac{b}{c}$, ale $(a + b)/c = \frac{a+b}{c}$ a pod.

KAPITOLA I.

Přehled některých vět z diferenciálního počtu.

Tato úvodní kapitola obsahuje přehled některých vět, které v dalších kapitolách budeme potřebovati; většina těchto vět je obsažena v Kösslerově „Úvodu do počtu diferenciálního". Mimo to obsahuje tato kapitola též některé doplňky, které v Kösslerově knížce nejsou.

1. Množiny, hlavně množiny číselné. Horní a dolní hranice. Slovem *„množina"* (nebo též *„množství"*) označujeme souhrn jakýchkoliv předmětů; jednotlivé předměty této množiny nazývají se jejími „prvky" čili „elementy". Příklady: 1. Množina všech celých čísel kladných, menších než 10: tato množina se skládá z devíti prvků: tyto prvky jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. — 2. Množina všech čísel kladných, menších než 1: prvky jsou všechna čísla x, vyhovující vztahům $0 < x < 1$. — 3. Množina všech bodů v rovině (opatřené dvěma pravoúhlými osami souřadnými x, y), jež leží uvnitř kružnice o poloměru jednotkovém, jež má střed v počátku: prvky této množiny jsou všechny body v rovině, jejichž souřadnice x, y vyhovují nerovnosti $x^2 + y^2 < 1$. — 4. Množina všech trojúhelníků v rovině R: prvky jsou jednotlivé trojúhelníky, ležící v rovině R.

Množiny, jež mají konečný počet prvků, nazývají se *konečné*; množiny, jež mají nekonečný počet prvků, nazývají se *nekonečné*. V předcházejících čtyřech příkladech byla první množina konečná, ostatní tři nekonečné.[1])

Množiny, jejichž prvky jsou reálná čísla, budeme nazývati množinami číselnými; a těmi se nyní budeme hlavně zabývati. Příklady:

M_1 budiž množina všech celých kladných čísel. Prvky jsou tedy čísla 1, 2, 3, . . .

[1]) Pro zjednodušení zavádíme též pojem „množina prázdná" — to je množina, jež neobsahuje vůbec žádný prvek. Na př. množina všech prvočísel, jež jsou větší než 7 a současně menší než 11, je množina prázdná (neboť mezi 7 a 11 neleží žádné prvočíslo). Množinu, jež není prázdná, nazýváme neprázdnou. V těchto elementárních úvahách nebudeme však pojem množiny prázdné potřebovati.

M_2 budiž množina všech čísel x, jež hoví nerovnostem $0 < < x < 1$.

M_3 budiž množina všech čísel celých záporných. Prvky jsou tedy čísla $-1, -2, -3, \dots$

M_4 budiž množina všech čísel záporných. Prvky jsou tedy všechna čísla $x < 0$.

M_5 budiž množina všech čísel celých. Prvky jsou tedy čísla $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

M_6 budiž množina všech reálných čísel.

M_7 budiž množina všech čísel x, jež hoví vztahům $0 \leqq x \leqq 1$.

M_8 budiž množina, jejíž prvky jsou čísla $1, \sqrt{2}, 3$.

Množina M_8 je konečná, ostatní jsou nekonečné. O číselné množině M říkáme, že je „*shora ohraničena*" (nebo též *shora omezena*), existuje-li číslo K tak, že žádné číslo množiny M není větší než K [2]) (t. j. splňuje-li každý prvek x množiny M vztah $x \leqq K$). Na př. množina M_2 je shora ohraničena, protože žádné její číslo není větší než (třeba) 5; ba dokonce není větší než 1. Rovněž tak žádné číslo množiny M_3 není větší než -1, žádné číslo množiny M_4 není větší než 0 atd. Vidíme, že množiny M_2, M_3, M_4, M_7, M_8 jsou shora ohraničeny, množiny M_1, M_5, M_6 nejsou. Všimněme si ještě, že na př. mezi čísly množiny M_7 je jedno největší, totiž číslo 1 (obdobně u množiny M_3 číslo -1, u množiny M_8 číslo 3); kdežto mezi čísly množiny M_2 není největšího čísla (t. j. žádné číslo množiny M_2 není největším číslem množiny M_2): obdobně je tomu u množin M_1, M_4, M_5, M_6.

Dokážeme nyní velmi důležitou větu, t. zv. *větu o horní hranici*. Je-li totiž M neprázdná množina shora ohraničená, existuje (podle definice) číslo K takové, že žádné číslo množiny M není větší než K. Dokážeme nyní, že mezi všemi čísly K, jež mají tuto vlastnost, existuje jedno, jež je z nich ze všech nejmenší, t. j. dokážeme tuto větu:

Věta 1. *Budiž M neprázdná množina číselná shora ohraničená. Potom existuje jedno a jen jedno číslo G, jež má tyto dvě vlastnosti:*

1. Žádné číslo množiny M není větší než G.[3])

---

[2]) Můžeme také říci: číselná množina M je shora ohraničena, existuje-li číslo L, jež je *větší*, než všechna čísla množiny M. Neboť, je-li $x < L$ pro každý prvek x množiny M, je tím spíše $x \leqq L$. Je-li za druhé $x \leqq K$ pro každý prvek x množiny M, můžeme položiti třeba $L = K + 1$ a potom bude $x < L$ pro každý prvek x množiny M. Tento přechod od vztahu $\leqq$ ke vztahu $<$ (a naopak) je tedy zcela samozřejmý a budu ho v dalším často bez zvláštní připomínky užívati. (Obdobně pro $\geqq$ a $>$.)

[3]) T. j.: všechna čísla x množiny M splňují nerovnost $x \leqq G$.

2. Je-li však G' jakékoliv číslo menší než G, potom existuje v množině M aspoň jedno číslo, jež je větší než G'.

Toto číslo G se nazývá horní hranicí množiny M (nebo též supremum množiny M).

Důkaz. Budiž M neprázdná číselná množina shora ohraničená. Dokážeme nejprve, že existuje aspoň jedno číslo G, jež má vlastnosti 1) a 2), uvedené ve větě 1. (Potom dokážeme, že nemůže existovati více než jedno takové číslo.)

Ježto množina M je neprázdná, existuje aspoň jedno číslo x_0, jež patří do množiny M; ježto M je shora ohraničená, existuje aspoň jedno číslo L, jež je větší než všechna čísla množiny M (viz poznámku [2]) pod čarou na str. 10). Čísla x_0, L pevně zvolím. Přiřaďme nyní každému celému kladnému číslu n určité číslo

$$\frac{l_n}{2^n} \text{ (kde } l_n \text{ je celé číslo)}$$

tímto předpisem:

Vezměme (při daném n) všechna čísla $k : 2^n$, kde k probíhá všechna celá čísla, t. j. vezměme čísla

$$\ldots, -\frac{3}{2^n}, -\frac{2}{2^n}, -\frac{1}{2^n}, \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots$$

Mezi těmito čísly existuje jistě jedno — označme je $k_n : 2^n$ — jež je větší než L; rovněž existuje mezi těmito čísly jedno — označme je $k'_n : 2^n$ — jež je menší než x_0; je tedy

$$\frac{k'_n}{2^n} < x_0 < L < \frac{k_n}{2^n}, \text{ a tedy } k'_n < k_n.$$

Číslo $k'_n : 2^n$ *není* větší než všechna čísla množiny M (neboť je menší než x_0), kdežto číslo $k_n : 2^n$ *je* větší než všechna čísla množiny M (neboť je větší než L). Sestrojím-li tedy všechna čísla tvaru $k : 2^n$, kde k probíhá rostouc po řadě všechna celá čísla od k'_n do k_n, tedy jistě mezi těmito čísly bude jedno *poslední* — označme je $l_n : 2^n$ — které není větší než všechna čísla množiny M, kdežto číslo *následující*, t. j. číslo $(l_n + 1) : 2^n$, už je větší než všechna čísla množiny M. Tím jsme tedy každému celému kladnému číslu n přiřadili určité číslo $l_n : 2^n$; tak dostáváme posloupnost

$$\frac{l_1}{2^1}, \frac{l_2}{2^2}, \frac{l_3}{2^3}, \ldots \tag{1}$$

Tvrdím předně, že tato posloupnost je shora ohraničená (Kössler 22). Budiž totiž $l_n : 2^n$ libovolný člen posloupnosti (1): ježto

$l_n : 2^n$ není větší než všechna čísla množiny M, existuje číslo x v množině M tak, že $x \geq l_n : 2^n$; ale jest $x < L$, takže každý člen posloupnosti (1) splňuje nerovnost $l_n : 2^n < L$.

Za druhé tvrdím, že posloupnost (1) je neklesající, t. j. že je (Kössler 22)

$$\frac{l_1}{2^1} \leq \frac{l_2}{2^2} \leq \frac{l_3}{2^3} \leq \ldots \leq \frac{l_n}{2^n} \leq \frac{l_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \ldots$$

Budiž totiž n libovolné celé kladné číslo. Podle definice čísla l_n existuje číslo x množiny M tak, že $x \geq l_n : 2^n$; podle definice čísla l_{n+1} je číslo $(l_{n+1} + 1) : 2^{n+1}$ větší než všechna čísla množiny M, tedy též větší než x; tedy platí

$$\frac{l_n}{2^n} < \frac{l_{n+1} + 1}{2^{n+1}}, \text{ t. j. } 2l_n < l_{n+1} + 1; \tag{2}$$

ježto l_n, l_{n+1} jsou čísla celá, plyne z (2) nerovnost $2l_n \leq l_{n+1}$ a tedy

$$\frac{l_n}{2^n} \leq \frac{l_{n+1}}{2^{n+1}},$$

jak bylo dokázati. Posloupnost (1) je tedy neklesající a shora ohraničená a má tedy limitu[4]), kterou označíme písmenem G; dokážeme pak, že číslo G má požadované vlastnosti 1), 2). Jest totiž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{2^n} = G, \text{a tedy též } \lim_{n\to\infty} \frac{l_n + 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = G. \tag{3}$$

Kdyby existovalo v množině M číslo x_1 větší než G, plynulo by z nerovnosti $x_1 > G$ a z druhé rovnice (3), že by pro jisté vhodně zvolené n bylo $x_1 > (l_n + 1) : 2^n$, což není možno, ježto číslo $(l_n + 1) : 2^n$ je větší než všechna čísla množiny M. Číslo G má tedy vlastnost 1). Budiž za druhé G' libovolné číslo menší než G. Z nerovnosti $G' < G$ a z první rovnice (3) plyne, že pro vhodně zvolené n je $G' < l_n : 2^n$. Ježto číslo $l_n : 2^n$ není větší než všechna čísla množiny M, existuje v množině M aspoň jedno číslo x_2 takové, že $l_n : 2^n \leq x_2$ a tím spíše tedy $G' < x_2$. Je-li tedy G' jakékoliv číslo menší než G, existuje v množině M aspoň jedno číslo větší než G', t. j. číslo G má též vlastnost 2).

Tím je dokázána existence čísla G, jež má vlastnosti 1) a 2). Dokážeme nyní, že takové číslo jest jen jedno. Čili dokážeme: žádné číslo G_1, různé od G, nemůže míti vlastnosti 1) a 2). Neboť,

---

[4]) Kössler 22.

je-li předně $G_1 < G$, použijeme toho, že číslo G má vlastnost 2): existuje tedy aspoň jedno číslo x v množině M, jež je větší než G_1, a tedy číslo G_1 nemá vlastnost 1). Je-li za druhé $G_1 > G$, použijeme toho, že G má vlastnost 1): žádné číslo množiny M není větší než G, ačkoliv číslo G je menší než G_1; tedy číslo G_1 nemá vlastnost 2).

Tím je věta 1 úplně dokázána.

Poznámka 1. Jestliže jedno z čísel číselné množiny M je největším číslem množiny M, je toto číslo (označme je x_0) horní hranicí množiny M. Neboť číslo x_0 má tyto vlastnosti: 1) Žádné číslo množiny M není větší než x_0. 2) Je-li G' libovolné číslo menší než x_0, potom existuje aspoň jedno číslo množiny M — totiž číslo x_0 — jež je větší než G'.

Jestliže však žádné číslo číselné množiny M není největším číslem množiny M, nemůže horní hranice množiny M býti číslem množiny M; neboť je-li x_1 libovolné číslo množiny M, potom není x_1 největším číslem množiny M a tedy existuje v množině M číslo větší než x_1, takže číslo x_1 nemá vlastnost 1).

Poznámka 2. Jestliže číslo K má tu vlastnost, že žádné číslo neprázdné číselné množiny M není větší než K, potom horní hranice G množiny M[5]) splňuje nerovnost $G \leq K$. Neboť kdyby bylo $K < G$, nemělo by číslo G vlastnost 2), ježto žádné číslo množiny M není větší než K.

Obdobně, jako jsme definovali číselné množiny shora ohraničené, definujeme též množiny zdola ohraničené takto: číselná množina M je *zdola ohraničena* (nebo též *zdola omezena*), existuje-li číslo K tak, že žádné číslo množiny M není menší než K. Platí pak věta zcela obdobná větě 1:

Věta 2. *Budiž M neprázdná množina číselná zdola ohraničená. Potom existuje jedno a jen jedno číslo g, jež má tyto dvě vlastnosti:*

1. Žádné číslo množiny M není menší než g.

2. Je-li však g' jakékoliv číslo větší než g, potom existuje v množině M alespoň jedno číslo, jež je menší než g'.

Toto číslo g se nazývá dolní hranicí množiny M (nebo též infimum množiny M).

Platí opět zcela analogické poznámky: jestliže mezi čísly číselné množiny M je jedno nejmenší, je toto nejmenší číslo dolní

---

[5]) Tato horní hranice existuje, ježto neprázdná číselná množina M je shora ohraničena.

hranicí množiny M. Není-li však žádné číslo množiny M nejmenším číslem množiny M, nemůže dolní hranice množiny M patřiti k množině M. — Má-li číslo K tu vlastnost, že žádné číslo neprázdné číselné množiny M není menší než K, potom dolní hranice g množiny M splňuje nerovnost $g \geqq K$. — Důkazy vynechávám, ježto jsou zcela obdobné důkazům vět o horní hranici.[6])

Množina číselná, jež je ohraničena shora i zdola, nazývá se krátce množinou *ohraničenou* (nebo též *omezenou*). Neprázdná množina ohraničená M má ovšem horní hranici G i dolní hranici g a je zřejmě $g \leqq G$ (neboť, vyberu-li z množiny M libovolné číslo x, je $g \leqq x$, $G \geqq x$). Rovnost $G = g$ platí ovšem tehdy a jen tehdy, skládá-li se množina M z jediného čísla.[7])

Věta 3. *Číselná množina M je ohraničena tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo K tak, že všechna čísla x množiny M splňují nerovnost*

$$|x| \leqq K.^{8)} \tag{4}$$

Důkaz. 1. Platí-li nerovnost (4) pro všechna čísla x množiny M, platí pro všechna tato x nerovnosti $-K \leqq x \leqq K$ a tedy množina M je ohraničena (shora i zdola).

2. Naopak, je-li množina M ohraničena, existují čísla L_1, L_2 tak, že pro každé x množiny M platí $L_1 \leqq x \leqq L_2$. Položme $K = \mathrm{Max}\,(L_2, -L_1)$,[9]) takže $K \geqq L_2$, $-K \leqq L_1$; tedy pro každé x

---

[6]) Věty o dolní hranici lze ostatně z vět o horní hranici odvoditi tímto jednoduchým obratem: budiž M neprázdná zdola ohraničená množina číselná. Z množiny M sestrojíme novou množinu N tím, že u každého čísla množiny M změním znamení (t. j. číslo x patří k množině N tehdy a jen tehdy, patří-li číslo $-x$ k množině M). Množina N je pak zřejmě shora ohraničená a z vět o horní hranici, platných pro N, dostanu jednoduchou změnou znamení věty o dolní hranici pro množinu M. Podrobnosti tohoto přechodu jsou tak jasné, že je mohu přenechati čtenáři. Tohoto obratu se dá ostatně užíti i při mnoha obdobných případech.

[7]) Neboť potom toto číslo je současně největším i nejmenším číslem množiny M. Obsahuje-li však množina M aspoň dvě čísla, vyberme z ní dvě čísla $x_1 < x_2$; potom je $g \leqq x_1 < x_2 \leqq G$, tedy $g < G$.

[8]) Znamení $\leqq$ bychom ovšem v této větě mohli též nahraditi znamením $<$; viz pozn. [2]) na str. 10.

[9]) Je-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *konečná* posloupnost reálných čísel (různých nebo stejných), značíme znakem $\mathrm{Max}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ největší a znakem $\mathrm{Min}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nejmenší z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Na př.: $\mathrm{Max}\,(5{,}7, -3{,}0) = 7$, $\mathrm{Min}\,(5{,}7, -3{,}0) = -3$, $\mathrm{Max}\,(5{,}5) = \mathrm{Min}\,(5{,}5) = 5$.

množiny M platí nerovnosti $-K \leqq x \leqq K$, t. j. nerovnost $|x| \leqq K$.

Vraťme se ještě k příkladům M_1 až M_8. Množina M_1 je ohraničena zdola (dolní hranice je 1), ale ne shora. M_2 je ohraničena (horní hranice je 1, dolní je 0). M_3, M_4 jsou shora, ale ne zdola ohraničeny. Horní hranice množiny M_3 je -1, u M_4 je horní hranice 0. Množiny M_5, M_6 nejsou shora ani zdola ohraničeny. Množiny M_7, M_8 jsou ohraničeny, horní a dolní hranice jsou u M_7 čísla 1, 0, u M_8 čísla 3, 1.

Zaveďme ještě zvláštní označení pro některé číselné množiny, které se budou v dalším stále vyskytovati, totiž pro t. zv. *intervaly*. Buďte a, b dvě čísla, $a < b$. Znakem (a, b) značíme množinu všech čísel x, pro něž jest $a < x < b$ (název: otevřený interval). Znakem $\langle a, b\rangle$ značíme množinu všech čísel x, pro něž jest $a \leqq x \leqq b$ (název: uzavřený interval). Znakem $\langle a, b)$ značíme množinu oněch čísel x, pro něž jest $a \leqq x < b$ a znakem $(a, b\rangle$ značíme množinu oněch čísel x, pro něž jest $a < x \leqq b$. Čísla a, b nazýváme (ve všech těchto případech) „koncovými body“ intervalu; čísla intervalu, jež nejsou koncovými body, nazýváme „vnitřními body“ intervalu (to jsou tedy ona čísla x, pro něž jest $a < x < b$.[10]) Vedle těchto t. zv. „konečných“ intervalů[11]) zavádíme též t. zv. „nekonečné intervaly“ takto: (a, ∞) je množina všech čísel $x > a$; $\langle a, \infty)$ je množina všech čísel $x \geqq a$; $(-\infty, b)$ je množina všech čísel $x < b$; $(-\infty, b\rangle$ je množina všech čísel $x \leqq b$; $(-\infty, \infty)$ je množina všech čísel (reálných) vůbec. Také nekonečné intervaly (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$ budeme nazývati otevřenými intervaly. Také o koncových a vnitřních bodech mluvíme u nekonečných intervalů v obdobném smyslu, jako u konečných. Pamatujme, že podle podaných definic užíváme znaku $\langle a, b\rangle$ jen u konečných intervalů.

2. Funkce ohraničené.[12]) Budiž $f(x)$ funkce, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Probíhá-li číslo x všechny hodnoty intervalu

[10]) Definice je velmi názorná: interval o koncových bodech a, b je prostě množina všech „bodů na úsečce o koncových bodech a, b“; při tom koncové body a, b k intervalu (a, b) nepatří, k intervalu $\langle a, b\rangle$ patří; k intervalu $\langle a, b)$ patří a, ale ne b; k intervalu $(a, b\rangle$ patří b, ale ne a.

[11]) Ovšem „konečný“ interval je nekonečná množina číselná; proto by snad bylo vhodnější, říkati ohraničený (nebo omezený) interval, v souhlase s definicí ohraničené množiny.

[12]) Místo názvů ohraničený, horní hranice, dolní hranice lze ovšem též zde užívati slov omezený, supremum, infimum.

$\langle a, b\rangle$, probíhá hodnota $f(x)$ jistou neprázdnou číselnou množinu N. (Na př.: budiž $f(x) = x^2$, $a = 2$, $b = 3$; probíhá-li x všechny hodnoty intervalu $\langle 2, 3\rangle$, probíhá $f(x)$ právě všechny hodnoty intervalu $\langle 4, 9\rangle$; množina N je zde interval $\langle 4, 9\rangle$. Nebo: budiž $f(x) = 0$ pro racionální x, $f(x) = 1$ pro iracionální x; $a = 5$, $b = 8$; probíhá-li x interval $\langle 5, 8\rangle$, nabývá $f(x)$ hodnot 0, 1 a žádných jiných; množina N se zde skládá právě ze dvou čísel 0, 1.) Je-li množina N shora ohraničena (viz odst. 1), říkáme, že funkce $f(x)$ je *shora ohraničena v intervalu* $\langle a, b\rangle$. Podle definice množiny shora ohraničené můžeme tuto definici vysloviti také takto: Funkce $f(x)$ nazývá se shora ohraničenou v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ platí nerovnost $f(x) \leqq K$.

Je-li funkce $f(x)$ shora ohraničena v $\langle a, b\rangle$, t. j. je-li množina N shora ohraničena, existuje podle věty 1 jedno a jen jedno číslo G, jež má tyto dvě vlastnosti: 1. žádné číslo množiny N není větší než G; 2. je-li G' jakékoliv číslo menší než G, existuje aspoň jedno číslo množiny N, jež je větší než G'. Toto číslo G budeme nazývati *horní hranicí funkce* $f(x)$ *v intervalu* $\langle a, b\rangle$. Uvážíme-li, že N je množina všech hodnot, kterých nabývá funkce $f(x)$, když x probíhá všechny hodnoty intervalu $\langle a, b\rangle$, můžeme tento výsledek vysloviti též takto:

Věta 4. *Je-li funkce $f(x)$ shora ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existuje jedno a jen jedno číslo G, jež má tyto vlastnosti:*

1. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \leqq G$.

2. Je-li však G' jakékoliv číslo menší než G, potom existuje aspoň jedna hodnota x intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $f(x) > G'$.

Toto číslo G nazývá se horní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Z poznámek 1 a 2 k větě 1 plynou pak ihned tyto poznámky:

Poznámka 1. Jestliže mezi hodnotami, kterých nabývá funkce $f(x)$, když x probíhá interval $\langle a, b\rangle$, jest jedna ze všech největší, je tato největší hodnota zároveň horní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 2. Existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \leqq K$, nemůže býti horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ větší než K.

Obdobně definujeme funkce zdola ohraničené takto: Funkce $f(x)$ nazývá se zdola ohraničenou v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq K$. Stejně jako pro funkce shora ohraničené se dokáže:

Věta 5. *Je-li funkce $f(x)$ zdola ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje jedno a jen jedno číslo g, jež má tyto vlastnosti:*

1. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq g$.

2. Je-li však g' jakékoliv číslo větší než g, potom existuje aspoň jedno x intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) < g'$.

Toto číslo g nazývá se dolní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 1. Jestliže mezi hodnotami, kterých nabývá funkce $f(x)$, když x probíhá interval $\langle a, b\rangle$, jest jedna ze všech nejmenší, je tato nejmenší hodnota zároveň dolní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 2. Existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq K$, nemůže býti dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ menší než K.

Funkci $f(x)$, jež je v intervalu $\langle a, b\rangle$ ohraničena shora i zdola, nazýváme krátce *funkcí ohraničenou v intervalu* $\langle a, b\rangle$. To tedy znamená, že množina N, o níž jsme mluvili na začátku tohoto odstavce, je ohraničena (shora i zdola); věta 3 dává pak ihned tento výsledek:

Věta 6. *Funkce $f(x)$ je ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$ tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ platí nerovnost $|f(x)| \leqq K$.*

Poznámka. Nechť platí nerovnost $|f(x)| \leqq K$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž G horní hranice a g dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $-K \leqq f(x) \leqq K$. Podle poznámky 2 k větě 4 a 5 je $-K \leqq \leqq g \leqq G \leqq K$, a tedy platí nerovnosti $|g| \leqq K$, $|G| \leqq K$.

Funkce $f(x)$ ohraničená v $\langle a, b\rangle$ má v tomto intervalu horní hranici G i dolní hranici g a jest ovšem $g \leqq G$. Znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, nabývá-li funkce $f(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jen jediné hodnoty, t. j. je-li $f(x)$ konstantní v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Uveďme ještě některé drobnosti, jichž budeme v dalším potřebovati.

Věta 7. *Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v $\langle a, b\rangle$; budiž G horní hranice, g dolní hranice funkce $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$. Je-li k číslo kladné, má funkce $k\,f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ horní hranici kG a dolní hranici kg; je-li k číslo záporné, má funkce $kf(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ dolní hranici kG a horní hranici kg.*

Důkaz. A) Budiž $k > 0$. Potom číslo kG má tyto vlastnosti: 1. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \leqq G$ a tedy $k f(x) \leqq kG$. 2. Je-li G' libovolné číslo menší než kG, je $G'/k < G$ a tedy existuje aspoň jedna hodnota x intervalu $\langle a, b\rangle$, pro kterou je $f(x) > G'/k$ a tedy $k f(x) > G'$. Tedy je $k f(x)$ shora ohraničená v $\langle a, b\rangle$ a číslo kG je její horní hranicí v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro dolní hranici je důkaz obdobný.

B) Budiž $k < 0$. Potom číslo kG má tyto vlastnosti: 1. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \leqq G$ a tedy $k f(x) \geqq kG$.[13]) 2. Je-li g' libovolné číslo větší než kG (t. j. $g' > kG$), je $g'/k < G$ (násobím *záporným* číslem $1/k$) a tedy existuje aspoň jedno číslo x intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $f(x) > g'/k$ a tedy $k f(x) < g'$. Funkce $k f(x)$ je tedy zdola ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a číslo kG je její dolní hranicí v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro horní hranici je důkaz obdobný.

Věta 8. *Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž $\langle c, d\rangle$ částečný interval intervalu $\langle a, b\rangle$.*[14]) *Potom je funkce $f(x)$ ohraničená též v intervalu $\langle c, d\rangle$; značí-li G, g horní a dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ a značí-li G_1, g_1 horní a dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle c, d\rangle$, je $g \leqq g_1 \leqq G_1 \leqq G$.*

Důkaz. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ a tedy tím spíše pro všechna x intervalu $\langle c, d\rangle$ platí nerovnost $f(x) \leqq G$; tedy je funkce $f(x)$ shora ohraničena v intervalu $\langle c, d\rangle$ a podle poznámky 2 k větě 4 nemůže býti G_1 větší než G, t. j. je $G_1 \leqq G$. Důkaz pro dolní hranici je obdobný.

Věta 9. *Je-li funkce $f(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$ i v intervalu $\langle b, c\rangle$, je ohraničena též v intervalu $\langle a, c\rangle$.*

Důkaz. (Viz větu 6.) Existují dvě čísla K_1, K_2 tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $| f(x) | \leqq K_1$ a pro všechna x intervalu $\langle b, c\rangle$ je $| f(x) | \leqq K_2$. Položíme-li tedy $K = \text{Max}\,(K_1, K_2)$, je nerovnost $| f(x) | \leqq K$ splněna pro všechna x intervalu $\langle a, c\rangle$.

Věta 10. *Je-li funkce $f(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$ a liší-li se funkce $g(x)$ od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu $\langle a, b\rangle$, jest i funkce $g(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. (Viz větu 6.) Existuje číslo K tak, že pro všechna x

---

[13]) Násobím-li nerovnost $A \leqq B$ *záporným* číslem C, musím obrátiti její smysl: je potom $AC \geqq BC$. Obdobně, je-li $A < B$, $C < 0$, je $AC > BC$.

[14]) Tím rozumím, že každý bod intervalu $\langle c, d\rangle$ patří k intervalu $\langle a, b\rangle$; to nastane tehdy a jen tehdy, je-li $a \leqq c < d \leqq b$.

[15]) Z těchto nerovností je zřejmo, že je $K \geqq 0$, $L \geqq 0$.

intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \leqq K$. Buďte $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ony body intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $g(x) \neq f(x)$. Položme

$$K_1 = \operatorname{Max}(K, |g(x_1)|, |g(x_2)|, \ldots, |g(x_p)|);$$

potom zřejmě pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|g(x)| \leqq K_1$.

Věta 11. *Jsou-li funkce $f(x), g(x)$ ohraničeny v intervalu $\langle a, b\rangle$, jsou i funkce $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\, g(x)$ ohraničeny v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. (Viz větu 6.) Existují dvě čísla K, L taková, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \leqq K$, $|g(x)| \leqq L$.[15]) Tedy pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$|f(x) \pm g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)| \leqq K + L, \quad |f(x)\, g(x)| = \\ = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqq KL.$$

3. Spojité funkce. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu, rovnou číslu A (znak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž platí nerovnosti $0 < |x - x_0| < \delta$ [16]) (Kössler 54). Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zprava, rovnou číslu A (znak $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$ nebo $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$), jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž platí nerovnosti $x_0 < x < x_0 + \delta$. Obdobná je definice limity zleva (znak $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$), pouze nerovnosti $x_0 < x < x_0 + \delta$ jsou nahrazeny nerovnostmi $x_0 - \delta < x < x_0$ (Kössler 56). Z definic plyne ihned

Věta 12. *Existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, existují i limity $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ a jest*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Též naopak platí

Věta 13. *Existují-li limity $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ a je-li*

---

[16]) Nerovnost $|x - x_0| < \delta$ znamená, že je $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$; nerovnost $|x - x_0| > 0$ znamená, že je $x \neq x_0$.

$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x)$, *existuje i* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *a je* $\lim_{x \to x_0} f(x) =$
$= \lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x)$.

Důkaz. Budiž $\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = A$; budiž ε libovolné kladné číslo. Podle definic limity zprava a zleva existují dvě kladná čísla δ_1, δ_2, které mají tuto vlastnost: nerovnost $| f(x) - A | < \varepsilon$ platí především pro všechna x, pro něž je $x_0 < x < x_0 + \delta_1$ a za druhé pro všechna x, pro něž je $x_0 - \delta_2 <$ $< x < x_0$. Položme $\delta = \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$, takže $\delta > 0$. Potom nerovnost $| f(x) - A | < \varepsilon$ platí jednak pro všechna x, pro něž je $x_0 < x < x_0 + \delta$, jednak pro všechna x, pro něž je $x_0 - \delta <$ $< x < x_0$; tedy celkem platí tato nerovnost pro všechna x, pro něž je $0 < | x - x_0 | < \delta$ (viz poslední poznámku pod čarou), takže je vskutku $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

Definujme nyní spojitost funkce v bodě takto: Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Kössler 60). Podle definice limity můžeme definici spojitosti vysloviti také takto: funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$ platí pro všechna x, splňující nerovnosti $0 < | x - x_0 | < \delta$.[17])

Spojitost zprava a zleva definujeme takto: Funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0, je-li $\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$; funkce $f(x)$ je spojitá zleva v bodě x_0, je-li $\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$. Podle definice limity zprava a zleva můžeme tuto definici vysloviti též takto: Funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$ platí pro všechna x, pro něž je $x_0 < x < x_0 + \delta$.[18]) Obdobně

---

[17]) Místo nerovností $0 < | x - x_0 | < \delta$ můžeme zde psáti též nerovnost $| x - x_0 | < \delta$ (a to budeme také zpravidla činiti); neboť rozdíl je jen ten, že jednou nepřipouštíme a po druhé připouštíme hodnotu $x = x_0$; ale pro $x = x_0$ je $f(x) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$, takže podmínka $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$ je pro $x = x_0$ jistě splněna — je tedy jedno, požadujeme-li či nepožadujeme-li splnění této podmínky pro hodnotu $x = x_0$.

[18]) Místo těchto nerovností můžeme (a většinou též budeme) psáti nerovnosti $x_0 \leqq x < x_0 + \delta$; viz předešlou poznámku pod čarou.

lze vysloviti definici spojitosti zleva, jen místo nerovností $x_0 < < x < x_0 + \delta$ je třeba psáti nerovnosti $x_0 - \delta < x < x_0$ (nebo $x_0 - \delta < x \leqq x_0$).

Věta 14. *Funkce $f(x)$ je v bodě x_0 spojitá tehdy a jen tehdy, je-li v bodě x_0 spojitá zprava i zleva.*

Důkaz plyne přímo z definice: je-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{5}$$

je podle věty 12 též

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0): \tag{6}$$

naopak: platí-li (6), platí podle věty 13 též (5).

* * *

Je-li (a, b) *otevřený* interval (konečný nebo nekonečný), říkáme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v intervalu* (a, b), jestliže je spojitá v každém bodě intervalu (a, b) (Kössler 61).

Je-li $\langle a, b \rangle$ *uzavřený* interval,[19] říkáme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v intervalu* $\langle a, b \rangle$, je-li funkce $f(x)$ spojitá v otevřeném intervalu (a, b)[20] a mimo to spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b. Rozdíl je tedy v tom, že pro spojitost v *uzavřeném* intervalu požadujeme ještě jednostrannou spojitost v koncových bodech.

Pro funkci spojitou v uzavřeném intervalu platí tato základní věta:

Věta 15. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak mezi hodnotami, kterých $f(x)$ tam nabývá, jest největší hodnota a nejmenší hodnota.* (Kössler 62.)

To znamená tedy: v intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje aspoň jedna hodnota c taková, že hodnota $f(c)$ je největší ze všech hodnot funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$; t. j. pro všechny hodnoty x intervalu $\langle a, b \rangle$ je $f(x) \leqq f(c)$. Obdobně pro nejmenší hodnotu. Z věty 15 bezprostředně plyne

Věta 16. *Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ je ohraničena v intervalu $\langle a, b \rangle$* (Kössler 64).

---

[19]) Uzavřený interval je ovšem vždy konečný.

[20]) t. j. spojitá v každém *vnitřním* bodě intervalu $\langle a, b \rangle$.

Poznámka 1. Funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ tehdy a jen tehdy, má-li tuto vlastnost:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases}\text{Je spojitá zprava v každém bodě } x_0, \text{ pro nějž platí } a \leqq \\ \leqq x_0 < b \text{ a je spojitá zleva v každém bodě } x_0, \text{ pro nějž} \\ \text{platí } a < x_0 \leqq b.\end{cases}$$

Vskutku, vlastnost (A) říká právě toto: funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě a, spojitá zleva v bodě b a spojitá zprava i zleva v každém vnitřním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$. Této podmínky (A) se leckdy užívá.

Poznámka 2.[21] (O spojitosti t. zv. „složených funkcí".) Dosadíme-li do funkce $f(x)$ za proměnnou x funkci $\varphi(t)$ proměnné t, dostaneme funkci $f(\varphi(t))$ proměnné t. Odvodíme nyní tři věty, jež nám zodpovídají tuto otázku: co lze říci o spojitosti „složené" funkce $f(\varphi(t))$, víme-li něco o spojitosti funkcí $f(x)$ a $\varphi(t)$?

Věta A. *Nechť funkce $\varphi(t)$ je spojitá v bodě t_0 a nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $\varphi(t_0)$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v bodě t_0.*

Důkaz. Položme pro zkrácení $\varphi(t_0) = x_0$. Budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že nerovnost

$$| f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0)) | < \varepsilon \tag{7}$$

platí pro všechna t, pro něž je $| t - t_0 | < \delta$. Především existuje číslo $\eta > 0$ takové, že nerovnost $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$, t. j.

$$| f(x) - f(\varphi(t_0)) | < \varepsilon \tag{8}$$

platí pro všechna x, pro něž je $| x - x_0 | < \eta$ čili $| x - \varphi(t_0) | < \eta$. Ježto $\varphi(t)$ je funkce spojitá v bodě t_0, existuje k číslu η číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $| \varphi(t) - \varphi(t_0) | < \eta$ platí pro všechna t, pro něž je $| t - t_0 | < \delta$. Pro tyto hodnoty t bude tedy splněna nerovnost (8), klademe-li do ní $\varphi(t)$ za x[22]; t. j. bude splněna nerovnost (7), jak bylo dokázati.

Věta B. *Funkce $\varphi(t)$ budiž spojitá v otevřeném intervalu (α, β); funkce $f(x)$ budiž spojitá v otevřeném intervalu (a, b)*[23]*; pro každé t intervalu (α, β) nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v intervalu (α, β).*

[21]) Tuto poznámku budeme potřebovati až v kap. III, odst. 4 a 5; proto ji čtenář může zatím — chce-li — přeskočiti.

[22]) Neboť nerovnost $| x - \varphi(t_0) | < \eta$ je splněna, klademe-li do ní $\varphi(t)$ za x (je-li ovšem $| t - t_0 | < \delta$).

[23]) Intervaly (α, β), (a, b) mohou býti konečné nebo nekonečné.

Důkaz. Budiž t_0 libovolný bod intervalu (α, β). Číslo $\varphi(t_0)$ leží v intervalu (a, b); tedy funkce $\varphi(t)$ je spojitá v bodě t_0 a funkce $f(x)$ v bodě $\varphi(t_0)$; tedy funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v bodě t_0 (podle věty A), čímž věta B dokázána, neboť t_0 může být kterýkoliv bod intervalu (α, β).

Obdobná věta platí pro *uzavřené* intervaly:

Věta C. *Funkce $\varphi(t)$ budiž spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$; funkce $f(x)$ budiž spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.*[24] *Pro každé t intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ budiž $a \leq \varphi(t) \leq b$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$.*

Důkaz. Definujme funkci $\psi(t)$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ takto: pro $\alpha \leq t \leq \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(t)$, pro $t < \alpha$ budiž $\psi(t) = \varphi(\alpha)$, pro $t > \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(\beta)$.

Funkce $\psi(t)$ je zřejmě spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.[25]

Obdobně definujme funkci $g(x)$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ takto: pro $a \leq x \leq b$ budiž $g(x) = f(x)$, pro $x < a$ budiž $g(x) = f(a)$, pro $x > b$ budiž $g(x) = f(b)$. Funkce $g(x)$ je opět spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$. Podle věty B (kde za interval (α, β) i za interval (a, b) je třeba vzíti interval $(-\infty, \infty)$) je tedy funkce $g(\psi(t))$ spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ a tedy též v *uzavřeném* intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Ale v pro $\alpha \leq t \leq \beta$ je $g(\psi(t)) = f(\varphi(t))$,[26] a tedy i funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$.

4. Derivace. Připomeňme si ještě definici derivace a větu o střední hodnotě.

Existuje-li limita $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, nazývá se tato limita *derivací* funkce $f(x)$ v bodě x_0; znak $f'(x_0)$ (Kössler 69). Existuje-li limita zprava, $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, nazývá se tato limita derivací zprava funkce $f(x)$ v bodě x_0 (znak $f'_+(x_0)$);

---

[24]) Intervaly $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle a, b\rangle$ jsou ovšem konečné.

[25]) V bodě $t = \alpha$ je totiž funkce $\psi(t)$ především spojitá zprava, neboť je $\psi(t) = \varphi(t)$ pro $\alpha \leq t \leq \beta$; za druhé je funkce $\psi(t)$ v bodě $t = \alpha$ též spojitá zleva, ježto pro $t \leq \alpha$ je funkce $\psi(t)$ rovna konstantě $\varphi(\alpha)$. Obdobně je tomu pro $t = \beta$; ostatní hodnoty t pak nepůsobí obtíží.

[26]) Je totiž $\varphi(t) = \psi(t)$ pro $\alpha \leq t \leq \beta$, $f(x) = g(x)$ pro $a \leq x \leq b$. Tedy: je-li $\alpha \leq t \leq \beta$, je $\varphi(t) = \psi(t)$ a tedy $g(\psi(t)) = g(\varphi(t))$; zároveň je $a \leq \varphi(t) \leq b$ a tedy $g(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$.

existuje-li limita zleva, $\lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, nazývá se tato limita derivací zleva funkce $f(x)$ v bodě x_0 (znak $f'_-(x_0)$).

Věta 17. *Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci tehdy a jen tehdy, má-li v bodě x_0 derivaci zprava $f'_+(x_0)$ i derivaci zleva $f'_-(x_0)$ a je-li nadto $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$; potom je $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.*

Důkaz plyne okamžitě z vět 12 a 13, podle nichž limita nějaké funkce v nějakém bodě (zde tedy limita funkce proměnné h

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

v bodě $h = 0$) existuje tehdy a jen tehdy, existují-li v tom bodě limita zprava a zleva a jsou-li si rovny; jejich společná hodnota je pak hodnotou limity.

Poznámka 1. Platí tato věta: *Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci zprava, je v bodě x_0 spojitá zprava; má-li v bodě x_0 derivaci zleva, je v bodě x_0 spojitá zleva.* Důkaz: má-li funkce $f(x)$ derivaci zprava v bodě x_0, existuje limita zprava $\lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$; ježto pro $h \neq 0$ je

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h,$$

je $\lim\limits_{h \to 0+} (f(x_0+h) - f(x_0)) = f'_+(x_0) \cdot \lim\limits_{h \to 0+} h = 0$,[27] t. j. $\lim\limits_{h \to 0+} f(x_0 + h) = f(x_0)$ čili $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$, takže funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0. Důkaz pro spojitost zleva se vede obdobně. — *Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci,* má ovšem v tomto bodě derivaci zprava i zleva, je tedy v bodě x_0 spojitá zprava i zleva, t. j. *je v tomto bodě spojitá.*

Poznámka 2.[28] (O derivování „složených funkcí“.) Z diferenciálního počtu znáte tuto větu (Kössler 75):

Věta A'. *Nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v určitém bodě t; nechť funkce $f(x)$ má derivaci v příslušném bodě $x = \varphi(t)$. Potom funkce $f(\varphi(t))$ má v bodě t derivaci $f'(\varphi(t))\, \varphi'(t)$.*

[27]) Podle věty o limitě součinu, viz Kössler 55; v Kösslerově knížce je sice míněna limita a nikoliv limita zprava; důkaz pro limitu zprava je však zcela obdobný důkazu pro limitu.

[28]) Tuto poznámku budeme potřebovati až v kap. III, odst. 4 a 5; proto ji čtenář může zatím — chce-li — přeskočiti.

Z věty A' plyne snadno tato

Věta B'. *Nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v intervalu (α, β)*[29]*; nechť funkce $f(x)$ má derivaci v intervalu (a, b); nechť pro každé t intervalu (α, β) hodnota funkce $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom funkce $f(\varphi(t))$ má v intervalu (α, β) derivaci $f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.*

Důkaz. Je-li t jakákoliv hodnota intervalu (α, β), existuje derivace $\varphi'(t)$ a hodnota $x = \varphi(t)$ leží v intervalu (a, b), takže funkce $f(x)$ má derivaci v bodě $x = \varphi(t)$. Z věty A' tedy plyne, že existuje v bodě t derivace funkce $f(\varphi(t))$, rovná číslu $f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

Pro *uzavřené* intervaly platí obdobná

Věta C'. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má derivaci $\varphi'(t)$ v uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$; při tom slovem „derivace" a znakem $\varphi'(t)$ rozumím v bodě $t = \alpha$ derivaci zprava a v bodě $t = \beta$ derivaci zleva. Funkce $f(x)$ nechť má derivaci $f'(x)$ v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$; při tom opět slovem „derivace" a znakem $f'(x)$ rozumím v bodě $x = a$ derivaci zprava a v bodě $x = b$ derivaci zleva. Pro každé t intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ nechť je $a \leq \varphi(t) \leq b$. Potom funkce $F(t) = f(\varphi(t))$ má v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ derivaci $F'(t) = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$; při tom opět slovem „derivace" a znakem $F'(t)$ rozumím pro $t = \alpha$ derivaci zprava a pro $t = \beta$ derivaci zleva.*[30])

Důkaz. Definujme funkce $\psi(t), g(x)$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ takto:

Pro $\alpha \leq t \leq \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(t)$; pro $t < \alpha$ budiž $\psi(t) = \varphi(\alpha) + (t - \alpha)\varphi'(\alpha)$; pro $t > \beta$ budiž $\psi(t) = \varphi(\beta) + (t - \beta)\varphi'(\beta)$.

Pro $a \leq x \leq b$ budiž $g(x) = f(x)$; pro $x < a$ budiž $g(x) = f(a) + (x - a) f'(a)$; pro $x > b$ budiž $g(x) = f(b) + (x - b) f'(b)$.

Položme ještě $G(t) = g(\psi(t))$; je-li $\alpha \leq t \leq \beta$, je $\psi(t) = \varphi(t)$ a současně $a \leq \varphi(t) \leq b$, tedy $g(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$, takže jest

$$G(t) = g(\psi(t)) = g(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) = F(t).$$

V intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ je tedy $G(t) = F(t)$. Podaří-li se nám tedy dokázati, že v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ platí rovnice

[29]) To ovšem znamená, že funkce $\varphi(t)$ má derivaci v každém bodě intervalu (α, β); podobně v analogických případech. Intervaly (α, β), (a, b) mohou býti ovšem i nekonečné.

[30]) Pro zkrácení píši tedy $\varphi'(\alpha)$, $\varphi'(\beta)$, $f'(a)$, $f'(b)$, $F'(\alpha)$, $F'(\beta)$ místo $\varphi'_{+}(\alpha)$, $\varphi'_{-}(\beta)$, $f'_{+}(a)$, $f'_{-}(b)$, $F'_{+}(\alpha)$, $F'_{-}(\beta)$. U ostatních funkcí $\psi(t)$, $g(x)$, $G(t)$, které se vyskytnou v důkazu, toto zkrácení nezavádím, takže na př. $\psi'(\alpha)$ bude znamenati derivaci funkce $\psi(t)$ v bodě α a *nikoliv* derivaci zprava.

$$G'(t) = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t), \tag{9}$$

bude tím věta dokázána; neboť potom bude $F'(t) = G'(t)$ pro $\alpha < t < \beta$ a pro $t = \alpha$ bude derivace zprava funkce $F(t)$ rovna číslu $G'_+(\alpha) = G'(\alpha) = f'(\varphi(\alpha))\,\varphi'(\alpha)$ a obdobně pro $t = \beta$ bude derivace zleva funkce $F(t)$ rovna číslu $G'_-(\beta) = G'(\beta) = f'(\varphi(\beta))\varphi'(\beta)$.

Tvrdím nyní, že funkce $\psi(t)$ má derivaci v intervalu $(-\infty, \infty)$ a že v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ je $\psi'(t) = \varphi'(t)$. Vskutku pro $t < \alpha$ existuje $\psi'(t) = \varphi'(\alpha)$ a pro $t > \beta$ existuje $\psi'(t) = \varphi'(\beta)$, pro $\alpha < t < \beta$ je pak zřejmě $\psi'(t) = \varphi'(t)$.

Zbývá vyšetřiti hodnoty $t = \alpha$, $t = \beta$. Ježto pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$ je $\psi(t) = \varphi(t)$, je $\psi'_+(\alpha) = \varphi'(\alpha)$; ježto pro $t \leqq \alpha$ je $\psi(t) = \varphi(\alpha) + (t - \alpha)\,\varphi'(\alpha)$, je $\psi'_-(\alpha) = \varphi'(\alpha)$, tedy vskutku $\psi'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$; obdobně se dokáže, že je $\psi'(\beta) = \varphi'(\beta)$. Tedy vskutku $\psi'(t)$ existuje v intervalu $(-\infty, \infty)$ a v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ platí rovnice $\psi'(t) = \varphi'(t)$. Obdobně se ukáže: $g'(x)$ existuje v intervalu $(-\infty, \infty)$ a v intervalu $\langle a, b\rangle$ platí rovnice $g'(x) = f'(x)$. Ježto $\psi'(t)$ i $g'(x)$ existují v intervalu $(-\infty, \infty)$, máme podle věty B′ tento výsledek: pro každé t je

$$G'(t) = g'(\psi(t))\,\psi'(t). \tag{10}$$

Je-li však $\alpha \leqq t \leqq \beta$, je $\psi(t) = \varphi(t)$, $\psi'(t) = \varphi'(t)$ a dále je $a \leqq \varphi(t) \leqq b$, takže $g'(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))$; z rovnice (10) plyne tedy

$$G'(t) = g'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t),$$

čímž rovnice (9) v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ je dokázána.

Věta 18. (Věta o střední hodnotě, Kössler 84.) *Jestliže funkce $f(x)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*[31]) *potom existuje aspoň jedno číslo c tak, že platí*

$$a < c < b, \qquad f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(c).$$

Učiňme z této věty dva důsledky:

Věta 19. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí-li rovnice $f'(x) = 0$ v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*[31]) *je funkce $f(x)$ konstantní v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz: Stačí dokázati: pro každé číslo t intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(t) = f(a)$. Ježto pro $t = a$ je tato rovnice samozřejmá, stačí

[31]) T. j. v každém *vnitřním* bodě intervalu $\langle a, b\rangle$.

předpokládati, že je $a < t \leqq b$. Na interval $\langle a, t\rangle$ můžeme užíti věty 18; existuje tedy číslo c tak, že je $a < c < t$ (tedy i $a < c < b$), $f(t) - f(a) = (t - a)\, f'(c)$. Je však $f'(c) = 0$, a tedy vskutku $f(t) = f(a)$.

Věta 20. *Má-li funkce $f(x)$ derivaci rovnou nule v každém bodě otevřeného*[32] *intervalu (a, b), je funkce $f(x)$ konstantní v intervalu (a, b).*

Důkaz. Zvolme nějaké číslo d v intervalu (a, b); máme dokázati: je-li t libovolné číslo intervalu (a, b), je $f(t) = f(d)$. Budiž tedy t libovolné číslo intervalu (a, b). Ježto žádné číslo intervalu (a, b) není ani jeho nejmenším ani jeho největším číslem, lze nalézti v otevřeném intervalu (a, b) dvě čísla α, β tak, že $\alpha < \operatorname{Min}(t, d) \leqq \operatorname{Max}(t, d) < \beta$. Funkce $f(x)$ má derivaci (rovnou nule) nejenom ve vnitřních, nýbrž i v koncových bodech intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a je tedy v tomto *uzavřeném* intervalu spojitá.[33] Můžeme tedy na interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ užíti věty 19 a dostáváme, že funkce $f(x)$ je konstantní v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$; ježto však t, d jsou dvě hodnoty z tohoto intervalu, je vskutku $f(t) = f(d)$.

KAPITOLA II.

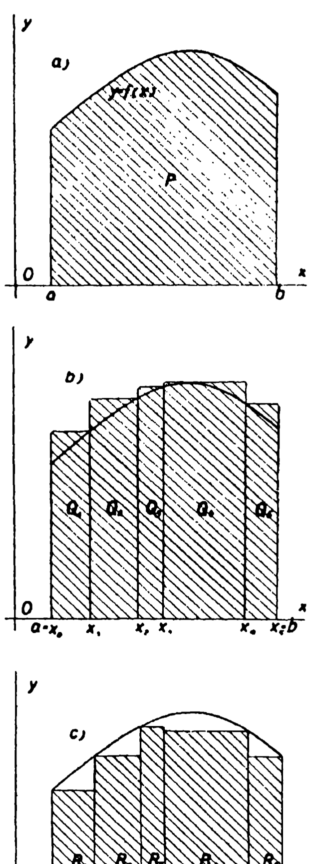
Teorie určitého integrálu.

1. Úvod. K pojmu určitého integrálu — jímž se budeme v následujících odstavcích zabývati — byli matematikové přivedeni — mimo jiné — také geometrickým problémem, totiž otázkou po plošné míře rovinných oborů. V elementární geometrii definuje se plošná velikost neboli obsah trojúhelníka (jako polovina součinu základny a výšky) a dále plošná velikost neboli obsah oborů, jež se dají rozložiti na konečný počet trojúhelníků, t. j. plošná velikost mnohoúhelníků. Vzniká otázka, jakým způsobem jest vhodno definovati obsah oborů obecnějších, jež nelze rozložiti na konečný počet trojúhelníků; vezměme jeden takový jednoduchý případ.

Budiž dána funkce $f(x)$, spojitá a kladná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Sestrojme obor P (viz obr. 1a), ohraničený jednak osou x, jednak přímkami $x = a$ a $x = b$, jednak křivkou $y = f(x)$. Jak defino-

[32]) Konečného nebo nekonečného.

[33]) Podle poznámky 1 na str. 24.



Obr. 1.

vati obsah oboru P? Zde se přirozeně nabízí tato myšlenka: rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na několik dílků „dělicími body" $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (viz obr. 1b nebo 1c, kde jest $n = 5$; pro větší pohodlí píšeme $a = x_0$, $b = x_n$, takže jest $a = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$); nad každým z těchto n intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jakožto základnou sestrojíme dva obdélníky: obdélník Q_i, jehož výška rovná se *největší* hodnotě funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (viz obr. 1b) a obdélník R_i, jehož výška se rovná *nejmenší* hodnotě funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (viz obr. 1c).[1] Označíme-li znakem M_i největší hodnotu a znakem m_i nejmenší hodnotu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, jest obsah obdélníka Q_i roven číslu $M_i\,(x_i - x_{i-1})$ a obsah obdélníka R_i roven číslu $m_i\,(x_i - x_{i-1})$. Obdélníky $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tvoří jistý mnohoúhelník Q, „opsaný" oboru P (na obr. 1b je šrafován); jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}). \tag{1}$$

Obdobně obdélníky $R_1, R_2, \ldots, R_n$ tvoří jistý mnohoúhelník R, „vepsaný" oboru P (na obr. 1c je šrafován); jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}). \tag{2}$$

[1]) Podle věty 15 jest mezi hodnotami, kterých funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nabývá, skutečně jedna největší a jedna nejmenší.

Když nyní počet dílků (na něž jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$) necháme vzrůstati nade všechny meze, při čemž délky jednotlivých těchto dílků konvergují k nule, zdá se býti pravděpodobno, že obsah „opsaného" mnohoúhelníka Q (t. j. číslo (1)) i obsah „vepsaného" mnohoúhelníka R (t. j. číslo (2)) budou konvergovati k téže limitě a jest docela přirozeno, nazvati tuto společnou limitu „obsahem oboru P".

Ovšem dosud nevíme, existuje-li vskutku tato společná limita — to budeme musit teprve dokázati. Půjde nám tedy v dalším především o to, studovati součty (1) a (2) a hlavně o to, sledovati, co se s těmito součty děje, když délky jednotlivých dílků (t. j. čísla $x_i - x_{i-1}$) konvergují k nule. To je již otázka, kterou nikterak nemusíme vázati na geometrický problém, z něhož jsme vyšli. Bude pro nás důležito, abychom tuto otázku řešili co nejobecněji a zbavili se všech zbytečných omezení, ke kterým nás vedla původní geometrická formulace problému. Především je pro studium součtů (1) a (2) zbytečný předpoklad, že funkce $f(x)$ je kladná; součty (1) a (2) můžeme sestrojiti, i když funkce $f(x)$ není stále kladná. Za druhé číslo M_i, jakožto největší hodnota funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, je zároveň také horní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$[2]) a obdobně číslo m_i je dolní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Tato horní a dolní hranice existuje pro každou funkci $f(x)$, ohraničenou v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, i když tato funkce není spojitá[3]); tedy i předpoklad spojitosti funkce $f(x)$ je zbytečný a stačí, nahradíme-li jej předpokladem, že funkce $f(x)$ je ohraničená v každém z intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$, čili že je ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Proto o funkci $f(x)$ nebudeme v dalším — aspoň prozatím — předpokládati nic jiného, nežli že jest ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a budeme svůj problém formulovati v plné obecnosti takto:

Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na několik dílů dělicími body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

---

[2]) Viz poznámku 1 k větě 4.

[3]) Tato horní hranice u *nespojité* funkce nemusí ovšem již býti největší hodnotou funkce. Příklad: definujme $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takto: pro $0 \leq x < 1$ budiž $f(x) = x$, pro $x = 1$ budiž $f(1) = 0$. Horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je zřejmě číslo 1, ač funkce této hodnoty vůbec nenabývá.

a sestrojme součty

$$\sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}), \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

kde M_i značí horní hranici a m_i dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Našim úkolem jest studovati tyto součty a hlavně vyšetřovati, co se s těmito součty děje, když počet dílků, na něž jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$, vzrůstá nade všechny meze, při čemž současně čísla $x_i - x_{i-1}$ konvergují k nule.

Tím jest dán program; provedení tohoto programu jsou věnovány další odstavce této kapitoly.[4])

2. Součtová definice určitého integrálu. Budiž dán interval $\langle a, b\rangle$ a budiž dána funkce $f(x)$, ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Je-li dáno celé kladné číslo n a je-li dáno $n + 1$ bodů[5]) $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, jež splňují vztahy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{3}$$

říkáme, že tyto body definují určité *rozdělení* intervalu $\langle a, b\rangle$. Body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ budeme nazývati *dělicími body* tohoto rozdělení; tyto body dělí interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$.[6])

Toto rozdělení, definované dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_n$, označme písmenem D.[7]) Označme znakem Δx_i délku i-tého částečného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, t. j. položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Označme dále znakem M_i horní hranici a znakem m_i dolní hranici funkce

[4]) Zdůrazňuji, že tento odstavec měl pouze informativní charakter; chtěl jsem zde čtenáři pouze ukázati, že otázka, jíž bude věnována tato kapitola, není nijak uměle sestrojena, nýbrž že jsme k ní vedeni zcela přirozeným způsobem. Pro logickou výstavbu teorie, jež bude podána v dalších odstavcích, je ovšem tento úvodní odstavec vlastně zbytečný. Proto přirozeně tento odstavec neobsahuje žádných positivních výsledků a také při stylisaci tohoto odstavce jsem nekladl velkou váhu na obvyklé požadavky matematické přesnosti.

[5]) Míním body na ose číselné, čili reálná čísla (Kössler 16); této terminologie budeme často užívati.

[6]) Nejjednodušší „rozdělení" intervalu $\langle a, b\rangle$ dostaneme, vezmeme-li $n = 1$; potom jest $x_0 = a$, $x_1 = b$; při tomto „rozdělení" máme ovšem jediný částečný interval $\langle x_0, x_1\rangle = \langle a, b\rangle$.

[7]) Takových rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je ovšem nekonečně mnoho: především můžeme zvoliti libovolně celé kladné číslo n a za druhé, když číslo n jest již zvoleno, můžeme ještě zvoliti dělicí body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ libovolně, až na to, že musí vyhovovati podmínce (3). Různá rozdělení budeme rozlišovati čárkami, indexy a pod.

$f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.[8]) Danému rozdělení D přiřadíme nyní dvě čísla: číslo

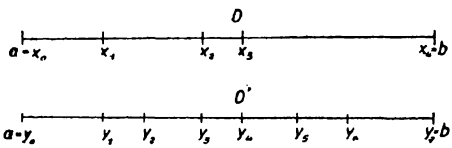
$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \,\Delta x_i,$$

jež budeme nazývati *horním součtem, příslušným k rozdělení D*, a číslo

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \,\Delta x_i,$$

jež budeme nazývati *dolním součtem, příslušným k rozdělení D*. Tyto horní a dolní součty budeme nyní podrobně vyšetřovati.[9])

Pro každé i platí ovšem nerovnost $m_i \leqq M_i$, tedy $m_i \Delta x_i \leqq \leqq M_i \Delta x_i$ a sečteme-li od $i = 1$ do $i = n$, dostaneme nerovnost $s(D) \leqq S(D)$, čili slovy:



Obr. 2.

Tvrzení A. *Dolní součet, příslušný k rozdělení D, je nejvýše roven hornímu součtu, příslušnému k témuž rozdělení.*

V dalším budeme však nuceni srovnávati též součty, příslušné ke dvěma *různým* rozdělením intervalu $\langle a, b \rangle$.

Buďtež D, D' dvě rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$; budeme říkati, že rozdělení D' je *zjemněním* rozdělení D, jestliže každý dělicí bod rozdělení D je také dělicím bodem rozdělení D'. (Viz obr. 2, kde rozdělení D', dané dělicími body $y_0, y_1, \ldots, y_7$ je zjemněním rozdělení D, daného dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_4$; zde jest $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_4$, $x_4 = y_7$.) Budiž nyní rozdělení D', dané dělicími body $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b$, vskutku zjemněním rozdělení D, daného dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Označme znakem M_i horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a znakem M'_k horní hranici funkce v intervalu $\langle y_{k-1}, y_k \rangle$; položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; potom jest

---

[8]) Funkce $f(x)$ jest v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ohraničena podle věty 8.

[9]) Je viděti, že postupujeme přesně podle programu, stanoveného v odst. 1.

$$S(D)=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i,\quad S(D')=\sum_{k=1}^{m} M'_k\,\Delta y_k.$$

Srovnejme tato dvě čísla. Vezměme určitý interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$; body x_{i-1}, x_i jsou ovšem také dělicími body rozdělení D'; budiž třeba $x_{i-1}=y_r$, $x_i=y_s$ (jest ovšem $r<s$). Částečný interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ přispívá k součtu $S(D)$ příspěvkem[10]) $M_i\,\Delta x_i$, kdežto k součtu $S(D')$ přispívá příspěvkem $\sum\limits_{k=r+1}^{s} M'_k\,\Delta y_k$. Je-li $r+1\leqq k\leqq s$, jest interval $\langle y_{k-1}, y_k\rangle$ částečným intervalem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a tedy podle věty 8 jest $M'_k\leqq M_i$. Tedy jest (viz poznámku [10])

$$\sum_{k=r+1}^{s} M'_k\,\Delta y_k\leqq M_i\sum_{k=r+1}^{s}\Delta y_k=M_i\,(y_s-y_r)=$$
$$=M_i\,(x_i-x_{i-1})=M_i\,\Delta x_i.$$

Je tedy příspěvek, kterým interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ přispívá k součtu $S(D')$, nejvýše roven příspěvku, kterým týž interval přispívá k součtu $S(D)$. Ježto to platí pro každý částečný interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, jest $S(D')\leqq S(D)$; obdobně se dokáže nerovnost $s(D')\geqq s(D)$. Dokázali jsme tedy toto

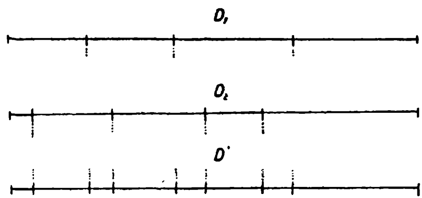
Tvrzení B. *Je-li rozdělení D' zjemněním rozdělení D, jest* $S(D')\leqq S(D)$, $s(D')\geqq s(D)$.

Z tvrzení B učiníme ihned jeden důsledek: Budiž D_0 ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež je definováno dělicími body $x_0=a$, $x_1=b$. Zřejmě jest $S(D_0)=M(x_1-x_0)=M(b-a)$, $s(D_0)=$

[10]) Co tím rozumíme, je snad jasno. Budeme říkati, že interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ přispívá k součtu $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$ příspěvkem $M_i\,\Delta x_i$; obecněji, je-li $p<q$, budeme říkati, že interval $\langle x_p, x_q\rangle$ přispívá k součtu $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$ příspěvkem $\sum\limits_{i=p+1}^{q} M_i\,\Delta x_i=M_{p+1}(x_{p+1}-x_p)+M_{p+2}(x_{p+2}-x_{p+1})+\ldots+M_q(x_q-x_{q-1})$. Učiňme ještě jednu poznámku, které často použijeme. Je-li $p<q$, je $\sum\limits_{i=p+1}^{q}\Delta x_i=(x_{p+1}-x_p)+(x_{p+2}-x_{p+1})+\ldots+(x_q-x_{q-1})=x_q-x_p$; specielně tedy $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=x_n-x_0=b-a$. Geometrický význam těchto rovnic je jasný: délka intervalu $\langle x_p, x_q\rangle$ rovná se součtu délek intervalů $\langle x_p, x_{p+1}\rangle$, $\langle x_{p+1}, x_{p+2}\rangle, \ldots, \langle x_{q-1}, x_q\rangle$.

$= m(b - a)$, kde M značí horní hranici, m dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Ježto každé rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je zřejmě zjemněním rozdělení D_0 (ježto body a, b jsou dělicími body každého rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$), jest podle tvrzení B součet $S(D_0)$ největší ze všech horních součtů, příslušných všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$[11]); obdobně součet $s(D_0)$ jest nejmenší ze všech dolních součtů. Dostáváme tedy tuto větu:

Věta 21. *Je-li M horní hranice a m dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest největší hodnota horního součtu rovna číslu $M(b - a)$, nejmenší hodnota dolního součtu rovna číslu $m(b - a)$. Je-li tedy D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, platí nerovnosti $m(b - a) \leq s(D) \leq S(D) \leq M(b - a)$.*[12])



Obr. 3.

Buďtež nyní D_1, D_2 dvě zcela libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme znakem D' rozdělení, jež je zjemněním rozdělení D_1 a rovněž zjemněním rozdělení D_2. (Takové zjemnění D' se dá snadno sestrojiti na př. tím, že za dělicí body rozdělení D' vezmeme jednak všechny dělicí body rozdělení D_1, jednak všechny dělicí body rozdělení D_2; tak je to provedeno na obr. 3.) Podle tvrzení B je $S(D_1) \geq S(D')$; podle tvrzení A je $S(D') \geq s(D')$; podle tvrzení B je $s(D') \geq s(D_2)$; odtud plyne $S(D_1) \geq s(D_2)$. Platí tedy

Tvrzení C. *Jsou-li D_1, D_2 dvě libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$* (totožná nebo navzájem různá), *jest* $S(D_1) \geq s(D_2)$. (Čili: každý dolní součet je nejvýše roven kterémukoliv hornímu součtu.)

Každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přísluší určité číslo $S(D)$; všechna čísla $S(D)$, příslušná všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$, tvoří jistou množinu číselnou; označme ji zna-

[11]) To znamená, že žádný z horních součtů není větší než číslo $S(D_0)$.

[12]) Nerovnost $s(D) \leq S(D)$ plyne z tvrzení A.

kem $\mathfrak{M}$. Rovněž tak každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přísluší určité číslo $s(D)$; všechna čísla $s(D)$, příslušná všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$, tvoří jistou množinu číselnou; označme ji znakem $\mathfrak{m}$.

Čísla množiny $\mathfrak{M}$ (jinými slovy: horní součty $S(D)$) jsou podle věty 21 vesměs nejvýše rovna číslu $M(b - a)$ a nejméně rovna číslu $m(b - a)$; tedy množina $\mathfrak{M}$ je ohraničena, má tedy podle věty 1 a 2 horní a dolní hranici. Horní hranici snadno stanovíme: největší horní součet, čili největší číslo množiny $\mathfrak{M}$, jest podle věty 21 číslo $M(b - a)$; podle poznámky 1 k větě 1 jest toto číslo horní hranicí množiny $\mathfrak{M}$. Nás bude však zajímati hlavně *dolní* hranice množiny $\mathfrak{M}$. *Tuto dolní hranici množiny* $\mathfrak{M}$ (čili dolní hranici horních součtů) *označíme znakem* $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a budeme ji nazývati *horním integrálem funkce* $f(x)$ *od* a *do* b.

Rovněž čísla množiny $\mathfrak{m}$ (jinými slovy: dolní součty $s(D)$) jsou podle věty 21 vesměs nejvýše rovna číslu $M(b - a)$ a nejméně rovna číslu $m(b - a)$; tedy množina $\mathfrak{m}$ je ohraničena. Nejmenší číslo (a tedy dolní hranice) množiny $\mathfrak{m}$ je podle věty 21 číslo $m(b - a)$. Nás bude však zajímati hlavně *horní* hranice množiny $\mathfrak{m}$. *Tuto horní hranici množiny* $\mathfrak{m}$ (čili horní hranici dolních součtů) *označíme znakem* $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a budeme ji nazývati *dolním integrálem funkce* $f(x)$ *od* a *do* b.

Funkci $f(x)$ nazýváme v obou případech (při horním i dolním integrálu) funkcí integrovanou nebo integrandem; čísla a, b nazýváme *mezemi* horního (dolního) integrálu, a sice číslo a nazýváme *dolní mezí*, číslo b *horní mezí*. Proměnnou x, která vystupuje ve funkci $f(x)$ a v symbolu $\mathrm{d}x$, nazýváme *integrační proměnnou*.[13])

[13]) Integrační proměnná nemusí vždy býti označena písmenem x, může býti označena třeba písmenem t, u, y a pod.; horní (dolní) integrál píšeme pak $\int_a^{\overline{b}} f(t)\,\mathrm{d}t$ atd. Hodnota horního (a rovněž dolního) integrálu nezávisí na označení integrační proměnné; to znamená: je-li funkce $f(x)$ ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\overline{b}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\overline{b}} f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots \qquad \text{(neboť}$$

Věta 22. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Označíme-li písmenem M horní hranici a písmenem m dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest*

$$m(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b-a).$$

Důkaz. Položme pro zkrácení

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = s, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

Číslo S je *dolní* hranicí množiny $\mathfrak{M}$, kdežto číslo $M(b-a)$, jak jsme zjistili před okamžikem, jest *horní* hranicí množiny $\mathfrak{M}$; tedy jest $S \leqq M(b-a)$. Obdobně se dokáže nerovnost $m(b-a) \leqq s$. Zbývá tedy ještě dokázati nerovnost $s \leqq S$. Důkaz provedeme nepřímo; předpokládejme, že je $s > S$, a z toho odvodíme spor. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(s - S)$; tedy $\varepsilon > 0$. Ježto číslo S je dolní hranicí horních součtů a ježto $S + \varepsilon > S$, existuje (viz větu 2) aspoň jeden horní součet $S(D_1)$ — příslušný k jistému rozdělení D_1 — takový, že jest $S(D_1) < S + \varepsilon$. Ježto číslo s je horní hranicí dolních součtů a ježto $s - \varepsilon < s$, existuje (viz větu 1) aspoň jeden dolní součet $s(D_2)$ — příslušný k jistému rozdělení D_2 — takový, že jest $s(D_2) > s - \varepsilon$. Jest však $s - S = 2\varepsilon$ a tedy $s - \varepsilon = S + \varepsilon$, takže jest $S(D_1) < S + \varepsilon = s - \varepsilon < s(D_2)$; to je však ve sporu s tvrzením C, podle kterého jest $S(D_1) \geqq s(D_2)$. Tím jest věta 22 dokázána.

Uveďme ještě dva jednoduché důsledky věty 22:

Věta 23. *Budiž $a < b$; nerovnosti $A \leqq f(x) \leqq B$ buďtež splněny pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$A(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq B(b-a).$$

---

funkce f nabývá v kterémkoliv bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ stejné hodnoty, ať v ní nezávisle proměnnou značím písmenem x či t). Tedy na př.

$$\overline{\int_2^5} (x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_2^5} (t^2 - t + 2)\,\mathrm{d}t, \quad \underline{\int_0^\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = \underline{\int_0^\pi} \sin y\,\mathrm{d}y \text{ atd.}$$

Důkaz. Budiž M horní a m dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$; podle poznámky 2 k větě 4 a 5 jest $A \leqq m$, $B \geqq M$ a tedy podle věty 22

$$A(b-a) \leqq m(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b-a) \leqq B(b-a).$$

Věta 24. *Budiž $a < b$; nerovnost $|f(x)| \leqq K$ budiž splněna pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\left|\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b-a), \quad \left|\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b-a).$$

Důkaz. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $-K \leqq f(x) \leqq K$; podle věty 23 je tedy

$$-K(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq K(b-a) \quad \text{čili} \quad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b-a);$$

obdobně pro horní integrál.

Ve větě 22 jsme zjistili, že vždy platí vztah $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq$ $\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Platí-li v tomto vztahu znamení rovnosti, nazýváme společnou hodnotu horního a dolního integrálu krátce *integrálem* (obšírněji *určitým integrálem*[14]) *funkce $f(x)$ od a do b a označujeme ji znakem* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. *Říkáme v tomto případě* (t. j. tehdy, když horní integrál rovná se dolnímu), *že* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existuje, nebo že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b nebo také, že funkce $f(x)$ jest integrace schopna v intervalu $\langle a, b\rangle$.*[15]) Tím jsme podali t. zv.

[14]) Název „určitý integrál" volíme proto, abychom tento integrál zřetelněji odlišili od t. zv. „integrálu neurčitého", kterým se budeme zabývati v kapitole III.

[15]) Jinak se u určitého integrálu užívá téhož názvosloví jako u horního a dolního integrálu: a je dolní mez, b je horní mez atd.

Cauchy-Riemannovu součtovou definici určitého integrálu.[16])

Podle této definice tedy integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ (kdež $a < b$) existuje tehdy a jen tehdy, je-li $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$; je-li tato rovnost splněna, jest integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ definován vztahem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.^{17)}$$

Příklady. 1. Budiž $a < b$; budiž funkce $f(x)$ konstantní v intervalu $\langle a, b\rangle$, třeba $f(x) = c$. Potom dolní hranice i horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovna číslu c; podle věty 22 jest tedy

$$c(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} c\,dx \leqq \overline{\int_a^b} c\,dx \leqq c(b-a).$$

Ježto oba krajní členy jsou si rovny, musí v těchto nerovnostech vesměs platiti znamení rovnosti; tedy konstanta c má určitý integrál od a do b a jest

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).^{18)}$$

[16]) Vedle této definice Cauchy-Riemannovy jsou známy ještě jiné, obecnější definice určitého integrálu; nejdůležitější z nich je definice Lebesgueova. V této knížce omezíme se však na definici Cauchy-Riemannovu. O Lebesgueově teorii může se čtenář poučiti z citované Čechovy knihy (Bodové množiny I); její 4. kapitola je věnována obšírnému výkladu o této teorii.

[17]) $\int_a^b f(x)\,dx$ jsme tedy dosud definovali jen pro $a < b$. Později rozšíříme tuto definici i na případy $a = b$, $a > b$.

[18]) Je-li $c = 1$, budeme místo $\int_a^b 1\,dx$ psáti kratčeji $\int_a^b dx$, jak je zvykem.

2. Definujme funkci $f(x)$ takto: pro racionální x budiž $f(x)=0$, pro iracionální x budiž $f(x) = 1$. Budiž $\langle a, b\rangle$ libovolný interval. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Budiž M_i horní hranice a m_i dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Zřejmě jest $M_i = 1$, $m_i = 0$ a tedy $S(D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \,.\, \Delta x_i = b - a$, $s(D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \,.\, \Delta x_i = 0$. Ježto všechny horní součty jsou rovny číslu $b - a$, jest i jejich dolní hranice rovna číslu $b - a$; jest tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$ a obdobně $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje.

Poznamenejme ještě: Má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b, můžeme ve větách 22, 23, 24 nahraditi horní a dolní integrál prostě integrálem. Tím dostáváme tuto větu:

Věta 25. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ nechť má určitý integrál od a do b. Potom platí:*

1. Je-li M horní hranice a m dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest

$$m(b - a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b - a).$$

2. Jsou-li nerovnosti $A \leqq f(x) \leqq B$ splněny pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$, jest

$$A(b - a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq B(b - a).$$

3. Platí-li nerovnost $|f(x)| \leqq K$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$, jest

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b - a).$$

3. Horní (dolní) integrál jako limita horních (dolních) součtů. V předešlém odstavci definovali jsme horní integrál funkce $f(x)$ (ohraničené v intervalu $\langle a, b\rangle$) od a do b jako dolní hranici horních součtů; ukážeme nyní, že tento horní integrál jest nejenom dolní hranicí horních součtů, nýbrž také — zhruba řečeno — limitou, ke které konvergují horní součty $S(D)$, jestliže rozdělení D se mění tak, že čísla Δx_i konvergují k nule.[19]) Tento výrok nemá ovšem dosud přesného smyslu, neboť není jasno, jak jest zde rozuměti slovům „limita" a „konvergovati k nule" (pojem limity posloupnosti ani pojem limity funkce jedné nebo několika proměnných se nám — aspoň prozatím — nehodí). Musíme se tedy vysloviti přesněji, a to učiníme *v tomto odstavci.*

Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Znakem $\varrho(D)$ označíme největší z čísel $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$); *toto označení podržíme v celé této kapitole.* Naším cílem bude především důkaz této věty:

Věta 26. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnosti*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \qquad (4)$$

jsou splněny pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje podmínku $\varrho(D) < \delta$.

Důkaz. Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Naším cílem jest dokázati existenci takového kladného čísla δ, že nerovnosti (4) jsou splněny pro všechna rozdělení D, vyhovující podmínce $\varrho(D) < \delta$. Ježto $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ je dolní hranicí horních součtů a ježto $\varepsilon/2$ je kladné, existuje (podle věty 2) aspoň jedno rozdělení D_1 tak, že

$$S(D_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5)$$

Toto rozdělení D_1 až do konce důkazu podržíme.

Rozdělení D_1 budiž definováno dělicími body $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{p-1} < y_p = b$. Ježto funkce $f(x)$ jest ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje (podle věty 6) kladné číslo K tak, že

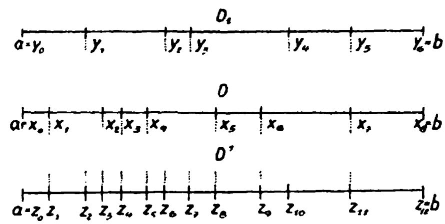
[19]) To je ve shodě s naším programem, vytčeným v odst. 1; jedním z našich cílů jest právě sledovati, co se děje s horními a dolními součty, když čísla Δx_i konvergují k nule.

pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $|f(x)| \leqq K$. Položme nyní

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4Kp}; \tag{6}$$

tedy je $\delta > 0$. Budiž nyní D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež vyhovuje podmínce $\varrho(D) < \delta$; dokážeme, že potom platí nerovnosti (4); tím bude věta 26 dokázána.

Buďtež $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ dělicí body rozdělení D. Sestrojme rozdělení D' tak, že za dělicí body rozdělení D' vezmeme jednak všechny dělicí body rozdělení D_1, jednak všechny dělicí body rozdělení D (viz obr. 4, kde jsou zakreslena rozdělení D_1, D, D'). Dělicí body rozdělení D' označíme $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(a = z_0 < z_1 < \ldots < z_{m-1} < z_m = b)$.



Obr. 4.

Vyšetřujme součty

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad S(D') = \sum_{k=1}^{m} M'_k \Delta z_k.$$

$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$; M_i značí horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$; M'_k značí horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle z_{k-1}, z_k\rangle$.) Částečné intervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ rozdělení D rozdělme na dvě třídy: interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ budeme nazývati intervalem prvního druhu, není-li žádný z bodů $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ *vnitřním* bodem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$; interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ budeme nazývati intervalem druhého druhu, je-li aspoň jeden z bodů $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ *vnitřním* bodem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. [Na obr. 4 jsou $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_2, x_3\rangle$, $\langle x_3, x_4\rangle$, $\langle x_5, x_6\rangle$, $\langle x_7, x_8\rangle$ intervaly prvního druhu (jest $y_5 = x_7$, takže bod y_5 není vnitřním bodem intervalu $\langle x_7, x_8\rangle$); intervaly $\langle x_1, x_2\rangle$ $\langle x_4, x_5\rangle$, $\langle x_6, x_7\rangle$ jsou intervaly druhého druhu.] Ježto každý interval druhého druhu obsahuje aspoň jeden z bodů $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$

jako vnitřní bod, je počet intervalů druhého druhu nejvýše roven číslu $p - 1$.

Vyšetřujme nyní příspěvky, jimiž jednotlivé intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívají jednak k součtu $S(D)$, jednak k součtu $S(D')$. Je-li $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ interval *prvního* druhu, jest interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ též částečným intervalem rozdělení D', třeba $x_{i-1} = z_{k-1}$, $x_i = z_k$ a tedy přispívá zřejmě interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ týmž příspěvkem k součtu $S(D)$ jako k součtu $S(D')$. Je-li však $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ interval *druhého* druhu, jest tento interval v rozdělení D' rozdělen na dva nebo více intervalů, takže jest $x_{i-1} = z_r$, $x_i = z_s$, kde $s - r > 1$. Příspěvek intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ k součtu $S(D)$ jest tedy $M_i \Delta x_i$, kdežto příspěvek téhož intervalu k součtu $S(D')$ jest $\sum\limits_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta z_k$. Pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ platí nerovnost $|f(x)| \leqq K$; podle poznámky k větě 6 je tedy $|M_i| \leqq K$, $|M'_k| \leqq K$; dále jest $\Delta x_i \leqq \varrho(D) < \delta$; tedy jest

$$|M_i \Delta x_i| < K\delta, \tag{7}$$

$$\left| \sum_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta z_k \right| \leqq K \sum_{k=r+1}^{s} \Delta z_k = K(z_s - z_r) = \\ = K(x_i - x_{i-1}) = K \Delta x_i < K\delta. \tag{8}$$

Vyšetřujme nyní rozdíl $S(D) - S(D')$; příspěvky, kterými přispívají intervaly *prvního* druhu k součtu $S(D)$ a k součtu $S(D')$, jsou si rovny a v rozdílu $S(D) - S(D')$ se tedy zruší. Každý interval *druhého* druhu přispívá k součtu $S(D)$ i k součtu $S(D')$ příspěvkem, jehož prostá hodnota podle (7), (8) jest menší než $K\delta$. Tedy takový interval druhého druhu přispívá k rozdílu $S(D) - S(D')$ příspěvkem, jehož prostá hodnota je menší než $2K\delta$. Ježto pak počet intervalů druhého druhu není větší než $p - 1$, jest podle (6)

$$|S(D) - S(D')| \leqq (p - 1) \,.\, 2K\delta < 2pK\delta = \frac{\varepsilon}{2};$$

tedy jest

$$S(D) < S(D') + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Dále jest rozdělení D' zjemněním rozdělení D_1 a tedy podle tvrzení B z odst. 2

$$S(D') \leqq S(D_1). \tag{10}$$

Ze vztahů (9), (10), (5) plyne

$$S(D) < S(D') + \frac{\varepsilon}{2} \leqq S(D_1) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon,$$

čímž druhá nerovnost (4) je dokázána. První nerovnost (4)

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D)$$

je však samozřejmá, ježto horní integrál je dolní hranicí horních součtů. Tím je věta 26 dokázána.

Z této věty učiníme ihned jeden důsledek:

Věta 27. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_m, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Potom posloupnost čísel $S(D_1), S(D_2), \ldots, S(D_m), \ldots$ má limitu, rovnou hornímu integrálu $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ (čili $\lim_{m\to\infty} S(D_m) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$).*

Důkaz. Budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Máme dokázati, že existuje číslo m_0 tak, že nerovnost

$$|S(D_m) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,| < \varepsilon \tag{11}$$

platí pro všechna m, jež jsou větší než m_0. Podle věty 26 existuje kladné číslo δ takové, že nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

platí pro všechna rozdělení D, jež hoví vztahu $\varrho(D) < \delta$. Ježto $\lim_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$, existuje číslo m_0 takové, že nerovnost $\varrho(D_m) < \delta$ platí pro všechna m, jež jsou větší než m_0. Je-li tedy $m > m_0$, platí nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D_m) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

a tedy tím spíše nerovnost (11), jak bylo dokázati.

Význam věty 27 spočívá v této okolnosti: chceme-li nalézti $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, nemusíme vyšetřovati *všechna* rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ a sestrojiti dolní hranici příslušných horních součtů $S(D)$, nýbrž stačí, sestrojíme-li nějakou *posloupnost* rozdělení $D_1, D_2, D_3, \ldots$ takovou, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$ a najdeme-li limitu posloupnosti $S(D_1), S(D_2), S(D_3), \ldots$ Objasníme za chvíli tu výhodu na příkladě; napřed však poznamenávám ještě, že obdobné věty platí také pro dolní integrál:

Věta 28. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnosti*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqq s(D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon$$

jsou splněny pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje podmínku $\varrho(D) < \delta$.

Věta 29. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $D_1, D_2, D_3, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Potom jest*

$$\lim_{m\to\infty} s(D_m) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Důkazy vět 28, 29 neprovádím, ježto jsou zcela obdobné důkazům vět 26 a 27.

Příklad. Budiž $f(x) = x$ a počítejme $\overline{\int_2^3} x\,dx$, $\underline{\int_2^3} x\,dx$. Sestrojme rozdělení $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ tak, že D_m jest ono rozdělení intervalu $\langle 2, 3\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body rozdělení D_m jsou tedy $x_0 = 2$, $x_1 = 2 + 1/m$, $x_2 = 2 + 2/m, \ldots, x_i = 2 + i/m, \ldots, x_m = 2 + m/m = 3$. Jest $\varrho(D_m) = 1/m$, tedy $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$; tedy podle vět 27, 29 jest

$$\lim_{m\to\infty} s(D_m) = \underline{\int_2^3} x\,dx, \quad \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \overline{\int_2^3} x\,dx.$$

Počítejme $S(D_m)$, $s(D_m)$. Největší hodnota (a tedy i horní hranice) funkce $f(x) = x$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle = \left\langle 2 + \frac{i-1}{m}, 2 + \frac{i}{m}\right\rangle$ jest $2 + i/m$; obdobně nejmenší hodnota (a tedy i dolní hranice) funkce $f(x)$ v tomto intervalu jest $2 + (i-1)/m$. Tedy jest

$$S(D_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(2 + \frac{i}{m}\right)\frac{1}{m} = 2 + \frac{1}{m^2}(1 + 2 + \ldots + m) =$$
$$= 2 + \frac{m(m+1)}{2m^2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2m};$$

$$s(D_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(2 + \frac{i-1}{m}\right)\frac{1}{m} = 2 + \frac{1}{m^2}(0 + 1 + \ldots + (m-1)) =$$
$$= 2 + \frac{m(m-1)}{2m^2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2m}.$$

Tedy jest

$$\overline{\int_2^3} x\,dx = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \frac{5}{2}, \quad \underline{\int_2^3} x\,dx = \lim_{m\to\infty} s(D_m) = \frac{5}{2}.$$

Tedy funkce x má integrál od 2 do 3 a jest $\int_2^3 x\,dx = \frac{5}{2}$. Později odvodíme ovšem jinou, pohodlnější metodu pro výpočet tohoto integrálu.

Věty 26 až 29 týkaly se libovolných funkcí ohraničených v intervalu $\langle a, b\rangle$. Odvodíme ještě dvě obdobné věty, jež se však týkají pouze funkcí, jež mají integrál od a do b.

Věta 30. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce, jež má určitý integrál od a do b. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že platí toto: je-li D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, které vyhovuje podmínce $\varrho(D) < \delta$, a jsou-li $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ libovolná čísla, hovící podmínce $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, platí nerovnost*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Důkaz. Budiž $f(x)$ funkce, jež má integrál od a do b. Budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Podle věty 26 existuje kladné číslo δ_1 tak, že nerovnost[20])

$$S(D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \tag{13}$$

platí pro všechna rozdělení D, hovící podmínce $\varrho(D) < \delta_1$. Podle věty 28 existuje kladné číslo δ_2 tak, že nerovnost

$$s(D) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \tag{14}$$

platí pro všechna rozdělení D, hovící podmínce $\varrho(D) < \delta_2$. Položme $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$; tedy $\delta > 0$. Budiž D libovolné rozdělení, hovící podmínce $\varrho(D) < \delta$; potom platí nerovnost (13) i nerovnost (14). Buďte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ dělicí body rozdělení D. Označme znakem M_i horní hranici a znakem m_i dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Jsou-li $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ libovolná čísla, vyhovující nerovnostem $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, jest ovšem $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$ a tedy

$$s(D) = \sum_{i=1}^n m_i\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^n M_i\,\Delta x_i = S(D); \tag{15}$$

odtud a z nerovností (13), (14) plyne pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon;$$

to je však právě hledaná nerovnost (12).

Věta 31. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce, jež má určitý integrál od a do b. Budiž dále $D_1, D_2, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež hoví podmínce $\lim_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Dělicí body rozdělení D_m buďte*

[20]) Místo horního a dolního integrálu píšeme ovšem krátce integrál.

$$a = x_{0,m} < x_{1,m} < x_{2,m} < \ldots < x_{n_m-1,m} < x_{n_m,m} = b.$$ [21]

Pro každou hodnotu m budiž dáno n_m čísel $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \ldots, \xi_{n_m,m}$ tak, že platí $x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n_m$. Potom jest

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

(Při tom značíme $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m}$.)

Důkaz. Podle věty 27 a 29 jest

$$\lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{m\to\infty} s(D_m) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Jest však zřejmě (viz důkaz nerovnosti (15) v důkazu věty 30)

$$s(D_m) \leqq \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} \leqq S(D_m). \tag{18}$$

Ze vztahů (17), (18) plyne však okamžitě rovnice (16).[22]

Všimněme si, jaký je rozdíl na př. mezi větou 27 a větou 31. Existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme jej podle věty 27 počítati takto: sestrojíme posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle : D_1, D_2, \ldots$ takovou, že $\lim_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$; limita posloupnosti $S(D_1), S(D_2), \ldots$ je potom hledaný integrál. Abychom však stanovili horní součet $S(D_m)$, musíme stanoviti horní hranici funkce $f(x)$ ve všech částečných intervalech, na které jest interval $\langle a, b\rangle$ rozdělen rozdě-

[21]) Tyto body, jakož i jejich počet závisí ovšem na m — v označení byl na tuto okolnost vzat zřetel. Číslo n_m značí na př. počet částečných intervalů, na něž je interval $\langle a, b\rangle$ rozdělen rozdělením D_m.

[22]) Podle známé věty: je-li $a_m \leqq c_m \leqq b_m$, $\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} b_m = \alpha$, jest též $\lim_{m\to\infty} c_m = \alpha$.

Důkaz: budiž ε libovolné kladné číslo. Z rovnic $\lim_{m\to\infty} a_m = \alpha$, $\lim_{m\to\infty} b_m = \alpha$ plyne existence čísel m_1, m_2 takových, že pro $m > m_1$ je $\alpha - \varepsilon < a_m < \alpha + \varepsilon$ a pro $m > m_2$ je $\alpha - \varepsilon < b_m < \alpha + \varepsilon$. Položíme-li $m_0 = \mathrm{Max}\,(m_1, m_2)$, potom pro $m > m_0$ bude $\alpha - \varepsilon < a_m \leqq c_m \leqq b_m < \alpha + \varepsilon$ a tedy bude $|c_m - \alpha| < \varepsilon$ pro všechna m, jež jsou větší než m_0; tedy vskutku existuje limita $\lim_{m\to\infty} c_m = \alpha$.

lením D_m. Věta 31 praví pak — zhruba řečeno — že můžeme místo této horní hranice funkce $f(x)$ v takovém částečném intervalu vzíti namátkou hodnotu funkce $f(x)$ v *kterémkoliv* bodě toho částečného intervalu. Poznamenávám ovšem ještě jednou, že vět 26 až 29 můžeme použíti pro jakoukoliv ohraničenou funkci, kdežto vět 30 a 31 můžeme použíti jen tehdy, víme-li již předem, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b. Jak se to pozná, o tom si odvodíme některé věty v odst. 4, 5, 6, hlavně však v odst. 8.

4. Integrace součtu. Věta 32. *Budiž $a < b$; buďtež $f_1(x)$, $f_2(x)$ funkce ohraničené v intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\overline{\int_a^b}(f_1(x) + f_2(x))\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f_1(x)\,dx + \overline{\int_a^b} f_2(x)\,dx; \tag{19}$$

$$\underline{\int_a^b}(f_1(x) + f_2(x))\,dx \geqq \underline{\int_a^b} f_1(x)\,dx + \underline{\int_a^b} f_2(x)\,dx. \tag{20}$$

Důkaz. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Budiž M'_i horní hranice funkce $f_1(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, budiž M''_i horní hranice funkce $f_2(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, budiž M_i horní hranice funkce $f_1(x) + f_2(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pro všechna x intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ platí nerovnost $f_1(x) + f_2(x) \leqq M'_i + M''_i$ a tedy jest (podle poznámky 2 k větě 4) $M_i \leqq M'_i + M''_i$. Označím-li tedy znaky $S'(D)$, $S''(D)$, $S(D)$ horní součty, příslušné k funkcím $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x) + f_2(x)$, jest

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n}(M'_i + M''_i)\,\Delta x_i = S'(D) + S''(D). \tag{21}$$

Sestrojme posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$: $D_1, D_2, D_3, \ldots$ tak, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$ (můžeme třeba zvoliti za D_m ono rozdělení, jež dělí interval $\langle a, b\rangle$ na m stejných dílů). Potom jest podle (21) pro každé m

$$S(D_m) \leqq S'(D_m) + S''(D_m);$$

přechodem k limitě dostáváme podle věty 27 vztah (19). Vztah (20) se dokáže obdobně.

Věta 33. *Budiž $a < b$; existují-li integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx$, existuje i integrál $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx$ a jest*

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Důkaz. Podle věty 32 a 22 jest

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} (f_1(x) + f_2(x))\,dx \leqq$$

$$\leqq \overline{\int_a^b} (f_1(x) + f_2(x))\,dx \leqq \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx;$$

oba krajní výrazy (vpravo i vlevo) jsou si rovny, tedy platí vesměs znamení rovnosti, čímž je věta 33 dokázána.

Věta 34. *Budiž $a < b$; má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b a je-li c libovolné číslo, má i funkce $c\,f(x)$ určitý integrál od a do b a jest*

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b. Rozeznávejme tři případy:

1. Je-li $c = 0$, jest podle příkladu 1 v odst. 2

$$\int_a^b 0\,.\,f(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0 = 0\,.\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Je-li $c > 0$, vyšetřujme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Budiž $S'(D)$ horní a $s'(D)$ dolní součet, příslušný k funkci $cf(x)$; $S(D)$ budiž horní a $s(D)$ dolní součet, příslušný k funkci $f(x)$. Je-li M_i horní hranice a m_i dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, jest podle věty 7 horní hranice funkce $c\,f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ rovna číslu cM_i a dolní hranice rovna číslu cm_i. Tedy

$$S'(D) = \sum_{i=1}^{n} cM_i \,\Delta x_i = c\,S(D),\quad s'(D) = \sum_{i=1}^{n} cm_i \,\Delta x_i = c\,s(D).$$

Budiž $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Potom je pro každé m

$$S'(D_m) = c\,S(D_m),\quad s'(D_m) = c\,s(D_m);$$

podle věty 27 a 29 získáme odtud přechodem k limitě rovnice

$$\overline{\int_a^b} c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\underline{\int_a^b} c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati.

3. Budiž konečně $c < 0$; zachováme-li totéž označení jako v případě $c > 0$, dostáváme nyní podle věty 7, že horní hranice funkce $c\,f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je rovna číslu cm_i a dolní hranice je rovna číslu cM_i; z toho

$$S'(D) = \sum_{i=1}^{n} cm_i \,\Delta x_i = c\,s(D),\quad s'(D) = \sum_{i=1}^{n} cM_i \,\Delta x_i = c\,S(D),$$

odkudž stejně jako dříve $S'(D_m) = c\,s(D_m)$, $s'(D_m) = c\,S(D_m)$ a tedy přechodem k limitě

$$\overline{\int_a^b} c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\underline{\int_a^b} c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,dx,$$

jak bylo dokázati.

Poznámka. Větu 33 jsme dokázali pro dva sčítance; úplnou indukcí lze okamžitě odvoditi obdobnou větu pro libovolný počet sčítanců. Kombinujeme-li tuto větu s větou 34 (o násobení integrované funkce konstantou), dostáváme konečně tuto větu:

Věta 35. *Budiž $a < b$; jsou-li $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ funkce, mající určitý integrál od a do b a jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n$ libovolná* *čísla, má i funkce $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ určitý integrál od a do b a jest*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako specielní případ dostáváme tento výsledek (pro $n = 2$, $c_1 = 1, c_2 = -1$): Mají-li funkce $f_1(x), f_2(x)$ určitý integrál od a do b ($a < b$), má i funkce $f_1(x) - f_2(x)$ určitý integrál od a do b a jest

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 36. *Budiž $a < b$; $f(x)$ budiž funkce, jež má určitý integrál od a do b; budiž $f(x) \geqq 0$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0.$$

Důkaz plyne okamžitě z věty 25 (z druhé její části, klademe-li v ní $A = 0$ a klademe-li za B třeba horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta 37. *Budiž $a < b$; $f_1(x), f_2(x)$ buďtež funkce, mající určitý integrál od a do b; budiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$: potom jest*

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Podle věty 35 existuje $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$; podle věty 36 jest $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \geqq 0$; podle věty 35 jest tedy

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \geqq 0.$$

5. Integrál od *a* do *c*, vyjádřený integrály od *a* do *b* a od *b* do *c*.

Věta 38. *Budiž $a < b < c$ a budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, c\rangle$. Potom jest*

$$\left.\begin{aligned} \overline{\int_a^c} f(x)\,dx &= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_b^c} f(x)\,dx; \\ \underline{\int_a^c} f(x)\,dx &= \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_b^c} f(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Důkaz. Budiž $D'_m (m = 1, 2, 3, \ldots)$ ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body tohoto rozdělení jsou tedy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b, \text{ kdež } x_i = a + \frac{i}{m}(b - a);$$

zřejmě jest $\varrho(D'_m) = (b - a) : m$. Obdobně budiž $D''_m(m = 1, 2, 3, \ldots)$ ono rozdělení intervalu $\langle b, c\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body tohoto rozdělení jsou tedy

$$b = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = c, \text{ kdež } y_i = b + \frac{i}{m}(c - b);$$

zřejmě jest $\varrho(D''_m) = (c - b) : m$. Dělicí body $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_{m-1} < b < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = c$ definují jisté rozdělení D_m intervalu $\langle a, c\rangle$, při čemž

$$\varrho(D_m) = \operatorname{Max}((b - a) : m, (c - b) : m);$$

zřejmě jest

$$S(D_m) = S(D'_m) + S(D''_m) \tag{23}$$

pro každé m. Ježto $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D'_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D''_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$, jest podle (23) a podle věty 27

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \lim_{m\to\infty} S(D'_m) + \lim_{m\to\infty} S(D''_m) =$$

$$= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_b^c} f(x)\,dx,$$

čímž je dokázán vztah (22) pro horní integrál. Důkaz pro dolní integrál jest obdobný.

Věta 39. *Budiž $a < b < c$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i integrál $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$; potom existuje i integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a jest*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Z předpokládané existence integrálu od a do b a integrálu od b do c plyne, že funkce $f(x)$ jest ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$ i v intervalu $\langle b, c\rangle$ a tedy i v intervalu $\langle a, c\rangle$ (podle věty 9); podle věty 38 jest tedy

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \text{ a rovněž } \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati.

Poznámka. Věty 38 a 39 týkaly se dvou „sousedních" intervalů $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$. Úplnou indukcí lze z nich okamžitě odvoditi obdobné věty pro libovolný počet takových intervalů; na př.: je-li $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ a je-li funkce $f(x)$ ohraničená v intervalu $\langle a_1, a_n\rangle$, jest

$$\int_{a_1}^{\overline{a_n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{\overline{a_2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_2}^{\overline{a_3}} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{\overline{a_n}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 40. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ nechť má určitý integrál od a do b. Nechť $\langle c, d\rangle$ jest částečný interval intervalu $\langle a, b\rangle$.*[23]) *Potom funkce $f(x)$ má též určitý integrál od c do d.*

Důkaz. Podle věty 38 (a podle poslední poznámky) jest

---

[23]) To znamená $a \leqq c < d \leqq b$.

[24]) První sčítanec ovšem odpadne, je-li $a = c$; třetí sčítanec odpadne, je-li $d = b$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$ [24]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$ [24]

Z toho odečtením

$$\Big(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x\Big) + \Big(\overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x\Big) +$$
$$+ \Big(\overline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = 0. \qquad (24)$$ [24]

Žádný sčítanec na levé straně rovnice (24) není záporný (podle věty 22); tedy musí každý z těchto sčítanců býti roven nule (neboť kdyby některý z nich byl různý od nuly — a tedy kladný — byl by i součet na levé straně rovnice (24) kladný a nemohl by se rovnati nule). Specielně tedy prostřední člen se rovná nule, t. j.

$$\overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati.

6. Změna funkce integrované v konečném počtu bodů.

Věta 41. *Budiž $a < b$. Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $g(x)$ funkce, jež se liší od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Ježto funkce $f(x)$ je ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$, je podle věty 10 též funkce $g(x)$ ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$, takže horní integrál $\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$ má smysl. Abychom dokázali, že

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (25)$$

stačí, dokážeme-li toto: nerovnost

$$\left| \int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{26}$$

platí, ať je ε jakékoliv kladné číslo. Budiž tedy dáno libovolné kladné číslo ε. Zvolme čísla $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p = b$ tak, že rovnost $f(x) = g(x)$ platí pro každé x intervalu $\langle a, b\rangle$, jež se nerovná žádnému z čísel $a_0, a_1, \ldots, a_p$.[25]) Existují (podle věty 6) dvě kladná čísla K_1, K_2 tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $|f(x)| \leqq K_1$, $|g(x)| \leqq K_2$; položme $K = \mathrm{Max}\,(K_1, K_2)$; potom jest

$$|f(x)| \leqq K, \quad |g(x)| \leqq K \tag{27}$$

pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$.

Zvolme nyní kladné číslo δ tak malé, aby byly splněny tyto podmínky:

$$\delta < \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_p - a_{p-1}), \tag{28}$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4Kp}. \tag{29}$$

Z nerovnosti (28) plyne

$$a = a_0 < a_0 + \delta < a_1 - \delta < a_1 + \delta < a_2 - \delta < \ldots < a_{p-1} + \delta < a_p - \delta < a_p = b;$$

podle věty 38 a podle poznámky k větám 38, 39 jest tedy

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{\overline{a_0+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_0+\delta}^{\overline{a_1-\delta}} + \int_{a_1-\delta}^{\overline{a_1+\delta}} + \int_{a_1+\delta}^{\overline{a_2-\delta}} + \ldots + \int_{a_{p-1}+\delta}^{\overline{a_p-\delta}} + \int_{a_p-\delta}^{\overline{a_p}}\ ;^{26})$$

$$\int_a^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{\overline{a_0+\delta}} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_0+\delta}^{\overline{a_1-\delta}} + \int_{a_1-\delta}^{\overline{a_1+\delta}} + \int_{a_1+\delta}^{\overline{a_2-\delta}} + \ldots + \int_{a_{p-1}+\delta}^{\overline{a_p-\delta}} + \int_{a_p-\delta}^{\overline{a_p}}\ .$$

---

25) Nejjednodušeji mohu tedy čísla $a_0, a_1, \ldots, a_p$ voliti takto: vezmu všechny hodnoty x intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž platí nerovnost $f(x) \neq g(x)$ a přidám k nim ještě hodnoty a, b (ať nerovnosti $f(a) \neq g(a)$, $f(b) \neq g(b)$ platí nebo neplatí). Tato čísla, seřazená podle velikosti, označím $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

26) Za integračním znamením má ovšem všude státi $f(x)\,\mathrm{d}x$; v následujícím vzorci má zase všude státi $g(x)\,\mathrm{d}x$.

Odečtěme tyto dvě rovnice člen po členu. V intervalech $\langle a_{i-1} + \delta, a_i - \delta\rangle$ jest $f(x) = g(x)$ (pro $i = 1, 2, \ldots, p$) a tedy

$$\int_{a_{i-1}+\delta}^{\overline{a_i-\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_{i-1}+\delta}^{\overline{a_i-\delta}} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

takže tito členové se zruší. Zbude tedy

$$\left.\begin{aligned}\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_{a_0}^{\overline{a_0+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a_0}^{\overline{a_0+\delta}} g(x)\,\mathrm{d}x\right) + \\ + \sum_{i=1}^{p-1}\left(\int_{a_i-\delta}^{\overline{a_i+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a_i-\delta}^{\overline{a_i+\delta}} g(x)\,\mathrm{d}x\right) + \\ + \left(\int_{a_p-\delta}^{\overline{a_p}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a_p-\delta}^{\overline{a_p}} g(x)\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Podle věty 24 a podle nerovností (27) jest

$$\left|\int_{a_0}^{\overline{a_0+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K\delta, \quad \left|\int_{a_p-\delta}^{\overline{a_p}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K\delta,$$

$$\left|\int_{a_i-\delta}^{\overline{a_i+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2K\delta \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, p-1$$

a obdobné nerovnosti platí, píšeme-li v nich funkci $g(x)$ místo funkce $f(x)$. Z rovnice (30) plyne tedy

$$\left|\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2\,(K\delta + (p-1)\,.\,2K\delta + K\delta) = 4pK\delta;$$

podle (29) je však $4pK\delta < \varepsilon$, platí tedy nerovnost (26); tím je dokázána rovnice (25). Obdobná rovnice pro dolní integrál se dokáže zcela analogicky.

Věta 42. *Budiž $a < b$; nechť existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; funkce $g(x)$ nechť se liší od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu*

$\langle a, b\rangle$. *Potom existuje též* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *a jest*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Podle předpokladu jest

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

tedy podle věty 41 jest

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ a rovněž } \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati.

Celkem jest možno vysloviti výsledek tohoto odstavce zhruba asi takto: změním-li funkci integrovanou pouze v konečném počtu bodů, nezmění se horní (dolní) integrál (po příp. integrál). Tento výsledek dá se ještě podstatně zobecniti; tato zobecnění vyžadují však hlubšího studia číselných množin a proto se jimi zde nebudeme zabývati.

7. Integrál jako funkce horní meze. Doplňme především poněkud definici integrálu, jakož i definici horního a dolního integrálu. Dosud (v odst. 2) jsme definovali $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jen tehdy, bylo-li $a < b$. Doplňme nyní tuto definici též pro $a = b$ tímto dodatkem:

Dodatek k definici integrálu. *Je-li funkce* $f(x)$ *definována pro* $x = a$, *klademe definitoricky* $\overline{\int_a^a} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.[27])

[27]) Tedy $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje vždy, je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$. Pojmenování dříve zavedená, jako horní mez, dolní mez, funkce integrovaná atd. podržíme i zde.

Připomeňme, že nerovnost $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, kterou jsme dříve (viz větu 22) dokázali pro $a < b$, platí podle této definice i pro $a = b$ (potom je totiž na obou stranách nula).

Budiž nyní $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$; potom existuje nejenom horní integrál $\overline{\int_a^b} f(t)\,dt$, nýbrž též horní integrál $\overline{\int_a^x} f(t)\,dt$[28]) pro každé x, jež hoví nerovnostem $a \leqq x \leqq b$. Tento horní integrál jest tedy funkcí proměnné x, definovanou v intervalu $\langle a, b\rangle$; obdobně dolní integrál $\underline{\int_a^x} f(t)\,dt$ jest funkcí proměnné x, definovanou v intervalu $\langle a, b\rangle$. Dokážeme nyní dvě důležité věty o těchto funkcích.

Věta 43. *Budiž $a < b$. Funkce $f(x)$ budiž ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $\overline{\int_a^x} f(t)\,dt$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a rovněž funkce $\underline{\int_a^x} f(t)\,dt$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Ježto funkce $f(x)$ je ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje podle věty 6 kladné číslo K tak, že nerovnost $|f(t)| \leqq K$ je splněna pro všechna t intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro zkrácení pišme

$$F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt.$$

Máme dokázati, že funkce $F(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, t. j. máme dokázati[29]) (viz pozn. 1 na str. 22): je-li předně

[28]) Měním označení integrační proměnné (viz pozn. [13]) na str. 34—35), aby se integrační proměnná t nepletla s horní mezí x. Často se to nečiní a píše se $\overline{\int_a^x} f(x)\,dx$.

[29]) Prosím čtenáře, aby až do konce této kapitoly si stále uvědomoval definice a věty z kap. I, odst. 2, 3, 4, ježto jich nyní budeme neustále používati.

$a \leqq x_0 < b$, je funkce $F(x)$ spojitá zprava v bodě x_0; je-li za druhé $a < x_0 \leqq b$, je funkce $F(x)$ spojitá zleva v bodě x_0.

Budiž tedy předně $a \leqq x_0 < b$; budiž ε libovolné kladné číslo. Položme

$$\delta = \mathrm{Min}\left(b - x_0, \frac{\varepsilon}{K}\right), \tag{31}$$

tedy $\delta > 0$. Dokážeme: je-li $x_0 < x < x_0 + \delta$, je

$$| F(x) - F(x_0) | < \varepsilon;$$

tím bude dokázáno, že funkce $F(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0.

Budiž tedy x číslo takové, že jest $x_0 < x < x_0 + \delta$[30]; potom jest

$$F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt = \overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,dt + \overline{\int_{x_0}^x} f(t)\,dt = F(x_0) + \overline{\int_{x_0}^x} f(t)\,dt;$$[31]

tedy $F(x) - F(x_0) = \overline{\int_{x_0}^x} f(t)\,dt$. Pro $x_0 \leqq t \leqq x$ jest $| f(t) | \leqq K$; podle věty 24 jest tedy

$$| F(x) - F(x_0) | = \left| \overline{\int_{x_0}^x} f(t)\,dt \right| \leqq K(x - x_0);$$

jest však $x - x_0 < \delta$; podle (31) je tedy

$$| F(x) - F(x_0) | < K\delta \leqq \varepsilon,$$

jak bylo dokázati.

Budiž za druhé $a < x_0 \leqq b$; budiž ε libovolné kladné číslo; položme

$$\delta = \mathrm{Min}\left(x_0 - a, \frac{\varepsilon}{K}\right);$$

tedy $\delta > 0$. Dokážeme: je-li $x_0 - \delta < x < x_0$, je

---

[30]) Ježto podle (31) jest $x_0 + \delta \leqq x_0 + (b - x_0) = b$, jest též $x < b$.

[31]) Je-li $a < x_0$, plyne tato rovnice z věty 38; je-li $a = x_0$, je tato rovnice též správná, ježto potom je $\overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,dt = 0$.

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

Tím bude dokázáno, že funkce $F(x)$ je v bodě x_0 spojitá zleva.

Budiž tedy x takové číslo, že platí $x_0 - \delta < x < x_0$[32]; potom jest

$$F(x_0) = \overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \overline{\int_x^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + \overline{\int_x^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

z čehož jako dříve plyne

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\overline{\int_x^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq K(x_0 - x) < K\delta \leqq \varepsilon,$$

jak bylo dokázati. Tím je dokázána ona část věty 43, jež se týká horního integrálu; pro dolní integrál je důkaz obdobný.

Věta 44. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ budiž ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $a \leqq x_0 < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě x_0, má funkce $\overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$ v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$ a rovněž funkce $\underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$ má v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$. Obdobně, je-li $a < x_0 \leqq b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zleva v bodě x_0, má funkce $\overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$ i funkce $\underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$ v bodě x_0 derivaci zleva, rovnou číslu $f(x_0)$.*

Dodatek. *Je-li tedy $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x,*[33] *existují v tomto bodě derivace*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).\text{[34]}$$

[32] Tedy jest $x > a$, neboť $x_0 - \delta \geqq x_0 - (x_0 - a) = a$.

[33] To znamená: spojitá zprava i zleva; viz větu 14.

[34] Neboť potom derivace zprava i zleva podle věty 44 existují a rovnají se témuž číslu $f(x)$; podle věty 17 existuje tedy derivace a rovná se rovněž číslu $f(x)$.

Důkaz věty 44. Položme pro zkrácení $F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$; budiž $a \leqq x_0 < b$; budiž funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě x_0.
Je-li $0 < h < b - x_0$, jest

$$F(x_0 + h) = \overline{\int_a^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t + \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_0) + \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

a tedy

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{32}$$

Budiž dáno libovolné kladné číslo ε; ježto funkce $f(t)$ je spojitá zprava v bodě x_0, existuje kladné číslo δ takové, že nerovnost $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ je splněna pro každé t, pro něž platí $x_0 \leqq t < < x_0 + \delta$. Při tom mohu předpokládati, že platí $\delta \leqq b - x_0$.[35]) Je-li $0 < h < \delta$, platí nerovnost $x_0 \leqq t < x_0 + \delta$ pro všechna čísla t intervalu $\langle x_0, x_0 + h\rangle$; pro všechna čísla t intervalu $\langle x_0, x_0 + h\rangle$ je tedy $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ čili

$$f(x_0) - \varepsilon/2 < f(t) < f(x_0) + \varepsilon/2;$$

podle věty 23 platí tedy nerovnost

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \frac{1}{h} \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \varepsilon.$$

Podle (32) platí tedy nerovnosti

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \varepsilon$$

čili

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

pro každé h, splňující podmínky $0 < h < \delta$. To však znamená právě, že funkce $F(x)$ má v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$, jak bylo dokázati. Důkaz, že také *dolní* integrál má v bodě x_0 derivaci zprava, rovnou číslu $f(x_0)$, provádí se stejně,

[35]) Kdyby totiž bylo náhodou $\delta > b - x_0$, mohli bychom místo čísla δ vzíti menší číslo $b - x_0$.

jen místo horního integrálu je všude nutno psáti dolní integrál. Konečně tvrzení o derivaci *zleva* se dokáže opět zcela analogicky, takže není snad zapotřebí, abych tento důkaz uváděl. Tím je věta 44 dokázána.

Jestliže jest $a < b$ a jestliže existuje $\int_a^b f(t)\,dt$, potom podle věty 40 a podle dodatku k definici integrálu existuje též integrál $\int_a^x f(t)\,dt$ pro každé x intervalu $\langle a, b\rangle$. V tomto případě můžeme tedy ve větě 43 a 44 na př. místo horního integrálu psáti prostě integrál a dostáváme tak tuto větu:

Věta 45. *Budiž $a < b$; nechť existuje $\int_a^b f(t)\,dt$. Potom platí tato tvrzení:*

1. Funkce $\int_a^x f(t)\,dt$[36]) jest spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.

2. Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).^{37})$$

8. Funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$ má určitý integrál od a do b.

Z vět 43 a 44 učiníme tento důležitý důsledek:

Věta 46. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v inter-*

[36]) Tento integrál je funkcí proměnné x.

[37]) Použil jsem jen dodatku k větě 44; pro derivaci zprava a zleva máme tento výsledek: Je-li $a \leqq x < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě x, má integrál $\int_a^x f(t)\,dt$ v bodě x derivaci zprava, rovnou číslu $f(x)$. Obdobně: je-li $a < x \leqq b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zleva v bodě x, má integrál $\int_a^x f(t)\,dt$ v bodě x derivaci zleva, rovnou číslu $f(x)$ (viz větu 44).

valu $\langle a, b\rangle$, jež má v intervalu $\langle a, b\rangle$ nejvýše konečný počet bodu nespojitosti[38]*; potom* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existuje.*

Důkaz. Sestrojme body $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p = b$ tak, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, jenž nesplývá s žádným z bodů $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$.[39] Vezměme kterýkoliv interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$; funkce $f(x)$ je v tomto intervalu ohraničená a je spojitá v každém *vnitřním* bodě tohoto intervalu. Pro zkrácení položme

$$\overline{\int_{a_{i-1}}^{x}} f(t)\,dt = F(x),\quad \underline{\int_{a_{i-1}}^{x}} f(t)\,dt = G(x);$$

použijeme-li vět 43 a 44 (při čemž místo intervalu $\langle a, b\rangle$ klademe interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$), dostáváme tento výsledek:

1. Funkce $F(x)$, $G(x)$ jsou spojité v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$.

2. V každém vnitřním bodě intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ existují derivace $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$. Funkce $F(x) - G(x)$ je tedy spojitá v *uzavřeném* intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ a má derivaci rovnou nule v každém bodě *otevřeného* intervalu (a_{i-1}, a_i). Podle věty 19 je tedy funkce $F(x) - G(x)$ konstantní v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$, t. j. $F(x) - G(x) = c$ pro $a_{i-1} \leq x \leq a_i$. Abychom stanovili konstantu c, dosaďme za x nějakou hodnotu intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$; nejlépe se nám hodí hodnota $x = a_{i-1}$; jest však

$$F(a_{i-1}) = \overline{\int_{a_{i-1}}^{a_{i-1}}} f(t)\,dt = 0,\quad G(a_{i-1}) = \underline{\int_{a_{i-1}}^{a_{i-1}}} f(t)\,dt = 0,$$

tedy $c = 0$. Tedy jest $F(x) = G(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$. Specielně pro $x = a_i$ jest

$$F(a_i) = G(a_i),\ \text{čili}\ \overline{\int_{a_{i-1}}^{a_i}} f(t)\,dt = \underline{\int_{a_{i-1}}^{a_i}} f(t)\,dt,$$

[38]) Funkce $f(x)$ nemusí míti po případě vůbec žádný bod nespojitosti.

[39]) Takové body $a_0, a_1, \ldots, a_p$ mohu dostati třeba takto: vezmu body a, b, přidám k nim všechny body intervalu $\langle a, b\rangle$, v nichž funkce $f(x)$ není spojitá a všechny tyto body, seřazené podle velikosti, označíme znaky $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$.

takže $\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t$ existuje. Tedy existují integrály

$$\int\limits_{a_0}^{a_1} f(t)\,\mathrm{d}t, \int\limits_{a_1}^{a_2} f(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int\limits_{a_{p-1}}^{a_p} f(t)\,\mathrm{d}t;$$

podle věty 39 (a podle poznámky k této větě) existuje tedy též integrál

$$\int\limits_{a_0}^{a_p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

jak bylo dokázati.

Uveďme tento speciální případ věty 46:

Věta 47. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$; potom $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Důkaz. Podle věty 16 jest funkce $f(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$; tedy mohu použíti věty 46 a tedy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Věta 46 dala by se podstatně zobecniti, tím se však nebudeme zabývati.

9. Funkce primitivní a její souvislost s určitým integrálem.

Věta 48. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Budiž $F(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, jež v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) má derivaci $F'(x) = f(x)$. Potom jest*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Budiž D_m $(m = 1, 2, \ldots)$ ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež dělí interval $\langle a, b\rangle$ na m stejných dílů. Dělicí body rozdělení D_m jsou tedy body $a = x_{0,m} < x_{1,m} < x_{2,m} < \ldots$ $\ldots < x_{m-1,m} < x_{m,m} = b$, kde jest

$$x_{i,m} = a + \frac{i}{m}(b - a) \text{ pro } i = 0, 1, 2, \ldots, m;$$

tedy $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m} = (b - a)/m$, tedy $\varrho(D_m) = (b - a)/m$, tedy $\lim\limits_{m \to \infty} \varrho(D_m) = 0$. Ježto funkce $F(x)$ jest spojitá v uzavřeném intervalu $\langle x_{i-1,m}, x_{i,m} \rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $(x_{i-1,m}, x_{i,m})$, lze podle věty o střední hodnotě (věta 18) každému i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ přiřaditi jisté číslo $\xi_{i,m}$, vyhovující nerovnostem $x_{i-1,m} < \xi_{i,m} < x_{i,m}$ tak, že jest

$$F(x_{i,m}) - F(x_{i-1,m}) = (x_{i,m} - x_{i-1,m}) \cdot F'(\xi_{i,m}).$$

Vzhledem k tomu, že podle předpokladu jest $F'(\xi_{i,m}) = f(\xi_{i,m})$, lze tuto rovnici psáti též ve tvaru

$$F(x_{i,m}) - F(x_{i-1,m}) = f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Sečteme-li tyto rovnice pro $i = 1, 2, \ldots, m$, dostaneme vlevo $F(x_{m,m}) - F(x_{0,m})$ čili $F(b) - F(a)$, takže dostáváme rovnici

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} = F(b) - F(a). \tag{33}$$

Uvažme především, že jest $x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m}$ (znamení rovnosti bychom dokonce mohli potlačiti); za druhé uvažme, že jest $\lim\limits_{m \to \infty} \varrho(D_m) = 0$. Můžeme tedy použíti věty 31 (v našem případě jest ovšem $n_m = m$); platí tedy vztah

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} = \int_a f(x)\, dx. \tag{34}$$

Podle rovnice (33) jest výraz

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m}$$

roven číslu $F(b) - F(a)$ pro každé m; tedy i jeho limita je rovna číslu $F(b) - F(a)$, takže podle rovnice (34) jest

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

jak bylo dokázati.

Věta 48 je důležitá z mnoha důvodů. Upozorňuji především na to, že nám velmi často umožňuje výpočet určitého integrálu.

Je-li $a < b$, existuje-li $\int_a^b f(x)\,dx$ (to nastane podle věty 47 na př. tehdy, je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$) a podaří-li se nám nalézti funkci $F(x)$, spojitou v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje rovnici $F'(x) = f(x)$ v každém vnitřním bodě tohoto intervalu, můžeme $\int_a^b f(x)\,dx$ okamžitě (podle věty 48) vypočísti z rovnice $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Objasníme si to na příkladech:

1. Integrál $\int_2^7 \frac{1}{x}\,dx$ jistě existuje. Funkce[40]) $\lg x$ je spojitá v intervalu $\langle 2, 7\rangle$ a má derivaci rovnou $\frac{1}{x}$ dokonce pro každé kladné x. Tedy jest $\int_2^7 \frac{1}{x}\,dx = \lg 7 - \lg 2 = \lg \frac{7}{2}$.

2. Obdobně počítám $\int_0^\pi \sin x\,dx$; funkce $-\cos x$ je všude spojitá a má všude derivaci $\sin x$. Tedy jest $\int_0^\pi \sin x\,dx =$ $= (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$.

Jestliže funkce $F(x)$ má derivaci rovnou funkci $f(x)$ pro všechna x otevřeného intervalu (a, b), říkáme, že funkce $F(x)$ je *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b). Je viděti, že funkce $F(x)$, o níž se mluví ve větě 48, je funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež je v intervalu (a, b) primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Z věty 48 a z příkladů, jež jsme právě uvedli, je jasná důležitost primitivních funkcí pro výpočet určitých integrálů; následující kapitola III bude věnována hlavně metodám pro výpočet primitivních funkcí.

Větu 48 lze velmi podstatně zobecniti; uvedeme zde jen jedno velmi jednoduché zobecnění:

---

[40]) Přidržuji se Kösslerova označení $\lg x$ pro přirozený logaritmus čísla x.

Věta 49. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,dx$. Budiž $F(x)$ funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež má derivaci $F'(x) = f(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b), vyjma nejvýše v konečném počtu bodů. Potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).\text{[41]}$$

Důkaz. Sestrojme čísla $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p = b$ tak, že rovnice $F'(x) = f(x)$ je splněna v každém bodě intervalu (a, b), jenž nesplývá s žádným z bodů $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Vezměme kterýkoliv interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Podle věty 40 existuje $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$. Ježto funkce $F(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ a ježto rovnice $F'(x) = f(x)$ platí v každém bodě otevřeného intervalu (a_{i-1}, a_i), můžeme použíti věty 48 a dostáváme

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx = F(a_i) - F(a_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Podle věty 39 a podle poznámky k této větě je tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{p} (F(a_i) - F(a_{i-1})) =$$
$$= F(a_p) - F(a_0) = F(b) - F(a),$$

jak bylo dokázati.

10. Definice integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a > b$. Dosud jsme

[41]) Rozdíl proti větě 48 jest v tom, že nepožadujeme, aby rovnice $F'(x) = f(x)$ byla splněna ve *všech* bodech intervalu (a, b), nýbrž připouštíme, aby existoval v intervalu (a, b) *konečný* počet bodů, v nichž rovnice $F'(x) = f(x)$ neplatí (buď proto, že $F'(x)$ v takovém bodě vůbec neexistuje nebo proto, že $F'(x)$ má hodnotu různou od čísla $f(x)$). Naproti tomu spojitost funkce $F(x)$ požadujeme v *celém* intervalu $\langle a, b\rangle$ bez výjimky.

definovali integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a < b$ (v odst. 2) a pro $a = b$ (na počátku odst. 7). Doplníme tuto definici ještě pro případ $a > b$ takto:

Druhý dodatek k definici integrálu. *Budiž $a > b$; potom definujeme určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ rovnicí $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, jestliže ovšem $\int_b^a f(x)\,dx$ existuje.*[42])

Tím máme definován určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a < b$, pro $a = b$ i pro $a > b$. Přehlédněme ještě jednou, jak jsme jej definovali:

1. Je-li $a = b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,dx$ tehdy a jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$; potom jest $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

2. Je-li $a < b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,dx$ tehdy a jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx$; potom jest $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx$.

3. Je-li $a > b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,dx$ tehdy a jen tehdy, existuje-li $\int_b^a f(x)\,dx$; potom jest $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

---

[42]) Jest $b < a$, takže $\int_b^a f(x)\,dx$ se béře ve smyslu, zavedeném v odst. 2. Obvyklé názvosloví (funkce integrovaná, integrační proměnná, meze integrálu) zachováváme i zde; v integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ nazýváme číslo a vždy dolní mezí, číslo b horní mezí, i když jest $a > b$.

V předcházejících odstavcích odvodili jsme řadu vět pro integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ v případě $a < b$; podíváme se nyní, platí-li tyto věty též bez tohoto omezení (t. j. platí-li též pro $a = b$, $a > b$). Při tom se omezíme na nejdůležitější věty. Především ve větě 35 lze předpoklad $a < b$ vynechati; platí totiž

Věta 50. *Existují-li integrály* $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx, \ldots, \int_a^b f_n(x)\,dx$ *a jsou-li* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *libovolná čísla, existuje i integrál* $\int_a^b (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx$ *a jest*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{35}$$

Důkaz. 1. Je-li $a = b$, je věta samozřejmá (všechny vyšetřované integrály se rovnají nule). 2. Je-li $a < b$, je tato věta totožná s větou 35. 3. Je-li konečně $a > b$, použijme toho, že existují podle předpokladu integrály $\int_b^a f_1(x)\,dx$, $\int_b^a f_2(x)\,dx, \ldots, \int_b^a f_n(x)\,dx$. Ježto je $b < a$, můžeme použíti věty 35. Tedy existuje $\int_b^a (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx$ a jest

$$\int_b^a (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int_b^a f_1(x)\,dx + \ldots + c_n \int_b^a f_n(x)\,dx;$$

násobíme-li tento vztah na obou stranách číslem -1, dostáváme hledaný vztah (35). Rovněž ve větě 39 lze předpoklad $a < b < c$ vynechati; platí totiž

Věta 51. *Existují-li integrály* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i integrál* $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ *a jest*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{36}$$

Důkaz. 1. Jsou-li aspoň dvě ze tří čísel a, b, c sobě rovna, je věta 51 správná. Neboť je-li předně $a = b$, jest $\int_a^b = 0$[43]) a tedy vzorec (36) platí. Je-li za druhé $b = c$, je $\int_b^c = 0$ a vzorec (36) opět platí; je-li konečně $a = c$, jest podle 2. dodatku k definici integrálu $\int_a^b + \int_b^c = 0 = \int_a^c$, takže vzorec (36) opět platí.

2. Zbývá tedy případ, že všechna tři čísla a, b, c jsou navzájem různá; zde je možno šest různých pořadí podle velikosti:

I) $a < b < c$: v tomto případě platí vzorec (36) podle věty 39.

II) $a < c < b$; zde jest podle věty 39 a 40 $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$, tedy $\int_a^c = \int_a^b - \int_c^b = \int_a^b + \int_b^c$, jak bylo dokázati.

III) $b < a < c$; zde jest podle věty 39 a 40 $\int_b^c = \int_b^a + \int_a^c$, čili $\int_a^c = \int_b^c - \int_b^a = \int_a^b + \int_b^c$, jak bylo dokázati.

---

[43]) Pro zkrácení vynechávám $f(x)\,\mathrm{d}x$; místo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ píši tedy $\int_a^b$ atd.

IV) $b < c < a$; zde jest $\int\limits_b^a = \int\limits_b^c + \int\limits_c^a$, čili $\int\limits_a^c = -\int\limits_c^a =$

$= \int\limits_b^c - \int\limits_b^a = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c$.

V) $c < a < b$; zde jest $\int\limits_c^b = \int\limits_c^a + \int\limits_a^b$, čili $\int\limits_a^c = -\int\limits_c^a =$

$= \int\limits_a^b - \int\limits_c^b = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c$.

VI) $c < b < a$; zde jest $\int\limits_c^a = \int\limits_c^b + \int\limits_b^a$; násobím-li číslem -1,

dostanu $\int\limits_a^c = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c$.

Úplnou indukcí plyne z věty 51 okamžitě

Věta 52. *Existují-li integrály* $\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x, \int\limits_{a_2}^{a_3} f(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$,

existuje i integrál $\int\limits_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ *a jest*

$$\int\limits_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a_2}^{a_3} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Větu 45 lze zobecniti takto:

Věta 53. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál* $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. *Budiž c libovolné číslo intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom platí tato tvrzení:*

1. Funkce $\int\limits_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$[44]) *jest spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$.*

---

[44]) Tento integrál je funkcí proměnné x.

2. *Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).^{45)}$$

Důkaz. Jest $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (podle věty 51); ježto $\int_c^a$ jest konstanta (t. j. číslo nezávislé na x), plyne věta 53 okamžitě z věty 45.

Ve větě 53 jsme vyšetřovali integrál jakožto funkci *horní* meze; obdobně můžeme vyšetřovati integrál jako funkci *dolní* meze; dostáváme tuto větu:

Věta 54. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Budiž c libovolné číslo intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí tato tvrzení:*

1. Funkce $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ jest spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.

2. Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right) = -f(x).^{46)}$$

Důkaz. Ježto jest $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$, plyne věta 54 okamžitě z věty 53.

Ve větách 42, 46, 47, 48, 49 jsme předpokládali $a < b$; jak tyto věty nutno upraviti, když jest $a > b$, není snad třeba obšírně vypisovati; omezme se na to, že ukážeme, jak vypadá obdoba k větám 47 a 48 pro $a > b$:

---

[45]) Jediný rozdíl proti větě 45 je tedy ten, že dolní mez nemusí býti právě rovna číslu a, nýbrž může býti rovna libovolnému číslu c z intervalu $\langle a, b\rangle$; platí ovšem též poznámka obdobná k pozn. [37]) na str. 61 o derivaci zprava a zleva.

[46]) Platí ovšem zase příslušná poznámka o derivaci zprava a zleva.

Věta 55. *Buďiž $a > b$; buďiž $f(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle b, a\rangle$[47]; potom $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.*

Důkaz. Jest $b < a$; podle věty 47 existuje tedy $\int_b^a f(x)\,dx$, a tedy — podle definice — existuje též $\int_a^b f(x)\,dx$.

Věta 56. *Buďiž $a > b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,dx$. Buďiž $F(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle b, a\rangle$, jež v každém bodě otevřeného intervalu (b, a) má derivaci $F'(x) = f(x)$. Potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{37}$$

Důkaz. Podle předpokladu existuje $\int_a^b f(x)\,dx$, tedy existuje též $\int_b^a f(x)\,dx$; ježto je $b < a$, můžeme použíti věty 48, čímž dostáváme rovnici $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$; násobíme-li tuto rovnici číslem -1, dostáváme hledaný vztah (37).

Obdobně mohli bychom i k ostatním větám, jež jsme pro integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ odvodili v případě $a < b$, nalézti věty obdobné pro případ $a > b$. Na př. věta 37 zněla takto: Buďiž $a < b$; nechť existují integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx$; buďiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest $\int_a^b f_1(x)\,dx \geqq \int_a^b f_2(x)\,dx$. Příslušná věta pro $a > b$ zní takto: Buďiž $a > b$; nechť existují

[47]) Píši ovšem $\langle b, a\rangle$ a nikoliv $\langle a, b\rangle$, ježto je $b < a$.

integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx$; budiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle b, a\rangle$; potom jest $\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx$.[48]) Neboť — ježto $b < a$ — plyne z věty 37 nerovnost $\int_b^a f_1(x)\,dx \geqq \int_b^a f_2(x)\,dx$; násobíme-li obě strany této nerovnosti *záporným* číslem -1, musíme současně obrátiti smysl této nerovnosti, čímž dostáváme hledanou nerovnost $\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx$.

CVIČENÍ.

1. Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$[49]); její horní (resp. dolní) hranici v intervalu $\langle a, b\rangle$ označme znakem M (resp. m). Rozdíl $M - m$ nazýváme *oscilací* funkce $f(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$ a označíme jej znakem $\Omega(f(x); \langle a, b\rangle)$, takže $\Omega(f(x); \langle a, b\rangle) = M - m$.

Dokažte toto: označíme-li znakem $\mathfrak{M}$ množinu všech čísel $f(x') - f(x'')$, kde čísla x', x'' probíhají všechny hodnoty intervalu $\langle a, b\rangle$, je oscilace funkce $f(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$ rovna horní hranici množiny $\mathfrak{M}$. To znamená tedy: Jsou-li x', x'' dvě libovolná čísla int. $\langle a, b\rangle$, je

$$f(x') - f(x'') \leqq \Omega(f(x); \langle a, b\rangle); \tag{38}$$

je-li však ε libovolné kladné číslo, pak existují čísla x', x'' intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že je

$$f(x') - f(x'') > \Omega(f(x); \langle a, b\rangle) - \varepsilon. \tag{39}$$

Dokažte ještě, že poslední věta zůstane správnou i tehdy, nahradíme-li v nerovnostech (38), (39) výraz $f(x') - f(x'')$ výrazem $|f(x') - f(x'')|$.

2. Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž D libovolné rozdělení int. $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Jako obvykle budiž M_i (resp. m_i) horní (resp. dolní) hranice funkce $f(x)$ v int. $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$, $s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i$. Položme $\Omega_i = M_i - m_i$, takže Ω_i je oscilace funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$; položme ještě

$$\omega(D) = S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i\,\Delta x_i.$$

---

[48]) Smysl nerovnosti je tedy v případě $a > b$ opačný než v případě $a < b$.

[49]) Ve všech cvičeních ke kap. II předpokládám $a < b$.

Dokažte tyto dvě věty:

I. Má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b, potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost $\omega(D) < \varepsilon$ platí pro všechna rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $\varrho(D) < \delta$ (znak $\varrho(D)$ byl zaveden před větou 26).

II. Existuje-li ke každému kladnému číslu ε rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že je $\omega(D) < \varepsilon$, má funkce $f(x)$ urč. integrál od a do b.

3. Dokažte: Jsou-li funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ ohraničené v int. $\langle a, b\rangle$ a jsou-li c_1, c_2 libovolná čísla, je

$$\Omega(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x); \langle a, b\rangle) \leqq |c_1|\, \Omega(f_1(x); \langle a, b\rangle) + \\ + |c_2|\, \Omega(f_2(x); \langle a, b\rangle).$$

4. Užívajíce cvič. 2 a 3, odvoďte nový důkaz této věty: jsou-li c_1, c_2 libovolná čísla a má-li funkce $f_1(x)$ i funkce $f_2(x)$ urč. integrál od a do b, má i funkce $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ urč. integrál od a do b.

5. Dokažte: Funkce $f(x), g(x)$ nechť jsou ohraničené v intervalu $\langle a, b\rangle$, takže existuje číslo K tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \leqq K$, $|g(x)| \leqq K$. Potom je

$$\Omega(f(x)\, g(x); \langle a, b\rangle) \leqq K(\Omega(f(x); \langle a, b\rangle) + \Omega(g(x); \langle a, b\rangle)).$$[50]

6. Užívajíce cvič. 2 a 5, dokažte tuto větu: má-li funkce $f(x)$ i funkce $g(x)$ urč. integrál od a do b, má i funkce $f(x)\, g(x)$ urč. integrál od a do b.

7. Dokažte: Funkce $f(x)$ budiž ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$; také funkce $\frac{1}{f(x)}$ budiž ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$,[51] takže existuje číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leqq K$. Potom je

$$\Omega\left(\frac{1}{f(x)}; \langle a, b\rangle\right) \leqq K^2\, \Omega(f(x); \langle a, b\rangle).$$

8. Užívajíce cvič. 2 a 7, dokažte tuto větu: má-li funkce $f(x)$ urč. integrál od a do b a je-li funkce $\frac{1}{f(x)}$ ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$, má i funkce $\frac{1}{f(x)}$ urč. integrál od a do b.

9. Z cvič. 7 a 8 plyne: Má-li funkce $f(x)$ i funkce $g(x)$ urč. integrál od a do b a je-li funkce $\frac{1}{g(x)}$ ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$, má i funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ urč. integrál od a do b.

---

[50]) K důkazu užijte vzorce $f(x')\, g(x') - f(x'')\, g(x'') = f(x')\,(g(x') - g(x'')) + g(x'')\,(f(x') - f(x''))$.

[51]) V tomto předpokladu je již obsažen předpoklad, že funkce $\frac{1}{f(x)}$ je definována v intervalu $\langle a, b\rangle$, t. j. že je $f(x) \neq 0$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$. Tuto poznámku mějte na paměti i při cvič. 8, 9.

10. Dokažte: Je-li funkce $f(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$, je

$$\Omega(|f(x)|; \langle a, b\rangle) \leqq \Omega(f(x); \langle a, b\rangle)$$

(užijte toho, že $|f(x')| - |f(x'')| \leqq |f(x') - f(x'')|$).

11. Z cvičení 2 a 10 plyne tato věta: Má-li funkce $f(x)$ urč. integrál od a do b, má i funkce $|f(x)|$ urč. integrál od a do b.

12. Používajíce věty 31 a cvič. 11, dokažte tuto větu: Má-li funkce $f(x)$ urč. integrál od a do b, jest

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Místo věty 31 lze též užíti vět 37, 35.

13. O funkci $f(x)$ říkáme, že je *neklesající* (resp. *nerostoucí*) v int. $\langle a, b\rangle$, jestliže nerovnost

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \quad \text{(resp. } f(x_1) \geqq f(x_2))$$

platí pro všechny hodnoty x_1, x_2, jež splňují nerovnosti $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$. Funkce neklesající a nerostoucí v int. $\langle a, b\rangle$ zahrnujeme pod společný název „funkce *monotonní* v.int. $\langle a, b\rangle$". Užívajíce cvič. 2, dokažte, že každá funkce monotonní v int. $\langle a, b\rangle$ má urč. integrál od a do b.

14. Dokažte tuto větu (t. zv. *1. větu o střední hodnotě integrálního počtu*): Buďte m, M dvě čísla a $f(x)$, $g(x)$ dvě funkce, jež mají urč. integrál od a do b. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ budiž $m \leqq f(x) \leqq M$, $g(x) \geqq 0$. Potom je

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. Dokažte: je-li funkce $f(x)$ nerostoucí v intervalu $\langle a, a + kh\rangle$ (k celé kladné, $h > 0$), je

$$h(f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots + f(a + kh)) \leqq \int_a^{a+kh} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq h(f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + (k - 1)\,h)).$$

(Je-li $f(x)$ neklesající, obrátí se znamení nerovnosti. Existence integrálu plyne z cvič. 13.)

16. Dokažte, že existuje limita (zvaná „Eulerova konstanta")

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n\right).$$

Návod. Položme $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \lg n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pro $0 < a < b$ dostanete z věty 48 snadno

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lg \frac{b}{a}.$$

Kladouce ve cvič. 15 $a = n$, $k = h = 1$, $f(x) = 1/x$, obdržíte

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \lg \frac{n+1}{n} \leqq 0;$$

kladouce ve cvič. 15 $a = 1$, $h = 1$, $k = n - 1$, $f(x) = 1/x$, obdržíte $1/n \leqq v_n \leqq 1$.

Hledaný výsledek plyne pak z vět o limitách monotonních posloupností (Kössler 22—23).

17. Dokažte: budiž $f(x)$ funkce kladná a nerostoucí v intervalu $\langle a, \infty)$ (t. j. pro $a \leqq x_1 < x_2$ je $0 < f(x_2) \leqq f(x_1)$). Potom nekonečná řada $f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo K tak, že pro všechna kladná n jest

$$\int_a^{a+n} f(x)\,\mathrm{d}x < K.$$

Návod: užijte cvičení 15 a věty, že řada s kladnými členy konverguje tehdy a jen tehdy, je-li posloupnost jejích částečných součtů shora ohraničena (Kössler 38).

18. Dokažte: řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní pro $\alpha > 1$, divergentní pro $\alpha \leqq 1$.

Návod: Je-li $\alpha \geqq 1$, užijte výsledku cvičení 17 pro $a = 1$, $f(x) = x^{-\alpha}$; příslušný integrál vypočtete podle věty 48, uvážíte-li, že[52])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lg x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = x^{-\alpha} \text{ pro } \alpha \neq 1.$$

Pro $\alpha < 1$ je pak $n^{-\alpha} > n^{-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ a princip přirovnávání řad[53]) dává divergenci.

19. Dokažte: řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\lg n)^\beta}$ je konvergentní, je-li buďto $\alpha > 1$ nebo $\alpha = 1$, $\beta > 1$; ve všech ostatních případech je řada divergentní.

Návod: Napřed rozřešte případ $\alpha = 1$, $\beta \geqq 1$, užívajíce cvičení 17 pro

$$a = 2, \quad f(x) = \frac{1}{x (\lg x)^\beta};$$

příslušný integrál vypočtete podle věty 48, uvážíte-li, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lg(\lg x)\right) = \frac{1}{x \lg x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(\lg x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right) = \frac{1}{x (\lg x)^\beta} \text{ pro } \beta \neq 1.$$

Ostatní případy převedete na případ $\alpha = 1$, $\beta \geqq 1$ takto: budiž ε kladné, γ libovolné; potom je

[52]) Čtenář sám nechť uváží, pro která x tyto a podobné vzorce ve cvič. 18, 19, 20 platí.

[53]) Kössler str. 39, řádek 1—17.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\lg x)^\gamma}{x^\varepsilon} = 0$$

(pro $\gamma \leqq 0$ je tento výsledek samozřejmý; pro $\gamma > 0$ viz Kössler, str. 99 dole).

Je-li tedy $\alpha > 1$, je pro dosti velká n

$$\frac{1}{n^\alpha (\lg n)^\beta} < \frac{1}{n (\lg n)^2}$$

a řada konverguje[54]); je-li $\alpha < 1$, je pro dosti velká n

$$\frac{1}{n^\alpha (\lg n)^\beta} > \frac{1}{n \lg n}$$

a řada diverguje[54]); tentýž výsledek platí konečně pro $\alpha = 1$, $\beta < 1$.

20. (Trochu těžší; zobecnění cvič. 18 a 19.) Položte $\lg_2 x = \lg(\lg x)$, $\lg_3 x = \lg(\lg_2 x), \ldots$, obecně $\lg_m x = \lg(\lg_{m-1} x)$ $(m = 3, 4, \ldots)$. Dokažte: řada

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha_0} (\lg n)^{\alpha_1} (\lg_2 n)^{\alpha_2} \ldots (\lg_k n)^{\alpha_k}} \quad {}^{55})$$

konverguje tehdy a jen tehdy, má-li řada čísel

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

tuto vlastnost: v této řadě existuje aspoň jedno číslo různé od 1 a první z těch čísel různých od 1 je větší než 1. Na př. pro $k = 2$ je řada konvergentní, je-li buďto $\alpha_0 > 1$, nebo $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 > 1$, nebo $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 > 1$; v ostatních případech je divergentní.

Návod: podobně jako v cvič. 19 rozřešte napřed případ $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 1$, $\alpha_k \gtreqless 1$, užívajíce vzorců

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lg_{k+1} x) = \frac{1}{x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_k x},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(\lg_k x)^{1-\alpha_k}}{1-\alpha_k}\right) = \frac{1}{x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_{k-1} x (\lg_k x)^{\alpha_k}} \text{ pro } \alpha_k \neq 1.$$

Ostatní případy lze — podobně jako v cvič. 19 — na tento případ převésti.

---

[54]) Podle principu přirovnávání řad.

[55]) Celé číslo a je voleno tak, aby všichni členové řady měli smysl.

KAPITOLA III.

Teorie neurčitého integrálu.

V této kapitole budeme se zabývati teorií primitivních funkcí, jejichž důležitost jsme poznali v předešlé kapitole při větě 48 a 56.

1. Definice primitivní funkce. Buďte $F(x)$, $f(x)$ dvě funkce, definované v otevřeném intervalu (a, b) (konečném nebo nekonečném). Platí-li pro všechna x intervalu (a, b) rovnice $F'(x) = f(x)$, říkáme, že funkce $F(x)$ je *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b).[1])

Na př. funkce $\frac{1}{3}x^3$ je v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkcí k funkci x^2; funkce $\operatorname{tg} x$ je primitivní funkcí k funkci $1 : \cos^2 x$ v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a také v intervalech $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi)$ atd., nikoliv však na př. v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ (zde vadí hodnota $x = \frac{1}{2}\pi$).

Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), je ovšem též každá funkce $F(x) + c$ (kde c je libovolná konstanta) primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), neboť je $(F(x) + c)' = F'(x)$. Tím jsou však všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) vyčerpány, neboť platí tato věta:

Věta 57. *Jsou-li funkce $F(x)$, $G(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), platí v celém intervalu (a, b) rovnice $G(x) = F(x) + c$, kde c je konstanta.* (Znám-li tedy k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) jednu primitivní funkci $F(x)$, jsou *všechny* primitivní funkce dány výrazem $F(x) + c$, kde c je libovolná konstanta.)

Důkaz. V intervalu (a, b) je $F'(x) = G'(x) = f(x)$; položíme-li tedy $H(x) = G(x) - F(x)$, je $H'(x) = 0$ v int. (a, b) a tedy podle věty 20 je $H(x) = c$ v int. (a, b), kde c je konstanta; tedy $G(x) = F(x) + c$.

Zbývá ovšem otázka: existuje ke každé funkci funkce primitivní? Tuto otázku je nutno zodpověděti *záporně.* Definujme na př. funkci $f(x)$ takto: $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$. Kdyby k funkci $f(x)$ existovala v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkce

[1]) Je možno definovati primitivní funkci též obecněji; na elementárním stupni této knížky je však snad nejvhodnější podaná definice.

$F(x)$, bylo by $F'(x) = 0$ pro $x < 0$, $F'(0) = 1$, $F'(x) = 0$ pro $x > 0$. Podle věty 20 by funkce $F(x)$ byla konstantní v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, \infty)$, t. j. bylo by $F(x) = a$ pro $x < 0$, $F(x) = b$ pro $x > 0$. Z existence derivace v bodě $x = 0$ by plynula spojitost funkce $F(x)$ v bodě 0 (viz pozn. 1 na str. 24), tedy by bylo $\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = F(0)$; ale zřejmě $\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = a$, $\lim\limits_{x \to 0+} F(x) = b$, takže by bylo $a = b = F(0)$, takže by bylo $F(x) = a$ pro všechna x vůbec a tedy $F'(x) = 0$ pro každé x, tedy i pro $x = 0$, což je ve sporu s rovnicí $F'(0) = 1$. Tedy k funkci $f(x)$ neexistuje v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkce.

Ale alespoň ke každé funkci *spojité* existuje primitivní funkce, jak nás poučuje tato věta:

Věta 58. *Budiž $f(x)$ funkce spojitá v otevřeném* (konečném nebo nekonečném) *intervalu (a, b); zvolme libovolné číslo c v intervalu (a, b). Potom integrál*

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b). (Tedy ke každé funkci, spojité v intervalu (a, b), existuje v tomto intervalu primitivní funkce.)

Důkaz. Budiž x_0 libovolné číslo intervalu (a, b). Ježto žádné číslo intervalu (a, b) není jeho nejmenším ani největším číslem, lze zvoliti dvě čísla α, β intervalu (a, b) tak, že je $\alpha < \mathrm{Min}\,(c, x_0) \leqq \mathrm{Max}\,(c, x_0) < \beta$. Ježto funkce $f(t)$ je spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a ježto c, x_0 jsou dva vnitřní body tohoto intervalu, existuje především $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ (věta 47), dále existuje integrál $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé x intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a konečně platí, že derivace integrálu $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je rovna číslu $f(x)$ pro každé x intervalu (α, β) (věta 53), tedy specielně pro $x = x_0$. Ježto x_0 bylo libovolné číslo intervalu (a, b), platí tedy: pro každé x intervalu (a, b) existuje $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$, jak bylo dokázati.

Věta 58 ukazuje, že — aspoň pro funkce spojité — je velmi úzký vztah mezi určitým integrálem a primitivní funkcí.[2]) Není proto divu, že pro primitivní funkci bylo zavedeno ještě jiné pojmenování a označení, připomínající pojmenování a označení určitého integrálu. Primitivní funkci k funkci $f(x)$ v int. (a, b) nazýváme také *neurčitým integrálem funkce* $f(x)$ v int. (a, b) a značíme ji znakem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jinými slovy: neurčitým integrálem funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) nazýváme každou funkci (definovanou v int. (a, b)), jež má pro každé x intervalu (a, b) derivaci rovnou číslu $f(x)$.

Poznámka. Určitý integrál dané funkce v daných mezích je určité *číslo;* na př. $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$ (viz příkl. 2 u věty 48); naproti tomu neurčitý integrál funkce $f(x)$ je opět *funkce* proměnné x, a to ještě ne zcela určitá — je určena pouze až na „aditivní konstantu", kterou často nazýváme „integrační konstantou"; na př. je $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$, kde „integrační konstanta" c může býti libovolné číslo.

Podobně jako při určitém integrálu užívá se i při neurčitém integrálu pro „integrační proměnnou" (tak se nazývá proměnná, stojící za symbolem d) vedle znaku x i jiných písmen; na př.

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c, \quad \int 2t\,\mathrm{d}t = t^2 + c.$$

2. Nejjednodušší formule a věty pro výpočet neurčitých integrálů. Známé vzorce diferenciálního počtu dávají nám ihned tyto výsledky (c je integrační konstanta):

$$\left.\begin{aligned} &\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c, && \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c,^{3)} && \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

zobecněním posledního vzorce je vzorec

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lg a}\,.\,a^x + c, \text{ platný pro } a > 0,\ a \neq 1. \qquad (2)$$

[2]) U nespojitých funkcí jsou tyto vztahy složitější.

Vzorce (1) a (2) platí v intervalu $(-\infty, \infty)$ a plynou ihned ze vzorců $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\operatorname{arctg} x)' = 1 : (1 + x^2)$, $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \,.\, \lg a$ pro $a > 0$; z posledního vzorce plyne totiž $\left(\frac{a^x}{\lg a}\right)' = a^x$ pro $a > 0$, pokud je $\lg a \neq 0$, t. j. pokud je $a \neq 1$. Stejně se dokáží vzorce

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c \text{ (v interv. } (-1, 1)); \tag{3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \tag{4}$$

(v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod, pro nějž $\cos x = 0$);

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c \tag{5}$$

(v každém otevřeném intervalu, neobsahujícím žádný bod, pro nějž $\sin x = 0$).

Obraťme se nyní k mocnině. Jest $(x^{n+1})' = (n+1)\, x^n$ a tedy

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n + 1}\right)' = x^n, \tag{6}$$

není-li $n + 1 = 0$, t. j. není-li $n = -1$. Kdy platí vzorec (6)? Je-li n celé kladné, platí pro každé x; rovněž je-li $n = 0$ (ve tvaru $(x)' = 1$). Je-li n celé záporné (a $n \neq -1$), platí (6) pro každé $x \neq 0$; není-li n celé, platí vzorec (6) pro každé kladné x.[4])

---

[3]) Píšeme $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$ místo $\int \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$; obdobně často píšeme pro zkrácení $\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)}$ místo $\int \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{g(x)}$ místo $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{d}x$ místo $\int 1 \mathrm{d}x$.

[4]) Přidržuji se Kösslera, str. 23—25, který definuje a^n při necelém n jen pro $a > 0$. Zde je snad na místě malá poznámka. Pro *necelé* n byla v Kösslerově knížce definována mocnina x^n jen pro $x > 0$ (a to je $x^n > 0$ pro $x > 0$). Definujme ještě pro *necelé kladné* n výraz 0^n rovnicí $0^n = 0$. Tím je tedy funkce x^n definována v intervalu $\langle 0, \infty)$ (až do konce této poznámky předpokládám, že je n číslo necelé kladné). V otevřeném intervalu $(0, \infty)$ má funkce x^n kladnou

Z formule (6) plyne specielně pro $n = 0$

$$\int \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x = x + c \tag{7}$$

(v intervalu $(-\infty, \infty)$) a obecně pro každé $n \neq -1$

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c; \tag{8}$$

při tom vzorec (8) platí v intervalu $(-\infty, \infty)$, je-li n celé kladné; platí v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, \infty)$, je-li n celé záporné ($n \neq -1$); a platí konečně v intervalu $(0, \infty)$, je-li n číslo necelé.

Zbývá vyšetřiti případ $n = -1$, t. j. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Je-li $x > 0$, je $(\lg x)' = 1 : x$, a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg x + c$$

v intervalu $(0, \infty)$; je-li $x < 0$, je $-x > 0$ a tedy $(\lg(-x))' = = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg(-x) + c$$

v interv. $(-\infty, 0)$. Oba tyto vzorce lze shrnouti ve vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg |x| + c, \tag{9}$$

platný jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$.

---

derivaci nx^{n-1} a tedy je x^n v tomto intervalu spojitá a rostoucí (t. j. je-li $0 < x_1 < x_2$, je $x_1^n < x_2^n$; důkaz: podle věty o střední hodnotě (věta 18) existuje ξ tak, že je $x_1 < \xi < x_2$, $x_2^n - x_1^n = n\xi^{n-1}(x_2 - x_1)$, tedy $x_2^n - x_1^n > 0$). Tvrdím nyní: *funkce x^n je rovněž spojitá zprava v bodě $x = 0$* (pro kladné necelé n). Důkaz: budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Položme $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$, takže je $\delta > 0$. Je-li $0 < x < \delta$, je $0 < x^n < \delta^n = \varepsilon$. T. j.: ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ, mající tuto vlastnost: je-li $0 < x < \delta$, je $0 < x^n < \varepsilon$ a tedy $|x^n - 0^n| < \varepsilon$. Tím je důkaz proveden.

Dovedeme tedy integrovati funkce x^n [pozor na rozdíl mezi případem $n \neq -1$ (vzorec (8)) a $n = -1$ (vzorec (9))], e^x, a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), $\sin x$, $\cos x$, $1 : \sin^2 x$, $1 : \cos^2 x$, $1 : \sqrt{1 - x^2}$, $1 : (1 + x^2)$. Samozřejmě jest

$$\int 0 \, \mathrm{d}x = c \tag{10}$$

v intervalu $(-\infty, \infty)$, ježto derivace konstanty je nula. Vzorce (1) až (10), jichž budeme často užívati, je nutno si bezpečně zapamatovati.

Poznámka. Třetí vzorec (1) jsme dostali ze vzorce $(\operatorname{arctg} x)' = 1 : (1 + x^2)$; použitím vzorce $(-\operatorname{arccotg} x)' = 1 : (1 + x^2)$ bychom dostali obdobně vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = -\operatorname{arccotg} x + c \tag{11}$$

(v int. $(-\infty, \infty)$). Z tohoto vzorce a z třetího vzorce (1) plyne, že i funkce $\operatorname{arctg} x$ i funkce $-\operatorname{arccotg} x$ jsou v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivními funkcemi k jedné a téže funkci $1 : (1 + x^2)$. Z věty 57 tedy plyne, že jejich rozdíl je konstantní, t. j.

$$\operatorname{arctg} x - (-\operatorname{arccotg} x) = C.$$

Konstantu C určíme, dosadíme-li $x = 0$; dostaneme $C = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 0 = 0 + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$, takže $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$, což je známý vztah (Kössler 68). Nedává nám tedy vzorec (11) vlastně nic nového; z téhož důvodu jsem neuváděl zvláště vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + c$$

(v int. $(-1, 1)$).

V tomto odstavci — a též ve dvou následujících odstavcích — odvodíme několik vět, jež nám často dovolují převésti výpočet integrálů složitějších na výpočet integrálů jednodušších.

Věta 59. *Existují-li v intervalu (a, b) neurčité integrály funkcí $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ a jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstanty, existuje též neurčitý integrál funkce $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ v intervalu (a, b) a jest*

$$\int (c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n f_n(x))\, dx = c_1 \int f_1(x)\, dx + c_2 \int f_2(x)\, dx + \\ + \ldots + c_n \int f_n(x)\, dx + C \qquad (12)$$

v intervalu (a, b), kde C je konstanta.[5])

Důkaz. Položme (vše stále v intervalu (a, b)) $F_1(x) = \int f_1(x)\, dx, \ldots, F_n(x) = \int f_n(x)\, dx$, takže je $F'_i(x) = f_i(x)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Podle známých vět diferenciálního počtu (Kössler 74) je $(c_1 F_1(x) + \ldots + c_n F_n(x))' = c_1 F'_1(x) + \ldots + c_n F'_n(x) = c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x)$; tedy funkce

$$c_1 F_1(x) + \ldots + c_n F_n(x) = c_1 \int f_1(x)\, dx + \ldots + c_n \int f_n(x)\, dx$$

je primitivní funkcí k funkci $c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ a liší se tedy od levé strany rovnice (12) pouze o jistou konstantu, jak bylo dokázati.

Poznámka: Všimněme si zvláštních případů rovnice (12):

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx, \quad \int (f_1(x) - f_2(x))\, dx = \\ = \int f_1(x)\, dx - \int f_2(x)\, dx, \quad \int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

(kde c je konstanta).

Příklad:

$$\int \left(3 \sin x - \sqrt{2}\,.\, x^3 + \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \\ = 3 \int \sin x\, dx - \sqrt{2} \int x^3\, dx + 2 \int \frac{dx}{1+x^2} = -3 \cos x - \\ - \frac{\sqrt{2}}{4} x^4 + 2 \operatorname{arctg} x$$

---

[5]) „Integrační konstantu“ C mohu ovšem libovolně změniti, změním-li hodnotu integrační konstanty v integrálu na levé straně rovnice (12); mohu též docíliti toho, že $C = 0$. My budeme obyčejně v takových rovnicích mezi neurčitými integrály tuto integrační konstantu vynechávati a psáti na př. místo rovnice (12) rovnici

$$\int (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\, dx = c_1 \int f_1(x)\, dx + \ldots + c_n \int f_n(x)\, dx. \quad (12')$$

Této rovnici je ovšem nutno rozuměti takto: zvolím-li libovolně integrační konstanty v integrálech $\int f_1(x)\, dx, \ldots, \int f_n(x)\, dx$, mohu integrační konstantu v integrálu $\int (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\, dx$ zvo-

(integrační konstantu budu od nynějška skoro vždy vynechávati).

3. Integrace per partes. Věty předešlého odstavce spočívaly na vzorcích pro počítání derivace. Také metody tohoto a následujícího odstavce spočívají na vzorcích pro počítání derivace. Vzorec pro derivování součinu (Kössler 74) dává nám tuto důležitou větu:

Věta 60. *Funkce $u(x)$, $v(x)$ nechť mají v intervalu (a, b) spojité derivace. Potom jest*

$$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \tag{13}$$

v intervalu (a, b).

Důkaz. Funkce $u(x)\, v(x)$ má v intervalu (a, b) derivací $u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)$, takže je

$$u(x)\, v(x) = \int (u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x))\, \mathrm{d}x \tag{14}$$

v int. (a, b). Funkce $u(x)$, $v(x)$ jsou spojité v (a, b) (ježto tam mají derivaci, viz pozn. 1 na str. 24); ježto také funkce $u'(x)$, $v'(x)$ jsou spojité v (a, b) podle předpokladu, jsou tam spojité též funkce $u(x)\, v'(x)$ a $u'(x)\, v(x)$ (Kössler 60). Podle věty 58 existují tedy v (a, b) integrály $\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x$, $\int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$. Podle věty 59 lze tedy rovnici (14) psáti ve tvaru $u(x)\, v(x) = \int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x + \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$; převedeme-li v této rovnici druhý integrál na levou stranu rovnice, dostaneme rovnici (13).

Vzorec (13) dává nám důležitou metodu k výpočtu neurčitých integrálů, t. zv. *metodu integrace per partes* nebo *metodu částečné integrace.* Jak se jí používá, objasním na příkladech.

Příklad 1. Vypočtěte $\int xe^x\, \mathrm{d}x$ (v intervalu $(-\infty, \infty)$). Položme $u(x) = x$, tedy musíme položiti $v'(x) = e^x$. Potom je $u'(x) = 1$; za $v(x)$ musíme vzíti nějakou primitivní funkci k funkci $v'(x) = e^x$, zvolme tedy třeba $v(x) = e^x$ (mohli bychom ovšem též voliti třeba $v(x) = e^x + 3$ nebo vůbec $v(x) = e^x + c$, kde c je

liti tak, aby platila rovnice (12'); kdybych ovšem tuto konstantu zvolil jinak, nebyly by obě strany rovnice (12') sobě rovny, nýbrž lišily by se o konstantu. Obdobně je nutno rozuměti i všem dalším rovnicím mezi neurčitými integrály, v nichž integrační konstanta je vynechána. Doufám, že čtenáři je věc dostatečně jasná a nebudu proto tuto poznámku již později opakovati.

libovolná konstanta, ale to by vedlo jen ke komplikaci výpočtu). Podle vzorce (13) je

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int 1 \, . \, e^x \, dx = xe^x - e^x = e^x \, (x - 1).$$

Příklad 2. $\int x^2 \sin x \, dx$ (v intervalu $(-\infty, \infty)$). Položme $u = x^2$, $v' = \sin x$, tedy $u' = 2x$, $v = -\cos x$; dostaneme

$$\int x^2 \sin x \, dx = - \, x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx;$$

zbývá vypočísti integrál na pravo; položme $u = x$, $v' = \cos x$, $u' = 1$, $v = \sin x$, takže

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x;$$

tedy celkem

$$\int x^2 \sin x \, dx = - \, x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x.$$

(Chceme-li se přesvědčiti, že jsme se při výpočtech nezmýlili, stačí zjistiti, že je vskutku $(- \, x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x)' = x^2 \sin x$.)

Příklad 3. $\int \lg x \, dx$ (v intervalu $(0, \infty)$). Položme $u = \lg x$, tedy $v' = 1$ ($u = 1$, $v' = \lg x$ by nevedlo k cíli, ježto bychom neuměli vypočísti $v = \int \lg x \, dx$); tedy $u' = 1 : x$, $v = x$,

$$\int \lg x \, dx = x \lg x - \int 1 \, . \, dx = x \lg x - x.$$

Příklad 4. $\int x^n e^x \, dx$ (n celé, $n \geqq 0$; interval $(-\infty, \infty)$). Položme pro zkrácení $\int x^n e^x \, dx = I_n$; známe tedy $I_0 = \int e^x \, dx = e^x$. Položme (je-li $n > 0$) $u = x^n$, $v' = e^x$, $u' = nx^{n-1}$, $v = e^x$, takže $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$, t. j.

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1} \tag{15}$$

(n celé, $n > 0$). Vzorec (15) nám dovoluje „rekurentně" určiti I_n: rovnice (15) nám dovoluje vyjádřiti I_n pomocí I_{n-1}, potom (dosadíme-li do ní $n - 1$ místo n) I_{n-1} pomocí I_{n-2} atd. až na konec I_1 pomocí I_0; a integrál I_0 známe. Na př.: $I_3 = x^3 e^x - 3I_2$,

$I_2 = x^2e^x - 2I_1$, $I_1 = xe^x - 1 \, . \, e^x$. Tedy celkem $I_3 = (x^3 - - 3x^2 + 6x - 6)\, e^x$.

Příklad 5. (Interval $(-\infty, \infty)$.) Položme

$$K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n}$$

(n celé, $n > 0$). Známe $K_1 = \operatorname{arctg} x$ a hledáme tedy obdobnou rekurentní formuli, jako byla formule (15). Položíme

$$u = \frac{1}{(1 + x^2)^n}, \; v' = 1, \; u' = -\frac{2nx}{(1 + x^2)^{n+1}}, \; v = x$$

a obdržíme:

$$K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n} = \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \int \frac{(1 + x^2) - 1}{(1 + x^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1 + x^2)^n} +$$
$$+ 2n\,(K_n - K_{n+1});$$

tedy $K_n = x : (1 + x^2)^n + 2n\,(K_n - K_{n+1})$ a odtud řešením hledaný rekurentní vzorec

$$K_{n+1} = \frac{x}{2n\,(1 + x^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n} K_n \tag{16}$$

(n celé kladné).

Příklad 6. $\int \frac{\lg x}{x} \,\mathrm{d}x$ (interval $(0, \infty)$). Položme $u = \lg x$, $v' = 1 : x$, $u' = 1 : x$, $v = \lg x$; dostáváme

$$\int \frac{\lg x}{x} \,\mathrm{d}x = (\lg x)^2 - \int \frac{\lg x}{x} \,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Zdánlivě jsme nepokročili: integrál vpravo není jednodušší než integrál vlevo. Ale ve skutečnosti je příklad již vyřešen; neboť z rovnice (17) je možno hledaný integrál vypočísti:

$$2\int \frac{\lg x}{x} \,\mathrm{d}x = (\lg x)^2, \quad \int \frac{\lg x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} (\lg x)^2.$$

Příklad 7. $\int e^x \sin x \, dx$ (interval $(-\infty, \infty)$). Zde vede k cíli podobná myšlenka jako v příkl. 6, ale integrace per partes se musí provésti dvakráte. Položme jednou $u = e^x$, $v' = \sin x$, $u' = e^x$, $v = -\cos x$; dostaneme

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

Po druhé položme $u = \sin x$, $v' = e^x$, $u' = \cos x$, $v = e^x$: dostaneme

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$[6]

Sečtením a odečtením těchto dvou rovnic dostaneme hledaný integrál a k tomu ještě $\int e^x \cos x \, dx$:

$$\int e^x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x),$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x).$$

Z těchto příkladů je snad aspoň částečně viděti, jak se metody integrace per partes užívá. Obyčejně se snažíme daný integrál upraviti na tvar $\int uv' \, dx$ tak, aby integrál $\int u'v \, dx$ byl jednodušší než integrál daný; dovedeme-li $\int u'v \, dx$ vypočísti, jsme hotovi (příkl. 1, 3). Někdy musíme této metody použíti několikráte (příkl. 2), při čemž leckdy dospějeme k užitečným rekurentním vzorcům (příkl. 4, 5). Při takovém rekurentním vzorci není neštěstí, vyjádříme-li naopak jednodušší integrál složitějším; na př. v příkladě 5 jsme integrál K_n vyjádřili integrály K_n, K_{n+1}; pomohli jsme si potom tím, že jsme z oné rovnice vyjádřili integrál K_{n+1} integrálem K_n. Někdy dojdeme k cíli tím, že dostaneme ve formuli (13) tentýž integrál vpravo jako vlevo (příkl. 6); potom nám vzorec (13) dává rovnici, z níž lze hledaný integrál vypočísti (v příkl. 7 jsme obdobně našli dvě rovnice pro dva neznámé integrály). Máme-li touto metodou počítati $\int f(x) \, dx$, záleží úspěch na tom, podaří-li se nám vhodným způsobem uvésti funkci $f(x)$ na tvar $f(x) = u(x) \, v'(x)$; jak se to v jednotlivých případech dělá, tomu lze se naučiti hlavně z prakse; je proto vhodno vypočísti hodně příkladů toho druhu.

[6]) Tím jsme tedy dostali dvě rovnice pro dva neznámé integrály $\int e^x \sin x \, dx$, $\int e^x \cos x \, dx$.

4. Metoda substituční. Věty o derivování „složených funkcí" (viz věty A′, B′, C′ na str. 24—25) vedou k důležité větě pro výpočet neurčitých integrálů:

Věta 61. *Funkce $f(x)$ budiž spojitá v intervalu (a, b); funkce $\varphi(t)$ nechť má v intervalu (α, β) derivaci $\varphi'(t)$; pro každé t intervalu (α, β) nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b). Potom platí v intervalu (α, β) rovnice*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{18}$$

dosadíme-li do primitivní funkce, kterou nám představuje integrál na levé straně, $\varphi(t)$ za x.

Důkaz. V intervalu (a, b) položme $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.[7] Naše věta nyní tvrdí, že v intervalu (α, β) je funkce $F(\varphi(t))$ primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. To plyne však okamžitě z věty B′ na str. 25. Neboť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v int. (α, β) a funkce $F(x)$ má derivaci $F'(x) = f(x)$ v int. (a, b); pro každé t intervalu (α, β) leží hodnota funkce $\varphi(t)$ v intervalu (a, b). Tedy podle citované věty B′ má funkce $F(\varphi(t))$ v intervalu (α, β) derivaci, jejíž hodnota je $F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$; tedy je vskutku funkce $F(\varphi(t))$ v intervalu (α, β) primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

Poznámka. Vzorec (18) se pamatuje velmi snadno: abychom z integrálu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, který stojí vlevo, dostali integrál vpravo, dosazujeme především do integrované funkce $f(x)$ za x podle rovnice

$$x = \varphi(t); \tag{19}$$

za druhé dosazujeme formálně za symbol $\mathrm{d}x$ podle rovnice

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t; \tag{20}$$

všimněme si, že je to právě rovnice, kterou dostaneme diferencováním rovnice (19). Výsledek je rovnice (18), kde vlevo je funkce proměnné x, vpravo funkce proměnné t; rovnice tato je (jsou-li splněny předpoklady věty 61) správná, dosadíme-li do levé strany za x podle rovnice (19). Celý postup se tedy redukuje na mechanické dosazování (čili „substituci") podle rovnice (19)[8] a proto se metodě, obsažené ve větě 61, říká „metoda substituční".

[7]) Tento integrál existuje, ježto $f(x)$ je spojitá v (a, b); viz větu 58.
[8]) Ale nezapomeňte nikdy dosaditi také za $\mathrm{d}x$ podle rovnice (20)!

Vzorce (18) můžeme užíti dvojím způsobem.

1. způsob. Máme vypočísti $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. Jsou-li splněny předpoklady věty 61, můžeme výpočet převésti na výpočet integrálu $\int f(x)\,dx$. Dovedeme-li vypočísti tento integrál, t. j. dovedeme-li nalézti funkci $F(x)$, jež je primitivní funkcí k funkci $f(x)$, je předložený integrál vypočten; postup výpočtu lze naznačiti stručně takto:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx = F(x) = F(\varphi(t)).$$

Příklad 1. $\int \sin^3 t \cos t\,dt$[9]) (interval $(-\infty, \infty)$). Na první pohled je patrno, že $\cos t\,dt$ je diferenciál funkce $\sin t$. Zavedeme proto substituci $x = \sin t$ a máme (předpoklady věty 61 jsou zřejmě splněny):

$$\int \sin^3 t \cos t\,dt = \int x^3\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 = \tfrac{1}{4}\sin^4 t.$$

Příklad 2. $\int (1 + x^2)^n x\,dx$[10]) (interval $(-\infty, \infty)$). Vidíme: $x\,dx$ je (až na scházející činitel 2) diferenciálem funkce $1 + x^2$; položme proto $1 + x^2 = u$, $2x\,dx = du$ a počítejme (uvažme, že je zde stále $u > 0$):

a) pro $n \neq -1$ jest $\int (1+ x^2)^n x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+ x^2)^n . 2x\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{2\,(n+1)} = \frac{(1 + x^2)^{n+1}}{2\,(n+1)};$$

b) pro $n = -1$ jest $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\lg|u| =$

$$= \frac{1}{2}\lg u = \lg \sqrt{u} = \lg \sqrt{1 + x^2}.$$

Příklad 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$. Zde musíme se omeziti na nějaký interval, v němž $\sin x$ se nikdy nerovná nule; proveďme výpočet pro jednoduchost v intervalu $(0, \pi)$.[11]) Je $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$;

---

[9]) Užívám obvyklého označení $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\lg^n x$ místo $(\sin x)^n$, $(\cos x)^n$, $(\lg x)^n$ a pod.

[10]) Integrační proměnnou značím zde x a nikoliv t; volím úmyslně různá označení pro integr. proměnnou, aby si čtenář na to zvykl.

zavedeme-li tedy $\frac{1}{2}x = t$, $\frac{1}{2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ (tedy $0 < t < \frac{1}{2}\pi$), máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos t} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}.$$

Ale $\mathrm{d}t : \cos^2 t$ je diferenciál funkce $\operatorname{tg} t$; zaveďme tedy $\operatorname{tg} t = u$ (tedy $u > 0$), $\mathrm{d}t : \cos^2 t = \mathrm{d}u$; dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \lg|u| = \lg u = \lg\operatorname{tg} t = \lg\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x.$$

2. způsob. Máme vypočísti $\int f(x)\,\mathrm{d}x$; snažíme se převésti tento integrál substitucí $x = \varphi(t)$ na integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, který může býti jednodušší než integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Abych věc učinil přehlednější, vyslovím výsledek jako zvláštní větu, ač v podstatě jde opět jen o větu 61.

Napřed však musíme předeslati jednu poznámku. Budiž $\varphi(t)$ funkce, definovaná v intervalu (α, β); když t probíhá interval (α, β), nechť hodnota $\varphi(t)$ nabývá všech hodnot jistého intervalu (a, b) a žádných jiných.[12]) Potom tedy každé hodnotě x intervalu (a, b) odpovídá *aspoň* jedna hodnota t intervalu (α, β) tak, že platí rovnice

$$\varphi(t) = x. \tag{21}$$

Vyberme pro každé x intervalu (a, b) jednu hodnotu t intervalu (α, β) tak, aby platila rovnice (21)[13]); potom toto t bude funkcí proměnné x, definovanou v intervalu (a, b); označme je znakem $\psi(x)$; hodnoty funkce $\psi(x)$ leží ovšem v intervalu (α, β). Pro každé x intervalu (a, b) bude pak splněna rovnice (21), dosadíme-li do ní za t hodnotu $\psi(x)$; t. j. pro každé x intervalu (a, b) je $\varphi(\psi(x)) = x$.

Zvláště jednoduchý případ je ten, že funkce $\varphi(t)$ (nabývající v intervalu (α, β) všech hodnot intervalu (a, b) a žádných jiných)

---

[11]) Doporučuji čtenáři, aby jako cvičení ukázal, že v každém intervalu $(k\pi, k\pi + \pi)$, kde k je libovolné celé číslo, jest $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \lg|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x| = \lg((-1)^k \operatorname{tg}\frac{1}{2}x)$.

[12]) To znamená: 1. je-li t libovolné číslo intervalu (α, β), leží hodnota $\varphi(t)$ v intervalu (a, b); 2. je-li naopak x libovolné číslo intervalu (a, b), existuje aspoň jedna hodnota t intervalu (α, β) tak, že je $\varphi(t) = x$.

[13]) Existuje-li ovšem *jen* jedna taková hodnota t, odpadá výběr.

je buď rostoucí nebo klesající v intervalu (α, β).[14]) Potom totiž funkce $\varphi(t)$ nemůže nabývati jedné a téže hodnoty pro dvě různé hodnoty proměnné t z intervalu (α, β); tedy ke každé hodnotě x intervalu (a, b) existuje jedna a *jen* jedna hodnota t intervalu (α, β), pro kterou platí rovnice $\varphi(t) = x$. Tato hodnota t je tedy funkcí proměnné x

$$t = \psi(x), \tag{22}$$

definovanou v intervalu (a, b), a tuto funkci $\psi(x)$ nazýváme, jak víte, funkcí *inversní* k funkci φ. Rovnice $\varphi(t) = x$ spolu s podmínkou, že t leží v intervalu (α, β), je potom splněna tehdy a jen tehdy, leží-li x v intervalu (a, b) a platí-li rovnice (22).

Nyní můžeme již vysloviti ohlášenou větu:

Věta 62. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má derivaci v intervalu (α, β); když t probíhá interval (α, β), nechť hodnota $\varphi(t)$ nabývá právě všech hodnot intervalu (a, b) a žádných jiných. Definujme funkci $\psi(x)$ v intervalu (a, b) tak, aby pro každé x tohoto intervalu platila rovnice* (21), *když do ní za t dosadíme $\psi(x)$.*[15]) *Funkce $f(x)$ budiž spojitá v intervalu (a, b). Potom je v intervalu (a, b)*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

položíme-li v primitivní funkci, kterou nám představuje integrál vpravo, $t = \psi(x)$.

Poznámka. V praksi se zvláště často vyskytuje ten případ, že funkce $\varphi(t)$ je buď rostoucí nebo klesající v intervalu (α, β); potom ovšem funkce ψ je prostě funkcí inversní k funkci φ.

Důkaz. Budiž $G(x)$ nějaká primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), t. j. nechť platí $G'(x) = f(x)$ v intervalu (a, b) (existence funkce $G(x)$ plyne ze spojitosti funkce $f(x)$, viz větu 58). V intervalu (α, β) je (protože hodnoty funkce $\varphi(t)$ leží v (a, b), viz větu B′ na str. 25)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(G(\varphi(t))) = G'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t);$$

funkce $G(\varphi(t))$ je tedy primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

---

[14]) O funkci $f(x)$ říkáme, že je *rostoucí* v jistém intervalu (nemusí to býti zrovna interval otevřený), má-li tuto vlastnost: jsou-li x_1, x_2 jakákoliv dvě čísla tohoto intervalu, pro něž je $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$. Nahradíme-li poslední nerovnost nerovností $f(x_1) > f(x_2)$, dostaneme definici funkce *klesající*.

[15]) Viz to, co jsme řekli před větou 62.

v intervalu (α, β). Budiž $H(t)$ libovolná primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v intervalu (α, β) (existenci takové primitivní funkce jsme právě dokázali, neboť $G(\varphi(t))$ je taková primitivní funkce); t. j. budiž

$$H(t) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

(v int. (α, β)).

Máme dokázati, že funkce $H(\psi(x))$ je v intervalu (a, b) funkcí primitivní k funkci $f(x)$.

Ježto funkce $G(\varphi(t))$ je — stejně jako funkce $H(t)$ — primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v (α, β), jest (podle věty 57)

$$G(\varphi(t)) = H(t) + c \tag{23}$$

v int. (α, β), kde c je konstanta. Budiž x libovolné číslo intervalu (a, b) a položme $t = \psi(x)$, takže je $x = \varphi(t)$ a t leží v intervalu (α, β); z rovnice (23) plyne pak

$$G(x) = H(\psi(x)) + c;$$

tato rovnice platí v celém intervalu (a, b). Ježto funkce $G(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v (a, b), platí ovšem totéž o funkci $H(\psi(x)) = G(x) - c$, jak bylo dokázati.

Použití této věty se opět snadno pamatuje. Chci vypočísti $\int f(x)\,\mathrm{d}x$; substitucí $x = \varphi(t)$ dostanu $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$; předpokládejme, že tento integrál dovedeme vypočísti — tento integrál je tedy jistou funkcí $H(t)$; zavedeme-li do této funkce $H(t)$ opět x podle rovnice $t = \psi(x)$, dostaneme hledaný integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(\psi(x))$ (jsou-li ovšem všechny podmínky věty 62 splněny). Stručně lze znázorniti postup počtu tímto schematem:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = H(t) = H(\psi(x)).$$

Příklad 4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4}$ (interval $(-\infty, \infty)$). Zavedu $x = 2t$ (tedy $t = \frac{1}{2}x$), $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$; $x^2 + 4 = 4\,(t^2 + 1)$, takže

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4\,(t^2 + 1)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\,x.$$

Příklad 5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (interval $(-\infty, \infty)$). Položme $x =$

$= \operatorname{cotg} t \ (0 < t < \pi)$. Probíhá-li t interval $(0, \pi)$, probíhá $\operatorname{cotg} t$ vskutku klesajíc právě celý interval $(-\infty, \infty)$. Jest pak (ježto $\sin t > 0$)

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}} = \left|\frac{1}{\sin t}\right| = \frac{1}{\sin t},$$

$\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$; tedy (viz příkl. 3)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = -\lg \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \lg \operatorname{cotg} \frac{t}{2}; \qquad (24)$$

do posledního výrazu musíme za t dosaditi příslušnou inversní funkci, t. j. $t = \operatorname{arccotg} x$ (Kössler 68), takže

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}} = \lg \operatorname{cotg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x\right) \qquad (25)$$

(v int. $(-\infty, \infty)$).

Ale výsledek lze psáti v jednodušším tvaru. Podle rovnice (24) je naší úlohou, vyjádřiti funkci $\lg \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$ pomocí x; je však $x = \operatorname{cotg} t$, takže v podstatě jde o to, vyjádřiti $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$ pomocí $\operatorname{cotg} t$. Jak známo z goniometrie, je

$$x = \operatorname{cotg} t = \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}t - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t},$$

odtud pak $(\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t)^2 - 2x \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t - 1 = 0$, což je kvadratická rovnice pro $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$; řešením dostaneme $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Které znamení platí? Jest $x^2 + 1 > x^2 \geqq 0$ a tedy $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$; je tedy $|x| < \sqrt{x^2 + 1}$, a tedy $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 < x + \sqrt{x^2 + 1}$. Ježto je $0 < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\pi$, je $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t > 0$; nemůže tedy býti $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x - \sqrt{x^2 + 1}$ a tedy je $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Podle (24) je tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lg (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(v int. $(-\infty, \infty)$), což je hledaný výsledek. Srovnáním s rovnicí (25) plyne, že je $\lg \operatorname{cotg} (\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x) = \lg (x + \sqrt{x^2 + 1}) + c$, kde c je konstanta; dosadíme-li $x = 0$, dostaneme, že $c = 0$.

Odlogaritmováním dostáváme pak rovnici $\operatorname{cotg}(\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, kterou bychom ovšem mohli jednodušeji odvoditi přímo.[16])

Následuje několik příkladů na metodu substituční v jednom nebo druhém tvaru.

Příklad 6. $\int \frac{dx}{ax + b}$ $\left(a \neq 0, \text{ intervaly } \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \text{ a } \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)\right)$. Položme $ax + b = t$, $a\,dx = dt$, tedy

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \lg |t| = \frac{1}{a} \lg |ax + b|.$$

Příklad 7. Předešlý příklad je speciálním případem integrálu $\int f(ax + b)\,dx$ $(a \neq 0)$. Substitucí $ax + b = t$, $a\,dx = dt$ dostaneme $\int f(ax + b)\,dx = a^{-1} \int f(t)\,dt$. Známe-li $\int f(x)\,dx = F(x)$, bude tedy

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} \int f(t)\,dt = \frac{1}{a} F(t) = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

Tedy: z integrálu $\int f(x)\,dx$ dostaneme ihned $\int f(ax + b)\,dx$, píšeme-li ve funkci $F(x) = \int f(x)\,dx$ výraz $ax + b$ místo x a dělíme-li číslem a. Tohoto obratu se velmi často užívá, a nebudu jej proto příště podrobně uváděti. Na př.

$$\int e^{2x+3}\,dx = \tfrac{1}{2} e^{2x+3}, \qquad \int \cos 3x\,dx = \tfrac{1}{3} \sin 3x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin 2x,$$

$$\int (-x + 2)^7\,dx = -\frac{1}{8}(-x + 2)^8$$

atd. Čtenář nechť si v tomto a v následujícím příkladě sám rozváží, v kterých intervalech uvedené výsledky platí.

---

[16]) Vlastně jsme toto přímé odvození již před chvílí provedli. Najde to čtenář?

Příklad 8. Často se užívá tohoto obratu: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x$ počítáme substitucí $f(x) = t$, $f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = $ $= \lg |t| = \lg |f(x)|$. Derivováním snadno zjistíme, že tento vzorec platí v každém otevřeném intervalu, v němž $f'(x)$ existuje a v němž je stále $f(x) \neq 0$. Na př.:

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\lg|x^3+1|;$$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\lg|\cos x|;$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \lg|\sin x|.$$

Příklad 9. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$; při tom nechť je n celé kladné a rovnice $x^2+px+q=0$ nechť nemá reálných kořenů, takže jmenovatel $(x^2+px+q)^n$ je různý od nuly pro všechna reálná x. To nastane — jak víte ze střední školy — tehdy a jen tehdy, je-li $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. Integrál budeme hledati v intervalu $(-\infty, \infty)$. Derivace výrazu x^2+px+q je $2x+p$; upravme tedy daný integrál takto:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}A\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x + \left(B - \frac{1}{2}Ap\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} \tag{26}$$

(to je pravda, neboť $Ax+B = \frac{1}{2}A(2x+p) + B - \frac{1}{2}Ap$).

V prvním integrálu proveďme substituci $x^2+px+q=t$, $(2x+p)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže je

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n};$$

tento integrál dovedeme vypočísti.

Druhý integrál snažíme se převésti na $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$, který též umíme vypočísti (viz odst. 3, příkl. 5). To provedeme takto:

první dva členy trojčlenu $x^2 + px + q$ doplníme na čtverec dvojčlenu prvního stupně, t. j. píšeme $x^2 + px + q = (x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2 + r$, kde klademe $r = q - \frac{1}{4}p^2$; je ovšem $r > 0$. Výraz $(x + \frac{1}{2}p)^2 + r$ se snažíme uvésti na tvar $rt^2 + r = r(t^2 + 1)$; toho dosáhneme substitucí $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{r}\,.\,t$ (čili $x = \sqrt{r}\,.\,t - \frac{1}{2}p$), $\mathrm{d}x = \sqrt{r}\,.\,\mathrm{d}t$ (odmocnina nám nevadí, ježto je $r > 0$). Dostáváme tedy $x^2 + px + q = rt^2 + r = r(t^2 + 1)$ a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{\sqrt{r}\,\mathrm{d}t}{r^n(t^2 + 1)^n} = \frac{1}{r^{n-\frac{1}{2}}}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 1)^n};$$

tím je tedy též druhý integrál z rovnice (26) převeden na integrál známý.

5. Integrace per partes a metoda substituční pro určité integrály. Metody integrace per partes a metody substituční můžeme užíti také přímo pro integrály určité. Odvodím dvě příslušné věty:

Věta 63. *Funkce $u(x)$, $v(x)$ nechť mají v $\langle a, b\rangle$ derivace $u'(x)$, $v'(x)$,*[17]*) jež jsou spojité v $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x. \quad (27)$$

Poznámka. Rozdíl $f(b) - f(a)$, který se zde i v dalším často vyskytuje, značíme pro zkrácení též $[f(x)]_{x=a}^{x=b}$ nebo ještě kratčeji $[f(x)]_a^b$; tedy na př. $[\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \sin\frac{1}{2}\pi - \sin 0 = 1$, $[x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, $[u(x)\,v(x)]_a^b = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$.

Důkaz. Z existence derivací plyne spojitost funkcí $u(x)$, $v(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ (viz pozn. [17]); tedy existují integrály $\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$ (viz větu 47) a podle věty 33 je

---

[17]) Znakem $u'(x)$ a slovem „derivace" rozumím zde pro $x = a$ derivaci zprava $u'_+(a)$, pro $x = b$ derivaci zleva $u'_-(b)$, pro $a < x < b$ pak vskutku derivaci $u'(x)$. Podobně pro funkci $v'(x)$.

Poznamenejme: ježto funkce $u(x)$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a mimo to derivaci zprava v bodě a a derivaci zleva v bodě b, je podle poznámky 1 na str. 24 funkce $u(x)$ spojitá v int. (a, b) a mimo to spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b, t. j. $u(x)$ je funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Podobně funkce $v(x)$ je spojitá v int. $\langle a, b\rangle$.

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx + \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = \int_a^b (u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x))\, dx. \quad (28)$$

Funkce $u(x)\, v(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) derivaci $u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)$. Podle věty 48 je tedy

$$\int_a^b (u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x))\, dx = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a). \quad (29)$$

Ze vzorců (28), (29) plyne však okamžitě hledaný vzorec (27).

Poznámka. Vzorec (27) platí — za obdobných předpokladů — též tehdy, je-li $a > b$. Neboť vyměním-li v tomto vzorci a a b, změní obě strany pouze své znamení.

Příklad 1. $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx$; položme $u = x^2$, $v' = \sin x$, $u' = 2x$, $v = -\cos x$; dostaneme $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = [-x^2 \cos x]_0^\pi + 2\int_0^\pi x \cos x\, dx = \pi^2 + 2\int_0^\pi x \cos x\, dx$. Položme nyní $u = x$, $v' = \cos x$, $u' = 1$, $v = \sin x$; dostaneme $\int_0^\pi x \cos x\, dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\, dx = 0 + [\cos x]_0^\pi = -2$. Tedy celkem $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \pi^2 - 4$.

Příklad 2. Položme $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\, dx$ (n celé, $n \geqq 0$). Pro $n > 1$ položme $u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$, $u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$, $v = -\cos x$, takže je

$$I_n = -[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + (n-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x\, (1 - \sin^2 x)\, dx = (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n,$$

tedy

$$nI_n = (n-1)\,I_{n-2},\quad I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Z této rekurentní formule plyne ihned pro sudé $n > 1$ ($n = 2m$, m celé kladné)

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{1}{2}\,I_0$$

a pro liché $n > 1$ ($n = 2m+1$, m celé kladné)

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{2}{3}\,I_1.$$

Tyto dva vzorce nám okamžitě dávají I_n pro každé celé $n > 0$, neboť I_0 a I_1 dovedeme vypočísti:

$$I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{2}\pi,\quad I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -[\cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1.$$

O metodě substituční pro určité integrály jedná tato věta:

Věta 64. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$ (při čemž slovo „derivace" a znak $\varphi'(t)$ nechť pro $t = \alpha$ znamená derivaci zprava a pro $t = \beta$ derivaci zleva.*[18]) *Funkce $f(x)$ nechť je spojitá v intervalu $\langle A, B\rangle$ a pro každé t intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ buďiž $A \leqq \varphi(t) \leqq B$. Položíme-li $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, jest*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{30}$$

Poznámka 1. Zde jsme mluvili o intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, takže jsme předpokládali $\alpha < \beta$; ale také pro $\alpha > \beta$ platí vzorec (30) za příslušných předpokladů: neboť ve vzorci (30) vlevo i vpravo můžeme vyměniti dolní integrační mez za horní a naopak (násobíme prostě obě strany činitelem -1).

Poznámka 2. Vzorce (30) můžeme použíti buď k výpočtu integrálu vlevo, známe-li integrál vpravo nebo k výpočtu integrálu vpravo, známe-li integrál vlevo. Mechanismus je stejný jako u neurčitých integrálů, jen musíme dáti pozor na to, že se také

---

[18]) Funkce $\varphi(t)$ je tedy spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$; viz obdobnou úvahu o funkci $u(x)$ v pozn. [17]) pod čarou.

meze mění podle substituce $x = \varphi(t)$, totiž $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Zde musíme dáti vždy pozor na to, jsou-li podmínky věty splněny: u neurčitých integrálů můžeme se po výpočtu dodatečně derivováním přesvědčiti, zda jsme správně počítali; u *určitých* integrálů tuto možnost zkoušky nemáme.

Důkaz věty 64. Ježto funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle A, B\rangle$, existuje podle věty 47 integrál $\int_A^B f(u)\,\mathrm{d}u$. Položme

$$F(x) = \int_A^x f(u)\,\mathrm{d}u; \tag{31}$$

podle věty 45 (a podle poznámky[37]) pod čarou k větě 45) je funkce $F(x)$ definována v intervalu $\langle A, B\rangle$ a má v tomto uzavřeném intervalu derivaci $F'(x) = f(x)$ (při čemž ovšem znak $F'(A)$ značí derivaci zprava v bodě A a znak $F'(B)$ značí derivaci zleva v bodě B). Ježto funkce $\varphi(t)$ má derivaci v int. $\langle\alpha, \beta\rangle$,[19]) a ježto hodnoty funkce $\varphi(t)$ leží v intervalu $\langle A, B\rangle$, má funkce $F(\varphi(t))$ podle věty C' na str. 25 v int. $\langle\alpha, \beta\rangle$ derivaci $F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ (v bodě $t = \alpha$ rozumím slovem „derivace“ opět derivaci zprava, v bodě $t = \beta$ derivaci zleva). Funkce $F(\varphi(t))$ je tedy spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$[20]) a má v každém bodě otevřeného intervalu (α, β) derivaci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Funkce $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ je spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$[21]) a tedy existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ (podle věty 47). Podle věty 48 je tedy

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \tag{32}$$

(neboť $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$). Ale podle (31) je (ježto hodnoty $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ leží v intervalu $\langle A, B\rangle$)

$$F(b) - F(a) = \int_A^b f(u)\,\mathrm{d}u - \int_A^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u;$$

---

[19]) V bodě α zprava, v bodě β zleva.

[20]) Viz obdobnou úvahu o funkci $u(x)$ v pozn. [17]) pod čarou.

[21]) Neboť $\varphi(t)$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ a nabývá jen hodnot intervalu $\langle A, B\rangle$ a funkce $f(x)$ je spojitá v $\langle A, B\rangle$; tedy funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ podle věty C str. 23 a funkce $\varphi'(t)$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ podle předpokladu.

dosadíme-li z této rovnice do pravé strany rovnice (32), dostáváme rovnici (30), neboť $\int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$.

Příklad 3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; zkusme substituci $\sqrt{x^2+3x+1} = x + t$, tedy

$$x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2xt + t^2, \quad x = \frac{t^2-1}{3-2t}, \tag{33}$$

$$dx = \frac{-2t^2+6t-2}{(3-2t)^2}\,dt.$$

Z rovnice $t = \sqrt{x^2+3x+1} - x$ plyne: pro $x = 0$ je $t = 1$, pro $x = 1$ je $t = \sqrt{5} - 1$. Zkusme, jsou-li splněny všechny předpoklady: máme zde $\varphi(t) = \frac{t^2-1}{3-2t}$; to je v intervalu $\langle 1, \sqrt{5}-1\rangle$ funkce rostoucí (neboť čitatel $t^2 - 1$ je nezáporný a roste, jmenovatel $3 - 2t$ je kladný a klesá), mající v tomto intervalu spojitou derivaci. Pro $t = 1$ je $\varphi(t) = 0$, pro $t = \sqrt{5} - 1$ je $\varphi(t) = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1 - 1}{3 - 2\sqrt{5} + 2} = 1$, takže pro každé t intervalu $\langle 1, \sqrt{5}-1\rangle$ je $0 \leq \varphi(t) \leq 1$. Funkce $f(x) = 1 : \sqrt{x^2+3x+1}$ je pak v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ spojitá. Můžeme tedy použíti věty 64.[22]) Musíme ještě do $\sqrt{x^2+3x+1}$ zavésti proměnnou t; $\sqrt{x^2+3x+1} = x + t = \frac{t^2-1}{3-2t} + t = \frac{-t^2+3t-1}{3-2t}$. Tedy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+1}} = \int_1^{\sqrt{5}-1} \frac{3-2t}{-t^2+3t-1} \cdot \frac{-2t^2+6t-2}{(3-2t)^2}\,dt =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{5}-1} \frac{dt}{3-2t} = \frac{2}{-2}\left[\lg|3-2t|\right]_1^{\sqrt{5}-1} = -\lg|3 - 2\sqrt{5}+2| =$$

[22]) Připomeňme, že pro naše hodnoty t, x plyne z druhé rovnice (33) první rovnice (33) a z této rovnice odmocněním rovnice $\sqrt{x^2+3x+1} = x + t$ (znamení je totiž správně voleno, ježto obě strany jsou kladné); můžeme tedy této rovnice — z níž jsme vlastně vyšli — skutečně použíti při provádění substituce.

$$= -\lg\sqrt{5}(\sqrt{5}-2) = \lg\frac{1}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)} = \lg\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} = \lg\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Příklad 4.[23] $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1}$; podle vzoru příkl. 9, odst. 4 píšeme $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ a klademe $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t$, $dx=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,dt$, takže $x^2+x+1=\frac{3}{4}(t^2+1)$. Je $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ a tedy platí: roste-li x od -1 do $+1$, roste t od $-1:\sqrt{3}$ do $\sqrt{3}$. Tedy

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1} = \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}[\operatorname{arctg} t]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Příklad 5. $\int\limits_{1}^{2}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; substituce $x^2+1=t$; roste-li x od 1 do 2, roste též t od 2 do 5; dále je $2x\,dx=dt$ a tedy

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{5}\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = -\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_2^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

CVIČENÍ.[24]

1. $\int x^n \lg x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ (pro $n \neq -1$; případ $n=-1$ byl vyřešen v odst. 3, příkl. 6).

2. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2)$.

---

[23]) V příkl. 4 a 5 přenechávám podrobné vyšetření podmínek čtenáři.

[24]) Při neurčitých integrálech nechť čtenář sám uváží, ve kterých intervalech uvedené výsledky platí.

3. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

4. Z výsledku odst. 3, příkl. 4 odvoďte pro celé $n > 0$

$$\int x^n e^x \, dx = n! \, e^x \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x}{1!} + (-1)^n \right).$$

5. Položme $I_n = \int x^n \cos x \, dx$, $K_n = \int x^n \sin x \, dx$; potom je

$$I_n = x^n \sin x - nK_{n-1}, \quad K_n = -x^n \cos x + nI_{n-1}.$$

Vypočtěte z těchto vzorců třeba I_3.

6. Pro $n \geqq 0$ položme $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^n \cos x \, dx$, $K_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^n \sin x \, dx$; z výsledku předcházejícího cvičení odvoďte vzorce (pro $n \geqq 2$)

$$I_n = (\tfrac{1}{2}\pi)^n - n(n-1) I_{n-2}, \quad K_n = n(\tfrac{1}{2}\pi)^{n-1} - n(n-1) K_{n-2}.$$

Odtud na př. pro sudé $n > 0$

$$I_n = (\tfrac{1}{2}\pi)^n - n(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi)^{n-2} +$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi)^{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}n} \cdot n! \, (\tfrac{1}{2}\pi)^0.$$

Odvoďte obdobný vzorec pro liché $n > 0$ a též pro K_n (přechod ke K_n je snadný, neboť pro $n \geqq 1$ je $K_n = nI_{n-1}$).

7. Z odst. 3, příkl. 7 znáte vzorce

$$\int e^x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad \int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x).$$

Položíme-li

$$I_n = \int x^n e^x \sin x \, dx, \quad K_n = \int x^n e^x \cos x \, dx,$$

platí

$$I_n = \tfrac{1}{2} x^n e^x (\sin x - \cos x) - \tfrac{1}{2} n (I_{n-1} - K_{n-1}),$$
$$K_n = \tfrac{1}{2} x^n e^x (\sin x + \cos x) - \tfrac{1}{2} n (I_{n-1} + K_{n-1}).$$

Ježto I_0, K_0 známe, dovedeme vypočísti I_n, K_n pro každé celé $n > 0$ (proveďte to pro některá n).

8. Položme $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$; odvodíme vzorce, kterými je možno vypočísti $I_{m,n}$ pro všechna celá m, n. Položíme-li $(m+1) \sin^m x \cos x = u'$, $\cos^{n-1} x = v$, máme ihned

$$(\alpha) \qquad (m+1) I_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{m+2,n-2}.$$

Užijeme-li vztahu $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, máme $I_{m+2,n-2} = I_{m,n-2} - I_{m,n}$ a tedy

$$(\beta) \qquad (m + n)\, I_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n - 1)\, I_{m,n-2}.$$

Píšeme-li v (α) m, n místo $m + 2$, $n - 2$, máme

$$(\gamma) \qquad (m - 1)\, I_{m-2,n+2} = \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (n + 1)\, I_{m,n},$$

a odtud podobně jako před tím

$$(\delta) \qquad (m + n)\, I_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m - 1)\, I_{m-2,n}.$$

Ze vzorců (β), (δ) plyne: je-li $m + n \neq 0$, lze $I_{m,n}$ vyjádřiti integrálem $I_{m,n-2}$ nebo $I_{m-2,n}$; čteme-li tyto vzorce pozpátku, vidíme: je-li $n + 1 \neq 0$ resp. $m + 1 \neq 0$, lze integrál $I_{m,n}$ vyjádřiti integrálem $I_{m,n+2}$ resp. $I_{m+2,n}$. Tedy lze každý integrál $I_{m,n}$ vyjádřiti oněmi integrály $I_{m,n}$, kde m a n jsou rovny některému z čísel 0, 1, -1. Těchto 9 integrálů však dovedeme vypočísti, viz násl. cvičení.

9. $I_{0,0}$, $I_{0,1}$, $I_{1,0}$ známe; $I_{1,1} = \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$;

$$I_{-1,-1} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \lg |\operatorname{tg} x|;$$

$$I_{-1,0} = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \lg |\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x|;$$

$$I_{0,-1} = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin (\frac{1}{2}\pi - x)} = \lg |\operatorname{tg} (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi)|;$$

$$I_{1,-1} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\lg |\cos x|; \quad I_{-1,1} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \lg |\sin x|.$$

10. Ze vzorců cvičení 8 a 9 odvoďte

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^7 x}{\cos^2 x} + \sin^5 x + \tfrac{5}{3} \sin^3 x + 5 \sin x - 5 \lg |\operatorname{tg} (\tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4}\pi)| \right);$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \tfrac{1}{32}\pi; \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \tfrac{1}{3}; \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dx}{\cos^4 x} = \tfrac{4}{3}.$$

11. Ze vzorce $\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^{n-2} x$ plyne pro $n \neq 1$

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx.$$

Tento vzorec je obsažen jako speciální případ v jednom ze vzorců (α), (β), (γ), (δ) (cvič. 8); v kterém?

12. Integrál $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x$ z cvičení 8 lze ještě jinak počítati, je-li aspoň jedno z čísel m, n liché. Budiž na př. $n = 2k + 1$ liché. Substituce $\sin x = t$, $\cos^2 x = 1 - t^2$ dává

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x \,\mathrm{d}x = \int t^m (1 - t^2)^k \,\mathrm{d}t.$$

Tím je výpočet převeden na výpočet integrálu racionální funkce (je-li ovšem m, k celé); integrály racionálních funkcí naučíme se obecně počítati v kap. IV. Zvláště jednoduchý je případ $k \geqq 0$. Proveďte obdobnou úvahu pro m liché.

13. Podle metody cvič. 12 vypočtěte

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x},$$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6\cos^6 x} - \frac{1}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2\cos^2 x},$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}\sin^5 x - \tfrac{1}{7}\sin^7 x.$$

14. $\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right).$

Návod: integrujte per partes; v integrálu vpravo pište $\dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =$
$= -\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\arcsin\left|\frac{1}{x}\right|$ $\left(\text{substituce } x = \dfrac{1}{t}\right)$. (Při výpočtu dávejte pozor na to, že je $\sqrt{a^2} = |a|$; v kterých intervalech platí odvozený vzorec?)

16. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2}} = \frac{2}{3}\pi$ (substituce $x - \frac{1}{2} = t$ a potom

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,u).$$

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\text{substituce } \frac{2 - x}{2 + x} = t\right).$

18. Substitucí $\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^2 = t$ obdržíme

$$\int \frac{(x^2 + 1)^3}{(x^2 - 1)^3 (x + 1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\int \frac{(1 + t)^3}{t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^4 + 3\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2 - \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 + 6 \lg\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right|\right).$$

19. Integrály tvaru

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos(\beta_1 x + \lambda_1) \dots \cos(\beta_k x + \lambda_k) \sin(\gamma_1 x + \mu_1) \dots$$
$$\dots \sin(\gamma_l x + \mu_l)\,\mathrm{d}x$$

(n, k, l celá nezáporná, $k + l > 0$) můžeme počítati takto: užitím vzorce $\cos y \cos z = \frac{1}{2}(\cos(y + z) + \cos(y - z))$ a obdobných vzorců pro $\sin y \sin z$, $\sin y \cos z$ můžeme počet trigonometrických činitelů (který je roven $k + l$) snižovati tak dlouho, dokud se nerovná jedné. Tím je předložený integrál převeden na integrály tvaru

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos(Ax + B)\,\mathrm{d}x, \quad \int x^n e^{\alpha x} \sin(Ax + B)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li $\alpha \neq 0$, $A \neq 0$, vypočteme tyto integrály metodou, jež byla ve speciálním případě $\alpha = A = 1$, $B = 0$ vyložena ve cvič. 7; je-li $\alpha = 0$ nebo $A = 0$, je ovšem výpočet ještě jednodušší (podle vzoru cvič. 4 nebo příkl. 7, kap. III). Vypočtěte touto metodou

$$\int xe^{3x} \cos(2x + \lambda) \sin^2(x + \mu)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \tfrac{1}{4} e^{3x} \left(\frac{-7 - 75x}{625} \cos(4x + \lambda + 2\mu) + \right.$$
$$+ \frac{24 - 100x}{625} \sin(4x + \lambda + 2\mu) + \frac{1 - 3x}{9} \cos(\lambda - 2\mu) +$$
$$\left. + \frac{-10 + 78x}{169} \cos(2x + \lambda) + \frac{-24 + 52x}{169} \sin(2x + \lambda) \right).$$

20. Větu 60 jsme dokázali za předpokladu, že derivace $u'(x)$, $v'(x)$ jsou spojité v intervalu (a, b). Dokažte, že větu 60 lze takto zobecniti: v intervalu (a, b) nechť existují derivace $u'(x)$, $v'(x)$ funkcí $u(x)$, $v(x)$; dále nechť existuje v int. (a, b) integrál $\int u'(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x$; potom existuje v intervalu (a, b) též integrál $\int u(x)\, v'(x)\,\mathrm{d}x$ a platí vzorec (13) (v intervalu (a, b)). (Předpoklad o spojitosti funkcí $u'(x)$, $v'(x)$ je tedy nahrazen obecnějším předpokladem o existenci integrálu $\int u'(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x$.)

21. Dokažte: je-li funkce $f(x)$ neklesající[25]) v intervalu $\langle a, b\rangle$, potom pro žádnou hodnotu x intervalu $\langle a, b)$ není $f'_+(x) < 0$[26]) a pro žádnou hodnotu x intervalu $(a, b\rangle$ není $f'_-(x) < 0$.

Návod: jako vzoru užijte úvahy v Kösslerovi, str. 82 nahoře (v ř. 3 je tam str. 00 místo str. 70).

22. Dokažte tuto větu: $f(x)$ budiž funkce spojitá v int. $\langle a, b\rangle$; $g(x)$ budiž funkce monotonní[25]) v int. $\langle a, b\rangle$, jež má v tomto intervalu spojitou derivaci.[27]) Potom existuje v intervalu $\langle a, b\rangle$ číslo ξ

---

[25]) Viz cvič. 13 ke kap. II, kde jsou tyto pojmy vysvětleny.

[26]) T. j. je-li $a \leq x < b$, je buďto $f'_+(x) \geq 0$ nebo $f'_+(x)$ vůbec neexistuje. Cvičení 21 nepatří vlastně do integrálního počtu, ale použijeme ho v cvič. 22.

[27]) Slovem „derivace" a znakem $g'(x)$, po příp. $F'(x)$ rozumím v tomto cvičení pro $x = a$ derivaci zprava a pro $x = b$ derivaci zleva.

takové, že jest

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{34}$$

Návod. Budiž předně $g(x)$ neklesající, takže podle cvič. 21 je $g'(x) \geqq 0$ v int. $\langle a, b\rangle$. Položme $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, takže je $F'(x) = f(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$. Podle věty 63 o integraci per partes je

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{35}$$

Budiž m nejmenší, M největší hodnota funkce $F(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$; podle 1. věty o stř. hodnotě (cvič. 14 ke kap. II) je

$$m(g(b) - g(a)) \leqq \int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(g(b) - g(a)).$$

Existuje tedy číslo μ tak, že je

$$m \leqq \mu \leqq M, \quad \int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \mu(g(b) - g(a)).$$

Konečně existuje v int. $\langle a, b\rangle$ číslo ξ tak, že je

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = \mu,$$ [28])

takže

$$\int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = (g(b) - g(a))\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dosadíte-li odtud do (35) a uvážíte-li, že je $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, obdržíte (34).

Je-li za druhé $g(x)$ nerostoucí, aplikujte vzorec (34) na funkci $-g(x)$.

Prosím čtenáře, aby při provádění tohoto důkazu dbal pozorně toho, zda všechny kroky jsou oprávněny.

Poznámka. Věta právě dokázaná, t. zv. *2. věta o střední hodnotě integrálního počtu*, je velmi důležitá. Předpoklady o funkcích $f(x)$, $g(x)$ daly by se ještě podstatně zobecniti; viz Petr, Počet integrální, 2. vyd., str. 240—242.

---

[28]) Proč existuje takové ξ? Odpověď najde čtenář v Kösslerovi 63.

23. Dokažte: je-li $0 < a < b$, je

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}), \quad \left|\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{b}}$$

(první nerovnost plyne z první věty, druhá z druhé věty o střední hodnotě). Na př. pro $b = 4a > 0$ dostáváme

$$\left|\int_a^{4a} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2\sqrt{a}, \quad \left|\int_a^{4a} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{3}{\sqrt{a}};$$

pro velké hodnoty čísla a je tedy druhá nerovnost mnohem výhodnější než první. Zde vidíte na malém příkladě význam 2. věty o stř. hodnotě.

Poznámka. 2. věta o stř. hodnotě by se stala nesprávnou, kdybychom vynechali předpoklad, že funkce $g(x)$ je monotonní v intervalu $\langle a, b\rangle$. Příklad: položme $f(x) = g(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$. Potom pro žádné číslo ξ neplatí rovnost

$$\int_0^\pi f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(0)\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(\pi)\int_\xi^\pi f(x)\,\mathrm{d}x;$$

neboť pravá strana je rovna nule (ježto $g(0) = g(\pi) = 0$), levá pak je rovna

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Učiňme ještě podobnou poznámku k 1. větě o střední hodnotě (viz cvič. 14 ke kap. II). Buďte m, M dvě čísla a $f(x)$, $g(x)$ dvě funkce, jež mají určitý integrál od a do b. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ budiž $m \leqq f(x) \leqq M$.

Je-li $g(x) \geqq 0$ pro všechna x int. $\langle a, b\rangle$, je podle 1. věty o stř. hodnotě

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x; \tag{36}$$

je-li $g(x) \leqq 0$ pro všechna x int. $\langle a, b\rangle$, obdržíme ihned (použitím 1. věty o stř. hodnotě na funkce $f(x)$, $-g(x)$) nerovnosti

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \geqq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{37}$$

Nabývá-li však $g(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$ jak kladných, tak záporných hodnot, nemusí platiti ani nerovnosti (36) ani nerovnosti (37).

Příklad: položme $f(x) = g(x) = \sin x$, $a = -\frac{1}{2}\pi$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $m = -1$, $M = 1$; potom je

$$m \int_a^b g(x)\,dx - M \int_a^b g(x)\,dx = 0 \quad (ježto \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,dx = 0),$$

ale

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

KAPITOLA IV.

Integrace některých speciálních typů funkcí, zvláště funkcí racionálních.

1. Rozklad mnohočlenu v součin kořenových činitelů. V tomto odstavci připomenu některé známé věci z algebry; nebudu je všechny dokazovati, nýbrž budu předpokládati, že je z algebry znáte. Při tom je nutno, abychom se neomezovali jen na čísla reálná, nýbrž abychom připustili do svých úvah i čísla komplexní, t. j. obecně čísla tvaru $a + bi$ (a, b reálná čísla),[1]) kde i je známá imaginární jednotka; písmena i budu v *této* kapitole užívati jen v tomto významu. Předpokládám, že čtenář zná první počátky teorie komplexních čísel z algebry; podotýkám však, že o komplexních číslech budeme mluviti pouze v prvních dvou odstavcích této kapitoly, obsahujících algebraické úvahy. Jakmile však se v 3. odst. obrátíme opět k integraci, budeme se opět omezovati jen na čísla reálná (to je také nutno, neboť věty z diferenciálního a integrálního počtu, kterých užíváme, odvodili jsme pouze pro reálné funkce reálných proměnných.[2])

Výraz tvaru

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

---

[1]) Reálná čísla jsou ovšem speciálním případem čísel komplexních: komplexní číslo $a + bi$ (a, b reálná) je reálné tehdy a jen tehdy, je-li $b = 0$.

[2]) Bylo by ovšem možno zavésti do našich úvah též komplexní funkce a komplexní proměnnou; některé výpočty by se tímto způsobem podstatně zjednodušily. Kdo se o této věci chce poučiti, nechť si přečte str. 16—57 z 2. vydání Petrova „Počtu integrálního". Také mnohé trigonometrické integrály, na př. integrály z cvič. 19 ke kap. III, lze jednodušeji počítati, zavedeme-li funkci e^x též pro *komplexní* x. Viz Petrovu knihu, str. 133.

kde n je celé číslo, $n \geqq 0$, nazýváme mnohočlenem čili polynomem. Při tom „koeficienty" $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mohou býti libovolná komplexní čísla; také proměnná x může nabývati komplexních hodnot. Na př. výrazy[3])

$$2x + 1, (\sqrt{3} + i)\, x^2 - \pi x + 2, x^2, x^3 - 1, x, 2, i, 0 \qquad (2)$$

jsou mnohočleny. Je-li x^m nejvyšší mocnina x, která je v mnohočlenu $P(x)$ násobena koeficientem různým od nuly, říkáme, že $P(x)$ je mnohočlenem m-tého stupně. Jinak řečeno: mnohočlen $Q(x)$ ve vzorci (1) je stupně n-tého tehdy a jen tehdy, je-li $a_0 \neq 0$. Na př. obecný tvar mnohočlenu 1. stupně je $ax + b$, kde $a \neq 0$; mnohočlen nultého stupně je konstanta různá od nuly. Tím je každému mnohočlenu přiřazeno určité celé nezáporné číslo jakožto jeho „stupeň" — s jedinou výjimkou: mnohočlenu 0 („nula") není podle této definice přiřazen žádný stupeň, neboť není zde žádný koeficient různý od nuly. Na př. mnohočleny v (2) mají po řadě tyto stupně: 1, 2, 2, 3, 1, 0, 0; poslední z nich nemá žádný stupeň. Je-li $Q(x)$ mnohočlen a je-li $Q(\alpha) = 0$, nazývá se číslo α (obecně komplexní) *kořenem* rovnice $Q(x) = 0$ nebo též kořenem mnohočlenu $Q(x)$. Je-li $Q(x)$ mnohočlen n-tého stupně, nazývá se rovnice $Q(x) = 0$ algebraickou rovnicí n-tého stupně. Z algebry je pak známa tato t. zv. „fundamentální věta algebry": Každá algebraická rovnice kladného stupně má aspoň jeden kořen. Znalost této věty předpokládám, dokazovati ji zde nebudu.

Budiž nyní α_1 nějaký kořen algebraické rovnice n-tého stupně $Q(x) = 0$, kde $Q(x)$ má tvar (1) $(a_0 \neq 0)$. Potom je $Q(\alpha_1) = 0$ a tedy pro každé komplexní x platí

$$Q(x) = Q(x) - Q(\alpha_1) = a_0\,(x^n - \alpha_1^n) + a_1\,(x^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \\ + \ldots + a_{n-1}\,(x - \alpha_1). \qquad (3)$$

Ježto pro každé celé $k > 1$ je $x^k - \alpha_1^k = (x - \alpha_1)\,(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha_1 + x^{k-3}\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_1^{k-1})$, můžeme v rovnici (3) vpravo vytknouti $x - \alpha_1$, načež v závorce zbude jistý mnohočlen $Q_1(x)$ právě stupně $n - 1$, při čemž koeficient u x^{n-1} je roven číslu a_0 (t. j. je stejný jako koeficient při x^n v mnohočlenu $Q(x)$). Máme tedy tento výsledek: Je-li α_1 kořenem mnohočlenu n-tého stupně $Q(x)$, jest identicky (t. j. pro všechna komplexní x)

$$Q(x) = (x - \alpha_1)\, Q_1(x),$$

[3]) Členy s koeficienty nulovými obyčejně vynecháváme.

kde $Q_1(x)$ je mnohočlen stupně $n-1$, jenž má nejvyšší koeficient stejný jako $Q(x)$ (t. j. jestliže $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, je $Q_1(x) = a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$). Je-li $n-1 > 0$ (t. j. je-li $n > 1$), má mnohočlen $Q_1(x)$ opět aspoň jeden kořen α_2 a podle předešlého výsledku platí opět identita $Q_1(x) = (x-\alpha_2)\,Q_2(x)$ a tedy

$$Q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,Q_2(x),$$

kde $Q_2(x)$ je mnohočlen stupně $n-2$, jehož nejvyšší koeficient (t. j. koeficient u x^{n-2}) je opět a_0. Takto pokračujíce, dostaneme po n krocích konečně identitu $Q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots \ldots(x-\alpha_n)\,Q_n(x)$, kde $Q_n(x)$ je mnohočlen nultého stupně s nejvyšším koeficientem a_0, t. j. $Q_n(x) = a_0$. Máme tedy tento výsledek: Každý mnohočlen $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ($n > 0$, $a_0 \neq 0$) lze rozložiti v součin

$$Q(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n); \tag{4}$$

při tom jsou $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ konstanty (obecně komplexní) a rovnice (4) platí identicky pro všechna x. Z algebry je známo, že rozklad (4) je možno provésti jen jediným způsobem, t. j. že čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou — až na pořádek — jednoznačně určena. Je zřejmo, že rovnice $Q(x) = 0$ je splněna tehdy a jen tehdy, je-li x rovno některému z čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou tedy právě všechny kořeny rovnice $Q(x) = 0$ a tedy algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n různých kořenů.[4] Mnohočleny prvního stupně $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2, \ldots$ $\ldots, x-\alpha_n$ nazývají se *kořenovými činiteli* mnohočlenu $Q(x)$ a rovnici (4) říkáme „rozklad mnohočlenu $Q(x)$ v kořenové činitele". Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nemusí býti navzájem různá; je-li na př. právě r z čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rovno číslu α_1, říkáme, že kořen α_1 (a též příslušný kořenový činitel $x-\alpha_1$) je r-násobný. Počítáme-li každý kořen tolikráte, kolik činí jeho násobnost, můžeme říci, že algebraická rovnice n-tého stupně má vždy právě n kořenů. Kořenům jednonásobným říkáme obyčejně „jednoduché"; ostatním kořenům říkáme „mnohonásobné". Má-li mnohočlen $Q(x)$ právě m kořenů různých $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, z nichž první je r_1-násobný, druhý r_2-násobný atd., lze rovnici (4) psáti ve tvaru

---

[4]) Tato věta platí i pro $n = 0$; neboť rovnice nultého stupně, t. j. rovnice $a = 0$ (kde $a \neq 0$) není splněna pro žádné x, t. j. nemá žádný kořen.

$$Q(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_m)^{r_m}. \qquad (5)$$

(Jest ovšem $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$.)

Poznámka. Z faktu, že algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n různých kořenů, plyne několik důsledků:

A. Má-li mnohočlen $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ aspoň $n + 1$ různých kořenů, jsou všechny koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ rovny nule (a tedy rovnice $Q(x) = 0$ platí identicky). Neboť jinak by rovnice $Q(x) = 0$ byla algebraickou rovnicí jistého stupně $m \leqq n$ a tedy by měla nejvýše m (a tedy jistě méně než $n + 1$) různých kořenů. Z věty A plyne okamžitě

B. Je-li nějaký mnohočlen $Q(x)$ roven nule pro nekonečně mnoho různých hodnot x, jsou všechny jeho koeficienty rovny nule (a tedy je identicky $Q(x) = 0$).

C. Jsou-li $P(x)$, $Q(x)$ dva mnohočleny a je-li rovnice $P(x) = Q(x)$ platna pro nekonečně mnoho hodnot x, je každý koeficient mnohočlenu $P(x)$ roven „stejnolehlému“ koeficientu mnohočlenu $Q(x)$ (t. j. koeficientu při téže mocnině x) a tedy rovnice $P(x) = Q(x)$ platí identicky. Důkaz plyne okamžitě z B, píšeme-li rovnici $P(x) = Q(x)$ ve tvaru $P(x) - Q(x) = 0$.

* * *

Mnohočlen $Q(x)$ budeme nazývati *reálným*, jsou-li jeho koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ čísla reálná; v následujícím budeme se zabývati výhradně reálnými mnohočleny. Je vám známo, že kořeny reálného mnohočlenu nemusí býti vždy reálné (vzpomeňte si na kořeny rovnic 2. stupně, na př. na rovnici $x^2 + 1 = 0$); platí však toto: má-li reálný mnohočlen $Q(x)$ komplexní s-násobný kořen $\gamma + \delta i$ ($\delta \neq 0$; γ, δ reálná), je též číslo „komplexně sdružené“ $\gamma - \delta i$ kořenem, a to rovněž s-násobným kořenem, mnohočlenu $Q(x)$. Příslušní kořenoví činitelé v rozkladu (5) jsou $(x - (\gamma + \delta i))^s (x - (\gamma - \delta i))^s$; tento součin je možno psáti v reálném tvaru, neboť $(x - (\gamma + \delta i)) (x - (\gamma - \delta i)) = (x - \gamma)^2 + \delta^2 = x^2 + px + q$, kde $p = -2\gamma$, $q = \gamma^2 + \delta^2$ jsou reálná čísla; při tom je $\frac{1}{4}p^2 - q = \gamma^2 - (\gamma^2 + \delta^2) = -\delta^2 < 0$; čísla $\gamma \pm \delta i$ jsou právě oba kořeny mnohočlenu $x^2 + px + q$. Provedeme-li tuto změnu v rozkladu (5), obdržíme tento výsledek:

Věta 65. *Budiž $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ reálný mnohočlen n-tého stupně, jenž má k různých reálných kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ a 2l různých kořenů komplexních (ne reálných) $\gamma_1 + \delta_1 i, \gamma_1 - \delta_1 i, \gamma_2 + \delta_2 i, \gamma_2 - \delta_2 i, \dots, \gamma_l + \delta_l i, \gamma_l - \delta_l i$ ($\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0, \dots, \delta_l \neq 0$; $\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2, \dots, \gamma_l, \delta_l$ jsou reálná čísla). Nechť* *obecně kořen x_t je r_t-násobný a kořeny $\gamma_t + \delta_t i$, $\gamma_t - \delta_t i$ nechť jsou s_t-násobné. Potom je identicky*

$$Q(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \ldots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \times \\ \times (x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \ldots (x^2 + p_l x + q_l)^{s_l}. \tag{6}$$

Při tom reálný mnohočlen $x^2 + p_t x + q_t$ má kořeny $\gamma_t + \delta_t i$, $\gamma_t - \delta_t i$;[5] *platí pak nerovnost $\frac{1}{4}p_t^2 - q_t < 0$.*

Poznamenejme, že žádné dva z mnohočlenů

$$(x - \alpha_1)^{r_1}, \ldots, (x - \alpha_k)^{r_k}, (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}, \ldots, (x^2 + p_l x + q_l)^{s_l}$$

nemají společných kořenů; t. j. je-li nějaké číslo kořenem některého z těchto mnohočlenů, nemůže býti již kořenem žádného jiného.

Ve zvláštních případech může ovšem býti $k = 0$ (nemá-li $Q(x)$ reálných kořenů) nebo $l = 0$ (jsou-li všechny kořeny reálné).

Poznámka. Vzorec (6) nám dává rozklad reálného mnohočlenu v součin *reálných* mnohočlenů 1. a 2. stupně; naproti tomu vzorec (5) dával rozklad sice jednodušší, totiž rozklad v součin mnohočlenů 1. stupně, za to však tyto mnohočleny nemusí býti reálné (ani tehdy, když $Q(x)$ je reálný mnohočlen). Učiňme ještě tuto poznámku, kterou za chvíli budeme potřebovati. Má-li reálný mnohočlen $Q(x)$ nějaký reálný kořen, na př. α_1, jest identicky $Q(x) = (x - \alpha_1)\, Q_1(x)$, kde $Q_1(x)$ je opět *reálný* mnohočlen, jehož stupeň je o jednotku nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$. Neboť, provedeme-li rozklad (6), můžeme za $Q_1(x)$ položiti prostě součin všech reálných činitelů vpravo, s výjimkou jednoho činitele $x - \alpha_1$. Obdobně: nechť reálný mnohočlen $Q(x)$ má nějaký komplexní (nikoliv reálný) kořen, na př. $\gamma_1 + \delta_1 i$ (γ_1, δ_1 reálná, $\delta_1 \neq 0$); potom má $Q(x)$ též kořen $\gamma_1 - \delta_1 i$; budiž $x^2 + p_1 x + q_1$ onen mnohočlen, jenž má kořeny $\gamma_1 + \delta_1 i$, $\gamma_1 - \delta_1 i$ (viz předešlou poznámku pod čarou). Potom je identicky $Q(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)\, Q_1(x)$, kde $Q_1(x)$ je opět *reálný* mnohočlen, jehož stupeň je o 2 nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$. Neboť, provedeme-li rozklad (6), můžeme za $Q_1(x)$ položiti prostě součin všech reálných činitelů vpravo, s výjimkou jednoho činitele $x^2 + p_1 x + q_1$.

---

[5]) Poznamenejme, že kořeny $\gamma_t + \delta_t i$, $\gamma_t - \delta_t i$ určují jednoznačně koeficienty p_t, q_t mnohočlenu $x^2 + p_t x + q_t$; neboť podle rozkladu (4) je identicky (kořenoví činitelé jsou právě dva) $x^2 + p_t x + q_t = (x - (\gamma_t + \delta_t i))(x - (\gamma_t - \delta_t i)) = x^2 - 2\gamma_t x + \gamma_t^2 + \delta_t^2$, takže podle věty C na str. 112 je nutně $p_t = -2\gamma_t$, $q_t = \gamma_t^2 + \delta_t^2$.

2. Rozklad reálné racionální funkce v součet částečných zlomků. Racionální funkce $R(x)$ proměnné x je taková funkce, kterou lze psáti jako podíl dvou mnohočlenů $P(x)$, $Q(x)$:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{7}$$

(Mnohočlen je ovšem také racionální funkcí, neboť lze psáti $P(x) = P(x) : 1$ a jednička je mnohočlen (nultého stupně). Racionální funkce (7) je ovšem definována pro všechna komplexní x, vyjma pro ty hodnoty x, pro něž je $Q(x) = 0$.) Lze-li mnohočleny $P(x)$, $Q(x)$ voliti tak, že jsou reálné, nazýváme funkci (7) *reálnou* racionální funkcí. Budeme se výhradně zabývati reálnými racionálními funkcemi.[6]) Naším úkolem v tomto odstavci bude, převésti výraz $P(x) : Q(x)$ na součet několika výrazů jednodušších[7]); při tom ovšem budeme předpokládati, že stupeň mnohočlenu $Q(x)$ je kladné číslo: kdyby totiž $Q(x)$ byl mnohočlen nultého stupně, t. j. konstanta, byl by výraz $R(x)$ mnohočlenem, tedy funkcí velmi jednoduchou, kterou dovedeme integrovati.

Budiž tedy dána racionální funkce $S(x) : Q(x)$, kde $S(x)$ je reálný mnohočlen stupně m, $Q(x)$ reálný mnohočlen stupně n $(n > 0)$. Je-li $m \geqq n$, lze provésti dělení, čímž dostaneme

$$S(x) = P_1(x)\, Q(x) + P(x),$$

kde mnohočlen $P_1(x)$ je „podíl“, mnohočlen $P(x)$ je „zbytek“; tento zbytek je buď nula nebo mnohočlen stupně *nižšího* než n. Dělíme-li poslední rovnici (platnou pro všechna x) mnohočlenem $Q(x)$, dostaneme vztah

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

který platí pro všechna x, pro něž $Q(x) \neq 0$. Je-li tedy předložena reálná racionální funkce $S(x) : Q(x)$, je buď čitatel nižšího stupně než jmenovatel nebo se dá daná racionální funkce dělením převésti na součet reálného mnohočlenu a reálné racionální funkce, v níž čitatel je nižšího stupně než jmenovatel (po případě dokonce tento čitatel může býti nula). Můžeme se tedy v dalším omeziti na takové reálné racionální funkce (7), v nichž čitatel má nižší stupeň než jmenovatel.

---

[6]) *Koeficienty* mnohočlenů $P(x)$, $Q(x)$ budou tedy reálná čísla; ovšem *proměnná* x může nabývati — v tomto odstavci — jakýchkoliv komplexních hodnot.

[7]) To je tedy ryze algebraická úloha, která s integrálním počtem nemá nic společného; integrovati začneme až zase v odst. 3.

Příklad 1. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = x + 3 + \dfrac{3x - 4}{x^2 - x + 1}$.

Dělením totiž dostaneme:

$$(x^3 + 2x^2 + x - 1) : (x^2 - x + 1) = x + 3 + \frac{3x - 4}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{array}{llll}
x^3 & -\ x^2 & +\ x & \\
- & + & - & \\
\hline
 & 3x^2 & & -\ 1 \\
 & 3x^2 & -\ 3x & +\ 3 \\
 & - & + & - \\
 & & 3x & -\ 4 \ldots \text{zbytek}
\end{array}$$

Hlavním výsledkem tohoto odstavce bude věta 68; věty 66, 67 jsou přípravou k větě 68.

Věta 66. *Budiž α reálné číslo; budiž r celé kladné číslo; budiž $Q_1(x)$ reálný mnohočlen, jenž nemá kořen α (t. j. $Q_1(\alpha) \neq 0$); budiž $P(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x - \alpha)^r Q_1(x)$. Potom existuje reálné číslo A tak, že pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x - \alpha)^r Q_1(x)$, platí vztah*

$$\frac{P(x)}{(x - \alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x - \alpha)^r} + \frac{P_1(x)}{(x - \alpha)^{r-1} Q_1(x)}, \tag{8}$$

kde $P_1(x)$ je buďto nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x - \alpha)^{r-1} Q_1(x)$.

Poznámka. Všimněte si smyslu rovnice (8): zlomek na levé straně je rozložen na součet dvou zlomků: první z nich je zcela jednoduchý; druhý je podobný jako zlomek vlevo, ale je o něco jednodušší: schází v něm jeden činitel $x - \alpha$.

Důkaz. Slovy „přípustné hodnoty x" budu označovati všechny komplexní hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x - \alpha)^r Q_1(x)$. Je-li A libovolné reálné číslo, platí pro všechna přípustná x rovnice

$$\frac{P(x)}{(x - \alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x - \alpha)^r} + \frac{P(x) - A\, Q_1(x)}{(x - \alpha)^r Q_1(x)} \tag{9}$$

(abyste nahlédli správnost tohoto vztahu, stačí, uvedete-li pravou stranu na společného jmenovatele). Zvolme A tak, aby bylo $P(\alpha) - A\, Q_1(\alpha) = 0$, t. j. zvolme $A = P(\alpha) : Q_1(\alpha)$ (to lze, ježto $Q_1(\alpha) \neq 0$). Potom $P(x) - A\, Q_1(x)$ je buďto nula a důkaz je hotov: nebo je $P(x) - A\,Q_1(x)$ reálný mnohočlen stupně nižšího než je stupeň mnohočlenu $(x-\alpha)^r Q_1(x)$, jenž má kořen α. Podle poznámky k větě 65 platí identicky $P(x) - A\,Q_1(x) = (x-\alpha) \times \times P_1(x)$, kde $P_1(x)$ je reálný mnohočlen stupně o jednotku nižšího nežli $P(x) - A\,Q_1(x)$, tedy stupně *nižšího* nežli $(x-\alpha)^{r-1} Q_1(x)$. Dosazením do (9) dostaneme vztah, platný pro všechna přípustná x:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{(x-\alpha)\,P_1(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)}.$$

Krátíme-li poslední zlomek výrazem $x-\alpha$ (což je pro všechna přípustná x dovoleno, ježto pro tyto hodnoty x je $x-\alpha \neq 0$), dostáváme rovnici (8), platnou pro všechna přípustná x, t. j. pro všechna x, pro něž je $(x-\alpha)^r Q_1(x) \neq 0$.

Věta 67. *Budiž $x^2 + px + q$ reálný mnohočlen a nechť je $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. Mnohočlen $x^2 + px + q$ nemá tedy reálných kořenů; označme jeho kořeny $\gamma + \delta i$, $\gamma - \delta i$ ($\delta \neq 0$, γ, δ reálná). Budiž s celé kladné číslo; budiž $Q_1(x)$ reálný mnohočlen, jenž nemá kořen $\gamma + \delta i$ (a tedy ani $\gamma - \delta i$) a budiž $P(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$. Potom existují reálná čísla M, N tak, že pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$, platí vztah*

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^s Q_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1} Q_1(x)}, \tag{10}$$

kde $P_1(x)$ je buďto nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x^2 + px + q)^{s-1} Q_1(x)$.[8])

Důkaz je obdobný jako u věty 66, jen poněkud složitější. Slovy „přípustné hodnoty x“ označíme zde všechny komplexní hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$. Jsou-li M, N libovolná reálná čísla, platí pro všechna přípustná x rovnice

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^s Q_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s} + \frac{P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)}{(x^2+px+q)^s Q_1(x)} \tag{11}$$

(správnost tohoto vztahu opět okamžitě nahlédnete, uvedete-li pravou stranu na společného jmenovatele). Snažme se zvoliti

[8]) Smysl této věty je obdobný jako smysl věty 66: ve jmenovateli druhého zlomku vpravo schází jeden činitel $x^2 + px + q$.

reálná čísla M, N tak, aby čitatel posledního zlomku se rovnal nule pro $x = \gamma + \delta i$; t. j. tak, aby bylo

$$P(\gamma + \delta i) - (M\gamma + M\delta i + N)\, Q_1(\gamma + \delta i) = 0. \qquad (12)$$

Čísla $P(\gamma + \delta i)$, $Q_1(\gamma + \delta i)$ jsou obecně komplexní, pišme třeba $P(\gamma + \delta i) = A + Bi$, $Q_1(\gamma + \delta i) = C + Di$ (A, B, C, D reálná). Rovnice (12) vypadá tedy takto:

$$A + Bi - (M\gamma + M\delta i + N)\,(C + Di) = 0:$$

tato rovnice platí, jsou-li reálná čísla M, N zvolena tak, aby reálná i imaginární část levé strany se rovnala nule, t. j. platí-li rovnice

$$M\gamma C + NC - M\delta D = A,$$
$$M\delta C + M\gamma D + ND = B.$$

To jsou dvě rovnice pro dvě neznámé M, N, jež mají jistě řešení — a to reálné řešení —, je-li determinant soustavy různý od nuly[9]): tento determinant jest

$$\begin{vmatrix} \gamma C - \delta D, & C \\ \delta C + \gamma D, & D \end{vmatrix} = -\,\delta\,(C^2 + D^2). \qquad (13)$$

Při tom je $\delta \neq 0$ a $Q_1(\gamma + \delta i) = C + Di \neq 0$, takže aspoň jedno z reálných čísel C, D je různé od nuly a tedy $C^2 + D^2 > 0$. Tedy determinant (13) vskutku je různý od nuly a můžeme tedy nalézti reálná čísla M, N tak, aby platila rovnice (12). Zvolme M, N tímto způsobem. Potom je buďto $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ nula a důkaz je hotov; nebo je $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)$.[10]) Podle rovnice (12) má reálný mnohočlen $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ kořen $\gamma + \delta i$ a tedy též kořen $\gamma - \delta i$; podle poznámky k větě 65 je tedy identicky

$$P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x) = (x^2 + px + q)\, P_1(x),$$

kde $P_1(x)$ je reálný mnohočlen stupně o 2 nižšího než $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$, tedy stupně *nižšího* než $(x^2 + px + q)^{s-1} \times Q_1(x)$. Dosazením do (11) dostaneme vztah, platný pro všechna přípustná x:

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{(x^2 + px + q)\, P_1(x)}{(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)}.$$

[9]) Viz Bydžovský, Základy teorie determinantů a matic a jich užití (Praha 1930), str. 2—3; pro n rovnic viz str. 33—35; obecnou teorii soustavy lineárních rovnic viz na str. 60—74.

[10]) Všimněte si, že mnohočlen $Q_1(x)$ má stupeň aspoň o 2 nižší než mnohočlen $(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)$.

Pro všechna přípustná x je však $x^2 + px + q \neq 0$, takže můžeme poslední zlomek tímto výrazem krátit; tím dostáváme vztah (10), platný pro všechna přípustná x, t. j. pro všechna x, pro něž je $(x^2 + px + q)^s Q_1(x) \neq 0$.

Věta 68. *Budiž $Q(x)$ reálný mnohočlen, pro nějž platí identicky rovnice*

$$Q(x) = a_0(x-\alpha)^r (x-\alpha')^{r'} \dots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \dots; \quad (14)$$

při tom $a_0, \alpha, \alpha', \dots, p, q, p', q', \dots$ jsou reálná čísla, $a_0 \neq 0$; dále je $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$, $\frac{1}{4}p'^2 - q' < 0, \dots$; čísla $r, r', \dots, s, s', \dots$ jsou celá kladná. Konečně nechť žádné dva z mnohočlenů $x - \alpha$, $x - \alpha', \dots, x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q', \dots$ nemají společných kořenů.[11] *Budiž dále $P(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$. Potom existují reálná čísla $A_r, A_{r-1}, \dots, A_2, A_1, A'_{r'}, A'_{r'-1}, \dots, A'_2, A'_1, \dots, M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \dots$ $\dots, M_2, N_2, M_1, N_1, M'_{s'}, N'_{s'}, M'_{s'-1}, N'_{s'-1}, \dots, M'_2, N'_2, M'_1, N'_1, \dots$ tak, že pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $Q(x)$, platí rovnice*

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \dots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \\
& + \frac{A'_{r'}}{(x-\alpha')^{r'}} + \frac{A'_{r'-1}}{(x-\alpha')^{r'-1}} + \dots + \frac{A'_2}{(x-\alpha')^2} + \frac{A'_1}{x-\alpha'} + \\
& + \dots + \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M_{s-1}x + N_{s-1}}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \\
& + \dots + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \\
& + \frac{M'_{s'} x + N'_{s'}}{(x^2+p'x+q')^{s'}} + \frac{M'_{s'-1}x + N'_{s'-1}}{(x^2+p'x+q')^{s'-1}} + \\
& + \dots + \frac{M'_2 x + N'_2}{(x^2+p'x+q')^2} + \frac{M'_1 x + N'_1}{x^2+p'x+q'} + \dots
\end{aligned} \quad (15)$$

[11]) Rovnice (14) je tedy prostě rozklad mnohočlenu $Q(x)$ podle vzorce (6); jenom pro pohodlí jsme trochu změnili označení: reálné kořeny mnohočlenu $Q(x)$ jsou α (r-násobný), α' (r'-násobný), ..., komplexní (ne reálné) kořeny mnohočlenu $Q(x)$ jsou: dva kořeny mnohočlenu $x^2 + px + q$ (s-násobné), dva kořeny mnohočlenu $x^2 + p'x + q'$ (s'-násobné) atd. Činitelé $x - \alpha$, $x - \alpha', \dots$ ovšem mohou scházeti (nemá-li $Q(x)$ reálných kořenů); rovněž činitelé $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q', \dots$ mohou scházeti (jsou-li všechny kořeny reálné).

Prosím čtenáře, aby se nelekal zdánlivě složitých vzorců, které

Poznámka. Rovnice (15) dává rozklad zlomku $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ v součet t. zv. *částečných* (nebo *parciálních*) *zlomků*.

Důkaz. Slovy „přípustné hodnoty x" budu označovati ony hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $Q(x)$. Pišme $Q(x) = (x - \alpha)^r Q_1(x)$, kde $Q_1(x)$ je součin všech ostatních činitelů (kromě $(x-\alpha)^r$) na pravé straně rovnice (14). Ježto $Q_1(\alpha) \neq 0$, existuje podle věty 66 reálné číslo A_r tak, že pro všechna přípustná x je[12])

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{r-1} Q_1(x)},$$

kde reálný mnohočlen $P_1(x)$ je buďto nula[13]) nebo má nižší stupeň než mnohočlen $(x-\alpha)^{r-1} Q_1(x)$. Je-li $r - 1 > 0$, postupujeme podobně dále a opětovným použitím věty 66 dostaneme rovnice

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{r-1} Q_1(x)} = \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-\alpha)^{r-2} Q_1(x)},$$

. . . .

$$\frac{P_{r-2}(x)}{(x-\alpha)^2 Q_1(x)} = \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{P_{r-1}(x)}{(x-\alpha) Q_1(x)},$$

$$\frac{P_{r-1}(x)}{(x-\alpha) Q_1(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_r(x)}{Q_1(x)};$$

při tom $A_{r-1}, A_{r-2}, \ldots, A_1$ jsou reálná čísla; v každém zlomku na konci každého řádku je v čitateli buďto nula nebo reálný mnohočlen, jenž má stupeň nižší nežli jmenovatel. Celkem tedy obdržíme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + \\ + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_r(x)}{Q_1(x)};$$

poslední zlomek je podobného tvaru jako $P(x) : Q(x)$; čitatel je buďto nula nebo reálný mnohočlen stupně nižšího než jmenovatel;

---

teď přijdou. Věc je v podstatě jednoduchá a až si čtenář přečte odst. 2 a propočítá příklady 1—5 k němu připojené, porozumí mu jistě bez nejmenších obtíží.

[12]) V dalším průběhu důkazu budu se stále omezovati jen na přípustná x, ale nebudu to stále výslovně podotýkati.

[13]) Je-li ovšem $P_1(x)$ nula, jsme s důkazem hotovi. Totéž platí o všech dalších krocích.

jmenovatel $Q_1(x)$ je však již o něco jednodušší: vypadl z něho činitel $(x-\alpha)^r$. Použijeme-li nyní téhož postupu na kořenové činitele $(x-\alpha')^{r'}, \dots$ (pocházející od reálných kořenů), při čemž vycházíme nyní od zlomku $P_r(x) : Q_1(x)$, dostaneme konečně

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A'_{r'}}{(x-\alpha')^{r'}} + \\ + \frac{A'_{r'-1}}{(x-\alpha')^{r'-1}} + \dots + \frac{A'_1}{x-\alpha'} + \dots + \frac{T(x)}{S(x)}; \tag{16}$$

při tom čísla $A_r, \dots, A_1, A'_{r'}, \dots, A'_1, \dots$ jsou reálná; dále je

$$S(x) = a_0 (x^2 + px + q)^s (x^2 + p'x + q')^{s'} \dots \tag{17}$$

a $T(x)$ je buďto nula nebo reálný mnohočlen nižšího stupně než $S(x)$. Pišme nyní $S(x) = (x^2 + px + q)^s S_1(x)$ ($S_1(x)$ je prostě součin všech ostatních činitelů — kromě $(x^2 + px + q)^s$ — z pravé strany rovnice (17)); opětovným použitím věty 67 dostaneme rovnice

$$\frac{T(x)}{S(x)} = \frac{T(x)}{(x^2+px+q)^s S_1(x)} =$$
$$= \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{T_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1} S_1(x)},$$
$$\frac{T_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1} S_1(x)} =$$
$$= \frac{M_{s-1} x + N_{s-1}}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \frac{T_2(x)}{(x^2+px+q)^{s-2} S_1(x)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{T_{s-1}(x)}{(x^2+px+q) S_1(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{T_s(x)}{S_1(x)};$$

při tom $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \dots, M_1, N_1$ jsou reálná čísla; v posledním zlomku v každé rovnici je v čitateli buď nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň jmenovatele. Podobně pokračujeme dále, až vyčerpáme všechny činitele $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q', \dots$; tím dostaneme vzorec (s reálnými čísly $M_s, N_s, \dots, M_1, N_1, M'_{s'}, N'_{s'}, \dots, M'_1, N'_1, \dots$)

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{T(x)}{S(x)} &= \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M_{s-1}x + N_{s-1}}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \ldots + \\
&+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \\
&+ \frac{M'_{s'}x + N'_{s'}}{(x^2+p'x+q')^{s'}} + \frac{M'_{s'-1}x + N'_{s'-1}}{(x^2+p'x+q')^{s'-1}} + \ldots + \\
&+ \frac{M'_1 x + N'_1}{x^2+p'x+q'} + \ldots + \frac{U(x)}{a_0},
\end{aligned}\right\} \quad (18)
$$

kde $U(x)$ je buďto nula nebo mnohočlen nižšího stupně než a_0; poslední případ však nemůže nastati, ježto a_0 je mnohočlen stupně nultého; tedy $U(x)$ je nula a z rovnic (16), (18) plyne hledaná rovnice (15).

Příklad 2.

$$
R(x) = \frac{x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 4x^6 + x^4 + 2x^3 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3}.
$$

Zde stupeň čitatele není nižší než stupeň jmenovatele; musíme tedy nejdříve provésti dělení a dostaneme

$$
R(x) = x + 2 + \frac{x^7 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3};
$$

zde již čitatel má nižší stupeň než jmenovatel. Jest $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3(x^6 + 2x^3 + 1) = x^3(x^3+1)^2$; ale $x^3 + 1 = (x+1) \times (x^2 - x + 1)$, kde poslední činitel vyhovuje podmínce $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. Rozklad (14) vypadá tedy takto: $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3(x+1)^2(x^2-x+1)^2$; podle věty 68 existují tedy reálná čísla $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ tak, že pro všechna x (vyjma pro kořeny rovnice $x^9 + 2x^6 + x^3 = 0$) je

$$
\begin{aligned}
\frac{x^7 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3} &= \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{e}{(x+1)} + \\
&+ \frac{fx + g}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{hx + k}{x^2 - x + 1};
\end{aligned} \qquad (19)
$$

přičteme-li ještě mnohočlen $x + 2$, dostáváme hledaný rozklad funkce $R(x)$ — až na to, že jsme dosud neurčili čísla $a, b, \ldots, k$.

Vyložím zde nyní dva způsoby, jak je možno stanoviti reálná čísla

$$A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1, A'_{r'}, A'_{r'-1}, \ldots, A'_1, \ldots, M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots,$$
$$M_1, N_1, M'_{s'}, N'_{s'}, M'_{s'-1}, N'_{s'-1}, \ldots, M'_1, N'_1, \ldots \qquad (20)$$

v rovnici (15). Vynásobme rovnici (15) jmenovatelem $Q(x) : a_0$; dostaneme tuto rovnici:

$$\frac{P(x)}{a_0} = A_r(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ A_{r-1}(x-\alpha)(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ A_1(x-\alpha)^{r-1}(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ (M_s x + N_s)(x-\alpha)^r (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ (M_{s-1}x+N_{s-1})(x-\alpha)^r(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ (M_1x+N_1)(x-\alpha)^r(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^{s-1}(x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ \ldots \qquad (21)$$

(a_0 jsme nechali ve jmenovateli, abychom jím nemusili násobiti všechny členy vpravo; v každém členu vpravo ovšem stojí (kromě a_0) všichni činitelé z rozkladu (14), kromě toho, který stál v příslušném členu ve vzorci (15) ve jmenovateli). Obě strany rovnice (21) jsou mnohočleny; rovnice (21) vzniká z rovnice (15) tím, že násobíme mnohočlenem $Q(x) : a_0$; rovnice (15) vzniká z rovnice (21) naopak tím, že mnohočlenem $Q(x) : a_0$ dělíme. Jsou-li čísla (20) volena tak, že rovnice (15) platí pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$ (podle věty 68 víme, že taková čísla (20) existují), potom rovnice (21) platí rovněž pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$, tedy pro nekonečně mnoho x; ježto (21) je rovnice mezi dvěma mnohočleny, je potom podle věty C na str. 112 každý koeficient vlevo v rovnici (21) roven stejnolehlému koeficientu vpravo a tedy rovnice (21) platí *pro všechna x vůbec* (i pro ta x, pro něž je $Q(x) = 0$). Naopak, jsou-li čísla (20) volena tak, že rovnice (21) platí pro všechna x vůbec (čili — což je totéž podle věty C na str. 112 — je-li každý koeficient v rovnici (21) vlevo roven stejnolehlému koeficientu vpravo), platí rovnice (15) pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$. Můžeme tedy svoji úlohu vysloviti dvojím ekvivalentním způsobem:

I. Nalézti reálná čísla (20) tak, aby v rovnici (21) byl každý koeficient vlevo roven příslušnému koeficientu vpravo (víme, že taková čísla (20) existují).

II. Nalézti reálná čísla (20) tak, aby rovnice (21) platila identicky, t. j. pro každé komplexní x (víme, že taková čísla (20) existují).

Formulace I vede k tomuto řešení naší úlohy (t. zv. *metoda neurčitých součinitelů* nebo *neurčitých koeficientů*): Vynásobíme-li vpravo v rovnici (21), vidíme, že koeficient každé mocniny x vpravo je lineární formou[14]) v číslech (20); položíme-li každý takový koeficient roven stejnolehlému koeficientu vlevo, dostaneme pro čísla (20) soustavu lineárních rovnic, jež jistě má reálné řešení (neboť víme, že čísla (20), mající žádané vlastnosti, existují).[15])

Příklad 3. Stanovení koeficientů $a, b, \ldots, k$ v rovnici (19). Násobíme rovnici (19) mnohočlenem $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3 (x + 1)^2 \times \times (x^2 - x + 1)^2$; dostaneme

$$\begin{aligned} x^7 + 7x - 1 = {} & a (x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2 + \\ & + bx (x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2 + \\ & + cx^2 (x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2 + dx^3 (x^2 - x + 1)^2 + \\ & + ex^3 (x + 1) (x^2 - x + 1)^2 + \\ & + (fx + g) x^3 (x + 1)^2 + \\ & + (hx + k) x^3 (x + 1)^2 (x^2 - x + 1), \end{aligned} \tag{22}$$

neboli

$$\begin{aligned} x^7 + 7x - 1 = {} & a (x^6 + 2x^3 + 1) + b (x^7 + 2x^4 + x) + \\ & + c (x^8 + 2x^5 + x^2) + \\ & + d (x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3) + \\ & + e (x^8 - x^7 + x^6 + x^5 - x^4 + x^3) + \\ & + (fx + g) (x^5 + 2x^4 + x^3) + \\ & + (hx + k) (x^7 + x^6 + x^4 + x^3). \end{aligned}$$

V této rovnici se vyskytují mocniny od x^8 až do x^0; položíme-li koeficient každé mocniny x vpravo roven koeficientu téže mocniny vlevo, dostaneme těchto devět rovnic:

$c + e + h = 0,$	$2c + 3d + e + 2f + g + h = 0,$	$c = 0,$
$b + d - e + h + k = 1,$	$2b - 2d - e + f + 2g + h + k = 0,$	$b = 7,$
$a - 2d + e + f + k = 0,$	$2a + d + e + g + k = 0,$	$a = -1.$

Z těchto rovnic dostanete řešením (doporučuji, abyste si je provedli) $a = -1$, $b = 7$, $c = 0$, $d = 1$, $e = \frac{31}{9}$, $f = -\frac{1}{3}$, $g = -\frac{7}{3}$, $h = -\frac{31}{9}$, $k = -\frac{1}{9}$.

* * *

[14]) Viz Bydžovský, Základy teorie determinantů . . ., str. 60.

[15]) Jak se řeší soustavy lineárních rovnic, najdete v citované knížce Bydžovského.

Řešení metodou neurčitých součinitelů sice dovedeme vždy provésti, ale ve složitějších případech bývá často zdlouhavé.

Vyložím proto ještě jednu metodu,[16]) která též vždy vede k cíli, a jež spočívá na druhé formulaci (viz II na str. 123): víme, že existují reálná čísla (20) taková, že rovnice (21) platí pro všechna x vůbec; jak tato čísla (20) nalezneme? Především snadno najdeme číslo A_r: dosaďme do rovnice (21) $x = \alpha$; levá strana je $P(\alpha) : a_0$, na pravé straně všichni sčítanci vyjma první obsahují činitele $x - \alpha$, jenž pro $x = \alpha$ se rovná nule; zbude nám tedy rovnice

$$P(\alpha) : a_0 = A_r(\alpha - \alpha')^{r'} \dots (\alpha^2 + p\alpha + q)^s (\alpha^2 + p'\alpha + q')^{s'} \dots ; \quad (23)$$

ježto číslo α není kořenem žádného činitele v rovnici (14) vpravo s výjimkou činitele $x - \alpha$, je součinitel při A_r v rovnici (23) různý od nuly a dělíme-li jím, dostaneme A_r.[17]) Předpokládejme, že už známe čísla $A_r, A_{r-1}, \dots, A_{r-(k-1)}$ a že chceme počítati následující číslo A_{r-k}. Rovnice (21) platí pro všechna x, tedy specielně také pro všechna reálná x; derivujeme-li tedy obě strany rovnice (21) k-kráte, dostáváme vlevo i vpravo mnohočlen, a tyto dva mnohočleny se ovšem sobě rovnají pro všechna reálná x,[18]) tedy pro nekonečně mnoho hodnot x a tedy podle věty C (str. 112) rovnají se sobě tyto mnohočleny *vůbec* pro všechna (komplexní) x. Tedy: derivujeme-li obě strany rovnice (21) k-kráte, dostaneme rovnici, která platí nejen pro všechna reálná, nýbrž i pro všechna komplexní x. Jak vypadá rovnice (21)? Známe-li čísla $A_r, A_{r-1}, \dots, A_{r-(k-1)}$, tvoří prvních k členů pravé strany rovnice (21) mnohočlen již úplně známý, jejž označme třeba $R(x)$; potom přijde člen $A_{r-k}(x - \alpha)^k (x - \alpha')^{r'} \dots (x^2 + px + q)^s (x^2 + p'x + q')^{s'} \dots$ a po něm další členy, z nichž se dá vytknouti $(x - \alpha)^{k+1}$; takže rovnice (21) má tento tvar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0} P(x) &= R(x) + A_{r-k}(x - \alpha)^k (x - \alpha')^{r'} \dots \\ &\dots (x^2 + px + q)^s (x^2 + p'x + q')^{s'} \dots + (x - \alpha)^{k+1} S(x), \end{aligned} \quad (24)$$

kde mnohočleny P, R již úplně známe; mnohočlen $S(x)$ ovšem

[16]) Čtenář, kterému by se následující úvahy zdály obtížné, může zbytek tohoto odst. 2 vynechati. Která z obou metod je výhodnější, závisí na tvaru dané funkce $P(x) : Q(x)$.

[17]) Zároveň je viděti, že číslo A_r je jednoznačně stanoveno.

[18]) Neboť jsou-li si dvě funkce rovny pro všechna reálná x a mají-li všude derivaci, jsou si i jejich derivace rovny pro všechna reálná x.

obsahuje po příp. součinitele ještě neznámé. Derivujeme-li poslední rovnici k-kráte, dostaneme — jak čtenář snadno zjistí — tento výsledek:

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(x) = R^{(k)}(x) + k!\, A_{r-k}(x-\alpha')^{r'} \ldots$$
$$\ldots(x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots + (x-\alpha)\, T(x), \tag{25}$$

kde $T(x)$ je opět mnohočlen.[19] Dosaďme do rovnice (25) $x=\alpha$; dostaneme

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(\alpha) - R^{(k)}(\alpha) =$$
$$= k!\, A_{r-k}(\alpha-\alpha')^{r'} \ldots (\alpha^2+p\alpha+q)^s (\alpha^2+p'\alpha+q')^{s'} \ldots \tag{26}$$

Levá strana je známa; činitel u A_{r-k} je různý od nuly, jak jsme už při rovnici (23) zjistili, a tedy můžeme A_{r-k} z rovnice (26) vypočísti (opět je A_{r-k} jednoznačně stanoveno). Tímto způsobem vypočteme tedy po řadě $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1$ a obdobně $A'_{r'}, A'_{r'-1}, \ldots$ $\ldots, A'_1, \ldots$

Zbývá vypočísti čísla $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ Postup je obdobný, jen o něco složitější. Mnohočlen x^2+px+q má dva kořeny $\sigma = \gamma + \delta i$, $\tau = \gamma - \delta i$ (γ, δ reálná, $\delta \neq 0$); pro $x=\sigma$ a pro $x=\tau$ je tedy $x^2+px+q=0$, ale žádný jiný činitel na pravé straně rovnice (14) se nerovná nule ani pro $x=\sigma$ ani pro $x=\tau$. Dosaďme do rovnice (21) $x=\sigma$; ježto všichni členové vpravo, obsahující činitel x^2+px+q, se rovnají nule pro $x=\sigma$, dostaneme

$$\frac{1}{a_0} P(\sigma) = (M_s\sigma + N_s)(\sigma-\alpha)^r (\sigma-\alpha')^{r'} \ldots (\sigma^2+p'\sigma+q')^{s'} \ldots; \tag{27}$$

činitel u $M_s\sigma + N_s$ je známé číslo různé od nuly, takže můžeme z rovnice (27) vypočísti $M_s\sigma + N_s = C$, kde C je jisté známé

[19]) Stačí uvážiti toto: je $((x-\alpha)^m f(x))' = m(x-\alpha)^{m-1} f(x) + (x-\alpha)^m f'(x)$; derivováním takového součinu $(x-\alpha)^m f(x)$ tedy dostaneme dva členy: v jednom se mocnitel u $x-\alpha$ o jednotku sníží, v druhém se nesníží. Tedy: derivuji-li k-kráte výraz $(x-\alpha)^{k+1} S(x)$, zůstane tam jistě činitel $x-\alpha$. Derivuji-li pak k-kráte výraz $A_{r-k}(x-\alpha)^k (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots$, dostanu jednak druhý člen pravé strany rovnice (25) (když totiž po k-kráte derivuji mocninu činitele $x-\alpha$), jednak řadu dalších členů, v nichž se však mocnitel u $x-\alpha$ snížil o méně než k, takže ze všech těchto členů lze ještě $x-\alpha$ vytknouti.

komplexní číslo, $C = D + Ei$ (D, E reálná). My chceme však stanoviti reálná čísla M_s, N_s; k tomu cíli pišme do poslední rovnice $\sigma = \gamma + \delta i$ a dostaneme $M_s(\gamma + \delta i) + N_s = D + Ei$; tato rovnice bude správná tehdy a jen tehdy, budou-li si rovny reálné i imaginární části na obou stranách, t. j. bude-li $M_s\delta = E$, $M_s\gamma + N_s = D$; tyto dvě rovnice mají skutečně řešení, a to jediné: $M_s = E : \delta$ (pamatujme, že je $\delta \neq 0$), $N_s = D - M_s\gamma = D - E\gamma : \delta$. Tím je M_s, N_s vypočteno.[20]) Předpokládejme nyní, že známe již čísla $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_{s-(k-1)}, N_{s-(k-1)}$ a že chceme vypočísti čísla M_{s-k}, N_{s-k}. Rovnice (21) vypadá nyní takto: oněch k členů, v nichž se vyskytují koeficienty $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_{s-(k-1)}, N_{s-(k-1)}$, tvoří jistý mnohočlen $R(x)$ již úplně známý; potom přijde člen

$$(M_{s-k}x + N_{s-k})(x-\alpha)^r (x-\alpha')^{r'} \ldots$$
$$\ldots(x^2 + px + q)^k (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots$$

a potom další členy, z nichž se dá vytknouti $(x^2 + px + q)^{k+1}$, takže rovnice (21) vypadá takto:

$$\frac{1}{a_0} P(x) = R(x) +$$
$$+ (M_{s-k}x + N_{s-k})(x-\alpha)^r (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^k (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ (x^2 + px + q)^{k+1} S(x),$$

kde mnohočleny P, R již úplně známe; mnohočlen $S(x)$ ovšem obsahuje po případě součinitele ještě neznámé. Derivujeme-li poslední rovnici k-kráte, dostaneme — jak čtenář snadno zjistí — tento výsledek (platný, jak víme, pro všechna komplexní x):

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(x) = R^{(k)}(x) + (M_{s-k}x + N_{s-k}) . k!\,(2x + p)^k . (x-\alpha)^r \times$$
$$\times (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots + (x^2 + px + q)\,T(x), \tag{28}$$

---

[20]) Opět je viděti, že čísla M_s, N_s jsou jednoznačně stanovena.

[21]) Stačí uvážiti toto: je $((x^2 + px + q)^m f(x))' = (x^2 + px + q)^{m-1} . m\,(2x + p) f(x) + (x^2 + px + q)^m f'(x)$; derivováním takového součinu dostanu tedy dva členy: v jednom se mocnitel m o jednotku snížil (a přibyl ještě činitel $m\,(2x + p)$), v druhém se nesnížil. Tedy: derivuji-li k-kráte výraz $(x^2 + px + q)^{k+1} S(x)$, zůstane tam ještě činitel $x^2 + px + q$. Derivuji-li pak k-kráte výraz $(M_{s-k}x + N_{s-k})(x-\alpha)^r (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2 + px + q)^k (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots$, dostanu jednak druhý člen pravé strany rovnice (28) (když totiž

kde $T(x)$ je opět mnohočlen.[21]) Dosaďme do rovnice (28) $x = \sigma = \gamma + \delta i$; činitel $2x + p$ nemá kořen σ (neboť má jediný kořen $x = -\frac{1}{2}p$, a ten je reálný) a ostatní činitelé $x - \alpha$, $x - \alpha'$, ..., $x^2 + p'x + q'$, ... také nemají kořen σ, kdežto ovšem $\sigma^2 + p\sigma + q = 0$. Dostaneme tedy

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(\sigma) = R^{(k)}(\sigma) + (M_{s-k}\sigma + N_{s-k})\, G,$$

kde $P^{(k)}(\sigma)$, $R^{(k)}(\sigma)$, G jsou známá čísla (obecně komplexní). $G \neq 0$. Ježto $G \neq 0$, lze z poslední rovnice vypočísti $M_{s-k}\sigma + N_{s-k} = C$, kde C je jisté známé komplexní číslo, $C = D + Ei$ (D, E reálná). Z rovnice $M_{s-k}(\gamma + \delta i) + N_{s-k} = D + Ei$ stanovíme pak — jako dříve — reálná čísla M_{s-k}, N_{s-k}: musí totiž býti $M_{s-k}\gamma + N_{s-k} = D$, $M_{s-k}\delta = E$, tedy $M_{s-k} = E : \delta$, $N_{s-k} = D - E\gamma : \delta$.[22]) Dovedeme tedy stanoviti čísla M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, ..., M_1, N_1 a obdobně ovšem čísla $M'_{s'}$, $N'_{s'}$, ...

Máme tedy celkem tento předpis: do rovnice (21) dosadíme za x po řadě všechny kořeny mnohočlenu $Q(x)$ (při čemž zde i při dalších krocích stačí, když ze dvou komplexně sdružených kořenů dosadíme vždy jen jeden); tím vypočteme čísla A_r, $A'_{r'}$, ..., M_s, N_s, $M'_{s'}$, $N'_{s'}$, ... Jsou-li všechny kořeny jednoduché, je tím výpočet hotov. Nejsou-li všechny kořeny jednoduché, derivujeme rovnici (21) (do níž jsme za A_r, $A'_{r'}$, ..., M_s, N_s, $M'_{s'}$, $N'_{s'}$, ... dosadili hodnoty již vypočtené) a do této derivované rovnice dosadíme po řadě za x všechny aspoň *dvojnásobné* kořeny mnohočlenu $Q(x)$ a vypočteme čísla A_{r-1}, $A'_{r'-1}$, ..., M_{s-1}, N_{s-1}, $M'_{s'-1}$, $N'_{s'-1}$, ... (pokud se ovšem vůbec vyskytují; je-li na př. $r = 1$, odpadá A_{r-1}). Potom derivujeme rovnici (21) po druhé a do rovnice tak vzniklé dosadíme po řadě za x všechny aspoň *trojnásobné* kořeny mnohočlenu $Q(x)$ atd., až všechny hledané koeficienty (20) jsou vypočteny. Zároveň máme tento vedlejší výsledek: čísla (20) jsou jednoznačně stanovena; t. j. reálná čísla (20) lze určiti *jen* jedním způsobem tak, aby rovnice (15) ve větě 68 platila pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$.

---

po k-kráte derivuji vždy mocninu činitele $x^2 + px + q$), jednak řadu dalších členů, v nichž se však mocnitel u $x^2 + px + q$ snížil o méně než k, takže ze všech těchto členů lze ještě $x^2 + px + q$ vytknouti.

[22]) Opět vidíme, že čísla M_{s-k}, N_{s-k} jsou jednoznačně stanovena.

Příklad 4.

$$\frac{x^2+x-1}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{cx+d}{(x^2+2)^3}+\frac{ex+f}{(x^2+2)^2}+\frac{gx+h}{x^2+2}$$

a tedy

$$x^2+x-1=a(x^2+2)^3+bx(x^2+2)^3+(cx+d)\,x^2+$$
$$+(ex+f)\,x^2(x^2+2)+(gx+h)\,x^2(x^2+2)^2.$$

Kořeny jsou 0 (dvojnásobný), $\pm i\sqrt{2}$ (trojnásobné). Dosaďme $x=0$: dostaneme $-1=8a$, $a=-\frac{1}{8}$. Dosaďme $x=i\sqrt{2}$: dostaneme $-2+i\sqrt{2}-1=-2(ci\sqrt{2}+d)$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=\frac{3}{2}$. Nyní budeme 0 dosazovati ještě do rovnice jednou derivované, $i\sqrt{2}$ do rovnice jednou a dvakráte derivované. Derivujme, dosazujíce za a, c, d:

$$2x+1=-\tfrac{1}{8}.3(x^2+2)^2.2x+b(x^2+2)^3+b.3(x^2+2)^2.2x^2-$$
$$-\tfrac{3}{2}x^2+3x+ex^2(x^2+2)+(ex+f)(4x^3+4x)+$$
$$+gx^2(x^2+2)^2+(gx+h).2x.(x^2+2)^2+$$
$$+(gx+h).2x^3.2(x^2+2).$$

Dosaďme $x=0$: $1=8b$, $b=\frac{1}{8}$; dosaďme $x=i\sqrt{2}$ (tedy $x^2+2=0$): $2i\sqrt{2}+1=3+3i\sqrt{2}+(ei\sqrt{2}+f)(-8i\sqrt{2}+4i\sqrt{2})$; tedy $1=3+8e$, $e=-\frac{1}{4}$; $2\sqrt{2}=3\sqrt{2}-4f\sqrt{2}$, $f=\frac{1}{4}$.

Derivujme ještě jednou (dosazujíce za b, e, f), pamatujíce, že do výsledku budeme dosazovati jen $x=i\sqrt{2}$ (tedy $x^2+2=0$), takže členy, násobené činitelem x^2+2, nevypisuji:

$$2=-3x+3-\tfrac{1}{4}.2x^3-4x^3+3x^2-2x+1+8(gx+h).x^4+\ldots;$$

pro $x=i\sqrt{2}$ vyjde

$$2=-3i\sqrt{2}+3+i\sqrt{2}+8i\sqrt{2}-6-2i\sqrt{2}+1+$$
$$+32(gi\sqrt{2}+h);$$

tedy $\quad 2=3-6+1+32h,\ h=\frac{1}{8};$

$$0=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}+8\sqrt{2}-2\sqrt{2}+32g\sqrt{2},\quad g=-\tfrac{1}{8}.$$

Tedy celkem

$$\frac{x^2+x-1}{x^2(x^2+2)^3}=-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{8x}+\frac{-x+3}{2(x^2+2)^3}+$$
$$+\frac{-x+1}{4(x^2+2)^2}+\frac{-x+1}{8(x^2+2)}.$$

Příklad 5. Druhá metoda je zvláště jednoduchá, jsou-li kořeny mnohočlenu $Q(x)$ vesměs jednoduché; potom totiž netřeba derivovati. Na př.

$$\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+1)} =$$
$$= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-2} + \frac{ex+f}{x^2+1}.$$

$$\begin{aligned} x^2+x+1 = {} & a(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+1) + \\ & + bx(x+1)(x-2)(x^2+1) + \\ & + cx(x-1)(x-2)(x^2+1) + \\ & + dx(x-1)(x+1)(x^2+1) + \\ & + (ex+f)\,x(x-1)(x+1)(x-2). \end{aligned}$$

Dosazuji po řadě $x = 0, 1, -1, 2, i$ a dostanu: $1 = 2a$, $a = \frac{1}{2}$; $3 = -4b$, $b = -\frac{3}{4}$; $1 = -12c$, $c = -\frac{1}{12}$; $7 = 30d$, $d = \frac{7}{30}$; $-1 + i + 1 = (ei + f)\,i\,.\,(-2)(i-2)$, $i = 2ei - 4e + 2f + 4fi$; $-4e + 2f = 0$, $2e + 4f = 1$, $f = 2e$, $10e = 1$, $e = \frac{1}{10}$, $f = \frac{1}{5}$.

3. Integrace racionálních funkcí. Máme-li vypočísti $\int \frac{S(x)}{Q(x)}\,dx$, kde $S(x)$, $Q(x)$ jsou reálné mnohočleny,[23]) postupujeme podle odst. 2; není-li stupeň mnohočlenu $S(x)$ nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$, provedeme dělení a dostaneme

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P_1(x)$, $P(x)$ jsou reálné mnohočleny a $P(x)$ je buďto nula nebo mnohočlen nižšího stupně než $Q(x)$. Mnohočlen $P_1(x)$ dovedeme integrovati; zlomek $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rozložíme pak (není-li $P(x)$ nula) podle věty 68 na částečné zlomky. Stačí tedy vypočísti ještě integrály jednotlivých sčítanců v rovnici (15) (věta 68), t. j. integrály tvaru

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx \quad (n \text{ celé kladné}),$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx \quad (n \text{ celé kladné}),$$

[23]) Zdůrazňuji ještě jednou, že od tohoto okamžiku až do konce knihy počítáme opět jen s *reálnými* funkcemi *reálných* proměnných.

kde $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. První integrál se rovná $-\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}$ pro $n > 1$ a rovná se $A \lg|x-\alpha|$ pro $n = 1$ (výsledek platí v každém intervalu, neobsahujícím bod α); druhý integrál dovedeme též vypočísti (viz příklad 9 v kap. III, odst. 4), a to v intervalu $(-\infty, \infty)$. Dovedeme tedy též vypočísti integrál libovolné reálné racionální funkce $\int \frac{S(x)}{Q(x)}\,dx$, ovšem jen tehdy, dovedeme-li rozložiti mnohočlen $Q(x)$ podle vzorce (14) (věta 68), t. j. dovedeme-li řešiti rovnici $Q(x) = 0$. Výsledek platí potom v každém otevřeném intervalu, neobsahujícím žádný kořen rovnice $Q(x) = 0$.

Příklad 1.

$$\int \frac{x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 4x^6 + x^4 + 2x^3 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3}\,dx.$$

V odst. 2, příkl. 2 a 3 jsme již provedli rozklad integrované funkce; hledaný integrál se tedy rovná

$$\int\left(x + 2 - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{31}{9(x+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x+7}{3(x^2-x+1)^2} - \frac{31x+1}{9(x^2-x+1)}\right)dx = \frac{x^2}{2} +$$

$$+ 2x + \frac{1}{2x^2} - \frac{7}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{31}{9}\lg|x+1| -$$

$$- \frac{1}{3}\int \frac{x+7}{(x^2-x+1)^2}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{31x+1}{x^2-x+1}\,dx.$$

Poslední dva integrály počítáme podle vzoru př. 9 v kap. III, odst. 4:

$$I_2 = \int \frac{x+7}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx +$$

$$+ \frac{15}{2}\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2},$$

$$I_1 = \int \frac{31x+1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{31}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx +$$

$$+ \frac{33}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Substitucí $x^2 - x + 1 = t$, $(2x - 1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ dostaneme

$$\int \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2 - x + 1};$$

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lg|t| = \lg(x^2 - x + 1)$$

(neboť je stále $x^2 - x + 1 > 0$). Jest $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$; položíme-li $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}t$, máme dále $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}(t^2 + 1)$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{16}{9} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 1)^2},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1};$$

podle kap. III, odst. 3, příkl. 5 je (do (16) jest dosaditi $n = 1$ a psáti t místo x)

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1};$$

ale

$$t = \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}, \quad t^2 + 1 = \frac{4}{3}(x^2 - x + 1),$$

takže

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}.$$

Tím jsou vypočteny integrály I_1, I_2 a tedy též hledaný integrál (doporučuji čtenáři, aby si provedl ještě dosazení); výsledek platí v každém otevřeném intervalu, neobsahujícím ani bod 0 ani bod -1.

Příklad 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1}$. Především musíme rozložiti $x^4 + 1$ podle vzorce (14); rovnice $x^4 + 1 = 0$ nemá reálných kořenů, proto rozklad vypadá takto: $x^4 + 1 = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$ (při čemž dosud není vyloučeno, že by oba mnohočleny 2. stupně byly identické[24]). Z této (identicky platné) rovnice plyne podle věty C, str. 112:

$$p + p' = 0,\ q + q' + pp' = 0,\ pq' + p'q = 0,\ qq' = 1.$$

Podle první rovnice můžeme tyto rovnice psáti též takto: $p' = -p$, $q + q' = p^2$, $p(q' - q) = 0$, $qq' = 1$. Podle poslední rovnice mají q, q' totéž znamení a jsou různy od nuly; podle druhé rovnice je $q + q' = p^2$, takže q, q' jsou kladná a $p \neq 0$; z rovnice $p(q' - q) = 0$ potom plyne $q = q'$, tedy $qq' = q^2 = 1$ a tedy $q = q' = +1$ (ježto $q > 0$): tedy $p^2 = q + q' = 2$, $p = \pm\sqrt{2}$, $p' = -p$. Vezměme $p = \sqrt{2}$, tedy $p' = -\sqrt{2}$ (kdybychom vzali $p = -\sqrt{2}$, bylo by $p' = \sqrt{2}$ a oba činitelé by se pouze vyměnili): tedy máme rozklad $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$; vidíme, že kořeny rovnice $x^4 + 1$ jsou jednoduché, ježto kořeny $\gamma \pm \delta i$ $(\delta \neq 0)$ rovnice $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ *nejsou* kořeny rovnice $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ (viz poznámku [5]) na str. 113); tedy

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Snadným výpočtem (nechť si jej čtenář provede) obdržíme

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right).$$

Jest pak (znamení $\pm$ si odpovídají)

$$\int_0^1 \frac{x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1}\,dx \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}.$$

---

[24]) Čtenář, znalý počátků algebry, zjistí ovšem ihned, že rovnice $x^4 + 1 = 0$ má čtyři různé kořeny jednoduché a nikoliv dva dvojnásobné — ale raději tento výsledek odvodíme.

Zde je

$$\int_0^1 \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x = [\lg|x^2 \pm \sqrt{2}x + 1|]_0^1 = \lg(2 \pm \sqrt{2})$$

(viz kap. III, odst. 4, příkl. 8). Dále je $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = (x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$, položíme-li $x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}t$, a tedy $\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t$, $t = \sqrt{2}\,x \pm 1$, máme tedy (pozor na meze!)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \int_{\pm 1}^{\sqrt{2} \pm 1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{2}\,(\operatorname{arctg}(\sqrt{2} \pm 1) - \operatorname{arctg}(\pm 1)).$$

Je $\operatorname{arctg}(\pm 1) = \pm \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) = \frac{3}{8}\pi$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{8}\pi$.[25]) Tedy celkem[26])

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\lg(2 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2}\lg(2 - \sqrt{2}) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) - \operatorname{arctg}(-1)\right) =$$

---

[25]) Vypočtěme to: je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}$ a tedy specielně pro $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ je $1 = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{8}\pi}$, $\operatorname{tg}^2\frac{1}{8}\pi + 2\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi - 1 = 0$, $\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi = -1 \pm \pm\sqrt{2}$; ale $\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi > 0$, tedy $\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$; jest $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$ a tedy $\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi) = 1 : \operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi = 1 : (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$; tedy: $\frac{1}{8}\pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)$, $\frac{3}{8}\pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1)$.

[26]) Užíváme dále vztahu $(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2$, takže $-\lg(2 - \sqrt{2}) = \lg(2 + \sqrt{2}) - \lg 2$.

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\lg(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\lg 2 + \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{8}\pi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lg(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\pi.$$

4. Integrály tvaru $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}\right) dx$. Mnohočlenem ve dvou proměnných x, y nazýváme součet konečného počtu členů tvaru $cx^m y^n$, kde c je konstanta, m a n jsou celá nezáporná čísla. Podíl dvou mnohočlenů $P(x, y) : Q(x, y)$ nazývá se racionální funkcí proměnných x, y; taková funkce je definována ve všech bodech, v nichž je $Q(x, y) \neq 0$. V tomto odstavci budeme se zabývati integrály tvaru

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}\right) dx, \tag{29}$$

kde s je *celé* číslo větší než 1 a kde $R(x, y)$ je racionální funkce proměnných x, y.[27]) Integrál tvaru (29) (a ovšem také *určitý* integrál tohoto tvaru) dá se převésti na integrál racionální funkce substitucí

$$\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}} = t.$$

Vskutku, z této substituce plyne

$\frac{ax+b}{cx+f} = t^s,\quad x = \frac{b - ft^s}{ct^s - a},\quad dx = \frac{af - bc}{(ct^s - a)^2} st^{s-1}\, dt;$ provedeme-li tuto substituci, vidíme, že výrazy x, $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}$ jsou nahraze-

---

[27]) Funkci $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}\right)$ dostaneme tedy tak, že do racionální funkce $R(x, y)$ za y dosadíme $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}$. Kdyby bylo $s = 1$, byla by funkce $R\left(x, \frac{ax+b}{cx+f}\right)$ ovšem racionální funkcí proměnné x a integrovali bychom podle metody odst. 3. Také v případě $af - bc = 0$ — jak čtenář snadno nahlédne — je předložený integrál — pokud vůbec má význam — integrálem racionální funkce.

ny *racionálními* funkcemi proměnné t a rovněž dx je nahrazeno výrazem $r(t)\,.\,dt$, kde $r(t)$ je *racionální* funkcí proměnné t. Tedy vskutku integrál (29) přejde touto substitucí v integrál racionální funkce proměnné t.

Poznámka 1. Integrál $\int R(x, (ax + b)^{\frac{1}{s}})\,dx$ patří ovšem též mezi integrály tvaru (29); je to prostě speciální případ $c = 0$, $f = 1$.

Poznámka 2. V tomto odstavci i ve zbytku této kapitoly přenechávám čtenáři, aby si rozvážil — buď v obecném případě nebo v jednotlivých příkladech — zda a v kterých intervalech uvedené úvahy platí.

Příklad 1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx$; substituce $\sqrt{2x+3} = t > 0$, $2x + 3 = t^2$, $x = \frac{1}{2}(t^2 - 3)$, $dx = t\,dt$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx = \int_{1}^{\sqrt{5}} \frac{2t + t^2 - 3}{2t - t^2 + 3}\,t\,dt =$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{5}} \left(-t - 4 - \frac{9}{t-3} + \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= \left[-\frac{t^2}{2} - 4t - 9\lg|t-3| + \lg|t+1|\right]_1^{\sqrt{5}} =$$

$$= -\frac{5}{2} - 4\sqrt{5} - 9\lg(3-\sqrt{5}) + \lg(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2} + 4 +$$

$$+ 9\lg 2 - \lg 2 = 2 - 4\sqrt{5} - 9\lg(3-\sqrt{5}) + \lg(\sqrt{5}+1) +$$

$$+ 8\lg 2.$$

Příklad 2. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^2}$. Substituce

$$\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} = t,\quad \frac{2x+1}{x+1} = t^3;\quad x = \frac{t^3-1}{2-t^3},\quad dx = \frac{3t^2\,dt}{(2-t^3)^2};$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2} = \int \frac{3t^3\,dt}{(t^3-1)^2} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{3(t-1)^2} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{t+1}{(t^2+t+1)^2} - \frac{t+3}{3(t^2+t+1)} \right) dt =$$

$$= -\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{3}\lg|t-1| - \frac{1}{6}\lg(t^2+t+1) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}};$$

do tohoto výsledku jest ještě místo t zavésti x podle rovnice $t = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}$. Doporučuji čtenáři, aby si všechny jednotlivosti tohoto příkladu propočetl.

Poznámka 3. Vyskytuje-li se v integrované funkci několik *různých* odmocnin $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s'}}, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s''}}, \ldots$ *téhož* výrazu $\frac{ax+b}{cx+f}$, položme číslo s rovno nejmenšímu společnému násobku čísel $s', s'', \ldots$; je zřejmo, že všechny uvedené odmocniny jsou mocninami výrazu $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}$, takže máme opět tvar, vyšetřovaný v tomto odstavci. Na př. budiž $I = \int \frac{x^2 + x\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{7}{4}} + \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{1\frac{1}{6}}}\,dx$;

nejmenší společný násobek čísel 3, 4, 6 je 12, takže lze psáti

$$I = \int \frac{x^2 + x\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{8}{12}}}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{21}{12}} + \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{22}{12}}}\,dx;$$

substituce $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{12}} = t$ převádí integrál I na integrál funkce racionální.

5. Integrály tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, kde $R(x,y)$ je racionální funkce. Především můžeme vyloučiti případ $a = 0$, který byl řešen již v předešlém odstavci (případ $a = b = 0$ vede dokonce přímo k integrálu racionální funkce). Nechť tedy je $a \neq 0$. Za druhé je možno vyloučiti případ, že mnohočlen $ax^2 + bx + c$ má *dvojnásobný* kořen, neboť potom je $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$; je-li $a < 0$, je $ax^2 + bx + c < 0$ pro všechna reálná $x \neq \alpha$ a tedy $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ nemá pro nás smyslu pro $x \neq \alpha$ (ježto připouštíme jen reálné hodnoty); je-li však $a > 0$, je $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,|x - \alpha|$ a dostáváme přímo integrál racionální funkce. Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $ax^2 + bx + c$ má dva různé kořeny α_1, α_2.

I. $a > 0$; v tomto případě zaveďme substituci $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,x + t$ (t. j. $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}\,x$). Umocněním dostaneme $ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,xt + t^2$, t. j. $bx + c = 2\sqrt{a}\,xt + t^2$, $x = \dfrac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\dfrac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t} + t = \dfrac{-\sqrt{a}\,t^2 + bt - \sqrt{a}\,c}{b - 2\sqrt{a}\,t}$, $dx = 2\dfrac{-\sqrt{a}\,t^2 + bt - \sqrt{a}\,c}{(b - 2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt$. Tedy x i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ jsou racionální funkce proměnné t a také dx má tvar $r(t)\,dt$, kde $r(t)$ je racionální funkce proměnné t.[28]) Tím je tedy předložený integrál převeden na integrál racionální funkce.

Příklad 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x - 1}}$; substituce $\sqrt{x^2 + x - 1} = x + t$, $x - 1 = 2xt + t^2$, $x = \dfrac{t^2 + 1}{1 - 2t}$, $dx = \dfrac{-2(t^2 - t - 1)}{(1 - 2t)^2}\,dt$,

$$\sqrt{x^2 + x - 1} = \frac{t^2 + 1}{1 - 2t} + t = \frac{-(t^2 - t - 1)}{1 - 2t}.$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x - 1}} = -2\int \frac{(t^2 - t - 1)\,dt}{(t^2 + 1 - t^2 + t + 1)(1 - 2t)} =$$

$$= \int \frac{(t^2 - t - 1)\,dt}{(t + 2)\left(t - \frac{1}{2}\right)} = \int \left(1 - \frac{2}{t + 2} - \frac{1}{2\left(t - \frac{1}{2}\right)}\right) dt =$$

---

[28]) Všimněte si podobnosti výrazů pro $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ a pro dx; bývá leckdy užitečná.

$$= t - 2\lg|t+2| - \frac{1}{2}\lg\left|t - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \sqrt{x^2 + x - 1} - x - 2\lg\left|\sqrt{x^2+x-1} - x + 2\right| -$$

$$- \frac{1}{2}\lg\left|\sqrt{x^2 + x - 1} - x - \frac{1}{2}\right|.$$

II. $a < 0$. Zde má pro nás význam jen ten případ, že kořeny α_1, α_2 jsou reálné[29]) (a ovšem různé, viz počátek tohoto odst.); nechť je označení tak voleno, že $\alpha_1 < \alpha_2$. Jest $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$; je-li $x > \alpha_2$, je též $x > \alpha_1$ a tedy $a(x - \alpha_1) \times (x - \alpha_2) < 0$ (ježto $a < 0$); rovněž pro $x < \alpha_1$ je též $x < \alpha_2$ a tedy $a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) < 0$. Hodnoty $x < \alpha_1$ a $x > \alpha_2$ nepřicházejí tedy pro nás v úvahu. Zbývají tedy hodnoty x intervalu $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$. Omezme se tedy na interval (α_1, α_2) (hodnoty $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, pokud by se vyskytly jako meze určitého integrálu, vyžadovaly by zvláštní malé úvahy). Je-li $\alpha_1 < x < \alpha_2$, je

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = (-a)(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x),$$

kde všichni tři činitelé jsou kladná čísla. Tedy

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x)} = \sqrt{-a(x-\alpha_1)^2\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} =$$

$$= \sqrt{-a}\,(x - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}};$$ náš integrál má tedy tvar

$$\int R\left(x, \sqrt{-a}\,(x - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}\right) \mathrm{d}x,$$

což je tvar vyšetřovaný v odst. 4 $\left(\text{substituce } \sqrt{\dfrac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} = t\right)$.

Příklad 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{5x + 2 + 3\sqrt{-x^2 + x + 2}}$. V intervalu $\langle 0,1\rangle$

---

[29]) Kdyby totiž mnohočlen $ax^2 + bx + c$ neměl reálných kořenů, měl by pro všechna (reálná) x totéž znamení; ježto pak pro dostatečně velká (reálná) x je $ax^2+bx+c = ax^2\left(1 + \dfrac{b}{ax} + \dfrac{c}{ax^2}\right) < 0$, bylo by $ax^2 + bx + c < 0$ pro všechna reálná x a tedy by neexistovala reálná odmocnina $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

je $\sqrt{-x^2+x+2} = \sqrt{-(x+1)(x-2)} = \sqrt{(x+1)(2-x)} =$
$= (x+1)\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$.

$\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}} = t$, $\dfrac{2-x}{x+1} = t^2$, $x = \dfrac{2-t^2}{t^2+1}$, $x+1 = \dfrac{3}{t^2+1}$, $dx =$
$$= -\frac{6t\,dt}{(t^2+1)^2}:$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{5x+2+3\sqrt{-x^2+x+2}} = \int_0^1 \frac{dx}{5x+2+3(x+1)\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}}$$

$$= -\int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{6t\,dt}{(12-3t^2+9t)(1+t^2)} = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t\,dt}{(t^2-3t-4)(1+t^2)} =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{5(t+1)} + \frac{8}{85(t-4)} - \frac{5t+3}{17(t^2+1)}\right) dt =$$

$$= \frac{8}{85} \lg \frac{4\sqrt{2}-1}{4-\sqrt{2}} - \frac{3}{34}\pi + \frac{6}{17} \operatorname{arctg} \sqrt{2}.^{30)}$$

6. Integrály tvaru $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, kde $R(u, v)$ je racionální funkce. Zde vede k cíli substituce $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = t$; odtud $\cos^2 \frac{1}{2}x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{1+t^2}$; $\cos x = \cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x =$ $= 2\cos^2 \frac{1}{2}x - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x =$ $= 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \cdot \cos^2 \frac{1}{2}x = 2t \cdot \dfrac{1}{1+t^2}$. Konečně $\dfrac{\frac{1}{2}\,dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = dt$, $dx =$ $= 2\cos^2 \frac{1}{2}x\,dt = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$. Tedy máme dohromady vzorce $\cos x =$

[30]) Doporučuji, aby si čtenář podrobně vše vypočítal; užívám toho, že $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

$= \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1 + t^2}$; integrál předložený přejde touto substitucí zřejmě v integrál racionální funkce.

Příklad 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 + t^2 - 2t}{1 + t^2 + 1 - t^2} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1 + t^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1 + t^2 - 2t}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = [t - \lg(t^2 + 1)]_0^1 = 1 - \lg 2.$$

7. Integrály tvaru $\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u. O konstantě α předpokládejme, že je různá od nuly (jinak by bylo ihned $\int R(e^0)\,\mathrm{d}x = \int R(1)\,\mathrm{d}x = R(1).x$). Zaveďme $e^{\alpha x} = t$, $x = \dfrac{1}{\alpha}\lg t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ a vidíme, že daný integrál je převeden na $\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int R(t)\,\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$, což je integrál racionální funkce.

Příklad 1.

$$I = \int \frac{e^{\frac{1}{2}\pi x} - e^{\frac{1}{3}\pi x}}{e^{\frac{1}{3}\pi x} + 1}\,\mathrm{d}x;$$

integrovaná funkce je racionální funkcí výrazu $e^{\frac{1}{6}\pi x} = t$, neboť $e^{\frac{1}{3}\pi x} = t^2$, $e^{\frac{1}{2}\pi x} = t^3$; $\dfrac{\pi}{6}\,e^{\frac{1}{6}\pi x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže

$$I = \frac{6}{\pi}\int \frac{t^3 - t^2}{t^2 + 1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{6}{\pi}\int \frac{t^2 - t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{6}{\pi}\int \left(1 - \frac{t + 1}{t^2 + 1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(t - \tfrac{1}{2}\lg(t^2 + 1) - \operatorname{arctg} t\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(e^{\frac{1}{6}\pi x} - \tfrac{1}{2}\lg\left(e^{\frac{1}{3}\pi x} + 1\right) - \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{6}\pi x}\right).$$

Poznámka. Na př. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{\alpha\sqrt{2}x} + e^{\alpha x}}$ $(\alpha \neq 0)$ *nelze* takto počítati, ježto, položíte-li $e^{\beta x} = t$, bude $e^{\alpha x} = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$, $e^{\alpha\sqrt{2}x} = t^{\frac{\alpha\sqrt{2}}{\beta}}$, a není možno voliti β tak, aby oba mocnitelé $\frac{\alpha}{\beta}$ i $\frac{\alpha\sqrt{2}}{\beta}$ byla celá čísla (ježto jejich podíl je iracionální číslo $\sqrt{2}$).

8. **Integrály tvaru $\int R(\lg x)\frac{dx}{x}$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u.** Substituce $\lg x = t$, $\frac{dx}{x} = dt$ převádí předložený integrál ihned na $\int R(t)\,dt$, což je integrál funkce racionální.

Příklad 1. $I = \int \frac{1}{\lg^2 x - 1}\cdot\frac{dx}{x}$. Substituce $\lg x = t$ dává

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = $$
$$= \frac{1}{2}\lg\left|\frac{\lg x - 1}{\lg x + 1}\right|.$$

Poznámka. Jednotlivé odstavce této kapitoly bylo by možno ještě různým způsobem doplniti; odkazuji v této věci na Petrův Počet integrální. Tak na př. integrály, vyšetřované v odst. 5, je možno počítati ještě jinou, často výhodnější metodou, jež je vyložena v Petrově knize na str. 70—77 (cituji podle 2. vyd.). Také použití komplexních funkcí, po př. komplexní proměnné usnadní nám často výpočet, jak jsem se o tom již zmínil v pozn. [2]) na str. 109. Při této příležitosti upozorňuji ještě na zvláště výhodnou metodu pro rozklad racionální funkce v částečné zlomky, jež je vyložena v Petrově knize na str. 19—21.

CVIČENÍ.[31])

A) K odst. 3.

1. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}$.

2. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x^2 + 2x - 2)^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12\sqrt{3}}\lg(2 + \sqrt{3})$.

3. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = -\frac{2x-1}{2(x-1)^2}$ (výhodnější než metoda odst. 3 je zde substituce $x-1=t$).

4. V odst. 3, příkl. 2 jsme vypočetli $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$. Vypočtěte

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2,$$

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\lg\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)).$$

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{4}\lg(x^4+1).$$

První a třetí integrál nebudete ovšem počítati metodou odst. 3, nýbrž jednoduššeji vhodnou substitucí.

5. Počítáte-li první integrál předešlého cvičení metodou odst. 3, dostanete

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1));$$

tedy je v intervalu $(-\infty, \infty)$

$$\operatorname{arctg} x^2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + C; \qquad (30)$$

dosazením $x=0$ dostanete $C=\frac{1}{2}\pi$. Dokažte vzorec (30) (s hodnotou $C=\frac{1}{2}\pi$) přímo z definice funkce $\operatorname{arctg} x$.[32])

6. Pro výraz, který se vyskytuje v druhém integrálu cvičení 4, odvoďte obdobně rovnici

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} + C,$$

platnou v každém z intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. Při tom C je v každém z těchto intervalů konstanta, ale v každém z nich jiná (její hodnoty dostanete tím, že položíte předně $x=0$ a že za druhé necháte x vzrůstati do $+\infty$ a klesati do $-\infty$).

7. $\int \frac{x^2+x-1}{(x^2-1)(x+2)(x^2-5)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{24}\lg|x-1| -$

[31]) Při neurčitých integrálech nechť čtenář sám uváží, ve kterých intervalech uvedené výsledky platí.

[32]) Při této úloze a podobných úlohách postupujeme asi takto: buďte a, b dvě reálná čísla; položme $\alpha = \operatorname{arctg} a$, $\beta = \operatorname{arctg} b$; tedy $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$; tedy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{a+b}{1-ab}$ (není-li $ab=1$); odtud pak plyne, že $\alpha+\beta = \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab} + k\pi$, kde k je celé číslo.

$-\frac{1}{8}\lg|x+1| - \frac{1}{3}\lg|x+2| + \frac{1}{40}(10-3\sqrt{5})\lg|x-\sqrt{5}| +$
$+\frac{1}{40}(10+3\sqrt{5})\lg|x+\sqrt{5}|$.

8. $$\int\frac{x^4\,dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{1}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{16}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{x}{4(x^4-1)}.$$

9. $$\int_0^1\frac{dx}{(x^2+x+2)(x+1)} = \frac{1}{4}\lg 2 + \frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}\right);$$ dokažte, že poslední závorka má hodnotu $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{5}$.

10. $$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-2x^2)\,dx}{x^6+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lg(2+\sqrt{3}).$$

Návod: je $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$; metodou neurčitých součinitelů nebo přímo řešením rovnice $x^4-x^2+1=0$ najdete rozklad $x^4-x^2+1=(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$.

B) K odst. 4.

11. $$\int\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,dx = \lg(1-\sqrt{1-x^2}) + \sqrt{1-x^2}$$ (čitatel i jmenovatel dělíme $\sqrt{1-x}$).

12. $$\int_1^2 x\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\,dx = -\frac{3}{2}+\frac{15}{8}\lg 3.$$

13. $$\int_0^3\frac{x^2\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{59}{10}+\frac{7-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\lg\frac{5+\sqrt{5}}{2} - \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\lg\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

14. Položíme-li $\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}=t$, je
$$\int\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int\frac{2nt^n\,dt}{(1-t^n)^2}$$
(pro $n=4$ jsme poslední integrál vypočetli v cvičení 8).

C) K odst. 5.

15. Je-li $a>0$, je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}|.$$

16. Budiž $a < 0$; rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nechť má reálné kořeny α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$); tedy

$$\alpha_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \alpha_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{neboť } a < 0).$$

Potom je v intervalu (α_1, α_2)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}.$$

17. Nechť platí předpoklady cvič. 16; potom lze předložený integrál počítati též jinak. Je totiž

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = -a\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right);$$

zavedeme-li substituci

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} t,$$

dostaneme v int. (α_1, α_2)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

18. Podle cvič. 16 a 17 je v int. (α_1, α_2)

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} = \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C,$$

kde C je konstanta. Položíme-li $\dfrac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \lambda$ a použijeme-li výrazů pro α_1, α_2, přejde tato rovnice v rovnici

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}} = \arcsin \lambda + C.$$

Dokažte tento vzorec (pro $-1 < \lambda < 1$) přímo z definice funkcí $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, při čemž zjistíte, že $C = \frac{1}{2}\pi$.

19. $$\int_0^1 \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{1 + x} \mathrm{d}x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lg 2 - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \lg (\sqrt{2} - 1).$$

20. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}\,dx = \pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-1.$

21. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}-1+\frac{1}{2}\lg\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}.$

22. V případě $a > 0$ užili jsme substituce $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ (t. j. $t = \sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x$); se stejným úspěchem možno též užíti substituce $\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x + t$, t. j. $t = \sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$. Vyjde

$$x = \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t},\quad dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{(b+2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{b+2\sqrt{a}t}.$$

Vzorce jsou tedy zcela obdobné jako při dřívější substituci; snad jsou o něco příjemnější tím, že se v nich méně často vyskytuje znamení minus. Vypočtěte tímto způsobem znova cvič. 15 a 19.

23. Metody, které jsme užili v případě $a < 0$, lze užíti i pro $a > 0$, jsou-li kořeny mnohočlenu ax^2+bx+c reálné a různé. Budiž tedy $ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, kde $a > 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$. Zajímají nás pouze ty intervaly, kde $ax^2+bx+c > 0$. Omezme se tedy na intervaly $(-\infty, \alpha_1)$, $(\alpha_2, +\infty)$. Potom bude

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,.\,|x-\alpha_1|\sqrt{\frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}};$$

tím dostáváme z integrálu $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ integrál typu, vyšetřovaného v odst. 4 — provedeme tedy substituci $\sqrt{\dfrac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}} = t$. Ale nutno dáti pozor na to, že v intervalu $(\alpha_2, +\infty)$ je $|x-\alpha_1| = x-\alpha_1$, v intervalu $(-\infty, \alpha_1)$ však $|x-\alpha_1| = \alpha_1 - x$.

24. Způsobem uvedeným v cvič. 23 vypočtěte ještě jednou integrál z cvič. 21.

25. Způsobem uvedeným v cvič. 23 vypočtěte

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} = \sqrt{x^2+3x+2} \mp 3\lg\left(\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x+2|}\right);$$

při tom horní znamení platí v intervalu $(-1, +\infty)$, dolní v intervalu $(-\infty, -2)$. (Při výpočtu je stále nutno pečlivě dbáti znamének; pro $x > -1$ je $|x+1| = x+1$, $|x+2| = x+2$, kdežto pro $x < -2$ je $|x+1| = -x-1$, $|x+2| = -x-2$.)

26. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 + 2 \sin x}{\sin x + 3 \cos x + 3} dx = \frac{1}{5} \lg 6 + \frac{1}{10}\pi.$

27. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx = 1 + \lg 2.$

28. Integrál z cvičení 27 vypočtete rychleji, užijete-li vzorců $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

29. Buďiž aspoň jedno ze tří čísel a, b, c různé od nuly. Potom dostáváme pro integrál

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$$

tyto výsledky, je-li $c \neq a$:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \lg \left| \frac{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \right|,$$

je-li $a^2 + b^2 > c^2$;

$$\frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}},$$

je-li $a^2 + b^2 < c^2$;

$$\frac{2}{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b},$$

je-li $a^2 + b^2 = c^2$.

Je-li však $c = a$, dostáváme

$$\frac{1}{b} \lg | a + b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x | \text{ pro } b \neq 0; \qquad \frac{1}{a} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x \text{ pro } b = 0.$$

30. V některých případech lze integrály tvaru $\int R(\cos x, \sin x) dx$ počítati jednodušeji než substitucí $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$; některé důležité případy toho druhu jsme probrali v kap. III, cvičení 8—13. Všimněme si ještě jednoho případu. Buďte $P(u, v)$, $Q(u, v)$ dva mnohočleny, jejichž členy jsou buď všechny lichého nebo všechny sudého stupně[33]); položme $R(u, v) = P(u, v) : Q(u, v)$. Příklady:

$$R(u, v) = \frac{1 + 2u^2 + uv - v^4}{v^2 + uv}$$

nebo

$$R(u, v) = \frac{u + v^3 + uv^2}{v^5 + u^2 v}.$$

[33]) Stupněm členu $au^m v^n$ nazýváme číslo $m + n$.

V tomto případě vede při výpočtu integrálu $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ k cíli substituce $\operatorname{tg} x = t$. Neboť je potom $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$,[34] $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, takže

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{P\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)}{Q\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)}\frac{dt}{1+t^2};$$

z předpokladů o mnohočlenech P, Q pak plyne, že se odmocnina $\pm\sqrt{1+t^2}$ (po eventuelním krácení) vyskytne pouze se sudým mocnitelem; t. j. znamení $\sqrt{}$ vypadne a integrál předložený je tím převeden na integrál racionální funkce. Následující příklady 31–35 řeší se touto substitucí $\operatorname{tg} x = t$.

31. Položíme-li $\operatorname{tg} x = t$, je

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x} = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}.$$

32. $$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x} = \operatorname{arctg} 2 - \tfrac{1}{4}\pi.$$

33. $$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x} = \lg \tfrac{4}{3}.$$

34. $$\int \frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x + 2\sin x}\,dx = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}\lg|1 + 2\operatorname{tg} x| - \tfrac{3}{10}\lg(1 + \operatorname{tg}^2 x).$$

35. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Zde je nutno dáti dobrý pozor! Dosadíte-li bezmyšlenkovitě $\operatorname{tg} x = t$, máte pro $x = 0$ i pro $x = \pi$ hodnotu $t = 0$, takže byste dostali $\int_0^0 \frac{dt}{4+t^2} = 0$. Postup byl ovšem nesprávný, ježto substituce $\operatorname{tg} x = t$ nesmíme použíti v žádném intervalu, obsahujícím bod $x = \frac{1}{2}\pi$. Vypočteme tedy na př. napřed $\int_0^b \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$ pro $0 < b < \frac{1}{2}\pi$;

---

[34]) Buďto platí v obou vzorcích znamení +, nebo v obou znamení —; neboť $\sin x : \cos x = t$.

ježto určitý integrál je spojitou funkcí své horní meze, dostanete potom $\int\limits_0^{\frac12\pi} = \lim\limits_{b\to\frac12\pi-} \int\limits_0^b$; podobně byste mohli vypočísti $\int\limits_{\frac12\pi}^{\pi}$; ale raději užijeme vztahu

$$\int\limits_0^{\frac12\pi} \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int\limits_{\frac12\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+3\cos^2 x},$$

který dostaneme, použijeme-li na levé straně substituce $\pi - x = t$.

E) K odst. 7.

36. Pro $\alpha \neq 0$ je

$$\int \frac{dx}{e^{2\alpha x}+e^{\alpha x}+1} = x - \frac{1}{2\alpha}\lg(e^{2\alpha x}+e^{\alpha x}+1) - \frac{1}{\alpha\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2e^{\alpha x}+1}{\sqrt{3}}.$$

37. Budiž $R(u, v)$ racionální funkce; budiž $\alpha \neq 0$, $n > 1$ (n celé). Potom lze integrály

$$\int R\left(e^{\alpha x}, \left(\frac{ae^{\alpha x}+b}{ce^{\alpha x}+f}\right)^{\frac1n}\right) dx,$$

$$\int R(e^{\alpha x}, \sqrt{ae^{2\alpha x}+be^{\alpha x}+c})\, dx$$

převésti na integrály funkcí racionálních. Substitucí $e^{\alpha x} = t$ převádějí se tyto integrály na integrály

$$\frac{1}{\alpha}\int R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{\frac1n}\right)\frac{dt}{t}, \quad \frac{1}{\alpha}\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})\,\frac{dt}{t},$$

jež patří k typům, vyšetřovaným v odst. 4 a 5.

38. $$\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} = \lg\frac{2e+1+2\sqrt{e^2+e+1}}{3+2\sqrt{3}}.$$

39. $$\int\sqrt{e^x+1}\,dx = 2\sqrt{e^x+1} + 2\lg\left(\sqrt{e^x+1}-1\right) - x.$$

F) K odst. 8.

40. $$\int\frac{1}{\lg^2 x+\lg x-2}\,\frac{dx}{x} = \tfrac13\lg\left|\frac{\lg x-1}{\lg x+2}\right|.$$

41. Obdobně jako ve cvič. 37 dají se počítati integrály ($n > 1$, celé)

$$\int R\left(\lg x, \left(\frac{a\lg x+b}{c\lg x+f}\right)^{\frac1n}\right)\frac{dx}{x}, \quad \int R(\lg x, \sqrt{a\lg^2 x+b\lg x+c})\,\frac{dx}{x},$$

kde $R(u, v)$ je racionální funkce.

$$42. \int \frac{1}{\lg x + \sqrt{\lg x + 1}} \frac{dx}{x}$$
$$= \lg |\lg x + \sqrt{\lg x + 1}| - \frac{1}{\sqrt{5}} \lg \left| \frac{2\sqrt{\lg x + 1} + 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{\lg x + 1} + 1 + \sqrt{5}} \right|.$$

KAPITOLA V.

Obsah rovinných oborů a délka rovinné křivky.

1. Obsah rovinných oborů. V kap. II, odst. 1 provedli jsme malou orientační úvahu (ovšem nikterak průkaznou!) o „plošné velikosti" jistých rovinných oborů. Věty, odvozené v kap. II, dovolují nám nyní formulovati tyto úvahy přesněji a dospěti tak k vhodné definici „plošné velikosti" nebo kratčeji „obsahu" těchto oborů. Z elementární geometrie znáte obsah trojúhelníka a obsah oněch útvarů, jež se dají složiti z konečného počtu trojúhelníků, t. j. obsah mnohoúhelníků. Na př. obsah obdélníka rovná se součinu ze základny a výšky. Naším cílem jest nyní, tuto definici vhodně zobecniti na obory, o nichž jsme mluvili v kap. II, odst. 1. Budeme vyšetřovati rovinné obory (t. j. množiny bodů v rovině) tohoto tvaru: dána jsou dvě čísla a, b ($a < b$) a funkce $f(x)$, spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b \rangle$.[1])

Tím je definována určitá množina bodů v rovině, totiž množina všech bodů $[x, y]$, pro něž je $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ (na obr. 5 je tato množina šrafována). Tuto množinu (jež závisí na a, na b a na tvaru funkce $f(x)$) označme znakem $M(a, b, f(x))$.[2]) Budeme se nyní snažiti přiřaditi *každé* takové množině $M(a, b, f(x))$ jisté číslo $P(a, b, f(x))$[3]), [které nazveme „obsahem" množiny $M(a, b, f(x))$] tak, aby byly splněny tyto čtyři požadavky:

---

[1]) T. j.: je-li $a \leqq x \leqq b$, je $f(x) \geqq 0$ (názorně: všechny body „čáry" $y = f(x)$ leží nad osou x nebo na ní; žádný bod neleží pod osou x. V kap. II, odst. 1 jsme pro větší jednoduchost požadovali $f(x) > 0$; nyní připouštíme i $f(x) = 0$).

[2]) Na př. $M(1, 3, x^2)$ je množina, omezená „dole" osou x, „vlevo" přímkou $x = 1$, „vpravo" přímkou $x = 3$ a „nahoře" parabolou $y = x^2$.

[3]) Toto číslo závisí ovšem na množině $M(a, b, f(x))$, t. j. na číslech a, b a na tvaru funkce $f(x)$.

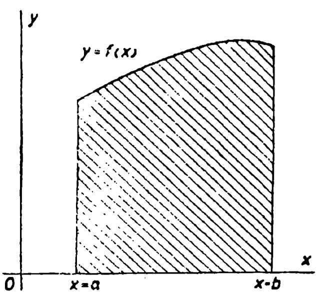
I. Vždy je $P(a, b, f(x)) \geqq 0$ (slovo „vždy" znamená ovšem: pro každou dvojici čísel $a < b$ a pro každou funkci $f(x)$, spojitou a nezápornou v int. $\langle a, b \rangle$).

II. Je-li $a < c < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b \rangle$, je

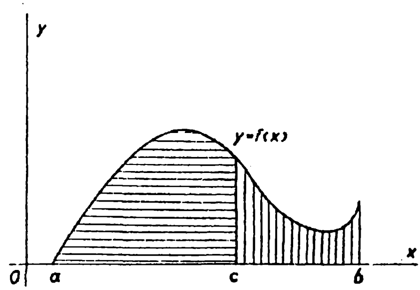
$$P(a, b, f(x)) = P(a, c, f(x)) + P(c, b, f(x)).$$

(Názorný význam je jasný: viz obr. 6, kde $P(a, b, f(x))$ je číslo, přiřazené celé šrafované množině, kdežto $P(a, c, f(x))$ resp. $P(c, b, f(x))$ jsou čísla, přiřazená množině vodorovně resp. svisle šrafované.) Indukcí plyne ovšem z požadavku II okamžitě: je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b \rangle$, a je-li $a =$

$$= x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \text{ je } P(a, b, f(x)) = \sum_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i, f(x)).$$



Obr. 5.



Obr. 6.

III. Jsou-li

$$M(a, b, f(x)), \tag{1}$$
$$M(\alpha, \beta, \varphi(x)) \tag{2}$$

dvě množiny vyšetřovaného typu a je-li množina (2) částí množiny (1),[4] je $P(\alpha, \beta, \varphi(x)) \leqq P(a, b, f(x))$.[5] Všimněme si, kdy množina (2) je částí množiny (1). Předně musí býti $\alpha \geqq a$; neboť kdyby bylo $\alpha < a$, patřil by bod $[\alpha, 0]$ k množině (2), ale nepatřil by k množině (1); z podobného důvodu musí býti $\beta \leqq b$. Konečně pro $\alpha \leqq x \leqq \beta$ musí býti $\varphi(x) \leqq f(x)$; neboť kdyby pro nějaké x intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ bylo $\varphi(x) > f(x)$, patřil by bod $[x, \varphi(x)]$ k množině (2), ale nepatřil by k množině (1).

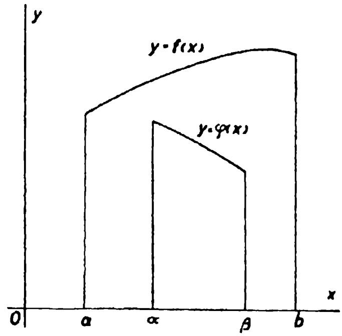
---

[4]) Říkáme, že množina M_2 je částí množiny M_1, jestliže každý prvek množiny M_2 je prvkem množiny M_1.

[5]) Zkrátka: „části" není nikdy přiřazeno číslo větší než „celku".

Naopak, jsou-li tyto podmínky splněny, t. j. je-li $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ a je-li $\varphi(x) \leqq f(x)$ pro každé x intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, je množina (2) částí množiny (1) (t. j. je-li $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $0 \leqq y \leqq \varphi(x)$, je tím spíše $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$). (Viz obr. 7.)

IV. Je-li množina $M(a, b, f(x))$ obdélník o stranách z, v, je $P(a, b, f(x)) = zv$ (t. j. číslo $P(a, b, f(x))$ rovná se obsahu obdélníka, počítanému podle definice, známé z elementární geometrie.) Kdy je množina $M(a, b, f(x))$ obdélník? Tehdy, je-li funkce $f(x)$ rovna



Obr. 7.

v intervalu $\langle a, b\rangle$ kladné konstantě v. Požadavek IV lze vysloviti tedy také takto: Je-li $a < b$, $v > 0$, je

$$M(a, b, v) = (b - a)\, v. \tag{3}$$

Poznamenejme ještě toto: jsou-li splněny požadavky I, III, IV, platí (3) i pro $v = 0$. Neboť, je-li ε libovolné kladné číslo, je množina $M(a, b, 0)$[6]) částí oboru $M(a, b, \varepsilon)$ a tedy podle I, III, IV je $0 \leqq M(a, b, 0) \leqq M(a, b, \varepsilon) = (b - a)\,\varepsilon$. Ježto nerovnost $M(a, b, 0) \leqq \varepsilon\,(b - a)$ platí pro každé kladné ε, nemůže číslo $M(a, b, 0)$ býti kladné, t. j. je $M(a, b, 0) = 0 = (b - a)\,.\,0$, t. j. vzorec (3) platí i pro $v = 0$.

Ukážeme nyní především toto: je-li vůbec možno každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu přiřaditi číslo $P(a, b, f(x))$ tak, aby byly splněny požadavky I, II, III, IV, je to možno *jen jedním* způsobem a sice tak, že položíme

$$P(a, b, f(x)) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{4}$$

---

[6]) Tato množina je množina všech bodů $[x, 0]$ na ose x, pro něž je $a \leqq x \leqq b$.

Důkaz. Předpokládejme, že každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu je přiřazeno číslo $P(a, b, f(x))$ tak, že jsou splněny požadavky I, II, III, IV. Buďte a, b dvě libovolná čísla taková, že $a < b$ a budiž $f(x)$ libovolná funkce spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Znakem m_i označme nejmenší hodnotu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (t. j. dolní hranici funkce $f(x)$ v tomto intervalu), znakem M_i označme největší hodnotu (t. j. horní hranici) funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$[7]); pišme konečně $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Podle požadavku II je

$$P(a, b, f(x)) = \sum_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i, f(x)). \tag{5}$$

V intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je $0 \leqq m_i \leqq f(x) \leqq M_i$; tedy množina $P(x_{i-1}, x_i, m_i)$ (to jest obdélník o výšce m_i) je částí množiny $P(x_{i-1}, x_i, f(x))$ a množina $P(x_{i-1}, x_i, f(x))$ je částí množiny $P(x_{i-1}, x_i, M_i)$. Podle požadavku III je tedy $P(x_{i-1}, x_i, m_i) \leqq$ $\leqq P(x_{i-1}, x_i, f(x)) \leqq P(x_{i-1}, x_i, M_i)$. Ale podle rovnice (3) (jež plyne z požadavků I, III, IV pro $v \geqq 0$) je

$$P(x_{i-1}, x_i, m_i) = m_i \Delta x_i, \quad P(x_{i-1}, x_i, M_i) = M_i \Delta x_i;$$

tedy

$$m_i \Delta x_i \leqq P(x_{i-1}, x_i, f(x)) \leqq M_i \Delta x_i.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro $i = 1, 2, \ldots, n$, dostáváme podle (5) nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqq P(a, b, f(x)) \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Platí však

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = s(D), \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S(D),$$

kde $s(D)$, $S(D)$ znamená dolní a horní součet, příslušný k rozdělení D.[8]) Pro každé rozdělení D platí tedy nerovnost

$$s(D) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq S(D). \tag{6}$$

Budiž nyní D_m ono rozdělení, jímž se interval $\langle a, b\rangle$ dělí na m

[7]) Tato nejmenší a největší hodnota existuje podle věty 15.
[8]) Užívám zde i v násl. odstavci označení kap. II odst. 2.

stejných dílů (tedy $x_i = a + \frac{i}{m}(b-a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, m$). Je tedy[9]) $\varrho(D_m) = \frac{1}{m}(b-a)$ a tedy $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Podle vět 27, 29 je

$$\lim_{m\to\infty} s(D_m) = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\,dx.^{10)}$$

Podle (6) je však pro každé m

$$s(D_m) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq S(D_m)$$

a tedy též

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} s(D_m) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\,dx;$$

tedy skutečně platí rovnice (4).

Je tedy skutečně *nejvýše* jedna možnost, jak uspokojiti podmínky I, II, III, IV a to ta, že definujeme $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4). A nyní ještě ukážeme: definujeme-li $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4), jsou požadavky I, II, III, IV splněny.

Vskutku, je-li $a < b$ a je-li $f(x)$ funkce spojitá a nezáporná v int. $\langle a, b\rangle$, je předně $\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$ (viz větu 36); je-li ještě $a < c < b$, je $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$; je-li $a < b$, $v > 0$, je $\int_a^b v\,dx = v(b-a)$, takže požadavky I, II, IV jsou splněny. Budiž nyní $a < b$, $\alpha < \beta$, budiž $f(x)$ funkce spojitá a nezáporná v int. $\langle a, b\rangle$ a budiž funkce $\varphi(x)$ spojitá a nezáporná v int. $\langle \alpha, \beta\rangle$. Budiž konečně množina $M(\alpha, \beta, \varphi(x))$ částí množiny $M(a, b, f(x))$. Potom, jak víme, je $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ a v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ je stále $\varphi(x) \leqq f(x)$. Tedy je

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx \geqq 0,^{11)} \quad \int_\beta^b f(x)\,dx \geqq 0, \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqq \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

---

[9]) Užívám označení $\varrho(D)$, zavedeného v kap. II, odst. 3.

[10]) Horní integrál (z věty 27) a dolní integrál (z věty 29) mohu totiž nahraditi prostě integrálem, ježto spojitá funkce $f(x)$ má podle věty 47 integrál od a do b.

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \geqq$$

$$\geqq 0 + \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx + 0 = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

a tedy je splněn též požadavek III.

Tedy celkem vidíme: vskutku je možno *jedním a jen jedním způsobem* přiřaditi každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu číslo $P(a, b, f(x))$ tak, že jsou splněny požadavky I až IV, a to tak, že definujeme $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4).

Číslo $\int_a^b f(x)\,dx$ nazýváme proto *obsahem* nebo také *měrou* množiny $M(a, b, f(x))$.

Poznámka 1. Vyšetřovali jsme jenom množiny $M(a, b, f(x))$ velmi specielního typu; mohli bychom sice rozšířiti předešlé úvahy na množiny poněkud obecnější, upouštím však od toho. Neboť k obecné teorii míry, vyhovující všem požadavkům, které analysa na ni klade, bychom takto nedospěli. Takovou obecnou a zcela vyhovující teorii míry podal Lebesgue a český čtenář může se o této teorii velmi důkladně poučiti z citované knihy Čechovy.

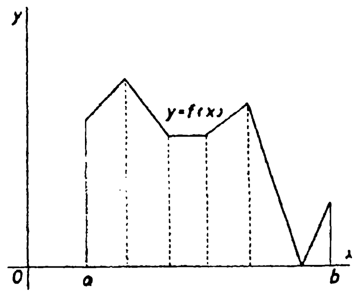
Poznámka 2. Jestliže „čára" $y = f(x)$ se v intervalu $\langle a, b\rangle$ skládá z konečného počtu úseček, t. j. jestliže interval $\langle a, b\rangle$ lze rozděliti na konečný počet částečných intervalů tak, že v každém částečném intervalu je funkce $f(x)$ lineární (viz obr. 8), je množina $M(a, b, f(x))$ mnohoúhelníkem a pro obsah této množiny máme *dvě* definice: jednak definici, známou z elementární geometrie, jednak definici podle vzorce (4). Ukážeme, že obě tyto definice dávají stejný výsledek. Ježto obsah množiny takové, jaká je nakreslena na obr. 8, se počítá podle obou definic jako součet obsahů lichoběžníků[12]) na obr. 8 vyznačených, stačí dokázati, že obsah každého takového lichoběžníka, počítaný podle elementární definice (t. j. poloviční součet základen, násobený výškou) se rovná obsahu, počítanému podle vzorce (4). Budiž tedy $a < b$ a v intervalu $\langle a, b\rangle$ budiž $f(x) = kx + q \geqq 0$; množina $M(a, b, f(x))$ je lichoběžník o základnách $f(a) = ka + q$,

[11]) To platí — se znamením rovnosti — i pro $a = \alpha$.

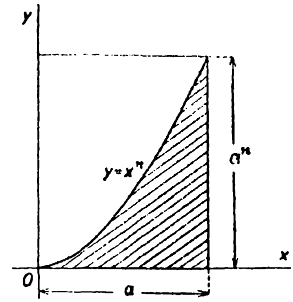
[12]) Tyto lichoběžníky mohou přejíti ovšem též v obdélníky nebo trojúhelníky.

$f(b) = kb + q$ a o výšce $b - a$. Jeho obsah podle elementární definice je $(b - a)(\frac{1}{2}k(a + b) + q) = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2) + q(b - a)$, podle naší nové definice je jeho obsah $\int_a^b (kx + q)\,dx = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2) + q(b - a)$, čímž souhlas obou výsledků dokázán.

Příklad 1. Obsah množiny šrafované na obr. 9 ($f(x) = x^n$, $n > 0$, $a > 0$) je[13])



Obr. 8.



Obr. 9.

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1} = \frac{1}{n+1}a \,.\, a^n$$

(všimněte si, že $a \,.\, a^n$ je obsah obdélníka o základně a a výšce a^n).

Příklad 2. Obsah množiny šrafované na obr. 10 ($f(x) = \sin x$) je

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

2. **Délka rovinné křivky.** Nechť $f(x)$ je funkce, která má v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci $f'(x)$ (v bodě a rozumím slovem „derivace" a znakem f' derivaci zprava, v bodě b zleva); funkce $f(x)$ je tedy spojitá v int. $\langle a, b\rangle$ (viz obdobnou úvahu v pozn. [17]) na str. 97). Množinu všech bodů $[x, f(x)]$, kde x probíhá všechny hodnoty intervalu $\langle a, b\rangle$, označme písmenem C a budeme ji nazývati „křivkou".[14]) Z analytické geometrie

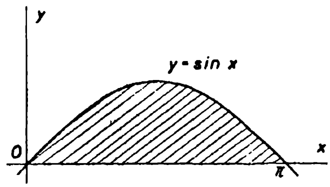
[13]) Viz pozn. [4]) na str. 81—82.

víte, jak se počítá délka úsečky; naším cílem bude pak v tomto odstavci, definovati vhodným způsobem délku křivky C.

Sestrojme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ $(n \geq 1)$[15]; sestrojme body

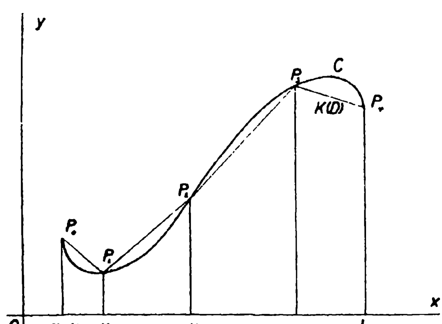
$$[x_0, f(x_0)] = P_0,\ [x_1, f(x_1)] = P_1, \ldots, [x_n, f(x_n)] = P_n;$$

znakem $K(D)$ označme lomenou čáru, sestrojenou z úseček $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$ (viz obr. 11) a znakem $L(D)$ označme „délku"



Obr. 10.

lomené čáry $K(D)$, t. j. součet délek úseček $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$. Tímto způsobem je každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přiřazeno určité kladné číslo $L(D)$. Množina všech těchto čísel $L(D)$



Obr. 11.

[14]) Slovem „křivka" se označují také množiny mnohem obecnější; ale těmito věcmi se zde nebudu zabývati. Názorný význam „křivky" C je jasný: ke každé hodnotě x intervalu $\langle a, b\rangle$ sestrojím bod $[x, y]$, jehož pořadnice je dána rovnicí $y = f(x)$; C je pak množina všech těchto bodů.

[15]) Užívám zde podobného označení jako v kap. II, odst. 2 a 3.

(příslušných ke všem možným rozdělením D intervalu $\langle a, b\rangle$) je — jak za okamžik ukážeme — shora ohraničená a má tedy jistou horní hranici L a toto číslo L nazveme „délkou křivky C". Tím je tedy délka křivky C definována — musíme jenom ukázati, že čísla $L(D)$ tvoří množinu shora ohraničenou. Úsečka $\overline{P_{i-1}P_i}$ spojuje bod $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ s bodem $[x_i, f(x_i)]$; její délka je tedy rovna číslu

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}, \tag{7}$$

takže

$$L(D) = l_1 + l_2 + \ldots + l_n. \tag{8}$$

Funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivaci: podle věty o střední hodnotě (věta 18) existuje tedy číslo ξ_i tak, že je

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}), \qquad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

(ba dokonce $x_{i-1} < \xi_i < x_i$). Píšeme-li ještě $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, máme podle (7)

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\xi_i)\,\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i. \tag{9}$$

Funkce $f'(x)$, jsouc spojitá v int. $\langle a, b\rangle$, je v něm též ohraničena (věta 16) a existuje tedy kladné číslo M tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|f'(x)| < M$ a tedy je $l_i < \sqrt{1 + M^2}\,\Delta x_i$ a tedy (podle (8))

$$L(D) = l_1 + l_2 + \ldots + l_n < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + M^2}\,\Delta x_i = \sqrt{1 + M^2} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$
$$= (b - a)\sqrt{1 + M^2}.$$

Všechna čísla $L(D)$ jsou tedy menší než číslo $(b - a)\sqrt{1 + M^2}$ a tedy množina všech čísel $L(D)$ je shora ohraničena a tedy její horní hranice L existuje. Dokážeme nyní, že platí vzorec

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{10}$$

Především integrál vpravo existuje, neboť podle věty C na str. 23 je funkce $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.[16]) Označme tuto funkci znakem $g(x)$, t. j. $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

[16]) Funkce $1 + (f'(x))^2$ je totiž spojitá v int. $\langle a, b\rangle$ a její hodnoty leží vesměs v intervalu $\langle 1, 1 + M^2\rangle$; funkce $u^{\frac{1}{2}}$ je pak spojitá v int. $\langle 1, 1 + M^2\rangle$; tedy podle citované věty C je funkce $(1 + (f'(x))^2)^{\frac{1}{2}}$ spojitá v int. $\langle a, b\rangle$.

Podle vzorce (9) je $l_i = g(\xi_i)\,\Delta x_i$ a tedy podle (8)

$$L(D) = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i).$$

Ježto funkce $g(x)$ má určitý integrál od a do b, můžeme užíti věty 31 a dostáváme: je-li $D_1, D_2, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$,[17]) je

$$\lim_{m\to\infty} L(D_m) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Učiňme ještě tuto poznámku: je-li D nějaké rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, dané dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a je-li D' rozdělení, které vznikne z D tím, že k dělicím bodům $x_0, x_1, \ldots, x_n$ přidáme ještě jeden nový dělicí bod x', je $L(D) \leqq \leqq L(D')$.

Důkaz je jasný: nechť x' leží třeba mezi dělicími body x_{i-1}, x_i $(x_{i-1} < x' < x_i)$; sestrojme bod $P' = [x', f(x')]$. Lomená čára $L(D')$ se liší od $L(D)$ jen tím, že úsečka $\overline{P_{i-1}P_i}$ je nahrazena dvěma úsečkami $\overline{P_{i-1}P'}$, $\overline{P'P_i}$; ale — jak víte z elementů — součet délek úseček $\overline{P_{i-1}P'}$, $\overline{P'P_i}$ je nejméně roven délce úsečky $\overline{P_{i-1}P_i}$,[18]) takže vskutku $L(D') \geqq L(D)$.

Z tohoto výsledku plyne dále: je-li rozdělení $\overline{D}$ zjemněním rozdělení D,[19]) je $L(D) \leqq L(\overline{D})$. Vskutku: buďto je rozdělení $\overline{D}$ totožné s D a potom je nerovnost platna (se znamením $=$). Nebo rozdělení $\overline{D}$ není totožné s D; potom dostanu $\overline{D}$ tak, že k dělicím bodům $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rozdělení D přidám ještě nějaké další dělicí body $x', x'', \ldots, x^{(m)}$. Přidám-li k rozdělení D dělicí bod x', dostanu jisté rozdělení D' a podle předešlého je $L(D) \leqq \leqq L(D')$; přidám-li k rozdělení D' další dělicí bod x'', dostanu další rozdělení D'' a bude opět $L(D') \leqq L(D'')$ atd.; po m krocích dospěji tak k rozdělení $D^{(m)} = \overline{D}$ a bude $L(D) \leqq L(D') \leqq \leqq L(D'') \leqq \ldots \leqq L(D^{(m)}) = L(\overline{D})$.

[17]) V souhlasu s kap. II, odst. 3 klademe

$$\varrho(D) = \mathrm{Max}\,(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n).$$

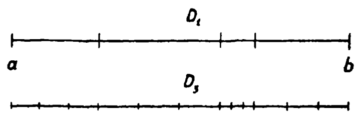
[18]) Znamení rovnosti nastane, jak víte, tehdy a jen tehdy, leží-li bod P' na úsečce $\overline{P_{i-1}P_i}$.

[19]) To znamená, že všechny dělicí body rozdělení D jsou také dělicími body rozdělení $\overline{D}$; ovšem rozdělení $\overline{D}$ může míti ještě další dělicí body.

Chceme nyní dokázati vzorec (10), t. j. vzorec $L = \int_a^b g(x)\,dx$. K tomu cíli stačí ovšem dokázati toto: je-li ε jakékoliv kladné číslo, platí nerovnosti

$$L \geqq \int_a^b g(x)\,dx \geqq L - \varepsilon. \tag{12}$$

Budiž tedy dáno kladné číslo ε. Ježto L je horní hranicí čísel $L(D)$, existuje rozdělení D_1 tak, že je $L(D_1) > L - \varepsilon$. Pro $m = 2, 3, \ldots$



Obr. 12.

označme znakem D_m ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, které vznikne, když každý částečný interval rozdělení D_1 rozdělíme na m stejných dílů (viz obr. 12, kde je nahoře nakresleno rozdělení D_1, dole D_3). Jest $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$, takže platí rovnice (11). Ježto L je horní hranicí čísel $L(D)$, je $L(D_m) \leqq L$ pro každé m. Ježto D_m je zjemněním rozdělení D_1, je $L(D_m) \geqq L(D_1) > L - \varepsilon$ pro každé m.

Máme tedy pro každé m nerovnosti

$$L \geqq L(D_m) > L - \varepsilon$$

a tedy též

$$L \geqq \lim_{m\to\infty} L\,(D_m) \geqq L - \varepsilon;$$

použijeme-li vzorce (11), dostaneme hledané nerovnosti (12).

Poznámka. Je-li funkce $f(x)$ lineární v int. $\langle a, b\rangle$, t. j. je-li $f(x) = kx + q$, je množina C úsečkou, spojující bod $[a, ka + q]$ s bodem $[b, kb + q]$; máme tedy v tomto případě dvě definice pro délku „křivky“ C; podle elementární definice je tato délka dána číslem

$$\sqrt{(b-a)^2 + (kb + q - ka - q)^2} = \sqrt{1 + k^2}\,(b - a);$$

podle nové definice je dána integrálem

$$\int_a^b \sqrt{1 + k^2}\, dx = \sqrt{1 + k^2}\,(b - a);$$

oba výsledky tedy jsou stejné.

Příklad 1. Počítejme délku L oblouku paraboly $y = x^2$, jehož koncové body jsou: vrchol paraboly a bod o úsečce $a > 0$ (t. j. bod $[0, 0]$ a bod $[a, a^2]$). Jest $L = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$. Substituce

$$\sqrt{4x^2 + 1} = 2x + t, \quad x = \frac{1 - t^2}{4t}, \quad \sqrt{4x^2 + 1} = \frac{1 + t^2}{2t},$$

$$dx = -\frac{1 + t^2}{4t^2}\, dt,$$

$$L = -\frac{1}{8} \int_1^{\sqrt{4a^2+1}-2a} \frac{(1 + t^2)^2}{t^3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(\sqrt{4a^2+1} - 2a)^2} - 1\right) - \frac{1}{16}((\sqrt{4a^2 + 1} - 2a)^2 - 1) -$$

$$- \frac{1}{4} \lg (\sqrt{4a^2 + 1} - 2a).$$

Užijeme-li rovnice $(\sqrt{4a^2 + 1} - 2a)(\sqrt{4a^2 + 1} + 2a) = 1$, dostaneme snadno $L = \frac{1}{2} a \sqrt{4a^2 + 1} + \frac{1}{4} \lg (\sqrt{4a^2 + 1} + 2a)$.

DODATEK.

Poznámka k definici určitého integrálu.

Ve větě 31 jsme dokázali: má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b ($a < b$), má funkce $f(x)$ tuto vlastnost:

(A) Budiž $D_1, D_2, \ldots$ libovolná posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež hoví podmínce $\lim\limits_{m \to \infty} \varrho(D_m) = 0$. Dělicí body rozdělení D_m buďte

$$a = x_{0,m} < x_{1,m} < x_{2,m} < \ldots < x_{n_m, m} = b.$$

Pro každou hodnotu m ($m = 1, 2, \ldots$) budiž dáno n_m čísel $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \ldots, \xi_{n_m, m}$ tak, že platí $x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n_m$. Potom existuje

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m}) \Delta x_{i,m}. \tag{1}$$

(Při tom značíme $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m}$.)

Dokonce víme, že limita (1) se rovná integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (ať byla rozdělení D_m a čísla $\xi_{i,m}$ zvolena jakkoliv, ovšem tak, aby vyhovovala podmínkám v (A) vytčeným).

Dokážeme nyní též naopak: *Jestliže funkce $f(x)$, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$, nemá určitý integrál od a do b, potom nemá také vlastnost* (A).[1])

---

[1]) Tedy funkce, definovaná v $\langle a, b\rangle$, má určitý integrál od a do b tehdy a jen tehdy, má-li vlastnost (A). Je tedy možno použíti vlastnosti (A) k definici určitého integrálu, t. j. lze určitý integrál definovati takto: je-li $a < b$ a má-li funkce $f(x)$, definovaná v interv. $\langle a, b\rangle$, vlastnost (A), nazýváme limitu (1) určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b (značka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$) a říkáme potom, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b. Tuto poznámku jsem pojal do této knížky jen proto, aby čtenář nepřišel do rozpaků, setká-li se někde s touto definicí určitého integrálu; neboť mnozí autoři jí užívají.

Důkaz. Pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ označme znakem D_m ono rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body tohoto rozdělení jsou tedy body $a = x_{0,m} < < x_{1,m} < \ldots < x_{m,m} = b$, kdež $x_{i,m} = a + \frac{i}{m}(b - a)$, takže[2])

$$\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m} = \frac{1}{m}(b - a), \quad \varrho(D_m) = \frac{1}{m}(b - a),$$

$\lim_{m \to \infty} \varrho(D_m) = 0$. Předpokládejme nyní, že funkce $f(x)$, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, nemá určitý integrál od a do b. Potom buďto funkce $f(x)$ není v int. $\langle a, b \rangle$ ohraničena, nebo je sice v int. $\langle a, b \rangle$ ohraničena, ale platí nerovnost

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

I. Nechť nastane především první případ, t. j. nechť funkce $f(x)$ není ohraničena v intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li celé kladné číslo m zvoleno, existuje aspoň jeden interval $\langle x_{j-1,m}, x_{j,m} \rangle$ $(1 \leqq j \leqq m)$, v němž funkce $f(x)$ není ohraničena.[3]) Zvolme takové j a položme

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} f(x_{i,m})\,\Delta x_{i,m} = K_m.\text{[4])}$$

Ježto funkce $f(x)$ není ohraničena v intervalu $\langle x_{j-1,m}, x_{j,m} \rangle$, existuje aspoň jedno číslo — označme je $\xi_{j,m}$ — takové, že je

$$x_{j-1,m} \leqq \xi_{j,m} \leqq x_{j,m}, \quad \left| f(\xi_{j,m}) \frac{b - a}{m} + K_m \right| > m.$$

Položíme-li ještě $\xi_{i,m} = x_{i,m}$ pro $i \neq j$, $1 \leqq i \leqq m$, máme

$$x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m} \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} \right| = \left| K_m + f(\xi_{j,m}) \frac{b - a}{m} \right| > m.$$

---

[2]) Přidržujeme se označení kap. II, odst. 3; tedy $\varrho(D_m) = \mathrm{Max}\,(\Delta x_{1,m}, \Delta x_{2,m}, \ldots, \Delta x_{m,m})$.

[3]) Jinak by totiž funkce $f(x)$ byla podle věty 9 ohraničena v int. $\langle a, b \rangle$.

[4]) Sčítá se tedy přes všechna i od 1 do m, s vyloučením hodnoty $i = j$.

Posloupnost čísel

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

není tedy ohraničena (její m-tý člen má absolutní hodnotu větší než m) a nemá tedy limitu (Kössler 19, věta a). Tedy funkce $f(x)$ nemá vlastnost (A).

II. Zbývá nyní vyšetřiti ještě druhý případ. Nechť tedy funkce $f(x)$ je ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$ a nechť platí nerovnost (2). Označme znakem $\mu_{i,m}$ resp. $\mathsf{M}_{i,m}$[5]) dolní resp. horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1,m}, x_{i,m}\rangle$; zvolme nyní čísla $\xi_{i,m}$ takto.

Je-li m sudé, t. j. $m = 2k$ ($k = 1, 2, \ldots$), volme $\xi_{i,2k}$ (pro $i = 1, 2, \ldots, 2k$) tak, že je $x_{i-1,2k} \leqq \xi_{i,2k} \leqq x_{i,2k}$, $f(\xi_{i,2k}) < \mu_{i,2k} + \dfrac{1}{2k}$[6]) (a ovšem je $f(\xi_{i,2k}) \geqq \mu_{i,2k}$). Potom je tedy

$$\left|\sum_{i=1}^{2k} f(\xi_{i,2k})\,\Delta x_{i,2k} - \sum_{i=1}^{2k} \mu_{i,2k}\,\Delta x_{i,2k}\right| < \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} \Delta x_{i,2k} = \frac{1}{2k}(b-a). \tag{3}$$

Je však $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(D_{2k}) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k}(b-a) = 0$; podle věty 29 je tedy

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2k} \mu_{i,2k}\,\Delta x_{i,2k} = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tedy podle (3) též

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2k} f(\xi_{i,2k})\,\Delta x_{i,2k} = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Je-li za druhé m liché, $m = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), volme $\xi_{i,2k+1}$ (pro $i = 1, 2, \ldots, 2k + 1$) tak, že je

$$x_{i-1,2k+1} \leqq \xi_{i,2k+1} \leqq x_{i,2k+1},\; f(\xi_{i,2k+1}) > \mathsf{M}_{i,2k+1} - \frac{1}{2k+1}\,^{7})$$

---

[5]) Volím znaky μ, M místo znaků m, M (kterých jsme užívali v kap. II), abych se vyhnul kolisi s indexem m u rozdělení D_m.

[6]) Takové $\xi_{i,2k}$ existuje podle druhé vlastnosti dolní hranice (viz větu 5).

(a ovšem je $f(\xi_{i,2k+1}) \leq \mathsf{M}_{i,2k+1}$). Potom je tedy

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+1} f(\xi_{i,2k+1})\,\Delta x_{i,2k+1} - \sum_{i=1}^{2k+1} \mathsf{M}_{i,2k+1}\,\Delta x_{i,2k+1}\right| <$$

$$< \frac{1}{2k+1}\sum_{i=1}^{2k+1} \Delta x_{i,2k+1} = \frac{1}{2k+1}\,(b-a). \tag{5}$$

Je však $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(D_{2k+1}) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k+1}(b-a) = 0$: podle věty 27 je tedy

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2k+1} \mathsf{M}_{i,2k+1}\,\Delta x_{i,2k+1} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tedy podle (5) též

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2k+1} f(\xi_{i,2k+1})\,\Delta x_{i,2k+1} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Sestrojme nyní opět posloupnost čísel

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\,\Delta x_{i,m} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Kdyby tato posloupnost měla nějakou limitu C, měly by všechny posloupnosti, vybrané z posloupnosti (7), touž limitu C.[8]) Ale tomu tak není: neboť vybereme-li z posloupnosti (7) posloupnost všech členů se sudým indexem ($m = 2k$), má tato posloupnost podle vzorce (4) limitu $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$; kdežto posloupnost všech členů s lichým indexem ($m = 2k + 1$) má podle (6) limitu $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$; a podle nerovnosti (2) tyto limity *nejsou* stejné. Posloupnost (7) tedy nemá limitu a funkce $f(x)$ nemá tedy vlastnost (A). Tím je naše tvrzení úplně dokázáno.

[7]) Takové $\xi_{i,2k+1}$ existuje podle druhé vlastnosti horní hranice (viz větu 4).

[8]) Kössler 19, věta *b*.

Seznam věcný.

(Čísla značí stránky.)

Cizojazyčné termíny.

Tento seznam obsahuje překlad nejdůležitějších termínů, vyskytujících se v Kösslerově „Úvodu do počtu diferenciálního" a v mé knížce; u každého hesla následují po sobě: termín český a jeho německý, francouzský a anglický překlad. Vynechány jsou termíny mezinárodní, které se v jednotlivých jazycích liší jen pravopisem nebo koncovkou (jako interval, maximum a pod.). Upozorňuji ještě zvláště na německé obraty: 1. Es gibt (= existiert) eine Zahl mit folgenden Eigenschaften . . . 2. Das Integral $\int f(x)\, dx$ ist vorhanden (= existiert).

absolutní [prostá] hodnota — absoluter Betrag — *valeur absolue* — absolute [numerical] value
bod — Punkt — *point* — point
b. inflexní — Wendepunkt — *point d'inflexion* — point of inflection
b. hromadný [b. zhuštění] — Häufungspunkt, -stelle, -zahl, -wert — *point limite* — limit point
činitel — Faktor — *facteur* — factor
číslo celé — ganze Zahl — *nombre entier* — integral number [integer]
čitatel — Zähler — *numérateur* — numerator
člen (řady) — Glied — *terme* — term
dělení — Division — *division* — division
délka (křivky) — Länge — *longueur* — length
derivace — Ableitung [Differentialquotient] — *dérivée* — derivative
diferenciál (úplný) — (totales) Differential — *différentielle (totale* nebo *exacte)* — (total) differential

funkce (inversní) — Funktion (inverse F., Umkehrfunktion) — *fonction (inverse)* — (inverse) function
funkce mající derivaci — differentiierbare Funktion — *fonction dérivable [admettant une dérivée]* — derivable f.
funkce mající integrál [integrace schopná] — integrierbare F. — *f. intégrable* — integrable f.
funkce primitivní — primitive Funktion — *fonction primitive* — primitive
hranice (horní, dolní) — Grenze [Schranke] (obere, untere) — *borne (supérieure, inférieure)* — bound (upper bound, lower bound)
integrace per partes — partielle Integration — *intégration par parties* — integration by parts
integrál dolní — unteres Integral — *intégrale inférieure [par défaut]* — lower integral
integrál horní — oberes Integral — *intégrale supérieure [par excès]* — upper integral
integrál, integrál určitý, integrál neurčitý — Integral, bestimmtes Integral, unbestimmtes Integral — *intégrale, intégrale définie, intégrale indéfinie* — integral, definite integral, indefinite integral
jmenovatel — Nenner — *dénominateur* — denominator
kladný — positiv — *positif* — positive
klesající — abnehmend [fallend] — *décroissant [descendant]* — descending [decreasing]
koncový bod — Endpunkt — *extrémité* — endpoint
konečný — endlich — *fini* — finite
konvergence (absolutní, relativní) — Konvergenz (absolute [unbedingte], nicht absolute [bedingte]) — *convergence (absolue, semi-)* — convergence (absolute, conditional)
konvergovati k — streben gegen — *tendre vers* — to converge to [to tend to]
kořen [nulový bod funkce $f(x)$**]** — Wurzel [Nullstelle von $f(x)$] — *racine [zéro de* $f(x)$*]* — root [zero of $f(x)$]
křivka — Kurve — *ligne courbe* — curve
lichý — ungerade — *impair* — odd
limes inferior (superior) — untere (obere) Häufungsgrenze [Unbestimmtheitsgrenze], unterer (oberer) Limes — *la plus petite (grande) des limites, limite inférieure (supérieure)* — lower (upper) limit, the least (greatest) of the limits
limita — Grenzwert, Limes — *limite* — limit
mez (integrálu) (dolní mez, horní mez) — Integrationsgrenze (untere Integrationsgrenze, obere Intègrationsgrenze) — *limite (limite inférieure, limite supérieure)* — limit (lower limit, upper limit)
mnohočlen [polynom] — Polynom — *polynome* — polynomial
množina [množství] — Menge — *ensemble* — set
mocnina — Potenz — *puissance* — power
monotonní — monoton — *monotone* — monotone
násobení — Multiplikation — *multiplication* — multiplication
neklesající — nicht abnehmend [nicht fallend] — *non décroissant* — non-decreasing
nerostoucí [nestoupající] — nicht wachsend [nicht steigend] — *non croissant* — non-increasing

nerovnina [nerovnost] — Ungleichung [Ungleichheit] — *inégalité* — inequality
nespojitý — unstetig — *discontinu* — discontinuous
neurčitý výraz — unbestimmter Ausdruck — *forme indéterminée* — indeterminate form
nula — Null — *zéro* — zero
odčítání — Subtraktion — *soustraction* — subtraction
odmocnina — Wurzel — *racine [radical]* — root [radical]
ohraničený [omezený] (shora, zdola) — beschränkt (nach oben, nach unten) — *borné (supérieurement, inférieurement)* — bounded [limited] (upper bounded, lower bounded)
okolí — Umgebung — *entourage [voisinage]* — neighborhood
oscilace — Schwankung — *oscillation* — oscillation
otevřený — offen — *ouvert* — open
plošná míra [obsah] — Flächeninhalt — *aire* — area
podíl — Quotient — *quotient* — quotient
pořadnice — Ordinate — *ordonnée*
posloupnost — Folge — *suite* — sequence
prázdný — leer — *vide* — empty [vacuous]
proměnná — Veränderliche [Variable] — *variable* — variable
přímka — Gerade — *ligne droite* — straight line
rostoucí [stoupající] — wachsend, steigend [zunehmend] — *croissant [ascendant]* — ascending [increasing]
rovnice — Gleichung — *équation* — equation
rovnost — Gleichheit — *égalité* — equality
rozdíl — Differenz — *différence* — difference
rozklad v částečné zlomky — Partialbruchzerlegung — *décomposition en fractions simples*
rozvoj — Entwicklung — *développement* — expansion
řada — Reihe — *série* — series
sčítání — Addition — *addition* — addition [summation]
směrnice — Richtungskoeffizient — *coefficient angulaire*
součet — Summe — *somme* — sum
součin — Produkt — *produit* — product
součinitel — Koeffizient — *coefficient* — coefficient
souřadnice — Koordinate — *coordonnée* — coordinate
spojitý — stetig — *continu* — continuous
sudý — gerade — *pair* — even
tečna — Tangente — *tangente* — tangent
úsečka [abscisa] — Abszisse — *abscisse*
uzavřený — abgeschlossen — *fermé* — closed
věta o střední hodnotě — Mittelwertsatz — *théorème de la moyenne [*pro větu 18 též *formule des accroissements finis]* — mean value theorem
základ (logaritmů a pod.) — Basis — *base* — base
záporný — negativ — *négatif* — negative
zlomek — Bruch — *fraction* — fraction