KATEDRA DIDAKTIKY MATEMATIKY MFF UK

DĚJINY MATEMATIKY, svazek 54

ARCHIMÉDÉS

Několik pohledů do jeho života a díla

Zdeněk Halas (ed.)

matfyzpress

VYDAVATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

DĚJINY MATEMATIKY

Vydání publikace bylo podpořeno

– grantem GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*,

– Katedrou didaktiky matematiky MFF UK.

Recenzovali: Vojtech Bálint, Jiří Hudeček

ISBN 978-80-7378-228-3

ÚVODNÍ SLOVO

Tato monografie vznikala během roku 2012 na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Obsahově vychází ze semináře *Archimédés*, který ve svých prostorách uspořádala 24. listopadu 2011 Katedra filozofie Filozofické fakulty Západočeské univerzity v Plzni ve spolupráci s Katedrou didaktiky matematiky MFF UK. Na semináři byl důraz kladen zejména na vybrané matematické spisy a na recepci Archimédova díla. Příspěvky, jež zde byly předneseny, byly dále rozšiřovány a postupem času uspořádány do podoby monografie.

Archimédovské téma je dodnes podnětné a inspirativní. Archimédovo dílo totiž zasáhlo do matematiky, fyziky, techniky, architektury i fortifikace. Navíc je v současné době velmi aktuální, neboť koncem roku 2011 byly publikovány výsledky více než desetiletého mezinárodního projektu zaměřeného na konzervaci a nové čtení znovu nalezeného kodexu, který obsahuje některé Archimédovy spisy považované donedávna za ztracené.

První část knihy je věnována životu a dílu Archiméda ze Syrákús. Jeho životní osudy jsou vykresleny pomocí překladů antických děl, v nichž se nám o Archimédovi dochovala poměrně četná svědectví. Dále zde můžeme nalézt přehled řady uměleckých děl, která byla jeho osudy inspirována. Celou knihou prostupuje důraz na recepci Archimédova díla. Speciálně je tomuto tématu věnována druhá kapitola, kde je podrobně a přehledně pojednáno o tom, jakým způsobem se nám Archimédovy spisy dochovaly, a to jak v původním jazyce, tak v překladech. Speciální pozornost je věnována překladům do češtiny, jejichž historie je velmi zajímavá.

Druhá část knihy se skládá z kapitol věnovaných rozboru vybraných Archimédových matematických spisů. Mnohé z nich mají pohnutou historii, některé byly objeveny teprve před sto lety, část se nám dochovala pouze fragmentárně.

Nejtypičtějším znakem Archimédova díla je mistrovské využití exhaustivní metody umožňující vypočítat obsahy a objemy i poměrně složitých geometrických útvarů. Bezpochyby nejznámější je *Měření kruhu* obsahující relativně přesné vymezení poměru obvodu kruhu k jeho průměru, který je dnes označován symbolem π. Zde se také poprvé nachází důkaz skutečnosti, že v našich dnešních vzorcích pro obsah a obvod kruhu figuruje tatáž konstanta π.

V *Pískovém počtu* Archimédés vytvořil systém zápisu tak obrovských čísel, že zdaleka překračují počet pískových zrn, která by vyplnila celý antický vesmír.

Archimédova *Metoda* je práce s velmi pohnutou historií. Je totiž dochována v jediném rukopisu, v silně poškozeném kodexu nazývaném *Archimédův palimpsest*, který byl objeven a publikován až začátkem dvacátého století. Nedlouho po svém nalezení se však opět ztratil a objevil se až roku 1998 v dražbě. Dostal se do rukou neznámého majitele, který financoval jeho záchranu i odborné studium. To vyvrcholilo v roce 2011, kdy byl vydán přepis téměř celého kodexu společně s průvodní monografií. *Metoda* obsahuje vzácný pohled do „Archimédovy dílny". Archimédés zde ukazuje, jak přicházel na některé své objevy a na konkrétních příkladech demonstruje svou unikátní metodu určování obsahů a objemů různých geometrických útvarů s využitím rovnováhy na páce.

Z díla Pappa Alexandrijského se dozvídáme, že se Archimédés rovněž zabýval polopravidelnými tělesy. Ta později upadla v zapomnění. Je zajímavé připomenout, jak byla v období renesance znovu postupně objevována. Neméně zajímavé je pozorovat, kde všude se v běžném životě s polopravidelnými tělesy setkáváme.

Archimédés také popsal v antice oblíbenou hru nazývanou stomachion. Její matematický rozbor se dochoval pouze ve dvou malých zlomcích: arabském a řeckém. Řecký text je součástí *Archimédova palimpsestu*, proto je v této knize zařazen překlad celého zlomku vycházející z nového, podstatně doplněného čtení, které bylo publikováno až koncem roku 2011.

Druhou část knihy uzavírá *Úloha o dobytku* inspirovaná homérskou tematikou. Její znění se dochovalo ve formě básně. Zadání vypadá na první pohled poměrně jednoduše, nicméně úplné řešení bylo možno získat až s využitím výpočetní techniky. Celkový počet kusů Héliova stáda je totiž vyjádřen číslem, které má více než 200 000 číslic.

Na závěr knihy je připojen dodatek, který předkládá zajímavé a jednoduché řešení otázky, jak asi Archimédés získával přesné odhady odmocnin, které potřeboval při svých výpočtech, například při výpočtu čísla π.

Celému Archimédovu matematickému dílu by bylo třeba věnovat monografii většího rozsahu. V této útlé knížce bylo možno pojednat jen o některých jeho spisech. Výběr se řídil tím, co je z celého souboru dochovaných textů reprezentativní, zvláštní a specifické. Měřítkem byla také případná využitelnost pro obohacení výuky matematiky či fyziky na středních školách, zejména ve volitelných seminářích. Pro usnadnění případného dalšího studia je připojen soupis literatury, který obsahuje nejen odkazy na vydání, překlady, knihy a odborné články citované přímo v jednotlivých kapitolách, ale také další prameny, které považujeme za zajímavé a inspirativní.

Jednotlivé kapitoly jsou pojaty jako samostatné celky zachovávající svou osobitost. Tvoří tak soubor několika menších obrázků – pohledů do Archimédova života a díla – z něhož, jak doufáme, si čtenář vytvoří dostatečně komplexní přehled o Archimédovi a o jeho matematických úvahách.

Zdeněk Halas

OBSAH

I.

ARCHIMÉDÉS A JEHO DÍLO

ARCHIMÉDÉS – ŽIVOT A DÍLO

Jindřich Bečvář

Archiméda ze Syrákús můžeme považovat za největšího vědce starověku. Jeho spisy mají – i v dnešním slova smyslu – charakter původních vědeckých prací. Jsou zcela věcné, oproštěné od veškerých spekulativních či mytologických prvků. Patří k vrcholům antické vědy.

O Archimédově životě mnoho spolehlivých informací nemáme. Narodil se v Syrákúsách asi roku 287 př. Kr., prožil v nich skoro celý život a zemřel při jejich dobytí Římany roku 212 př. Kr.[1] Jeho otcem byl patrně Feidiás, astronom působící na dvoře syrákúského vládce Hieróna II. (asi 306–215).[2] S ním byl snad Archimédés v nějakém nepříliš blízkém příbuzenském vztahu, přitom však byl mužem nízkého původu (*humilis homunculus*). Uvádí se, že byl spřátelen jak s Hierónem II., tak s jeho synem Gelónem (asi 270–216).

Archimédés studoval nějakou dobu v Alexandrii, kde byl ve styku s generací Eukleidových žáků (Konón ze Samu,[3] Dositheus z Pelusie,[4] Eratosthenés z Kyrény (275–195)[5]). Není dokonce vyloučeno, že Alexandrii navštívil vícekrát. Osvojil si tam Eukleidův exaktní přístup k budování matematické teorie, k přesnému formulování a dokazování poznatků. Jeho pobyt v Alexandrii se však na jeho jazyku neprojevil; Archimédés nepoužíval obecnou řečtinu *koiné*, stále psal dialektem, který byl užíván v Syrákúsách. S matematiky alexandrijské školy byl v kontaktu, posílal jim své práce.

První Archimédův životopis, který se bohužel nedochoval, sepsal Hérakleidés[6], jeho současník a patrně přítel. O něco později psal o Archimédovi historik Polybios (asi 200 až 120) ve spise *Historiai*, z jehož informací o Archimédovi pak vycházel Plútarchos (asi 46 až 126) i Titus Livius (59 př. Kr. až 17 po Kr.).

Řecký historik Diodóros Sicilský (1. stol. př. Kr.) publikoval některé informace o Archimédovi v práci *Bibliothéké historiké*, Plútarchos, jeden z nejplodnějších řeckých autorů doby římské, psal poměrně podrobně o Archimédovi v kapitole *Pelopidás a Marcellus* svých *Životopisů slavných Řeků a Římanů*. Další informace o Archimédovi a jeho díle přinesli Pappos (konec 3. stol.), jeden z posledních významných matematiků antiky, Proklos (asi 410 až 484), novoplatónský filozof, vzdělanec a komentátor, ve 12. století pak Ióannés Tzetzés, řecký gramatik a komentátor.

---

[1] Rok jeho narození se odvozuje z informace byzantského autora Ióannese Tzetzése (asi 1110 až 1180), který uvedl, že se Archimédés dožil 75 let.

[2] Hierón byl roku 275 vojskem provolán stratégem (vojevůdcem s velkým politickým vlivem), zmocnil se vlády a roku 265 se stal králem.

[3] Archimédés se o jeho smrti zmiňuje v úvodu své práce *O kvadratuře paraboly.*

[4] Archimédés mu věnoval své práce *O kouli a válci*, *O kónoidech a sféroidech*, *O kvadratuře paraboly* a *O spirálách*.

[5] Archimédés se na něho obrací v úvodu své práce nazývané *O metodě*.

[6] Také nazývaný Hérakleios; dochovaná podoba jména není jednotná.

Archiméda můžeme směle i v dnešním slova smyslu označit za matematika, fyzika a technika.

Jako matematik intenzivně rozvíjel zejména infinitesimální postupy. Výrazně rozpracoval a v řadě situací geniálně využil Eudoxovu exhaustivní metodu.[7] Vymyslel řadu originálních postupů, s jejichž pomocí počítal obsahy rovinných útvarů ohraničených křivkami a objemy těles omezených různými plochami. Tyto myšlenky rozpracoval zejména v pracích *Měření kruhu*, *O kvadratuře paraboly*, *O spirálách*, *O kouli a válci*, *O kónoidech a sféroidech*. V jeho postupech nalézáme hluboké myšlenky, které úzce souvisejí s moderní teorií integrace. Těmito idejemi inspiroval matematiky 17. století, kteří připravovali nástup infinitesimálního počtu. Byli to zejména Johannes Kepler (1571–1630), Paul Guldin (1577–1643), Grégoire de Saint Vincento (1584–1667), René Descartes (1596–1650), Bonaventura Cavalieri (1598–1647), Pierre de Fermat (1601–1665), John Wallis (1616–1703), Isaac Barrow (1630–1677), Christian Huyghens (1629–1695) a posléze Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Zatímco Archimédés musel pro každou situaci nápaditě vymýšlet, jakým způsobem použít exhaustivní metodu, Newton a Leibniz přišli s metodou obecnou.

Jako fyzik se Archimédés zabýval problematikou jednoduchých strojů, zejména rovnoramenné i nerovnoramenné páky, kladky, kladkostroje a šroubu. Podal přesný matematický výklad rovnováhy založený na principu páky, exaktně zpracoval problematiku těžiště rovinných obrazců, věnoval se hydrostatice, jeho jméno dnes nese známý zákon o vztlakové síle. Myšlenku rovnováhy na páce a rovněž pojem těžiště využíval i při ryze matematických úvahách. Tato témata rozvíjel hlavně v pracích *O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců I., II.*, *O metodě* a *O plovoucích tělesech I., II.*

Jako technik rozpracoval ideje jednoduchých strojů až do bezprostředního technického provedení. Známý Archimédův šroub byl jistě používán již dříve, Archimédés se s ním patrně v nějaké podobě seznámil v Egyptě a technicky jej zdokonalil. Jeho vynálezy – válečné stroje a obranné mechanismy – došly svého využití při obraně Syrákús proti římskému vojsku.

Na Archimédovy plodné myšlenky navazovala po mnoha staletích novověká matematika a fyzika.

1 Heuréka

Archimédés byl vždy plně zaujat problémy, které právě řešil. Vše ostatní nebylo důležité, ať již to byla strava či hygiena. Stručně a výstižně to popisuje Plútarchos v životopise římského vojevůdce Marcella[8]:

[7] Eudoxos z Knidu (asi 405 až 355) byl vynikající matematik, astronom, lékař a zákonodárce. S jeho jménem je spojena kromě exhaustivní metody i tzv. teorie proporcí a teorie homocentrických sfér.

[8] Plútarchovo hodnocení je ovlivněno jeho filosofickými názory, zejména dualismem duše a těla, Plútarchovým vlastním pojetím démonologie, v níž intelekt jakoby nepatří člověku, ale je démonem.

Proto také jsou věrohodné anekdoty, které se o Archimédovi vypravují, že jej vždy očarovala jakási vlastní vnitřní Siréna, takže zapomněl na jídlo a zanedbával péči o tělo, často ho násilím přivedli ke koupeli a natřeli, v popelu krbu kreslil geometrické obrazce, podobně když byl po koupeli natřen olejem, prstem kreslil po svém těle křivky jsa úplně omámen pocitem štěstí a posedlý matematickou vášní. Áčkoli objevil mnoho krásných věcí, prosil prý své přátele a příbuzné, aby mu po smrti postavili na hrob válec, do něhož je vepsána koule a číselný údaj, o kolik je opsané těleso větší než vepsané. ([Pl1], str. 526)

Výkřik *heuréka*[9] je spojován buď s Archimédovým zákonem, nebo s historkou o tzv. „koruně krále Hieróna".[10] Ve skutečnosti se jednalo o zlatý vavřínový věnec (*stefanos*), který byl určen bohům jako *dar*.

Římský architekt a stavitel Marcus Vitruvius Pollio (1. stol. př. Kr.) napsal ve svém díle *Deset knih o architektuře* (*De architectura libri decem*)[11] slova, která na jedné straně ukazují Archimédův zápal pro vědecké bádání, na druhé straně však jeho roztržitost:

Ačkoliv Archimédových objevů bylo mnoho a podivuhodných, zdá se, že největším důmyslem a bystrostí ze všech se vyznačuje ten, který uvedu. Když se totiž Hierón v Syrákúsách povznesl ke královské moci, rozhodl se, že za štěstí, které měl při svém počínání, obětuje v nějaké svatyni zlatý věnec, který zaslíbil nesmrtelným bohům. Dal jej udělat na zakázku a zlato na něj výrobci přesně odvážil. Za nějaký čas předložil výrobce králi vkusně provedené dílo svých rukou k jeho úplné spokojenosti, přičemž se zdálo, že dodržel přesně váhu věnce.

Když přišlo později ovšem udání, že zlata bylo ubráno a že do zpracovávaného věnce bylo přimíšeno stejné množství stříbra, požádal Hierón, rozmrzelý nad tím, že byl takhle podveden, a že nemohl přijít na to, jak by se mohla zpronevěra prokázat, Archiméda, aby se pro něho ujal prozkoumání této záležitosti. Archimédés, který toho měl plnou hlavu, přišel náhodou do lázní a při vstupování do vany si všiml, že z ní vytéká takové množství vody ven, jak se do ní ponořovalo jeho tělo. Když mu to poskytlo vysvětlení dané otázky, nemeškal, nýbrž vyskočil samou radostí z vany, pospíchal nahý domů a všem lidem zvěstoval jasným hlasem, že objevil, po čem pátral. Vykřikoval totiž v běhu a stále řecky heuréka, heuréka (našel jsem to, našel jsem to).

Vycházeje potom z tohoto objevu, dal prý udělat dva kusy stejné váhy, jako měl věnec, a to jeden ze zlata, druhý ze stříbra.

Na tomto místě chybí v českém překladu dvě věty. Uvedeme je z anglického překladu:[12]

---

[9] Archimédovo *heuréka* je používáno jako stručný a výstižný výraz, který symbolizuje náhlou intuici: „Našel jsem to, přišel jsem na to!".

[10] Nahého Archiméda osvíceného nápadem znázornil na fresce ve Florencii (Galleria degli Uffizi, Stanzino delle Matematiche) Giulio Parigi (1571–1635) roku 1599 nebo 1600.

[11] Devátá kniha, odst. 9–12.

[12] Vitruvius: *The Ten books on architecture*, translated by Morris Hicky Morgan, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1914; 9. kniha, 11. odstavec. Český překlad by zněl: *Když*

After making them, he filled a large vessel with water to the very brim, and dropped the mass of silver into it. As much water ran out as was equal in bulk to that of the silver sunk in the vessel.

Potom zas kus vyňal a úbytek vody dolil, odměřiv jej sextariem, takže právě tak jako dříve byla nádoba rovná až po okraj. Tímto postupem zjistil, jak váha stříbra odpovídá určitému objemu vody.

Vyzkoumav to, vnořil podobně do nádoby kus zlatý a po jeho vynětí dolil týmž způsobem míru a zjistil z menšího počtu sextariů, oč má kus zlata při téže váze menší objem než kus stříbra. Načež znovu naplnil nádobu a vnořil do téže vody samotný věnec a shledal, že při věnci vyteklo více vody než při kusu zlata téže váhy. Výpočtem z toho, oč bylo při věnci více vody než při kusu zlata, prokázal ve zlatě příměs stříbra a očividnou výrobcovu zpronevěru. ([Vi], str. 293–295)

2 Využití jednoduchých strojů

Jak již bylo řečeno, Archimédés nebyl jen teoretik. Dobře si uvědomoval dosah a sílu teoretických poznatků a uměl je velmi dobře prakticky využít. Jeho slavný výrok[13]

Dos moi pú stó kai kinó tén gén.
Dej mi, kde bych stanul, a pohnu Zemí.[14]

můžeme chápat nejen jako reklamní slogan propagující páku, ale i jako oslavu jednoduchých strojů vůbec.[15]

Archimédés si však v duchu tehdejších názorů vzdělanců více cenil svých teoretických výsledků, jejich praktická využití považoval jen za jednoduché „důsledky“ teorie, za činnost druhořadou, z hlediska teorie méně významnou. Technické aplikace poznatků geometrie a mechaniky byly řeckými mysliteli přezírány a zařazovány zejména do stavitelství, vojenství apod. O tom, jak dobře uměl Archimédés užít jednoduché stroje a jaký byl jeho vztah k jejich technickému využití, psal již Plútarchos:

Archimédés však z toho nepovažoval nic za předmět vážného zájmu, nýbrž většina těchto věcí vznikla jako výsledek vedlejší činnosti s matematickými hříčkami, přičemž nejprve král Hierón ze ctižádosti přemluvil Archiméda, aby aspoň část své vědy přenesl z oblasti abstraktních poznatků do hmotného světa a svou vědu spojil s praktickými potřebami a tak s ní názorně seznámil i ostatní.

---

byly hotové, naplnil velkou nádobu k samému okraji vodou, do níž spustil stříbrný kus. Jaká byla velikost stříbrného kusu ponořeného do nádoby, tolik vyteklo vody.

[13] Uvádíme jej v podobě, v jaké se dochovala v Pappově *Sbírce* (VIII,11), viz [Pap], str. 1060. Dvě mírně odlišné verze jsou uvedeny v rozsáhlé básni *Chiliades* (II,130 a III,62), kterou složil byzantský učenec Ióannés Tzetzés (1110–1180).

[14] Méně přesně se překládá takto: *Dejte mi pevný bod a pohnu Zemí.*

[15] Na řadě obrázků a karikatur je znázorněn Archimédés, který pákou zvedá zeměkouli. Uveďme například obálku 2. ročníku časopisu *Mechanic's Magazine* z roku 1824. Freska s motivem zeměkoule a páky je i v galerii Uffizi ve Florencii (Stanzino delle Matematiche), autorem je Giulio Parigi.

… byla mechanika oddělena od geometrie a také po dlouhý čas byla přezírána i filosofií a pokládána za odvětví válečné techniky.

Přesto však Archimédés, který byl příbuzný a přítel krále Hieróna, napsal mu v dopise, že danou silou je možné zvednout každé dané břímě, a v mladicky odvážné víře v sílu svého důkazu prý prohlásil, že kdyby měl jinou Zemi, přemístil by se na ni a odtud by hnul naší Zemí. Hierón se tomu podivil a žádal Archiméda, aby problém prakticky uskutečnil a ukázal mu, jak veliké těleso může být uvedeno v pohyb malou silou. Archimédés dal na královský nákladní trojstěžník, který jen s velkou námahou množství rukou vytáhlo na břeh, naložit velký počet mužstva a obvyklý náklad, sám seděl opodál a bez námahy a lehce uváděl rukou v pohyb konec kladkostroje, takže loď běžela lehce a bez nárazu jako po moři. Užaslý král zajisté pochopil význam vědy a přiměl Archiméda k tomu, aby sestrojil stroje vhodné pro každý způsob obléhání, a to pro obranu i pro útok. ([Pl1], str. 523–524)

Plútarchos se pak ještě jednou vrátil k Archimédovu postoji k praktickému využití teoretických poznatků.

Archimédés při svém velikém nadání, hloubce ducha a bohatství teoretického vědění neměl v úmyslu písemně zaznamenat to, co mu přineslo jméno a slávu nejen lidského, nýbrž i božského důmyslu, protože praktické využití mechaniky a vůbec veškerého umění a vědy považoval za nízké vykonávání řemesla. Jeho vlastní ctižádost jej pudila jedině tam, kde krása a dokonalost je nesmíšená, v oblast čisté vědy, která nepřipouští srovnání s ostatním světem hmoty a při vědeckém podání je k němu v protikladu; neboť u tohoto se projevuje velikost a vnější krása, u oné přesnost a mimořádná síla. Vždyť nikde v oblasti geometrie není možno obtížnější a důležitější poučky vyjádřit v jednodušších a čistších prvcích, než to udělal Archimédés. ([Pl1], str. 525–526)

3 Obrana Syrákús

Král Hierón II. byl za punských válek spojencem Říma proti Kartágu.[16] Po jeho smrti však jeho vnuk Hierónymos (230–214), nový syrákúský vládce, vystoupil proti Římanům a snažil se o spojení s Kartágem, jehož vojsko tehdy vedl proslulý Hannibal (247–183), a s Egyptem. Roku 214 byl Hierónymos zavražděn. Syrákúsy však již oblehlo římské válečné loďstvo, před hradbami rozložil své legie významný římský politik a vojevůdce Marcus Claudius Marcellus (asi 268 až 208).[17] Syrákúsané vedeni vojevůdcem Hippokratem plně využili při obraně města Archimédovy obranné mechanismy. Plútarchos líčí boj o Syrákúsy takto:

Když Římané zaútočili ze dvou stran, zavládlo v Syrákúsách zděšení a úzkostné ticho, protože se každý ve svém strachu domníval, že proti tak hrozné

[16] První punská válka proběhla v letech 264 až 241, druhá v letech 218 až 201, třetí v letech 149 až 146. Po první punské válce se Sicílie stala římskou provincií.

[17] Roku 222 se stal poprvé římským konsulem, spolu s Gnaeem Corneliem Scipionem Calvou (zemřel 211) bojoval proti předalpským Galům, roku 208 padl v boji proti Hannibalovi u Venusie v Apulii.

síle není možný odpor. Nyní spustil Archimédés svoje stroje. Na pozemní vojsko létaly střely různého druhu a obrovské kamenné bloky, které dopadaly s hlukem a neuvěřitelnou rychlostí, rozdrtily svou vahou všechny, kteří se nekryli, a působily zmatek v řadách vojska. Současně se z hradeb proti lodím vysoko vysunuly berany a silou obrovského tlaku shora je potápěly do hlubin nebo železnými chapadly či kleštěmi podobnými zobanům jeřábů uchopily loď, zvedly ji přídí do výše, takže stála na zádi, a ponořily ji, jinou loď lany a háky z vnitřku přitahovali k břehu a točili jí do kruhu, až narazila na skaliska pod hradbami, takže posádka lodi byla většinou zničena a zahynula. Často se stávalo, že některá loď byla úplně vyzdvižena z moře, točila se jako ve víru a vznášejíc se ve výši skýtala hrůznou podívanou; nakonec námořníci z lodi vypadli nebo byli vymrštěni a prázdná loď narazila na hradby, anebo když chapadlo povolilo, spadla do moře.

Strojové zařízení, s kterým Marcellus postupoval k městu, se pro podobu s hudebním nástrojem nazývalo sambuka. Bylo ještě ve značné vzdálenosti od hradeb, když přiletěl balvan deset talentů těžký, po něm druhý a třetí; některé z nich dopadly s hrozným hřmotem a silným vlnobitím na strojové zařízení, rozbily jeho podstavec, uvolnily a roztrhly spojení lodí, takže bezradný Marcellus vydal rozkaz, aby lodi co nejrychleji odpluly a pozemní vojsko aby ustoupilo.

Na válečné poradě bylo rozhodnuto ještě v noci, bude-li to možné, přiblížit se až k hradbám; neboť jak se domnívali, vlivem veliké síly strojů, kterých užíval Archimédés, byla dráha střel vysoká a dlouhá, zatímco v blízkosti hradeb byly stroje pro krátkou vzdálenost neúčinné. Avšak Archimédés, jak se ukázalo, už dávno upravil své stroje pro pohyby a střely s krátkou drahou letu, vhodné pro každou vzdálenost, a protože po celé délce hradeb byly souvisle ve velikém počtu neveliké střílny, stály v nich malé metací stroje přizpůsobené pro krátké vzdálenosti a nepřátelům neviditelné.

Římané se přibližovali v domnění, že nejsou pozorováni, ale znova se ocitli v dešti šípů a jiných střel, kameny jim padaly přímo na hlavu, z hradeb se sypaly šípy, takže byli nuceni ustoupit zpět. Když se jejich jednotky rozvinuly do větší vzdálenosti, i tam je dostihovaly a zasahovaly střely, jak se vzdalovali, a způsobovaly jim značné ztráty. Současně docházelo k častým srážkám lodí. Římané však nebyli nijak schopni oplatit nepřátelům jejich údery, protože většina strojů, které Archimédés sestrojil, byla skryta za hradbami a Římané se podobali bojovníkům, kteří bojují s bohy, ježto z neviditelných prostorů se na ně valily nesčíslné pohromy.

Marcellovi se přesto podařilo ustoupit. Svým technikům a zbrojířům řekl ironicky: „Nedovedeme umlčet tohoto matematického Briarea? Vždyť ten klidně sedí na moři a v žertu nám na posměch vyzdvihuje naše lodi a množstvím střel, které na nás vrhá současně, překonává mýtické storuké obry.“

Ve skutečnosti byli zajisté všichni ostatní Syrákúsané tělem Archimédovy obrany, zatímco on sám byl jedinou duší, která vše uvádí v pohyb a všemu dává směr; ostatní zbraně odpočívaly, kdežto město používalo tehdy jen jeho zbraní, a to k obraně i k útoku.

Nakonec Marcellus pozoroval, že Římané jsou tak přestrašeni, že kdykoli viděli, že se přes hradby vysunuje nějaký provaz nebo kus dřeva, začali křičet, že Archimédés zas na ně zaměřuje nějaký stroj, obraceli se a prchali. Rozhodl se proto zdržet se boje a zastavit útok a úspěch obléhání ponechal času. ([Pl1], str. 524–525)

Někdy se dokonce uvádí, že Syrákúsané podle Archimédova návodu zapalovali dřevěné římské galéry pomocí vyleštěných kovových štítů, kterými odráželi sluneční paprsky na zvolenou loď. Tato informace však asi není pravdivá. Ve 2. století se sice známý řecký lékař a logik Galénos z Pergamonu (129–199) zmiňuje o zapalování římských lodí u Syrákús, ale nikoli o odrážení slunečních paprsků. Teprve ve 12. století to uvádějí I. Tzetzés a I. Zónarás.[18] Pochybnosti, zda je to vůbec možné, rozptýlil roku 1973 řecký badatel Ióannés Sakkás experimentem, kdy s pomocí padesáti vyleštěných kovových štítů zapálil dřevěný model lodi vzdálený čtyřicet metrů.

Plútarchovo líčení obrany Syrákús a účinků Archimédových strojů je zcela jistě zveličené. Obležení Syrákús sice trvalo zhruba dva roky, boje však jistě neprobíhaly soustavně. Marcellus postupně dobýval a obsazoval Sicílii, je pravděpodobné, že by byl přivítal kapitulaci města bez boje. Není vyloučeno, že úmyslně posílal do Říma zveličené zprávy o potížích, s nimiž se u Syrákús potýká, aby zdůvodnil svoji malou aktivitu při dobývání města. A ty se pak mohly stát základem pozdějších textů, které byly o dobývání Syrákús a jejich statečné obraně sepsány.

4 Archimédova smrt

Po dlouhém obléhání se Římanům nakonec podařilo obránce města přelstít a do města proniknout. Bylo to roku 212 př. Kr. Plútarchos líčí Marcellovo dobytí Syrákús takto:

… vyčíhav si vhodnou chvíli, kdy Syrákúsané slavili slavnosti k poctě Artemidině a oddávali se pití vína a veselí, nepozorovaně obsadil nejen věž, ale ještě před rozedněním dokola po hradbách rozestavil vojáky a prolomil budovu Hexapýl. Syrákúsané to zpozorovali a tu se teprve probudili. ([Pl1], str. 526–527)

Při dobytí města přišel Archimédés o život. Jeho smrt se připomíná po staletí a tisíciletí zhruba ve stejné podobě. Plútarchos ji líčí takto:[19]

Archimédés byl právě zabrán úvahou nad nějakým obrazcem, k jehož vyřešení soustředil mysl i oči tak, že ani včas nezpozoroval, že Římané podnikli útok a že města je dobyto. Když před ním náhle stanul římský voják a kázal mu, aby ho následoval k Marcellovi, Archimédés odepřel, dokud nevyřeší problém a nedovede důkaz do konce. Tu se voják rozhněval, vytáhl meč a probodl ho.

[18] Zapálení římské lodi pomocí zrcadla znázornil na fresce v galerii Uffizi (Stanzino delle Matematiche) Giulio Parigi. V monumentálním italském filmu režiséra Giovanniho Pastronea (1882–1959) nazvaném *Cabiria* (1914) je necelých pět minut věnováno Archimédovi a jeho zápalným zrcadlům; hrál ho Enrico Gemelli (1841–1926).

[19] Tuto událost popisuje též Titus Livius v 25. knize (kap. 31) svých dějin *Ab urbe condita*.

Jiní však vypravují, že římský voják se již před něho postavil s obnaženým mečem s úmyslem jej probodnout; Archimédés, který ho spatřil, prý ho úpěnlivě prosil, aby jen chvilku počkal, aby hledané řešení nebyl nucen nechat nedokončené a nezdůvodněné, avšak voják prý na to nedbal a probodl ho.

Podle třetí zprávy Archimédés nesl Marcellovi matematické přístroje jako sluneční hodiny, koule a kvadranty, jimiž se měří velikost slunečního kotouče vzhledem k tomu, jak se nám jeví. Vojáci, kteří ho potkali, se domnívali, že ve skřínce nese zlato, a zabili ho. ([Pl1], str. 527–528)

Traduje se, že Archimédés odbyl římského vojáka slovy:

Noli tangere (*turbare*) *circulos meos!*[20]

Nedotýkej se mých kruhů!, resp. *Neruš mé kruhy!*

Mohlo by se zdát, že je tato historka vymyšlená. Není však vyloučeno, že není daleko od pravdy. Dříve se uvádělo, že při vykopávkách v Herculaneu byla odkryta nevelká římská mozaika (51 × 43 cm, Städtische Galerie Liebieghaus, Frankfurt am Main), která představuje smrt Archiméda ve shodě s výše uvedeným textem. Připomeňme, že Pompeje, Herculaneum a Stabie byly zničeny roku 79 při obrovském výbuchu Vesuvu. Mozaika by tedy musela být vytvořena mezi roky 212 př. Kr. a 79 po Kr. Dnes je však spíše považována za falzifikát z 18. století, možná dokonce již ze 16. století.

5 Archimédův hrob

Marcus Tullius Cicero (106–43), slavný římský politik, státník, filozof, spisovatel a řečník, se stal roku 75 př. Kr. na Sicílii kvéstorem (místodržícím) a nalezl v Syrákúsách Archimédův hrob. V *Tuskulských hovorech* (*Tusculanae disputationes*) sepsaných v letech 45 a 44 uvádí, že byl místními obyvateli zcela zapomenut.[21]

Když jsem byl kvéstorem, objevil jsem jeho hrob kolem dokola zarostlý a zakrytý trnitým křovím. Syrákúsané o něm nevěděli, dokonce tvrdili, že vůbec neexistuje. Pamatoval jsem si totiž několik veršíků, které měly být, jak jsem slyšel, napsány na jeho náhrobku, a z nich bylo jasné, že nahoře na jeho náhrobku je koule a válec.

Když jsem si vše důkladně prohlédl – u Agrigentské brány je totiž velké množství náhrobků –, zpozoroval jsem sloupek, který jen trochu vyčníval nad křoví, a na něm byla podoba koule a válce. Hned jsem řekl Syrákúsanům (přední občané ze Syrákús byli totiž se mnou), že si myslím, že to je to, co hledám. Poslali tam pak mnoho lidí se srpy a ti to místo vyčistili a vyklidili.

Když bylo místo přístupné, přiblížili jsme se k přední straně podstavce. Bylo vidět nápis, konce veršů skoro až do poloviny byly však zničeny. A tak nejvznešenější obec Velkého Řecka, kdysi i nejučenější, by nebyla znala hrob svého

---

[20] Řecky: *Apostéthi, ó anthrópe, tú diagrammatos mú!*

[21] 5. kniha, odst. 23,64–66.

nejbystřejšího občana, kdyby se to nebyla dozvěděla od člověka z Arpina.[22] ([Ci], strana 231)

Dnes je v Syrákúsách v rámci turistického ruchu označována jedna z hrobek jako Archimédova. S Archimédem však nemá nic společného.

6 Inspirace Archimédem

Nejznámější podoba, která je s Archimédovým jménem spjata, je odvozena z busty pocházející ze 3. století př. Kr., která je v Národním archeologickém museu v Neapoli. V poslední době se však má za to, že se jedná o bustu Archidama III., spartského krále ze 3. století př. Kr.

Archimédova osobnost, využití jeho technických vynálezů při obraně Syrákús, jeho smrt či objevení jeho hrobu, to vše inspirovalo po celá staletí řadu umělců. Připomeňme jen některá díla:

- Dřevoryt Josta Ammana (1539–1591) je v knize *Titi Livii Romanae historiae principis* (1568, Wingandus Gallus, Frankfurt).
- Velmi známá rytina Archiméda plánujícího obranu Syrákús je v knize francouzského historika André Theveta (1516–1590) nazvané *Les vrais pourtraits et vies des hommes illustres*, která vyšla v Paříži roku 1584.
- Italský malíř Domenico Fetti (1589–1624) je autorem obrazu *Archimédés* (1620, $98 \times 73,5$ cm), který se nachází v Drážďanech (Gemäldegalerie alte Meister).
- Španělský malíř a rytec José (Jusepe) de Ribera (lo Spagnoletto, 1591–1652) je autorem obrazu *Archimédés* z roku 1630 (125×81 cm, Museo del Prado, Madrid).
- Italský malíř Pier Francesco Mola (1612–1666) ztvárnil Archimédovu smrt roku 1660 (122×135 cm, soukromá sbírka).
- Italský malíř Giovanni Battista Langetti (1635–1676) je autorem obrazu, na němž je Archimédés s alegorickými postavami Válka a Mír (117×235 cm, soukromá sbírka).
- Italský barokní malíř benátské školy Sebastiano Ricci (1659–1734) se rovněž inspiroval smrtí Archiméda ($42,5 \times 60,5$ cm, Hannover State Museum).
- Italský malíř Giuseppe Nogari (1699–1766) je autorem obrazu *Archimédés* (44×55 cm), který je v Moskvě (Puškinovo muzeum).
- Litografie představující Archiméda se objevila v knize Phillipa Daniela Lipperta (1702–1785) *Dactyliotheca*.
- Italský rytec Giovanni Battista Leonetti (18. stol.) je autorem rytiny *Meditující Archimédés*.
- Anonymní rytina představující smrt Archiméda je v knize Giovanni Maria Mazzucchelli (1707–1765): *Notizie istoriche e critiche intorno alla vita, alle invenzioni, ed agli scritti di Archimede Siracusano*.

---

[22] Cicero se narodil na statku nedaleko Arpina – píše proto o sobě jako o *člověku z Arpina*.

- Rakouský barokní malíř Martin Knoller (1725–1804) zobrazil okamžik, kdy Cicero objevuje Archimédův hrob. Jeho obraz ($23,5 \times 30$ cm) je z roku 1775 (soukromá sbírka, Mannheim).
- Francouzský malíř Hubert Robert (1733–1808) ztvárnil Ciceronův objev Archimédova hrobu (v průvodci *Voyage pittoresque ou description des royaumes de Naples et de Sicile* vydaném v Paříži mezi roky 1781 a 1786).
- Francouzský malíř Pierre Henri de Valenciennes (1750–1819), který roku 1787 zobrazil Cicerona, jak objevuje Archimédův hrob (119×162 cm, Toulouse Musée des Augustins).
- Rytina na titulní stránce Archimédových spisů, které editoval Joseph Torelli roku 1792. Stala se inspirací pro pozdější rytiny a pro stříbrnou medaili vydanou roku 1826 společností New England Society for Promotion of Manufacturers and Mechanic Arts (průměr $63,6$ mm); rytcem medaile byl Christian Gobrecht (1785–1844).
- Benjamin West (1738–1820) ztvárnil Ciceronův objev Archimédova hrobu. Jeho obraz ($124,5 \times 180,5$ cm) je z roku 1797 (Yale University Art Gallery, New Haven, Connecticut, USA).
- Francouzský malíř a spisovatel Charles Paul Landon (1760–1826) zhotovil rytinu představující poprsí Archiméda ($5,7 \times 9,2$ cm). Je v knize *Galerie historique des hommes les plus célèbres de tous les siècles et de toutes nations* (13 svazků, Paris, 1805–1809).
- Anglický rytec George Cooke (1781–1834) ztvárnil Archiméda v knize *The historic gallery of portraits and paintings* (1. svazek, London, 1807).
- Sicilský malíř Giuseppe Patania (1780–1852) je autorem obrazu *Archimédés*, který se nalézá v Palermu (Biblioteca Comunale).
- Rytina na titulním listu německého překladu Ciceronových *Tuskulských rozhovorů* z roku 1806 (přeložil Xaver Weinzierl) představuje nalezení Archimédova hrobu.
- Německý malíř Carl Rottmann (1797–1850) je autorem obrazu *Archimédův syrákúský hrob.*
- Francouzský malíř Eugène Delacroix (1798–1863) zpodobnil smrt Archiméda na fresce v jedné z kupolí knihovny Palais Bourbon v Paříži.
- Francouzský malíř Honoré Daumier (1808–1879) je autorem obrazu *Archimédova smrt* z období 1848 až 1850 (Szépművészeti Museum of Fine Arts, Budapest).
- Italský malíř Niccolò Barabino (1832–1891) je autorem obrazu *Archimédés*, který se nachází v Terstu (Civico Museo Revoltella). Podle něj zhotovil M. Weber rytinu, která se objevila v knize E. Cobham Brewer: *Character sketches of romance. Fiction and dramma* (1. svazek, New York, 1892, str. 60–61).
- Francouzský umělec Edouard Vimont (1846–1930) je autorem obrazu představujícího Archimédovu smrt. Pochází ze dvacátých let 20. století, je v knize Johna Lorda (1810–1894) *Beacon lights of history.*
- Gustave Courtois (1853–1923) ztvárnil Archimédovu smrt na obraze, který motivoval následnou rytinu.

- Anglický portrétista Henry Wyatt (1794–1840) je autorem obrazu Archiméda, který byl poprvé vystaven roku 1832 (76×63 cm). Nyní je v Londýně (Tate Britain Museum).
- Sicilský sochař Luciano Campisi (1859–1933) vyhotovil Archimédovu bustu, která je dnes v Syrákúsách (Latomia dei Cappuccini).
- Sicilský sochař Giuseppe Villa vyhotovil Archimédovu sochu (asi 1870), která je v Syrákúsách (Liceo Scientifico „Corbino“).
- Rytina představující Archimédovu poslední hodinu je v knize Charlotte Mary Yonge: *A Pictorial History of the World's Great Nations from the Earliest Dates to the Present Time* (1. svazek, 1882).
- Maďarský malíř István Farkas (1887–1944) je autorem tempery (1930, 80×99 cm), která je protestem proti vraždě Archiméda a varováním proti hrozbám 20. století (Národní galerie, Budapest).
- Německý sochař Gerhard Thiele (nar. 1928) je autorem sochy Archiméda z roku 1972 (Treptower Park, Archenhold-Sternwarte, Berlín).

Některé z výše uvedených děl se objevily jako ilustrace v knihách, na jejich obálkách, ale i na poštovních známkách (Španělsko 1963, Francie 1963, Nicaragua 1971, DDR 1973, Itálie 1983, Řecko 1983, Paraguay 1984, San Marino 1982, Rusko 1993, Malawi 2008, Guinea-Bissau 2008, Mali 2011, Rumunsko, Gabon, ...).

Archimédés je stále velmi populární postavou, do jisté míry i magickou osobností, jeho podobizny se objevily i na obalech čokolád, na balíčcích doutníků apod.[23] Některé události Archimédova života (objev Archimédova zákona, Heuréka) jsou popularizovány i formou více či méně podařených karikatur a komixů.

Archimédovo jméno nese velký kráter na Měsíci.[24] Archimédova fiktivní podoba je i na Fieldsově medaili, kterou od roku 1950 pravidelně uděluje Mezinárodní matematická unie (International Mathematical Union) na Mezinárodních kongresech matematiků (International Congress of Mathematicians) matematikům mladším 40 let, kteří výrazně přispěli k rozvoji oboru.[25]

Roku 1938 inspiroval Archimédův osud i Karla Čapka (1890–1938). V apokryfu *Smrt Archimedova* líčí, jak k Archimédovi dorazil římský setník Lucius a přemlouval ho ke spolupráci s Římany.

[23] Štítek na krabici s doutníky z let 1895–1915 je barevnou litografií ($10,4 \times 11,7$ cm). Jedna ze stovky tabákových karet vkládaných do balíčků cigaret ($6,0 \times 8,8$ cm, vydána roku 1938 společností Cigarette Oriental de Belgique) znázorňovala Archiméda; na její zadní straně byl jeho stručný životopis ve francouzštině a holandštině. Roku 1965 vydala firma Jacques Superchocholat of Belgium jednu z 240 karet s podobiznou Archiméda ($5,0 \times 6,8$ cm); karty byly vkládány do balíčků čokolády.

[24] Nedaleko tohoto kráteru dopadla 14. září 1959 sovětská sonda Luna 2 a 30. července 1971 v této oblasti přistálo americké Apollo 15. Blízké krátery Aristillus a Autolycus jsou pojmenované po řeckých astronomech 3. století př. Kr., dále Montes Archimede a Rimae Archimedes.

[25] John Charles Fields (1863–1932) byl kanadský matematik, který dal podnět ke vzniku tohoto významného ocenění.

„Poslyš, Archimede, nechtěl bys pracovat s námi? Nemáš ponětí, jaké ohromné možnosti by se ti otevřely v Římě. Stavěl bys ty nejsilnější válečné stroje na světě –“

„Musíš odpustit, Lucie; jsem starý člověk, a ještě bych chtěl vypracovat jednu nebo dvě ze svých myšlenek. – Jak vidíš, zrovna si tady něco rýsuju.“

„Archimede, neláká tě dobývat s námi vlády nad světem? – Proč mlčíš?“

„Promiň,“ brumlal Archimedes nad svou destičkou. „Co jsi řekl?“

„Že člověk jako ty by mohl dobývat světovlády.“

„Hm, světovláda,“ děl Archimedes zahloubaně. „Nesmíš se zlobit, ale já tady mám něco důležitějšího. Víš, něco trvalého. Něco, co tu opravdu zůstane.“

„Co to je?“

„Pozor, nesmaž mi mé kruhy! To je způsob, jak se dá vypočítat plocha kruhové výseče.“

Později byla vydána zpráva, že učený Archimedes přišel o život náhodou.

7 Archimédovo dílo

Z Archimédova díla se dochovalo třináct spisů. Deset z nich badatelé seřadili do následujícího soupisu podle pravděpodobné doby jejich vzniku. V závěru připojili tři další, které se serióznímu zařazení vymykají.

- O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců, kniha I. (*Epipedón isorropión é kentra barón epipedón* α')
- O kvadratuře paraboly (*Tetragónismos parabolés*)
- O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců, kniha II. (*Epipedón isorropión é kentra barón epipedón* β')
- Archimédův dopis Eratosthenovi o mechanických větách; Metoda (*Archimédús peri tón méchanikón theórématón pros Eratosthenén; Efodos*)
- O kouli a válci, kniha I., II. (*Peri sfairás kai kylindrú* α', β')
- O spirálách (*Peri helikón*)
- O kónoidech a sféroidech (*Peri kónoeideón kai sfairoeideón*)
- O plovoucích tělesech, kniha I., II. (*Peri tón hydati efistamenón é peri tón ochúmenón; De iis, quae in humido vehuntur I, II*)
- Měření kruhu (*Kyklú metrésis*)
- Počítání písku (*Psammítés*)
- Kratochvíle (*Stomachion*)
- Poučky (*Liber assumptorum*)
- Problém dobytka (*Probléma boeikon*)

Podle dochovaných zpráv je Archimédés autorem ještě několika dalších děl, která se bohužel nedochovala. Sám Archimédés se na několika místech svých prací stručně zmiňuje o dřívějších spisech, jmenuje například tituly *Základy mechaniky* a *Rovnováha*, které byly sepsány dříve než jeho dvě knihy *O rovnováze.* V *Počítání písku* se odkazuje na svoji starší práci *Principy* (*Archai*) věnovanou Zeuxippovi.

Pappos zmiňuje Archimédovy výsledky o vlastnostech polopravidelných mnohostěnů, uvádí názvy jeho dalších spisů – *O váhách* (*Peri zygón*) a *O těžišti* (*Kentrobarika*). Theón z Alexandrie ve 4. století a Olympiodóros (6. stol.) připomínají Archimédův optický spis *Katoptrika* (*Peri katoptrikón*).

Ke třem Archimédovým spisům se nám dochovaly komentáře Eutokia z Askalónu (asi 480–540): *O kouli a válci I., II., Měření kruhu, O rovnováze.*

Další informace nacházíme v dílech arabských matematiků, kteří se s Archimédovým dílem seznámili dříve než středověká Evropa; připomínají Archimédovy práce o doteku kružnic, o vlastnostech trojúhelníků, o rovnoběžkách, o základech geometrie, definicích apod. Např. Thábit ibn Qurra (asi 830 až 901) zmiňuje Archimédův spis o konstrukci pravidelného sedmiúhelníka.[26]

Archimédés prý též napsal spisy o konstrukci sféry (planetária) pod názvem *O stavbě nebeské sféry* (*Peri sfairopoiás*) a o vodních hodinách. Připomeňme v této souvislosti ještě jeden krátký úryvek z Ciceronových Tuskulských hovorů:

Vždyť když Archimédés uzavřel do koule pohyby Měsíce, Slunce a pěti planet, dokázal totéž, co v Tímaiovi onen Platónův božský stvořitel světa, že totiž u něho jediné otočení řídilo pohyby naprosto odlišné svou menší nebo větší rychlostí. Jestliže se toto nemůže v našem světě dít bez božstva, ani Archimédés by nemohl v oné kouli tytéž pohyby znázornit bez božského nadání. ([Ci], str. 57)

Kromě klasických textů (řeckých a latinských, např. [Hei]) máme dnes k dispozici Archimédovy spisy v řadě překladů. Nejznámější je patrně volný anglický překlad [Hea]; nejnovějším velmi doslovným anglickým překladem je nedávné vydání [Ne], zahrnující zatím pouze spis *O kouli a válci* s Eutokiovým komentářem. V němčině je již klasický překlad Heathovy verze pořízený Fritzem Kliemem (1887 až asi 1943) – viz [Hea], dále překlady [Czw1]–[Czw6] Arthura Gottlieba Czwaliny (1884–1963) a např. [Rud]. Ve francouzštině existují vydání [Ee] a [Mu], v ruštině kvalitní souborné vydání [Ve] a překlad [Rud].

Archimédovy myšlenky jsou podrobně vyloženy jednak v některých souborných vydáních překladů jeho děl (např. [Hea]), jednak v řadě knih, např. [Dij], [Sch], [Cl1] a [Cl2]. V české verzi máme tyto Archimédovy spisy:

- *Archimedovo měření kruhu* [Va1],
- *Archimeda Syrakusského Počet pískový* [Va2],
- *Archimedův výklad Eratosthenovi* [Vr],
- *Problém dobytka* [St], [Ma].

Podrobněji o nich pojednává článek M. Bečvářové uvedený v této knize a [BeM3].

---

[26] Jeho pojednání vyšlo v německém překladu až roku 1927.

RECEPCE ARCHIMÉDOVA DÍLA V EVROPĚ A V ČESKÝCH ZEMÍCH

Martina Bečvářová

1 Archimédés

Archimédés (asi 287 až 212), řecký matematik, astronom, fyzik a inženýr, se narodil v Syrákúsách na Sicílii jako syn astronoma a matematika Feidia. Na Sicílii prožil většinu svého života. O jeho životě a rodině není mnoho známo, ačkoli byl jedním z nejvýznamnějších a všestranně talentovaných učenců starověku. Tvrdí se, že během svého života navázal osobní kontakt s vědci tehdejšího největšího střediska vzdělanosti – Alexandrií, zejména s matematiky Konónem ze Samu (asi 280 až 220) a Eratosthenem z Kyrény (asi 276 až 194). V roce 212 se aktivně účastnil obrany Syrákús před Římany, zkonstruoval přitom obranné stroje, které svou údernou silou udivovaly tehdejší svět, v němž právě probíhala jedna z etap punských válek. Při obraně Syrákús zahynul.[1]

1.1 Dochované Archimédovy spisy

Archimédés napsal řadu významných prací, na něž navázala až novověká matematika a fyzika. Většina z nich se zachovala v latinských, řeckých a arabských přepisech, o jiných jeho spisech víme jen z komentářů a poznámek pozdějších autorů. K Archimédovým neznámějším spisům patří: *Měření kruhu* (Kyklú metrésis), *Počítání písku* (Psammítés), *O kvadratuře paraboly* (Tetragónismos parabolés), *O kouli a válci I a II* (Peri sfairás kai kylindrú), *O spirálách* (Peri helikón), *O kónoidech a sféroidech* (Peri kónoeideón kai sfairoeideón), *Kratochvíle* (Stomachion), *O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců I a II* (Epipedón isorropión é kentra barón epipedón), *Archimédův dopis Eratosthenovi o mechanických větách; Metoda* (Archimédús peri tón méchanikón theórématón pros Eratosthenén; Efodos) – který je často označován pouze stručným názvem *Metoda*, dále spis *O plovoucích tělesech* (Peri ochúmenón), *Poučky* (Liber assumptorum) a *Problém dobytka* (Probléma boeikon).[2]

Archimédovy matematické myšlenky umožňující výpočty obsahů rovinných útvarů, povrchů a objemů těles představují vrchol antické matematiky; v novověku na ně volně navázala matematická analýza a analytická geometrie (studium vlastností křivek a ploch). Ve fyzikálních spisech prozkoumal umístění těžiště různých ploch a těles, jejich rovnováhu, objasnil fyzikální podstatu a použití „jednoduchých strojů" a objevil zákon o nadlehčování těles ponořených do kapaliny, který dnes nese jeho jméno a je součástí všech kurzů fyziky.

[1] Podrobná studie o Archimédově životě a díle je v článku J. Bečváře uveřejněném v této publikaci.

[2] Podrobnější informace o jednotlivých Archimédových dílech lze najít například v [BŠ] a [Gow]. Viz též články uveřejněné v této publikaci.

V odborných studiích a učebnicích věnujících se historii vědy bývá Archimédés oprávněně označován za jednoho z největších matematiků a fyziků starověku, který byl navíc schopen své výsledky úspěšně využít v praxi (využití kladky, páky, kladkostroje, nakloněné roviny, šroubu, konstrukce mechanických strojů apod.).[3]

1.2 Ztracené Archimédovy spisy

Z nejrůznějších historických zmínek, pozdějších poznámek překladatelů a jejich vysvětlujících či doplňujících komentářů se domníváme, že existovaly i jiné Archimédovy studie, které se nedochovaly, resp. nebyly zatím objeveny. Například sám Archimédés zmiňuje ve spisu *Počítání písku* svoji práci *Principy* (Archai), kterou prý věnoval příteli Zeuxippovi. V práci *O rovnováze* se odvolává na své dvě studie nazvané *Základy mechaniky* (Stoicheia tón méchanikón) a *Rovnováha* (Isorropiai).

Pappos Alexandrijský (3. století našeho letopočtu), velký znalec klasické antické matematické tradice, věhlasný komentátor a historik matematiky, zmiňuje Archimédovy výsledky vztahující se ke zkoumání vlastností *polopravidelných těles*.[4] Uvádí ještě dva názvy Archimédových prací – *O váhách* (Peri zygón) a *O těžišti* (Kentrobarika) – věnovaných základům statiky. Připomíná také Archimédův spis *O stavbě* [nebeských] *sfér* (Peri sfairopoiiás), který měl obsahovat popis konstrukce planetária. Theón z Alexandrie (4. století našeho letopočtu), překladatel, komentátor a všestranný znalec řecké matematiky, Olympiodóros z Alexandrie (6. století našeho letopočtu), filozof, komentátor a učitel, a mnozí další uvádějí Archimédův spis o optice nazvaný *Katoptrika* (Peri katoptrikón). Arabští autoři zmiňují také Archimédův spis *O konstrukci vodních hodin* pojednávající o konstrukci hodinového stroje poháněného vodou.

Arabští překladatelé, komentátoři a matematici prý znali ještě další Archimédovy práce pojednávající o dotyku kružnic, vlastnostech trojúhelníků, rovnoběžkách, základech rovinné geometrie a stavbě matematické teorie (definice, postuláty, axiomy, věty, důkazy). Například slavný překladatel řeckých vědeckých spisů Thábit ibn Qurra (836–901) odkazoval na Archimédovu práci *O konstrukci pravidelného sedmiúhelníku*.

---

[3] O Archimédovi a jeho spisech viz J. L. Heiberg: *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii I.–III.*, Leipzig, Teubner, 1910, 1913 a 1915; T. L. Heath: *The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters*, Cambridge University Press, 1897 (německy, Berlin, 1914, reprint: Dover Publications, Inc., 2002); P. ver Eecke: *Les Oeuvres Completes d'Archimede*, Paris, Bruxelles, 1921; Ch. Mugler (ed.): *Archimede, Texte et traduction*, I.–IV., Paris, 1970–1972; P. Midolo: *Archimede e il suo tempo*, Siracusa, Prem. Tipografia del „Tamburo“, 1912; F. Kagan: *Archimedes*, Orbis, Praha, 1953 (překlad z ruštiny); E. J. Dijksterhuis: *Archimedes*, Copenhagen, Ejnar Munksgaard, 1956 (reprint: Princeton, NJ, 1987); I. Schneider: *Archimedes. Ingenieur, Naturwisenschaftler und Mathematiker*, Darmstadt, Wiss. Buchgesellschaft, 1979.

[4] Podrobná studie o pravidelných a polopravidelných tělesech je v článku V. Moravcové uveřejněném v této publikaci.

Je nutno připomenout, že není úplně jasné, zda výše uvedené práce opravdu existovaly, nebo zda se pozdější tvůrci zaštiťovali věhlasem a autoritou klasiků.

2 Archimédovo dílo v průběhu staletí

V následujících odstavcích se pokusíme stručně zmapovat a naznačit složitou a velmi komplikovanou cestu Archimédova díla Evropou v průběhu více než dvaceti století. Připomeneme jen stěžejní okamžiky z pestré historie. Naznačíme, jaký vliv měly Archimédovy práce na rozvoj exaktního myšlení a vědecké práce.

2.1 Starověká antická tradice

V starověku neexistovalo souborné „vydání“ Archimédova díla. Řada jeho prací kolovala v různě kvalitních, více či méně přesných opisech, opisech opisů, předávala se v ústní tradici apod. V průběhu nejrůznějších válek, vpádů barbarů, drancování a ničení měst, vzniku a zániků států, v důsledku přírodních katastrof a nejrůznějších událostí se mnoho rukopisů ztratilo nebo bylo úmyslně či neúmyslně nenávratně zničeno.

Víme však, že Archimédovo dílo bylo od svého vzniku studováno, komentováno, opisováno a přepisováno. Dokonce jeho značná část byla přeložena z původní dórské řečtiny do klasické attické řečtiny, tj. do tehdejšího jazyka vědy a krásného písemnictví. Zdaleka ne všechny Archimédovy spisy přitahovaly takovou pozornost, jakou by si zasloužily. Příčina byla poměrně jednoduchá. Větší zájem byl o spisy *Měření kruhu* a *O kouli a válci*, které patřily k nenáročným a tudíž docela dobře srozumitelným pracím. Zbylé práce byly sice přepisovány, ale studovány byly jen ojediněle, neboť pouze velmi málo učenců bylo schopno porozumět jejich principům.

2.2 Byzantský svět

Roku 476 formálně zanikla tzv. Západořímská říše, která skomírala již téměř jedno století. Řecké písemnictví a vědecká tradice se udržely v tzv. Východořímské říši, neboli Byzantské říši, a na krátký čas i v severním Egyptě. Pro udržení, obnovení a rozšíření matematických znalostí a jejich aplikací bylo důležitým obdobím 6. století, zejména vláda císaře Justiniána I., na základě jehož rozhodnutí byl v Konstantinopoli budován chrám sv. Sofie, zvelebeno celé město a rozšířeno jeho masivní opevnění. Velkolepá výstavba potřebovala nejenom obyčejné pracovní síly, ale také kvalitní odborníky. Na výstavbě se podílel architekt Anthemios Trallský a matematik Isidóros Mílétský (kolem 520), který kolem sebe soustředil mladé studenty a vytvořil novou „školu“, v níž byly studovány, opisovány a komentovány řecké spisy obsahující výsledky, jichž řecká věda dosáhla od 5. století př. n. l. Právě této škole vděčíme za díla starověkých klasiků, která dnes známe.

Byzantské písemnictví má velkou zásluhu na zachování řeckých textů – kodexů Archimédových prací. Neopomenutelnou roli v procesu uchování Archimédových výsledků sehrál Lev Matematik (nazývaný pro svoji moudrost a vzdělanost Filosof), který v 9. století působil v Soluni a Konstantinopoli. Nařídil shromáždit všechny dochované Archimédovy práce, prostudovat jejich jednotlivé verze, vybrat nejlepší, opsat je a vytvořit jednotný kodex, který byl později nazván *Kodex A*.

Snad na přelomu 9. a 10. století byl také v Konstantinopoli sestaven druhý soubor Archimédových prací zaměřený na problematiku rovnováhy a základů mechaniky, který byl později nazván *Kodex B*.

V 10. století byl opět v Konstantinopoli sestaven z několika nových zdrojů třetí Archimédovský soubor tzv. *Kodex C*, který byl však objeven až na konci 19. století a způsobil obrovské překvapení archimédovských badatelů.[5]

2.3 Arabský svět

První arabští vědci se zajímali o antickou vědu. Jako ceněná válečná kořist byly přiváženy řecké rukopisy a již na přelomu 9. a 10. století byly překládány do arabštiny. Například Thábit ibn Qurra přeložil Archimédův spis *Měření kruhu*.[6]

2.4 Latinská Evropa – arabský vliv

Latinská Evropa se s Archimédovým dílem seznamovala poměrně pomalu a pozvolna, nejprve prostřednictvím překladů z arabských zdrojů. Na konci 10. století začalo staré antické vědění uchovávané a přetvářené muslimskou kulturou postupně pronikat do Evropy. Slibný rozvoj kulturních kontaktů však byl přerušen válkou na Pyrenejském poloostrově. V roce 1085 dobyli španělští křesťané Toledo a Araby vyhnali; na obsazené území přicházeli učenci ze západní i jižní Evropy. Díky zásahům osvícených biskupů bylo knižní bohatství z části uchráněno. O záchranu rukopisů se později zasloužil biskup Raymond I. (biskupem 1126–1131/56), který se stal ochráncem překladatelských a kompilátorských škol, jež vznikaly ve dvanáctém století v Toledu, Barceloně, Seville, Segovii, Pamploně, Marseille a Toulouse. V těchto centrech byla vytvářena vědecká a filozofická literatura psaná latinsky, překládalo se z arabštiny prostřednictvím hebrejštiny nebo kastilštiny. Na rozšiřování překladů, kompilací i komentářů se podílely nejrůznější národnosti: moriskové (pokřtění Arabové), mazarabové (islámští Španělé), Španělé, Angličané, Italové atd. Španělsko nebylo jedinou oblastí, kde se arabská kultura mísila s křesťanskou. Obdobný proces probíhal v jižní Francii, Portugalsku a především na Sicílii, které byly starými oblastmi přirozeného styku kultur.

---

[5] O objevu *Kodexu C* pojednává [NN] a [Pal]. Viz též tento článek.

[6] O roli arabských překladatelů viz M. Abattouy: *The History of Arabic Science*, Max-Planck-Institut für Wissenschaftgeschichte, preprint no. 53, Berlin, 1996, E. S. Kennedy: *Studies in the Islamic Exact Science*, Beirut, 1983, R. Lorch: *Greek-Arabic-Latin: the Transmission of Mathematical Texts in the Middle Ages*, preprint no. 82, Max-Planck-Institut für Wissenschaftgeschichte, Berlin, 1997.

Teprve ve 12. století se arabské rukopisy obsahující Archimédovy práce dostaly do Evropy a první učenci se pokusili o jejich překlad a studium. Spis *Měření kruhu* přeložil Gerhard z Cremony (1114–1187), jeden z nejznámějších a nejslavnějších toledských překladatelů.[7] Nezávislý, avšak méně kvalitní překlad téhož spisu, který obsahoval mnoho chyb a nepřesností, udělal ve stejném období opět v Toledu Platón z Tivoli (kolem 1150), známý a ceněný překladatel vědecké literatury.

2.5 Latinská Evropa – vliv řeckých kodexů

V evropské tradici studia Archimédova díla sehrály důležitou roli *Kodexy A* a *B*, které se neznámou cestou dostaly na Sicílii snad již za vlády Normanů.[8] Bez všech pochybností je prokázáno, že v roce 1266 byly oba kodexy uchovávány v rodové knihovně Manfréda Sicilského (1231–1266), posledního sicilského krále z rodu Štaufů, který padl v bitvě u Beneventa. Rozsáhlou, proslulou a nesmírně cennou knihovnu získala jako válečnou kořist papežská kurie, která ji nechala převést do Říma. Postupem času se kodexy za nejasných okolností rozešly a nakonec úplně ztratily.

2.6 Kodex A

Z římské papežské knihovny se *Kodex A*[9] na dlouhou dobu ztratil. Pravděpodobně se dostal do soukromých rukou, putoval po různých šlechtických či církevních knihovnách. Teprve před koncem 15. století se opět vynořil. V roce 1491 jej studoval Giorgio Valla (1430–1499), slavný italský humanista, znalec antické literatury a úspěšný překladatel z řečtiny. Řecky psaný kodex pečlivě opsal, prostudoval a připravil do tisku. Před dokončením závěrečných prací

[7] Gerhard z Cremony (též Gherardo či Gherardus Cremonensis) se narodil v Cremoně v Lombardii. Prý se dozvěděl, že v Toledu mají arabsky psaný Ptolemaiův *Almagest*, který nebyl v Itálii dostupný. Proto odešel do Toleda, kde byl uchvácen hojností neznámé literatury. Naučil se arabsky a po celý zbytek života se věnoval překládání. Připojil se k toledské překladatelské škole podporované především biskupem Raymondem I. a jeho nástupci. V Toledu se překládaly staré rukopisy z arabštiny do kastilštiny a z kastilštiny do latiny. Gherard se stal pravděpodobně nejplodnějším členem této školy, překládal práce z astronomie, lékařství, filozofie, optiky, alchymie a matematiky. Podle pozdějších informací přeložil sedmdesát až devadesát arabských spisů, u některých překladů však jeho autorství nelze jednoznačně prokázat. Mnoho prací asi přeložil sám, mnohé vznikaly pod jeho vedením či na základě jeho inspirativního působení.

[8] Sicílie byla starou oblastí přirozeného styku kultur a civilizací. Původně řecká kolonie, později součást římského impéria a východořímské říše se v roce 878 stala na padesát let arabským panstvím. V desátém století byla znovu ovládnuta Řeky, roku 1091 je vystřídali jihoitalští Normané. Od devátého století zde kromě latinsko-italsky mluvícího obyvatelstva žili Řekové i Arabové. Sicilané užívali jako hovorové jazyky latinu, řečtinu a arabštinu; proto se z nich stávali překladatelé, diplomaté a cestovatelé. Putovali do Konstantinopole a Bagdádu a získávali arabské a staré řecké rukopisy, které byly za vlády Fridricha II. (1194–1250) a jeho syna Manfreda (1231–1266) překládány do latiny. Východní učenci zde četli Ptolemaiovy a Eukleidovy práce, kopie rukopisů se odtud šířily do celé Evropy.

[9] Obsah *Kodexu A*: *O kouli a válci*, *Měření kruhu*, *O kónoidech a sféroidech*, *O spirálách*, *O rovnováze*, *Počítání písku*, *O kvadratuře paraboly* a *Komentáře Eutokia z Askalónu* (6. století).

však zemřel, a tak se jeho sen vydat kodex tiskem neuskutečnil. Naštěstí jeho práce neupadla v zapomnění. Naopak sehrála důležitou roli při studiu Archimédova díla, neboť z ní byly opsány kopie[10] a z nich byly pořizovány překlady dílčích spisů do latiny.

Roku 1450 Jakub z Cremony (zemř. kolem 1452), vzdělaný kněz ze San Cassiana, na příkaz samotného papeže Mikuláše V.[11] přeložil část *Kodexu A* z řečtiny do latiny. Z jeho rukopisu byla pořízena řada opisů, které se rozšířily mezi elitu středověké Evropy. Získali je například Mikuláš Kusánský (1401–1464) a Johannes Regiomontanus (1436–1476), který nebyl s překladem úplně spokojen a začal chystat do tisku revidovaný a bohatě komentovaný překlad.[12]

2.7 Kodex B

Pravděpodobně méně známý, ale zcela jistě méně rozšířený *Kodex B* prodělal podobně složitou cestu jako *Kodex A*. O osudu *Kodexu B* je dnes známo jen málo. V roce 1269 byl dominikán Willem van Moerbecke (1215–1286), žák Alberta Velikého (1207–1280), proslulý překladatel z řečtiny a arabštiny a vlivný člen papežského dvora ve Viterbu, požádán papežskou kurií, aby přeložil většinu pojednání obsažených v *Kodexu A* a dále prostudoval a přeložil ty části *Kodexu B*, které nebyly obsaženy v *Kodexu A*.[13] O dalších peripetiích *Kodexu B* není nic známo. Jeho stopy zcela zmizely počátkem 14. století, nedochovaly se žádné jeho opisy, přepisy či komentáře.

3 Knihtisk a Archimédovo dílo

3.1 První tisky ve druhé polovině 15. století a první polovině 16. století

Ve druhé polovině 15. století byl objeven knihtisk, v západní a jižní Evropě byly postupně zakládány tiskařské dílny, které umožnily rychlejší šíření „módní literatury“ a také antických spisů, nárůst knižní produkce a rozkvět vzdělanosti.

Roku 1503 Luca Gaurico (1476–1558), dnes téměř zapomenutý renesanční neapolský matematik, vydal ve věhlasné tiskárně v Benátkách latinské překlady

[10] Opisy Vallovy práce jsou dnes považovány za vzácné kulturní památky (např. *Kodex Marcianus v Benátkách*, *Kodex Laurentianus ve Florencii*, *Kodex Parisiensis ve Fontanaibleau*).

[11] Mikuláš V. (1397–1455), vlastním jménem Tommaso Parentucelli, vykonával pontifikát od roku 1447 až do své smrti. V roce 1448 oficiálně založil Vatikánskou knihovnu. Pod jeho vlivem papežská kancelář začala psát všechna *breve* a veškeré dokumenty humanistickou polokurzívou, což mělo velký vliv na rozšíření tohoto typu písma v Evropě.

[12] Regiomontanova práce nikdy tiskem nevyšla, její rukopis je uchováván v Norimberku.

[13] Nedokonalý Moerbeckeův překlad je uchováván v Papežské apoštolské knihovně ve Vatikánu. Poznamenejme, že v něm chybí překlad spisu *Počítání písku*, který byl obsažen v *Kodexu A*. Obsahuje však latinský překlad spisu *O plovoucích tělesech*, jenž byl zahrnut do *Kodexu B*. Původní řecký text Archimédovy práce *O plovoucích tělesech* byl dlouho nezvěstný. Jeho autorství bylo zpochybňováno a za autora byl považován W. van Moerbecke. Řecká verze spisu byla objevena až na počátku 20. století, kdy byla také doceněna a rehabilitována překladatelská činnost W. van Moerbeckeho.

Měření kruhu a *O kvadratuře paraboly*, které patřily mezi oblíbené a často studované Archimédovy spisy. Poznamenejme, že se jednalo o první archimédovský tisk, který je dnes bibliofilskou vzácností. Vyvolal novou vlnu zájmu o Archiméda, jeho život a dílo.

Roku 1543 Niccolo Tartaglia (1500–1557), slavný italský renesanční matematik, využil Gauricův tisk, přepracoval jej a v Benátkách vydal vylepšené překlady *Měření kruhu* a *O kvadratuře paraboly*. Roku 1565 vyšel opět v Benátkách zásluhou Tartagliovy práce samostatný tisk Moerbeckeova latinského překladu spisu *O plovoucích tělesech*.[14]

První „souborné“ vydání všech známých Archimédových spisů (řecké texty, latinské překlady a Eutokiovy komentáře) je spojeno s rozsáhlou a mnohaletou prací Thomase Venatoria (1488–1551), německého matematika, teologa a reformátora. Roku 1544 v Basileji vydal řecké texty odpovídající textům obsaženým v *Kodexu A* a latinský překlad Archimédových prací, který vytvořil Jakub z Cremony, k jehož opravám použil již dříve zmíněný Regiomontanův překlad.

3.2 Tisky ve druhé polovině 16. století

Ve druhé polovině 16. století se vlivem rozkvětu výuky přírodních věd na předních evropských univerzitách zvýšil zájem o studium „klasiků“. Objevily se nové latinské bohatě komentované překlady Archimédových prací. Roku 1558 Federigo Commandino z Urbina (1509–1575), italský renesanční filozof, lékař, znalec řecké literatury a propagátor matematiky, vydal v Benátkách kvalitní latinské překlady Archimédových spisů *Měření kruhu*, *O spirálách*, *O kvadratuře paraboly*, *O kónoidech a sféroidech* a *Počítání písku*. V roce 1565 připojil ještě komentované vydání latinské verze spisu *O plovoucích tělesech*.

V roce 1570 Francesco Maurolico (1494–1575), italský mnich ze Sicílie, znalec klasických jazyků a vynikající překladatel, vydal v Palermu latinský překlad Archimédových prací nazvaný *Armirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia mathematica*, který se stal „kánonem“ pro všechny tisky 17. a 18. století.

3.3 Archimédovo dílo v Evropě 17. a 18. století

V průběhu 17. a 18. století opakovaně vycházely tiskem veškeré dostupné a známé Archimédovy spisy, a to buď jako řecké texty doplněné latinskými překlady (tzv. zrcadlová vydání), nebo čistě latinské překlady. Souborná vydání byla obvykle doplněna matematickými, historickými i metodickými komentáři. V kontinentální Evropě se stalo oblíbeným řecko-latinské vydání Davida Rivalta a Flurantia, které vyšlo roku 1615 v Paříži. V Londýně byl roku 1675 vytištěn latinský spis *Archimedis Opera* vypracovaný slavným anglickým matematikem Isaacem Barrowem (1630–1677). Díky četným podrobným komentářům a vysvětlivkám pro učitele i čtenáře se rychle rozšířil v celé Evropě.

[14] Tento tisk měl vliv i na vývoj fyziky, studoval jej např. Galileo Galilei (1564–1642).

Ve druhé polovině 17. století se objevily první překlady Archimédova díla do národních jazyků, které odstartovaly hlubší zájem o další studium archimédovské tematiky (např. němčina – 1670 Norimberk, 1798 Tübingen, francouzština – 1807 Paříž). Současně se vynořily nové překladatelské a komentátorské problémy; souvisely s nedostatkem kvalitních řeckých pramenů, neočekávanými objevy dříve nedostupných arabských rukopisů, prvními odbornými pokusy vyjasnit okolnosti vzniku a šíření Archimédových myšlenek a snahami korigovat „renesanční“ kopie a rukopisy. Evropa konce 18. století byla hnaná touhou vyhledat originální řecké zdroje, které by umožnily plně rekonstruovat, upřesnit, doplnit či přepracovat již existující překlady Archimédových prací.

4 Nové objevy Archimédových prací

V následujících odstavcích připomeneme všechny „moderní“ objevy zapomenutých Archimédových prací, přiblížíme jejich historii a ukážeme, jakou sehrály roli v recepci Archimédova díla.

4.1 Objev úlohy „Problém dobytka“

Roku 1773 Gotthold Ephraim Lessing (1729–1781), německý básník, estetik, kritik, překladatel a znalec klasické literatury, uspořádával ve Wolfenbüttelu knihovnu vévody Augusta a připravoval její katalog. Objevil starý řecký kodex obsahující Archimédovu matematickou úlohu adresovanou Eratosthenovi a dnes označovanou jako *Problém dobytka*, která byla napsána 22 distichy podle dávného homérského motivu.[15] G. E. Lessing ji uveřejnil v učebnici literatury nazvané *Zur Geschichte der Literatur aus den Schatyen der Herz. Bibliothek zu Wolfenbüttel*.[16] Delší dobu byly vedeny spory o pravost kodexu a původnost úlohy. Na počátku 19. století byl v národní knihovně v Paříži (Bibliotheque Nationale Paris) nalezen starý řecký rukopis *Codex Paris Graece 2448*, v němž byla zapsána tatáž úloha (viz saec. XIV, fol. 57).[17]

4.2 Objev ztraceného Archimédova spisu „O metodě“

Popišme nyní zajímavou historii a překvapivý objev středověkého rukopisu obsahujícího mimo jiné Archimédovu práci *O metodě*.[18] Původní rukopis obsahující opisy Archimédových děl byl sepsán pravděpodobně ve druhé polovině 10. století[19] v Konstantinopoli, kde byla od devátého století zásluhou Lva Matematika[20] studována matematika, opisovány práce klasiků a postupně doplňovány významné práce, které v konstantinopolské knihovně chyběly. Byly tak

[15] Podrobný rozbor úlohy *Problém dobytka* je otištěn ve studii T. Bártlové uveřejněné v této publikaci.

[16] Zweiter Beitrag, Braunschweig, 1773.

[17] V současné době je opět zpochybňována původnost úlohy; hovoří se o „pseudoarchimédově“ úloze.

[18] Historie objevu rukopisu je podrobně popsána v [Pal].

[19] Podle všech dosavadních výzkumů se předpokládá, že rok 975 je rokem vzniku rukopisu.

[20] Lev Matematik (asi 790 až 869) byl polyhistorem, výraznou osobností byzantské vědy a zakladatelem palácové školy v Konstantinopoli. Více viz [BeM1].

konzervovány výsledky antické vědy (Eukleidés, Archimédés, Apollónios, Diofantos, Ptolemaios atd.). Vznik rukopisu spadá do období největšího rozkvětu byzantské říše, která byla centrem politiky, křesťanství, obchodu i kultury celého východního Středomoří.

Roku 1899 objevil Papadopoulos-Kerameus, docent Petrohradské univerzity, při zpracovávání katalogu[21] knihovny kláštera metochia Panagiou Tafou v Istanbulu (dceřiný klášter jeruzalémského kláštera Božího hrobu)[22] řecky psanou modlitební knížku se zajímavým matematickým textem prosvítajícím pod náboženským textem, tj. palimpsestový kodex.[23] Rukopis katalogizovaný pod číslem MS 355 pečlivě prohlédl a odhalil nápis, že v 16. století patřil klášteru Sv. Sávy ve Svaté zemi.[24]

Není zcela jasné, jak se kodex do kláštera sv. Sávy dostal, muselo to být nejpozději v 16. století. V metochiu však musel být již roku 1840, neboť v tomto roce klášter navštívil slavný biblista Lobegott Friedrich Konstantin von Tischendorf,[25] který roku 1846 popsal svoji cestu a svá studia na „Východě“. Napsal, že v klášteře neviděl nic zajímavějšího než starou řecky psanou modlitební knížku, palimpsest s prosvítajícím tajemným matematickým textem.

L. F. K. von Tischendorf záhadnou cestou získal jeden list rukopisu, který byl po jeho smrti roku 1879 zakoupen do sbírek Cambridge University Library a katalogizován jako C.U.L. Ms. Add. 1879.23. Tischendorfův objev nevzbudil žádnou pozornost. List z jeho pozůstalosti byl prostudován teprve roku 1968

---

[21] Papadopoulos-Kerameus vydal pětisvazkový katalog knihovny pod názvem *Hierosolymitiké Bibliothéké étoi katalogos tón en tais bibliothékais tou hagiótatou apostolikou te kai katholikou orthodoxou patriarchikou thronou tón Hierosolymón kai pásés Palaistinés apokeimenón hellénikón kódikón*, St. Petersburg, 1891–1915 (reprint: Brussels, 1963).

[22] Jedná se o řecký patriarchální klášter, který se nacházel v Istanbulu. V něm byly uchovávány cenné rukopisy patřící původně klášteru Božího hrobu v Jeruzalémě. Slovo metochion označuje v ortodoxní církvi tzv. církevní ambasádu (vyslanectví); metochion je nezávislé na okolních klášterech.

[23] Palimpsest je pergamenový svitek nebo kodex, který byl mechanickou a chemickou cestou zbaven původního textu a popsán novým textem. Mnohdy byly původní listy ještě rozřezány, ořezány a svázány do kodexu zcela jiného formátu.

[24] Klášter sv. Sávy byl založen roku 483 (podle některých zdrojů až roku 492) několik kilometrů východně od Betléma. Byl vybudován jako obrovská pevnost v poušti. Od prvopočátku patřil mezi intelektuální centra Svaté země. Až do konce 12. století měl skvěle organizovanou písařskou dílnu, která produkovala skvostné rukopisy pro celou Svatou zemi. Roku 1834 jeho knihovna uchovávala více než 1 000 starých rukopisů. Roku 1839 ji navštívili reverend George Croly a David Roberts, člen královské londýnské malířské akademie, kteří se pokusili zhotovit několik obrázků kláštera, navštívit klášterní knihovnu a sestavit její katalog. Mniši jim však rozsáhlejší průzkum knihovny nepovolili.

[25] Lobegott Friedrich Konstantin von Tischendorf (1815–1874) byl protestantský teolog, který se věnoval novozákonní textové kritice. Německou vládou byl nejprve vyslán do Paříže, aby studoval rukopisy ve francouzské Národní knihovně, později pracoval v čelných evropských knihovnách a cestoval po klášterech v Egyptě, Palestině, Sýrii a Malé Asii. Ze svých cest přinesl mnoho cenných rukopisů, mimo jiné starozákonní pergamenový *Codex Friderico-Augustanus* a nejstarší řecký rukopis Bible *Codex sinaiticus*. Byl jedním z největších znalců klasických starozákonních a novozákonních textů.

Nigelem Wilsonem, který zjistil, že se jedná o část nalezeného a později opětovně ztraceného palimpsestu obsahujícího Archimédovy práce.

Roku 1899 Papadopoulos-Kerameus ještě netušil, jak zajímavý a pro vědu cenný rukopis objevil. Opsal dva dobře čitelné řádky prosvítajícího matematického textu a zaslal je tehdejšímu největšímu znalci antických matematických textů Johannu Ludwigovi Heibergovi (1854–1928). Ten roku 1906 navštívil knihovnu kláštera metochion Panagiou Tafou, nalezl palimpsest, pořídil fotografie všech jeho folií a pečlivě jej prostudoval. Podle typu písma a úpravy zjistil, že starší text pochází z 10. století a obsahuje některé známé Archimédovy práce (např. celý řecký text spisu *O plovoucích tělesech*) a světu neznámý text ztraceného Archimédova spisu *O metodě*. Později se ukázalo, že v kodexu je též zlomek Archimédovy matematické hříčky *Kratochvíle* (Stomachion).[26] Kritický rozbor studovaného rukopisu publikoval J. L. Heiberg již roku 1907.[27]

Není úplně jasné, co se s kodexem dělo během dalších devadesáti let. Objevil se 28. října 1998 na aukci slavné aukční síně Christie's New York a byl deklarován jako rukopis ze soukromé anonymní francouzské kolekce. Den po oznámení aukčních podmínek se řecká vláda a řecký patriarcha pokusili aukční prodej zastavit. Obrátili se na soud s tím, že se jedná o ukradené řecké kulturní dědictví. Soud však konstatoval, že francouzská rodina prokazatelně vlastnila rukopis od 60. let 20. století, ale že není možno prověřit její tvrzení, že rukopis měla již ve 20. letech 20. století.[28] Dražba byla nakonec povolena. Anonymní americký sběratel zakoupil kodex za 2 miliony dolarů a slíbil, že jej poskytne k vědeckému studiu. V lednu 1999 jej deponoval do muzea *The Walters Art*

[26] Zmínky o existenci tohoto Archimédova hlavolamu (*Loculus Archimedius*), jeho popis a vysvětlení nalézáme v antické literatuře například u římského básníka a politika Ausonia, který o něm ve 4. století n. l. napsal báseň. Archimédés hlavolam nevymyslel; patrně však popsal jeho konstrukci. Více viz [BŠ] a studie Z. Halase uveřejněná v této publikaci.

[27] Informace o Heibergově objevu byly otištěny německy v časopise Bibliotheca Mathematica (1906 a 1907), anglicky ve zprávách American Mathematical Society (1908) a v časopise Monist (1909). Objev rukopisu byl kompletně zpracován až v novém souborném vydání Archimédova díla, viz J. L. Heiberg (ed.): *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii*, Leipzig, 1910, 1913, 1915 (reprint: 1972). Nejnověji viz též [NN], [Pal] a [NNWT].

[28] Podle výsledků soudního procesu je pravděpodobné, že rukopis byl kolem roku 1922 z klášterní knihovny metochion Panagiou Tafou v Istanbulu odcizen.

Museum v Baltimore. Rukopis zpřístupnil k nutné záchranné konzervaci, digitalizaci a rozsáhlému vědeckému studiu. V roce 1999 byl sestaven velký mezinárodní tým špičkových specialistů a odborníků, který při své práci využíval nejmodernější technologie.[29]

Ukázalo se, že modlitební knížka, v níž Archimédova práce přežila, od Heibergových časů velmi utrpěla. Ztratily se tři listy, které J. L. Heiberg ještě 1906 roku prostudoval, fotografoval a komentoval; zůstaly nám tedy jen jejich staré fotografie. Kniha sama byla poškozena plísní a vlhkostí, neboť byla špatně a neodborně skladována. J. L. Heiberg ji viděl v podstatně lepším stavu, mohl ji tedy studovat. Dnes jsou velké plochy textu stěží identifikovatelné i s použitím nových metod. Další pohromou bylo zcela neobvyklé přimalování čtyř starých obrázků, na nichž byli evangelisté. Podařilo se ukázat, že obrázky evangelistů byly pořízeny po roce 1929 podle obrázků v rukopise *Manuscripts Grecs de la Bibliothéque Nationale*, který je uložen v Národní knihovně v Paříži.

Nejnovějším studiem se podařilo zjistit, za jakých okolností palimpsest vznikl. Z historie víme, že relativně příznivý vývoj byzantské říše byl poprvé vážněji narušen roku 1203, kdy byla vyhlášena papežem Innocencem III.[30] čtvrtá křížová výprava na obranu Svaté země, a podruhé následujícího roku, kdy italská vojska účastnící se křížové výpravy Konstantinopol vydrancovala.[31] Poválečné období nebylo nakloněno studiu a rozvoji matematiky, objevilo se naopak brojení proti vědě. Tento čas byl obecně považován za dobu vzniku palimpsestu, usuzovalo se tak z tvaru písma a typu ilustračních obrázků. V roce 2002 profesor John Lowden z Courtauld Institute použil ke studiu rukopisu ultrafialové světlo a rozluštil „tiráž“ na spodní části rubové strany prvního listu, v níž se objevilo datum 13. duben 1229. Zdá se tedy, že toto datum ukazuje na dobu zrodu modlitební knížky, která byla napsána na staré pergameny obsahující text Archimédových prací. Jednotlivé listy byly očištěny od původního textu, rozřezány, otočeny o 90 stupňů, oříznuty, nově popsány a sešity v jeden kodex. Tak došlo k nenávratnému poškození některých částí původního textu.[32]

---

[29] Výsledky práce byly postupně zveřejňovány v odborném tisku a na webové stránce projektu [Pal]. Souhrnnou informaci lze nalézt v monografii Netz R., Noel W., Wilson N., Tchernetska N.: *The Archimedes palimpsest I, II*, Cambridge University Press, New York, 2011.

[30] Innocenc III. (1160–1216) byl papežem v letech 1198 až 1216. Díky svému rozsáhlému vzdělání, politické prozíravosti, obratnosti a taktu reorganizoval římskou kurii a upevnil její postavení v Itálii. Za jeho vlády dosáhlo papežství jednoho ze svých vrcholů. Poznamenejme, že roku 1204 uznal Přemysla Otakara I. (asi 1155–1230) za českého krále, přiznal našim zemím výsadu království a Přemyslovcům dědičný královský titul.

[31] V tomto čase Konstantinopol ovládali Benátčané, kteří dalšímu rozvoji svého velkého námořního rivala příliš nepřáli. Benátčané následně založili kolonie v Egejském moři a na Krétě, s podporou římského stolce vzniklo tzv. Latinské císařství, Nikajské císařství, Epirský despotát, Trapezuntské císařství a další menší státní celky. S pomocí Janova, který byl odvěkým námořním a obchodním konkurentem Benátek, se Konstantinopol roku 1261 zbavila západního vlivu a Benátčany vyhnala.

[32] O historii objevu *Kodexu C* viz [NN], [Pal] a M. Bečvářová: *Archimédovy práce česky*, in J. Bečvář, M. Bečvářová: *29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí,*

Není vyloučené, že se ve starých klášterních knihovnách a archivech na Blízkém Východě mohou nacházet další knihy, kodexy, svitky a dokumenty obsahující ztracená díla antických i středověkých myslitelů. Příběh spisu *O metodě* ukazuje, že různá překvapení jsou i v budoucnosti možná.

4.3 Objev hříčky „Stomachion“

Roku 1899 Heinrich Suter (1848–1922), německý orientalista a historik matematiky a astronomie, objevil v berlínské královské knihovně arabskou verzi Archimédovy hříčky nazývané *Stomachion;* opsal ji, přeložil do němčiny, vysvětlil a stručně komentoval.[33]

5 Zrod moderních kritických vydání a překladů

Na konci 19. a počátku 20. století se objevily pokusy pořídit nové kritické vydání souborného Archimédova díla. Výrazný úspěch zaznamenal J. L. Heiberg, který po mnoha letech náročného studia, analýzy a komparací všech dostupných rukopisů a tisků vydal třísvazkovou práci *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit J. L. Heiberg.*[34] Po objevech nových rukopisů obsahujících některé Archimédovy ztracené práce J. L. Heiberg výše uvedenou monografii přepracoval a pod názvem *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii I.–III.* publikoval nové souborné vydání Archimédova díla,[35] které se stalo základem moderních překladů do všech národních jazyků.

V roce 1897 Thomas Little Heath (1861–1940), anglický matematik, historik matematiky a znalec antické matematiky, vydal volný anglický překlad souborného Archimédova díla, který doplnil řadou komentářů a poznámek a nazval *The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters*.[36] Roku 1912 Pasquale Midolo přeložil veškeré známé Archimédovy práce do italštiny,[37] roku 1921 Paul ver Eecke (1867–1959) uveřejnil první kompletní francouzský překlad.[38] Roku 1956 vyšla kniha prezentující Archimédovy spisy a reflektující nejnovější archimédovské studie a objevy, jejímž autorem byl

---

22. 8. – 26. 8. 2008, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2008, str. 93–102.

[33] Heinrich Suter: *Der Loculus Archimedius oder das Syntemachion des Archimedes. Zum ersten mal nach zwei arabischen Manuskripte der Königlichen Bibliothek in Berlin herausgegeben und übersetzt*, Festschrift zum 70. Geburtst. M. Cantor's, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 9(1899), str. 491–500. Matematická podstata *Kratochvíle* (Stomachionu) je popsána v [NN].

[34] Volumen I.–III., Lipsiae, 1880–1881.

[35] Teubner, Leipzig, 1910, 1913 a 1915.

[36] University Press, Cambridge, 1897. Německý překlad Heathovy monografie vyšel v Berlíně roku 1914. Reprint anglické verze vyšel roku 2002 zásluhou nakladatelství Dover Publications, Inc.

[37] P. Midolo: *Archimede e il suo tempo*, Prem. Tipografia del „Tamburo“, Siracusa, 1912.

[38] P. ver Eecke: *Les Oeuvres Completes d'Archimede*, Paris, Bruxelles, 1921.

slavný holandský matematik Eduard Jan Dijksterhuis (1892–1965).[39] V sedmdesátých letech moderní francouzský překlad respektující všechny překladatelské zásady vytvořil Charles Mugler.[40]

6 České překlady klasických prací

Od šedesátých let 19. století, kdy se postupně rozšiřovala výuka matematiky v českém jazyce na středních školách a začaly se objevovat české matematické přednášky na pražské polytechnice, citelně chyběly české učební texty a pomůcky. Proto se rozšířily snahy sepsat první české středoškolské i vysokoškolské učebnice matematiky a prosadily se tendence směřující ke vzniku překladů matematických děl klasiků i některých moderních monografií.[41]

První takovéto české překlady matematických děl vznikly v sedmdesátých letech 19. století.[42] Jejich autoři byli tehdy aktivními členy *Jednoty českých mathematiků*, kteří teprve nedávno ukončili svá vysokoškolská studia a s mladickým nadšením a energií se pustili do obtížné práce. V osmdesátých letech se objevily další překlady,[43] hlavní pozornost českých matematiků byla však v té době zaměřena především na sepisování původních odborných prací, monografií a českých učebnic. Další překlady nalezneme až na počátku 20. století.

Značná pozornost byla věnována překladu stěžejního matematického díla všech dob – Eukleidovým *Základům* – tj. knize, která ovlivňovala vývoj matematiky a její vyučování od třetího století př. n. l. více méně až do současnosti.[44]

---

[39] E. J. Dijksterhuis: *Archimedes*, Ejnar Munksgaard, Copenhagen, 1956. Reprint práce vyšel roku 1987 v nakladatelství Princeton, NJ.

[40] Ch. Mugler (ed.): *Archimede, Texte et traduction*, I.–IV., Paris, 1970–1972.

[41] Poznamenejme, že v této době se česká vědecká komunita pokusila i o překlad jednoho Aristotelova logického spisu. Antonín Jaroslav Vrťátko přeložil roku 1860 Aristotelův spis *Kategorie*, který vydal pod názvem *Aristotela Katégorie*. Podruhé tento spis přeložil v roce 1918 Pavel Vychodil. První ucelený český překlad logických Aristotelových spisů (*Organon*) je spjat až se jménem Karla Berky, jehož překlady vycházely od roku 1958 až do roku 1978. Podrobněji o českých překladech matematických děl klasiků a moderních monografií viz [BeM2], str. 263–279.

[42] Například na počátku 70. let 19. století Emil Weyr přeložil dvě monografie italského geometra Luigi Cremony *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných) a *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Úvod do geometrické teorie křivek rovinných), Martin Pokorný přeložil slavnou učebnici německého matematika Richarda Baltzera *Die Elemente der Mathematik* (Dra Richarda Baltzera Základové matematiky. Díl Prvý. Prostá aritmetika) a Karel Zahradník přeložil významnou práci italského matematika Giusta Bellavitise *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica (Calcolo delle equipollenze)* (Methoda equipollencí čili rovnic geometrických).

[43] Například na počátku 80. let 19. století František Josef Studnička přeložil slavný článek Bernarda Bolzana *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzstes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichunge liege* (Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden realný kořen rovnice).

[44] Cesta Eukleidových *Základů* světem od jejich vzniku až do současnosti, charakteristika jejich obsahu i analýza jejich významu, stejně jako vznik a osudy českých překladů jsou popsány v [BeM1], str. 7–111.

Přeloženy byly také nepatrné zlomky z díla René Descarta (1596–1650), Blaise Pascala (1623–1662) a Bernarda Bolzana (1781–1848).[45]

7 Překlady Archimédových prací

V následujícím textu se budeme věnovat čtyřem českým překladům Archimédových prací, z nichž dva jsou od svého vzniku v povědomí české matematické obce, třetí však zůstal zcela na okraji zájmu a byl až do roku 2008 zcela zapomenut, čtvrtý byl sice znám, ale nebyla mu věnována žádná pozornost.[46]

7.1 Český překlad spisu „Měření kruhu"

Dochovaná část Archimédova *Měření kruhu* je asi jen zlomkem jeho původní práce; známe z ní pouze tři matematické věty. V první je vysloven důležitý vztah mezi obvodem a obsahem kruhu – obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka, jehož délky odvěsen jsou rovny poloměru a obvodu kruhu. Důsledkem je skutečnost, že ve vzorci pro obsah i obvod kruhu figuruje stejná konstanta, kterou dnes označujeme symbolem π (poměr obvodu a průměru kruhu). Ve druhé větě je uveden přibližný odhad této konstanty, třetí věta uvádí daleko přesnější odhad. Je pravděpodobné, že se jedná jen o jakýsi výtah z původního Archimédova díla, v němž asi navíc došlo k chybnému zařazení druhé věty, která je jen jednoduchým důsledkem věty třetí.[47] Archimédův spis *Měření kruhu* byl od svého vzniku často studován, přepisován a komentován. Patřil k oblíbeným spisům, protože obsahoval matematicky jednoduchou, dobře představitelnou a pochopitelnou látku.[48]

V roce 1903 vydal Miloslav Valouch[49] český překlad Archimédova *Měření kruhu*.[50] Doplnil jej dvanáctistránkovým úvodem, v němž podal stručné informace o Archimédově životě a díle, o jeho významu a připojil seznam literatury. Vyložil základní myšlenky některých metod výpočtu druhé odmocniny, aby objasnil, jaké výpočty a úvahy Archimédés prováděl. K překladu použil kritické

[45] Více viz [BeM2], str. 263–279.

[46] Viz M. Bečvářová: *Archimédovy práce česky*, in J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): *29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008*, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2008, str. 93–102.

[47] O Archimédově spise *Měření kruhu* viz např. [BŠ], [Pic], [Kno1], [Kno4], [Sat]. Podrobný matematický rozbor spisu *Měření kruhu* je uveden v článku J. Bečváře uveřejněném v této knížce.

[48] O historii tohoto spisu viz např. [BŠ].

[49] Miloslav Valouch (1878–1952) působil po studiích na pražské univerzitě jako středoškolský profesor matematiky a fyziky na středních školách v Olomouci, Rokycanech, Litomyšli a Praze. Od roku 1918 až do svého penzionování v roce 1927 pracoval na Ministerstvu školství a národní osvěty, kde se věnoval otázkám vyučování a reformy školství. Podílel se také na přípravě nových gymnaziálních učebnic, které reagovaly na změny osnov tohoto typu středních škol. Po odchodu do penze aktivně pracoval v *Jednotě československých matematiků a fysiků* (dlouhá léta byl jejím ředitelem). Sepsal mnoho článků, několik knížek a středoškolských učebnic. Známý se stal díky logaritmickým tabulkám (první vydání 1904), které v jeho úpravě vycházely několik desetiletí a dočkaly se více než 15 vydání.

[50] *Archimedovo měření kruhu*, Výroční zpráva c. k. státního vyššího gymnasia v Litomyšli, 1903, 25 stran.

vydání Archimédových prací, které v letech 1880 až 1881 vydal Johann Ludwig Heiberg.[51] Český čtenář tak získal jazykově věrný, pečlivě vypracovaný překlad rozšířený o poznámky, výklady méně srozumitelných míst a komentáře. Poznamenejme pro zajímavost, že o existenci českého překladu Archimédova *Měření kruhu* nenajdeme žádnou zmínku ani v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* ani ve výročních zprávách *Jednoty českých mathematiků* či v zápisech ze zasedání jejího výboru. M. Valouch byl tehdy mladým, řadovým učitelem, aktivitu v *Jednotě českých (československých) mathematiků a fysiků* měl teprve před sebou.

7.2 Český překlad spisu „Počet pískový"

Archimédés vyložil v tomto spise postup, kterým je možno slovně vyjádřit obrovská přirozená čísla, a to pomocí číselné soustavy, jejímž základem je oktáda, tj. číslo 10^8. Současně ukázal, že počet pískových zrn, která by vyplnila celou sféru stálic, je nesrovnatelně menší než čísla, která jeho soustava popisuje. Spis *Počet pískový* obsahuje též Archimédovy úvahy o uspořádání vesmíru a odhady jeho velikosti. Pro historii vědy je cenná Archimédova informace o názorech jeho předchůdce Aristarcha ze Samu (asi 320 až 230 př. n. l.), jehož spis obsahující hypotézy obhajující heliocentrický názor se nedochoval. Archimédův *Počet pískový* se dochoval v kompletnější verzi[52] než jeho *Měření kruhu*.

V roce 1906 uveřejnil M. Valouch komentovaný český překlad Archimédova pojednání *Počet pískový*.[53] I k tomuto překladu použil Heibergovo kritické vydání Archimédových spisů. V *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* najdeme o existenci tohoto překladu jen malou zmínku, a to v přehledu matematických článků, které byly uveřejněny ve školním roce 1905/06 ve výročních zprávách českých středních škol.[54]

---

[51] Viz J. L. Heiberg: *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit J. L. Heiberg*, Vol. I.–III., Lipsiae, 1880–1881. Poznamenejme, že J. L. Heiberg byl slavný a světově uznávaný dánský klasický filolog a největší odborník na klasickou řeckou matematiku. V letech 1896 až 1925 přednášel klasickou řečtinu na kodaňské univerzitě. V letech 1880 až 1881 vydal výše zmíněné třísvazkové dílo obsahující veškeré známé Archimédovy práce (druhé upravené a rozšířené vydání bylo publikováno v letech 1910 až 1915). V letech 1883 až 1888 připravil nové kritické vydání řeckého textu Eukleidových *Základů* a spolu s H. Mengem vydával v letech 1883 až 1916 Eukleidovo souborné dílo (*Euclidis Opera Omnia*), v letech 1891 až 1893 vydal dva svazky Apollóniových prací, v letech 1898 až 1907 dva svazky Ptolemaiových prací, v letech 1912 až 1914 dva svazky Hérónových prací. K jeho dalším odborným zájmům patřilo řecké lékařství. Přeložil, komentoval a vydal Hippokratovy spisy (5. stol. př. n. l.) a dílo lékaře Paula z Aigíny (7. stol. n. l.). Proslavil se též jako autor prací o vývoji řecké matematiky. Jeho kritická vydání řeckých klasiků se stala základem moderních překladů do národních jazyků.

[52] O historii tohoto spisu viz např. [BŠ] a [Vat]. Podrobný matematický rozbor spisu *Počet pískový* je uveden v článku J. Bečváře uveřejněném v této knížce.

[53] *Archimeda Syrakusského Počet pískový*, Výroční zpráva c. k. státního vyššího gymnasia v Litomyšli, 1905–1906, 13 stran. V roce 1993 Česká matice technická nechala Valouchův překlad přetisknout. Nové neprodejné vydání určené pro členy České matice technické vytiskla Střední průmyslová škola stavební v Praze 1.

[54] Viz *Hlídka programů českých škol středních*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 36(1907), str. 294–296; Valouchův překlad je citován na straně 296. Nepatrná zmínka


Výroční zpráva
c. k.
STÁTNÍHO
vyššího gymnasia
V LITOMYŠLI.
Podává
ředitel ústavu za školní rok
1903.
OBSAH:
1.) Archimedovo měření kruhu. Napsal skut. učitel M. Valouch.
2.) Zprávy školní. Podává ředitel ústavu Em. Seifert.
V LITOMYŠLI.
Tiskem V. Augusty. — Nákladem c. k. vyš. gymnasia.


Výroční zpráva
c. k.
státního vyššího gymnasia
V LITOMYŠLI
ROKU
1905-06.
OBSAH:
1. Archimeda Syrakusského Počet pískový. Přeložil prof. Miloslav Valouch.
2. Zprávy školní. Podává ředitel ústavu Em. Seifert.
V LITOMYŠLI.
Tiskem V. Augusty v Litomyšli. — Nákladem c. k. vyšš. gymnasia.

7.3 Český překlad spisu „O metodě“

V roce 1909 publikoval František Vrána[55] ve výroční zprávě českého gymnázia v Prostějově překlad Archimédovy práce *O metodě*,[56] v níž se Archimédés zabýval výpočtem objemů úsečí paraboloidu, elipsoidu a hyperboloidu a kterou sepsal ve formě dopisu, jehož adresátem byl Eratosthenés. K překladu použil řecký text s německým překladem, který J. L. Heiberg vydal roku

o tomto překladu je též v referativním časopise Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik, viz 37(1906), str. 39.

[55] František Vrána byl v letech 1902/03 až 1918/19 středoškolským profesorem matematiky a fyziky na gymnáziu v Prostějově. Roku 1919/20 byl přeložen na českou reálku v Praze VII. Týdně míval 17 až 24 hodin matematiky a fyziky, vedl fyzikální a matematický kabinet a pravidelně býval třídním učitelem. Ve výročních zprávách prostějovského gymnázia publikoval články: *Paměti válečné (osobní) našeho ústavu*, 10. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově, 1915/16, str. 3–22, a 12. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově, 1917/18, str. 3–17, †*Jeho veličenstvo císař a král František Josef I*, 11. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově, 1916/17, str. 5–6, a *Nastoupení nového mocnáře na trůn Habsburský*, 11. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově, 1916/17, str. 7–12. Více viz 1. až 13. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově za školní roky 1902/03, . . . , 1917/18, 13. a 14. výroční zpráva státního gymnasia v Prostějově za školní roky 1918/19 a 1919/20. O jeho dalším pedagogickém a odborném působení není nic známo. Aktivit české matematické komunity se neúčastnil.

[56] *Archimédův výklad Eratosthenovi o mechanických způsobech zkoumání. (Z řečtiny přeložil Fr. Vrána)*, 3. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově za školní rok 1908/09, tiskem knihtiskárny Václava Horáka v Prostějově, Prostějov, str. 2–18.

1907.[57] Český čtenář tak obdržel ve velmi krátké době jazykově věrný a pečlivě provedený překlad nově objeveného Archimédova díla.[58] Svůj překlad doplnil stručným úvodem popisujícím historii objevu této ztracené Archimédovy práce a charakteristikou Archimédovy matematické produkce.[59]

Je podivné a těžko vysvětlitelné, že o tomto překladu nalezneme jedinou nepatrnou zmínku v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky*, nenajdeme však žádnou informaci ve výročních zprávách *Jednoty českých mathematiků* či v zápisech ze zasedání jejího výboru. Je pravděpodobné, že *Jednota* byla tehdy intenzívně soustředěna na vydávání nových učebnic pro základní a střední školy, na úpravu osnov v duchu Marchetovy reformy, není vyloučeno, že zájem o překlady klasiků se zcela vyčerpal vydáním Servítova překladu Eukleidových *Základů*, a to právě v roce 1907.[60]

7.4 Zamyšlení nad osudem českých překladů

Oba čeští překladatelé Archimédových děl vyšli z Heibergova textu z roku 1907. Jejich české verze jsou jazykově věrné a srozumitelné, cenné jsou rovněž připojené komentáře. Osud jejich překladů však byl odlišný.

Valouchovy překlady dvou Archimédových spisů byly od dvacátých let 20. století v české matematické komunitě v povědomí. Patrně byly známé a uznávané i díky Valouchovým rozsáhlým organizačním aktivitám v *Jednotě československých matematiků a fysiků*.[61]

---

[57] J. L. Heiberg: *Eine neue Archimedes-Handschrift*, Hermes – Zeitschrift für klassische Philologie 42(1907), str. 235–303 + 1 tabulka.

[58] V roce 1908 vyšla *Metoda* rusky (překlad Heibergovy práce otištěný v časopise vědecké společnosti v Oděse), 1910 anglicky (autor J. L. Heiberg) a roku 1913 holandsky (autor J. A. Vollgraf).

[59] Podrobný matematický rozbor spisu *O methodě* je uveden v článku Z. Halase uveřejněném v této knížce.

[60] Stručnou zmínku o existenci Vránova překladu nalezneme v referativním časopise Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik (viz 40(1908), str. 6 – referát K. Petra obsahující jen překlad názvu práce a výroční zprávy střední školy, rok vydání a počet stran), krátkou informaci uvádí také článek Q. Vettera: *Několik poznámek in margine Archimedových spisů, zvláště „Metody“*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 49(1920), str. 224–244 (o Vránově překladu je na straně 224). V této studii je také jediný podrobný česky psaný rozbor Archimédovy metody, jehož vznik byl pravděpodobně inspirován uveřejněním latinskořecké přepracované Heibergovy edice *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii I.–III.*, Leipzig, Teubner, 1910, 1913 a 1915; vydáním německého překladu Heathovy monografie *The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters*, Cambridge University Press, 1897 (německy, Berlin, 1914), a Arendtova německy psaného článku *Zu Archimedes* (Bibliotheca Mathematica 14(1914), 3. série, str. 289–311).

[61] Viz např. F. Veselý: *K desátému výročí úmrtí Miloslava Valoucha*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 7(1962), str. 127–134; o překladech na straně 129: *Bylo to Měření kruhu (1903) a Počet pískový (1906), které vyšly tiskem ve výročních zprávách gymnasia v Litomyšli. Jsou to jediné překlady Archimedových spisů do češtiny.*

Archimedes Eratosthenovi pozdrav vzkazuje.

Odeslal jsem Ti dříve některé z nalezených vět, napsav jejich obsah, a vybídl jsem Tě, bys nalezl tyto důkazy, které jsem až do přítomné doby nevyslovil. Byly pak nalezených vět obsahy tyto:

První: Vepíše-li se do přímého hranolu, majícího za základnu rovnoběžník, válec, mající základny v protilehlých rovnoběžnících, plášť pak na ostatních stěnách hranolu, a proloží-li se rovina středem kruhu, který jest základnou válce a jednou stranou čtverce v protilehlé rovině, odetne proložená rovina z válce úsek, který jest omezen pláštěm válce a dvěma rovinami a to jednou proloženou, druhou však, v níž jest základna válce, a pláštěm válce mezi řečenými rovinami. Jest pak úsek z válce oddělený šestým dílem celého hranolu.

Druhé věty obsah jest tento: Vepíše-li se do krychle válec, mající základny v protilehlých rovnoběžnících, plášť však dotýkající se ostatních čtyř stěn a vepíše-li se pak do téže krychle jiný válec, mající základny v jiných rovnoběžnících, plášť však dotýkající se ostatních čtyř stěn, jest útvar omezený plášti válců, který jest v obou válcích obsažen, polovicí celé krychle.

Přihází se však, že tyto výsledky zkoumání se liší od těch dříve vyslovených. Neboť zajisté ony útvary, totiž sféroidy a konoidy a jejich úseky, srovnali jsme co do velikosti s útvary kuželů a válců, žádný však z nich nebyl shledán rovný tělesnému útvaru omezenému rovinami; z těchto však útvarů dvěma rovinami a plášti válců omezených každý jednomu tělesnému útvaru z omezených rovinami rovný se shledává. Těchto tedy vět důkazy v této knize napsav Tobě odesílám. Vida pak Tebe, jak právě říkám, ve vědě horlivého a v popředí filosofie stojícího pamětihodně . . . . a zkoumání si vážícího, rozhodl jsem se Tobě dopsati a do této knihy vložiti zvláštnost jakéhosi způsobu, kterým Ti bude dána příležitost obdržeti prostředky, aby se mohlo něco z oboru mathematiky zkoumati pomocí mechaniky. Jsem pak přesvědčen, že toto jest prospěšno nicméně i k důkazu vět samých. A přece, ačkoliv se mně některé z nich dříve objevily mechanicky, byly dokázány později i geometricky, poněvadž zkoumání pomocí tohoto způsobu jest jakoby bez důkazu; snadnější však zajisté jest podati důkaz, když se napřed obdrží pomocí tohoto způsobu

z odvěsen bude MN, a druhá v rovině nad CD kolmá k CD, vedená z bodu N rovná ose válce, přepona pak v samé rovině sečné. Vytvoří dále i v úseku odťatém z válce rovinou vedenou přímkou EG a stranou čtverce protější ku CD řez trojúhelníkový pravoúhlý, jehož jedna z odvěsen bude MX a druhá v plášti válce . . . . . . vedená . . . . . . kolmá k rovině KN . . . . přepona . . . .

. . . .

bude pak že, jak se má trojúhelník vzniklý v hranolu k trojúhelníku vzniklému v úseku, tak se má . . . .

. . . .

. . . .

A bude, že, jak se mají všechny trojúhelníky v hranolu ke všem trojúhelníkům v odťatém úseku válce, tak se mají k sobě všechny úsečky v rovnoběžníku DG ke všem úsečkám obsaženým mezi parabolou a přímkou EG. Avšak z trojúhelníků v hranolu skládá se hranol, z trojúhelníků v úseku válce skládá se úsek, a dále z úseček obsažených v rovnoběžníku DG rovnoběžných s KF skládá se rovnoběžník DG a z úseček vedených od paraboly ku přímce EG úseč paraboly. Jak se tedy má hranol k úseku válce, tak se má rovnoběžník DG k úseči EFG omezené parabolou a přímkou EG. Rovnoběžník DG jest však roven třem polovinám úseče. To zajisté v předcházejícím výkladu bylo dokázáno. Jest tedy i hranol roven třem polovinám úseku odťatého z válce. Jaké tedy má úsek válce díly dva, takové má hranol tři. Jaké však má hranol tři, takových má celý hranol obsahující válec dvanáct, poněvadž jest první čtvrtinou druhého. Jaké tedy má úsek válce díly dva, takových má celý hranol dvanáct. Jest tedy úsek z válce odťatý šestým dílem hranolu.

Budiž hranol kolmý čtvercové základny mající . . . . a budiž jednou základnou čtverec ABCD a . . . . jak se má hranol k hranolu, tak se má kruh EFG . . . .

. . . .

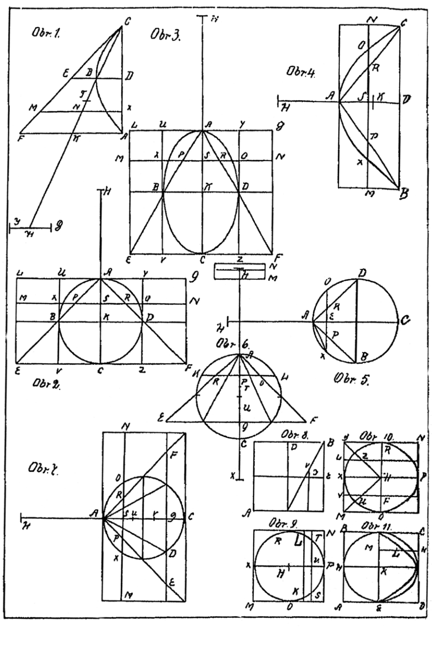
. . . .

Tato rovina odtíná hranol z celého hranolu a z válce úsek válcový . . . že tento úsek odťatý z válce vedenou rovinou jest šestým dílem celého hranolu, bude dokázáno. Nejprve dokážeme, že bude možno do úseku z válce odťatého vepsati tělesný útvar a jiný opsati složený z hranolů stejnou výšku majících a za základny trojúhelníky podobné mající, takže opsaný útvar převyšuje vepsaný o méně než každá předložená veličina.

. . . .

. . . .

Bylo však dokázáno, že hranol šikmou rovinou odťatý jest menší než tři poloviny útvaru vepsaného do úseku z válce. Jak se má hranol šikmou rovinou oddělený k vepsanému útvaru do úseku z válce, tak se má rovnoběžník DG k vepsaným rovnoběžníkům do úseče omezené parabolou a přímkou EG. Jest tedy rovnoběžník DG menší než tři poloviny rovnoběžníků v úseči omezené parabolou a přímkou EG. Což však právě jest nemožno, poněvadž bylo jinde dokázáno, že rovnoběžník DG jest roven třem polovinám úseče omezené parabolou a přímkou EG. Není tedy větší . . . . A všechny hranoly v hranolu odťatém šikmou rovinou budou v témže poměru ke všem hranolům obsaženým v útvaru opsaném



Vránův překlad byl až do vydání monografie [BeM2] zcela zapomenut. Je pravděpodobné, že tomu bylo i proto, že František Vrána s *Jednotou* nespolupracoval, nebyl ani jejím členem,[62] o propagaci svého překladu se asi příliš nestaral. Nutno však poctivě přiznat, že na počátku 20. století šlo asi jen obtížně sledovat výroční zprávy všech českých středních škol a předávat čtenářům *Časopisu* přehled o článcích s matematicko-fyzikálním obsahem.[63]

Není vyloučeno, že existují i další české překlady menších klasických matematických děl. Mohly by být otištěny ve výročních zprávách českých středních škol z druhé poloviny 19. století a první třetiny 20. století. Pokud však nebyla zveřejněna jejich recenze nebo alespoň informace o jejich vydání, upadly rychle v zapomnění.

7.5 Český překlad úlohy „Problém dobytka"

Archimédovu úlohu nazývanou *Problém dobytka* předložil českému čtenáři roku 1898 František Josef Studnička (1836–1903),[64] profesor matematiky na České univerzitě v Praze, který v naučně-populárním časopisu *Živa* uveřejnil studii nazvanou *Archimedes*,[65] v níž stručně popsal Archimédovy životní osudy a dílo, charakterizoval jeho nejdůležitější spisy a připojil překlad a podrobnější rozbor úlohy o dobytku. Poznamenejme, že F. J. Studnička reagoval na nové výsledky archimédovských studií, které v osmdesátých letech uveřejnili B. Krumbiegel a A. Amthor,[66] a také na studii o historii antické matematiky, která vyšla v Německu roku 1890.[67]

Je bezesporu zajímavé, že v roce 2001 Karel Mačák v monografii nazvané *Tři středověké sbírky matematických úloh*[68] uveřejnil nový překlad úlohy o dobytku. O tři roky později Jindřich Bečvář a Ivan Štoll v půvabné knížce *Archimedes. Největší vědec starověku* (viz [BŠ]) uvedli Mačákův překlad a opatřili jej bohatým matematickým komentářem a rozborem.[69]

---

[62] V knize *Dějepis Jednoty českých mathematiků k padesátému výročí jejího založení*, kterou sepsal V. Posejpal a vydala *Jednota českých mathematiků* v roce 1912, není uvedeno Vránovo jméno ani mezi zakládajícími a činnými členy ani mezi přispívajícími členy.

[63] Poznamenejme, že *Jednota českých mathematiků* na počátku 20. století prostřednictvím výzev otištěných v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* opakovaně žádala své členy o informace o matematických a fyzikálních článcích vycházejících ve výročních zprávách středních škol.

[64] O životě a díle Františka Josefa Studničky viz M. Němcová: *František Josef Studnička (1836–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha, 1998.

[65] F. J. Studnička: *Archimedes*, Živa 8(1898), str. 133–135, 178–180.

[66] B. Krumbiegel, A. Amthor: *Das Problema bovinum des Archimedes*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 25(1880), str. 121–136, 153–171.

[67] *Die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie, Anfang III, in Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim*, Teubner, Leipzig, 1890. Problém dobytka je na stranách 343 až 344.

[68] *K. Mačák: Tři středověké sbírky matematických úloh*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 15, Prometheus, Praha, 2001. Překlad a rozbor úlohy o dobytku je uveden na stranách 59 až 60.

[69] Komentovaný překlad a podrobný rozbor úlohy je uveden na stranách 68 až 70.

8 Závěr

Vývoj zájmu matematiků a historiků matematiky o Archimédovy práce, jeho metody a rukopisy obsahující jeho práce naznačuje databáze referativního časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik*,[70] v němž bylo od roku 1868 do roku 1941 referováno o 103 monografiích, studiích, odborných i popularizačních článcích. Vynořily se v několika vlnách po vydání Heibergovy nebo Heathovy monografie, po uveřejnění série článků o objevu nových či ztracených rukopisů obsahujících Archimédovy práce nebo po vydání katalogů starých klasických knihoven, v nichž byly uloženy zapomenuté rukopisné práce.

V současné době archimédovské téma opět zažívá zvýšený zájem matematiků i historiků vyvolaný dražbou Archimédova palimpsestu v roce 1998 a jeho následným odborným studiem.[71]

[70] Referativní časopis je dostupný na adrese http://www.emis.ams.org/projects/JFM/.
[71] Viz http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Books/ArchimedesBooks.html, kde je možno vyhledat stručné informace o 21 archimédovských monografiích vydaných na celém světě od roku 1962, z nichž 9 vyšlo po roce 1998.

II.

ARCHIMÉDOVY VYBRANÉ MATEMATICKÉ SPISY

MĚŘENÍ KRUHU

Jindřich Bečvář

Archimédův spis *Měření kruhu*[1] stojí na dvou důležitých výsledcích. Prvním je *exhaustivní metoda*, s jejíž pomocí Archimédés dokázal vztah mezi obvodem a obsahem kruhu. Druhým je velice *přesné vymezení hodnoty čísla* $\sqrt{3}$, které Archimédés využil při výpočtu horního i dolního odhadu obvodu kruhu, tj. vlastně konstanty označované dnes písmenem π. Zdůrazněme, že tento výpočet by nebyl možný bez jeho velké teoretické i počtářské erudice.

1 Exhaustivní metoda

Autorem exhaustivní metody je podle několika svědectví Eudoxos z Knidu (asi 408 až 355), matematik a astronom, tvůrce tzv. *teorie proporcí* a *teorie homocentrických sfér*. V Eukleidových *Základech* je princip exhaustivní metody vyjádřen v první větě 10. knihy. Miloslav Valouch ji roku 1903 v českém překladu Archimédova *Měření kruhu* vyslovil takto:

Odejmeme-li nějaké veličině polovici aneb více než polovici a tuto operaci v postačitelném počtu opakujeme, dojdeme posléze veličiny, jež jest menší než kterákoli veličina téhož druhu. ([Va1], str. 14)

M. Valouch ještě neměl k dispozici český překlad Eukleidových *Základů* [Eukl] Františka Servíta (1848–1923), který vyšel roku 1907.[2] Servítův překlad první věty 10. knihy *Základů* je asi srozumitelnější a přesnější:

Jsou-li dány dvě veličiny nestejné, když od větší odečteme část větší než polovina a od zbytku opět větší než polovina a tak stále budeme činiti, zbude nějaká veličina, jež bude menší než daná veličina menší. ([Eukl], str. 160)[3]

V moderní řeči a symbolice můžeme první větu 10. knihy *Základů* zformulovat takto:

Máme-li veličiny S a ε, přičemž je $\varepsilon < S$, a odebíráme-li od veličiny S postupně veličiny a, b, c, … , přičemž

$$a > \frac{S}{2}, \qquad b > \frac{S-a}{2}, \qquad c > \frac{S-a-b}{2}, \quad \dots,$$

[1] V české verzi [Va1], v anglické a německé verzi [Hea], v ruské verzi [Ve], dále viz např. [Hei] a [Ee].

[2] Servítův překlad vycházel nejprve po částech ve výročních zprávách českého státního gymnázia na Královských Vinohradech, 10. kniha byla publikována na pokračování v letech 1905, 1906 a 1907. Viz [BeM1].

[3] Zhruba o dvě desetiletí je starší český překlad Josefa Smolíka (1832–1915): *Jsou-li dány dvě veličiny sobě nikoli rovné, a odejme-li se od větší z nich více nežli její polovice, od zbytku pak opět více nežli jeho polovice a tak podobně dále, zbude konečně veličina menší oné dané druhé veličiny.* ([Be1], str. 167) Smolíkův překlad, který zůstal v rukopisu, nemohl M. Valouch znát. Objeven byl až roku 2002. Viz [BeM1].

potom je po potřebném počtu kroků

$$S - a - b - c - \cdots - k < \varepsilon,$$

resp. v našem smyslu

$$a + b + c + \cdots \longrightarrow S.$$

Odejmeme-li tedy od obsahu S_K kruhu K obsah vepsaného čtverce, odejmeme více než polovinu obsahu kruhu K. Vepíšeme-li do čtyř vzniklých kruhových úsečí přirozeným způsobem rovnoramenné trojúhelníky, odejmeme opět více než polovinu obsahu těchto úsečí atd. Od čtverce tak dojdeme k pravidelnému osmiúhelníku, obdobným způsobem k šestnáctiúhelníku atd. Pokud tento postup dostatečně dlouho opakujeme, přiblížíme se obsahem pravidelného 2^k-úhelníku zdola jakkoli blízko k obsahu kruhu K. Úplně stejně bychom postupovali, pokud bychom vyšli od vepsaného pravidelného šestiúhelníku.

Obdobným způsobem dojdeme od opsaného čtverce k opsanému osmiúhelníku atd., až se obsahem pravidelného 2^k-úhelníku přiblížíme shora jakkoli blízko k obsahu kruhu K.[4]

2 Přesný odhad čísla $\sqrt{3}$

Ve svém pojednání o měření kruhu využil Archimédés následující velmi přesný odhad čísla $\sqrt{3}$:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780},$$

číslo $\sqrt{3}$ tedy leží v intervalu délky

$$\frac{1\,351}{780} - \frac{265}{153} = \frac{1}{39\,780}.$$

Odborníci se dosud liší v názorech, jak Archimédés, nebo někdo před ním, k tak přesnému odhadu dospěl. V článku *Výpočty odmocnin ve starověku* uvedeném v této knize je předložena rekonstrukce výpočtu tohoto odhadu. Současně je poukázáno na skutečnost, že vymezení čísla $\sqrt{3}$ ve dvou krocích je daleko přesnější než obdobné vymezení čísla $\sqrt{2}$. Výpočet odhadu čísla $\sqrt{2}$ stejnou metodou, ale ve třech krocích, je již numericky náročnější, stále však ještě zvládnutelný. Získaný výsledek se však pro další numerické výpočty (prováděné bez výpočetní techniky) nehodí.

Archimédés vyšel od šestiúhelníků (vepsaného a opsaného) a po čtyřech děleních středových úhlů dospěl k 96-úhelníkům (vepsanému a opsanému). Číslo $\sqrt{3}$ potřeboval k výpočtu obvodu výchozího opsaného šestiúhelníku.

Pokud by vyšel od čtverců, došel by po čtyřech děleních středových úhlů jen k 64-úhelníkům (vepsanému a opsanému), jejichž obvody aproximují obvod

[4] I zde užijeme exhaustivní metodu. Od rozdílu obsahu opsaného čtverce a kruhu odečteme „vnějšek“ opsaného osmiúhelníka, dále „vnějšek“ opsaného šestnáctiúhelníku atd.

kruhu podstatně hůře než obvody 96-úhelníků. Navíc by musel mít přesnější vymezení čísla $\sqrt{2}$, které je zapotřebí pro výpočet obvodu výchozího vepsaného čtverce.

3 Měření kruhu

Archimédův spis *Měření kruhu* obsahuje pouze tři matematické věty. Domníváme se, patrně oprávněně, že se dochovalo jen torzo původního díla, snad nějaký stručný výpis, který byl dále přepisován a šířen.[5]

V následujícím textu uvedeme tyto tři věty ve Valouchově českém překladu a připojíme jejich Heathovu anglickou verzi. Dokážeme je v duchu Archimédova *Měření kruhu* současným jazykem a symbolikou a připojíme stručný komentář. Výraznější odlišnosti od Archimédova postupu patřičně zdůrazníme.

Věta 1. *Každý kruh rovná se pravoúhlému trojúhelníku, je-li poloměr roven jednomu rameni pravého úhlu, obvod pak podstavě.*[6] ([Va1], str. 13)

Dnes bychom tvrzení této Archimédovy věty zformulovali takto:

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou poloměr a obvod tohoto kruhu.

A vyjádřili bychom je vzorcem $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o$.

Archimédés dokázal tvrzení Věty 1 exhaustivní metodou. Jeho důkaz nyní uvedeme.

Důkaz: Uvažujme kruh K o poloměru r a obvodu o a pravoúhlý trojúhelník T, jehož odvěsny mají délky r a o.

Předpokládejme nejprve, že je obsah S_K kruhu K větší než obsah S_T trojúhelníku T. Potom existuje pravidelný n-úhelník N, který je do kruhu K vepsán a má větší obsah než trojúhelník T:

$$S_K > S_N > S_T.$$

Obsah n-úhelníku N je však roven součtu obsahů n rovnoramenných trojúhelníků, jejichž výšky jsou menší než r a součet délek všech jejich základen je menší než o. Proto je $S_N < S_T$, a to je spor.

Předpokládejme nyní, že je obsah S_K kruhu K menší než obsah S_T trojúhelníku T. Potom existuje pravidelný n-úhelník N, který je kruhu K opsán a má menší obsah než trojúhelník T:

$$S_K < S_N < S_T.$$

---

[5] Podrobněji o Archimédových dílech viz článek M. Bečvářové uveřejněný v této publikaci.

[6] V anglické verzi: *The area of any circle is equal to a right-angled triangle in which one of the sides about the right angle is equal to the radius, and the other to the circumference, of the circle.* ([Hea], str. 91)

Obsah n-úhelníku N je však roven součtu obsahů n rovnoramenných trojúhelníků, jejichž výšky jsou rovny r a součet délek všech jejich základen je větší než o. Proto je $S_N > S_T$, a to je spor. □

Archimédés tak exaktně ukázal, patrně jako první matematik vůbec, jaký je vztah obvodu a obsahu kruhu. Připomeňme, že číslo π[7] je definováno jako poměr obvodu a průměru kruhu, tj.

$$\pi = \frac{o}{2r};$$

odtud vyplývá vzorec pro výpočet obvodu kruhu:

$$o = 2\pi r.$$

Známý vzorec pro výpočet obsahu kruhu je tedy důsledkem Archimédovy Věty 1.

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

Konstanta π, kterou jsme definovali pomocí obvodu a průměru kruhu, figuruje tedy i ve vzorci pro obsah kruhu.

Věta 2. *Kruh jest ke čtverci průměru v poměru jako 11 ke 14.*[8] ([Va1], str. 15)

Dnes bychom tvrzení druhé Archimédovy věty zformulovali takto:

Obsah kruhu je přibližně roven jedenácti čtrnáctinám obsahu čtverce jehož stranou je průměr kruhu.

Věta 2 využívá výsledek následující Věty 3, která říká, že obvod kruhu o poloměru r je přibližně roven $\frac{22}{7} \cdot 2r$. Snad byla Věta 2 původně zařazena jako důsledek Věty 3 a při nějakém přepisu Archimédova díla, případně při pořízení výpisu, bylo pořadí těchto vět obráceno.

Důkaz. Podle Věty 1 a následující Věty 3 je obsah S_K kruhu K přibližně roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek r a $\frac{22}{7} \cdot 2r$. Nyní je

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{22}{7} \cdot 2r = \frac{11}{14} \cdot (2r)^2.$$ □

Věta 3. *Obvod každého kruhu rovná se trojnásobnému průměru a ještě přesahuje o něco méně než sedminu průměru, ale o více než deset jedenasedmdesátin.*[9] ([Va1], str. 15)

[7] V antice tato konstanta neměla samostatné označení, vždy se pracovalo se slovním vyjádřením poměru obvodu kruhu k průměru. Označení pomocí malého řeckého písmene π (zkratka řeckého slova *perimetros* – obvod) použil poprvé velšský matematik William Jones (1675–1749) v roce 1706. Definitivně se však π v matematice usadilo díky tomu, že je začal používat Leonhard Euler (1707–1783).

[8] V anglické verzi: *The area of a circle is to the square on its diameter as 11 to 14.* ([Hea], str. 93)

[9] V anglické verzi: *The ratio of the circumference of any circle to its diameter is less than* $3\frac{1}{7}$ *but greater than* $3\frac{10}{71}$. ([Hea], str. 93)

Dnes bychom tvrzení Věty 3 zformulovali takto:

Pro obvod o kruhu, který má poloměr r, platí

$$3\,\frac{10}{71}\cdot 2r \;<\; o \;<\; 3\,\frac{1}{7}\cdot 2r.$$

V důkazu této věty Archimédés vypočítal horní a dolní odhad obvodu o kruhu přesněji:

$$\frac{6\,336}{2\,017\,\frac{1}{4}}\cdot 2r \;<\; o \;<\; \frac{14\,688}{4\,673\,\frac{1}{2}}\cdot 2r.$$

Horní mez potom zaokrouhlil nahoru a dolní dolů:

$$3\,\frac{10}{71}\cdot 2r \;<\; \frac{6\,336}{2\,017\,\frac{1}{4}}\cdot 2r \;<\; o \;<\; \frac{14\,688}{4\,673\,\frac{1}{2}}\cdot 2r \;<\; 3\,\frac{1}{7}\cdot 2r.$$

Převedeme-li tyto zlomky na desetinná čísla, bude přesnost Archimédových výsledků zjevnější:

$$3,140\,845\ldots\cdot 2r \;<\; 3,140\,909\ldots\cdot 2r \;<\; o \;<\; 3,142\,826\ldots\cdot 2r \;<\; 3,142\,857\ldots\cdot 2r.$$

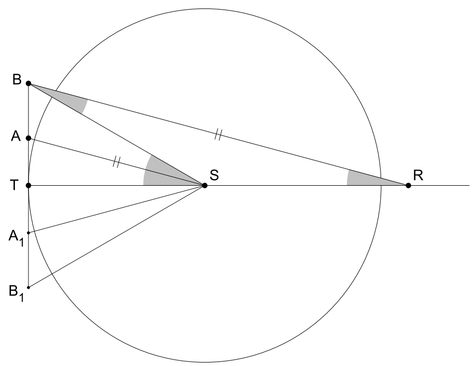
Archimédův výsledek můžeme interpretovat jako odhad čísla $\pi = 3,141\,592\ldots$, který je přesný na dvě desetinná čísla:

$$3,140\,909\ldots \;<\; \pi \;<\; 3,142\,826\ldots$$

Archimédés nejprve vypočetl obvod vepsaného pravidelného šestiúhelníku a obvod opsaného pravidelného šestiúhelníku, rozpůlením středových úhlů získal pravidelné dvanáctiúhelníky, vypočetl jejich obvody, a tak postupoval až k 96-úhelníkům. Obvod kruhu pak odhadl shora obvodem opsaného pravidelného 96-úhelníku a zdola obvodem vepsaného pravidelného 96-úhelníku.

Předchozí dva Archimédovy důkazy jsme modifikovali jen nepodstatně – pouze jsme je převedli do současné řeči a symboliky. Třetí důkaz však přepracujeme podstatně výrazněji, využijeme totiž algebraickou symboliku, kterou Archimédés k disposici neměl.

Důkaz. Uvažujme pro jednoduchost jednotkovou kružnici, které byl opsán pravidelný n-úhelník a rozpůlením jeho „středových“ úhlů vznikl pravidelný $2n$-úhelník.



Obr. 1

Na obr. 1 je $|ST| = 1$, BT je polovina strany opsaného n-úhelníku a AT je polovina strany opsaného $2n$-úhelníku (tedy $|\sphericalangle TSA| = |\sphericalangle ASB|$), jejich délky označme t_n a t_{2n}, tj. $|BT| = t_n$ a $|AT| = t_{2n}$. Nechť je přímka BR rovnoběžná s přímkou AS. Je tedy $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle SBR| = |\sphericalangle SRB|$, a proto $SB = SR$. Trojúhelník $\triangle ATS$ je podobný trojúhelníku $\triangle BTR$ (věta *uuu*), proto je

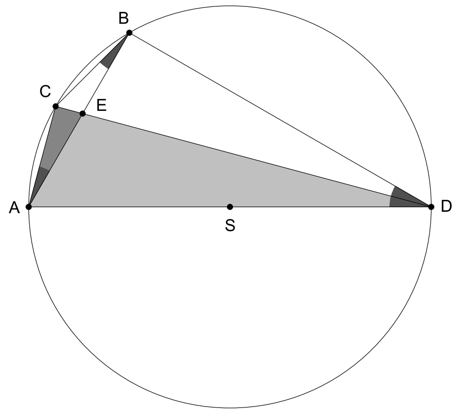
$$\frac{AT}{TS} = \frac{BT}{TR} = \frac{BT}{TS + SR} = \frac{BT}{TS + SB}$$

a po dosazení je

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}}. \tag{1}$$

Nyní je třeba si uvědomit, že $t_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Podle vztahu (1) vypočteme t_{12}, potom t_{24}, potom t_{48} a nakonec t_{96}. Vypočetli jsme tedy obvod opsaného 96-úhelníku: $96 \cdot 2t_{96} = 192 \cdot t_{96}$.

Uvažujme opět jednotkovou kružnici, do níž byl vepsán pravidelný n-úhelník a rozpůlením jeho „středových" úhlů vznikl pravidelný $2n$-úhelník.



Obr. 2

Na obr. 2 je $|SA| = 1$, AB je strana vepsaného n-úhelníku, AC a BC strany vepsaného $2n$-úhelníku. Jejich délky označme s_n a s_{2n}, tj. $|AB| = s_n$ a $|AC| = |BC| = s_{2n}$. Pomocí elementárních geometrických poznatků zjistíme, že trojúhelníky $\triangle ADC$ a $\triangle EAC$ jsou podobné (věta *uuu*) a rovněž trojúhelníky $\triangle CDB$ a $\triangle CBE$ jsou podobné (věta *uuu*).[10] Z těchto podobností vyplývají vztahy

$$\frac{AD}{CD} = \frac{EA}{CA}, \qquad \frac{BD}{CD} = \frac{EB}{CB} = \frac{EB}{CA}.$$

Odtud

$$\frac{AD + BD}{CD} = \frac{EA + EB}{CA} = \frac{AB}{CA},$$

[10] Úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CDB$, $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAB$ jsou obvodové úhly ke stejně dlouhému oblouku, mají tedy stejnou velikost.

po dosazení je

$$\frac{2+\sqrt{4-s_n^2}}{\sqrt{4-s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}$$

a po malé úpravě

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}}. \tag{2}$$

Nyní je třeba si uvědomit, že $s_6 = 1$; podle předchozího vztahu (2) tedy vypočteme s_{12}, potom s_{24}, potom s_{48} a nakonec s_{96}. Vypočetli jsme tedy obvod vepsaného 96-úhelníku: $96 \cdot s_{96}$.

Pro obvod o kruhu tedy platí: $96 \cdot s_{96} \;<\; o \;<\; 192 \cdot t_{96}$. □

Podle výše uvedených vzorců (1) a (2) lze výpočet přibližné hodnoty obvodu kruhu (resp. čísla π) provést i na malé kalkulačce. Pro $n = 6, 12, 24, 48, 96$ dostáváme:

$n = 6$	$3{,}000 < \pi < 3{,}464$
$n = 12$	$3{,}106 < \pi < 3{,}215$
$n = 24$	$3{,}133 < \pi < 3{,}160$
$n = 48$	$3{,}139 < \pi < 3{,}146$
$n = 96$	$3{,}141 < \pi < 3{,}143$

Odhadli jsme tedy číslo π s přesností na dvě desetinná místa.

Archimédés však počítal s konkrétními čísly a postupoval po jednotlivých krocích. Od obvodu opsaného (vepsaného) šestiúhelníku přešel k obvodu opsaného (vepsaného) dvanáctiúhelníku, a tak postupoval až k 96-úhelníkům. V každém kroku navíc pečlivě zvažoval, zda počítá dolní nebo horní odhad, a podle toho (v závislosti na tom, zda přičítal, odčítal, násobil či dělil) volil dolní nebo horní odhad čísla, s nímž právě pracoval.

4 Poznámky

Poznámky historické. Podle Héróna Alexandrijského (1. století po Kr.) dospěl Archimédés dokonce k odhadu[11]

$$\frac{211\,875}{67\,441} \doteq 3{,}141\,634\ldots \;<\; \pi \;<\; \frac{197\,888}{62\,351} \doteq 3{,}173\ldots$$

Hodnoty jsou však zřejmě porušeny, dolní odhad je ve skutečnosti odhadem horním a horní odhad je příliš velký. Malou úpravou jeho čitatele lze získat chybějící dolní odhad, a tím i velmi přesný odhad čísla π:

$$\frac{195\,881}{62\,351} \doteq 3{,}141\,585\ldots \;<\; \pi \;<\; \frac{211\,875}{67\,441} \doteq 3{,}141\,634\ldots$$

[11] Odhad se nachází v první knize Hérónova spisu *Metrika,* odstavec 26.

Ještě přesnější odhad lze získat úpravou Hérónových odhadů, kterou navrhl francouzský historik matematiky Paul Tannery (1843–1904):

$$\frac{211\,872}{67\,441} \doteq 3,141\,590\ldots \;<\; \pi \;<\; \frac{195\,882}{62\,351} \doteq 3,141\,601\ldots$$

Zdá se, že původní jednoduchý Archimédův odhad čísla π byl používán i při praktických výpočtech. Většinou se jednalo přímo o hodnotu $3\frac{1}{7}$. V šesté knize astronomického pojednání *Almagest*, které sepsal v polovině 2. století po Kr. alexandrijský astronom, geograf a matematik Klaudios Ptolemaios, se používá při výpočtech týkajících se zatmění Slunce a Měsíce velmi přesná hodnota π, která je zaokrouhlena tak, aby byla snadno použitelná při výpočtech v šedesátkové soustavě:

$$\pi \doteq 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} \doteq 3,141\,666\ldots$$

Sám Ptolemaios o ní píše, že leží *nejblíže mezi* $3\frac{1}{7}$ *a* $3\frac{10}{71}$.

Archimédův výpočet poměru obvodu a průměru kruhu inspiroval řadu matematiků. Byl to například Leonardo Pisánský[12] (Fibonacci, asi 1170 až 1250), který Archimédův výpočet zopakoval ve svém díle *De practica geometrie* z roku 1223. Dospěl k vymezení hodnoty čísla π nerovnostmi

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} \;<\; \pi \;<\; \frac{1440}{458\frac{1}{5}} \qquad \text{a k přibližné hodnotě} \quad \frac{864}{275} \doteq 3,141\,818\ldots$$

Citujme příslušnou pasáž:

… erit proportio circulj ad suum dyametrum, sicut 1 440 *ad* $\frac{1}{3}$458*, cum sint in medio inter* $\frac{4}{9}$458 *et* $\frac{1}{5}$458*. Sed proportio de* 1 440 *ad* $\frac{1}{3}$458 *est sicut triplum unius numerorum ad triplum alterius, hoc est sicut* 4 320 *ad* 1 375*; quorum proportio in minimis numeris est sicut* 864 *ad* 275*: sed proportio de* 864 *ad* 275*, minus* $\frac{1}{11}$*, est sicut* $\frac{1}{7}$3 *ad* 1 *…* ([LP], str. 91.)[13]

Z mnoha více či méně úspěšných pokusů o výpočet čísla π připomeňme ještě dva. Perský matematik a astronom al-Kāshī (14. až 15. stol.), který působil v Samarkandu, vypočetl roku 1429 hodnotu čísla π na 16 desetinných míst a holandský matematik Ludolf van Ceulen (1540–1610) vypočítal v roce 1596 číslo π podle Archimédova vzoru na 20 desetinných míst (došel přitom k $15 \cdot 2^{37}$-úhelníku) a roku 1603 na 32 desetinných míst. Při svých výpočtech dospěl až k 2^{62}-úhelníku.[14]

[12] O životě a díle Leonarda Pisánského viz např. [BeJ2].

[13] … bude poměr kružnice ke svému průměru jako 1 440 k $458\frac{1}{3}$, což je mezi $458\frac{4}{9}$ a $458\frac{1}{5}$. Ale poměr 1 440 k $458\frac{1}{3}$ je jako trojnásobek jednoho čísla k trojnásobku druhého, to je jako 4 320 k 1 375; jejich poměr v nejmenších číslech je jako 864 k 275: ale poměr [čísla] 864 k [číslu] 275 zmenšenému o $\frac{1}{11}$ je jako $3\frac{1}{7}$ k 1 …

[14] O historii a výpočtech čísla π viz například článek [VeJ]. Podrobněji viz [B], [BBB], [EL], [Phi], [Sche].

Poznámka metodická. Archimédův výpočet čísla π pomocí aproximace obvodu kruhu obvody pravidelných n-úhelníků (opsaných i vepsaných) můžeme (v modernizované podobě) využít i na střední škole v matematickém semináři, resp. při zadání projektu. Zopakuje se přitom řada poznatků základní a střední školy: Thalétova věta, Pýthagorova věta, obvodový úhel, podobné trojúhelníky, rovnost vhodných dvojic úhlů, úprava algebraického výrazu, práce s odmocninami atd. Archimédův postup může být proveden na počítači, podnětné může být programování jednotlivých výpočtů. Lze rovněž modifikovat Archimédův postup a začít s opsaným a vepsaným čtvercem; oba postupy a výsledky lze pak porovnat. Je možno se dokonce vydat přesně po stopách Archiméda a počítat v jeho duchu horní i spodní odhady.

PÍSKOVÝ POČET

Jindřich Bečvář

Ve spise *Psammítés* (*Pískový počet*)[1] prezentoval Archimédés číselný systém umožňující vyjádřit obrovská přirozená čísla a na poměrně absurdním příkladu ukázal jeho možnosti. Zvolil sféru hvězd, největší prostor, který byl v tehdejší době vůbec představitelný, a vypočetl horní odhad množství zrnek písku, které tento prostor zaplní.

1 Zápis čísel ve starověkém Řecku

V klasické době začali Řekové zapisovat čísla pomocí písmen své alfabéty. Užívali nepoziční desítkovou soustavu. Jednotky $1, 2, 3, \ldots$ zapisovali písmeny α, β, γ, $\ldots$, desítky $10, 20, 30, \ldots$ písmeny ι, $\varkappa$, λ, $\ldots$, stovky $100, 200, 300, \ldots$ písmeny ρ, σ, τ, $\ldots$ Vzhledem k tomu, že bylo zapotřebí označit devět jednotek, devět desítek a devět stovek, potřebovali celkem 27 písmen. Řecká alfabéta však měla jen 24 písmen, proto bylo třeba použít i tři zastaralá písmena: *digamma*, později *stigma* (pro 6), *koppa* (pro 90) a *sampí* (pro 900). Číslo zapsané pomocí písmen bylo v textu pro větší srozumitelnost později označováno čárkou nebo pruhem. Například číslo 543 bylo zapisováno jako $\varphi\mu\gamma'$ nebo $\overline{\varphi\mu\gamma}$. Pomocí 27 písmen bylo tedy možno vyjádřit všechna přirozená čísla menší než tisíc.

α′	β′	γ′	δ′	ε′	ϛ′	ζ′	η′	ϑ′
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι′	ϰ′	λ′	μ′	ν′	ξ′	ο′	π′	ϙ′
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ′	σ′	τ′	υ′	φ′	χ′	ψ′	ω′	ϡ′
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Později byl tento číselný systém rozšířen. Prvních devět písmen alfabéty využili řečtí počtáři i pro označení tisíců; odlišovali je další přidanou čárkou (dole před písmenem). Bylo tedy možno vyjádřit přirozená čísla od 1 až do 9 999. Například čísla 1 234, 5 888, 7 475 byla zapisována takto:

͵ασλδ′ ͵εωπη′ ͵ζυοε′.

Nesmíme si představovat, že Řekové v této symbolice prováděli nějaké písemné výpočty, že např. užívali nějaké algoritmy pro násobení a dělení podobné těm, které jsme se učili ve škole. Svoji číselnou symboliku využívali pouze k zapisování čísel, k zaznamenání výsledků, k nimž dospěli při výpočtech prováděných na abaku, početní tabulce apod.

K označení deseti tisíc, případně také k označení obrovského množství, které nelze spočítat, popsat, resp. jinak vyjádřit, užívali Řekové slovo *mýrias,* přejaté

[1] V české verzi viz [Va2], v anglické a německé viz [Hea], v ruské [Ve], dále viz např. [Hei] a [Ee].

do češtiny jako *myriada*. Ještě dnes toto slovo najdeme v obdobném smyslu užité například v próze i poezii.[2]

2 Archimédův číselný systém

Archimédés vyložil svůj číselný systém v práci *Archai* (*Počátky*), která se však nedochovala. Podruhé jej popsal ve třetí části svého pojednání *Psammítés*.

Slovo *myriada* užil v přesném slova smyslu, a sice k označení deseti tisíc (tj. 10^4). Toto číslo mu však připadalo ještě malé, proto začal uvažovat úsek přirozených čísel obsahující *myriadu myriad* jednotek, tj. posloupnost od 1 do 10^8; nazýval je *čísla prvního řádu*:

$$\underbrace{1,\dots,10^4}_{\text{1. myriada}},\ \underbrace{10^4{+}1,\dots,2{\cdot}10^4}_{\text{2. myriada}},\ \underbrace{2{\cdot}10^4{+}1,\dots,3{\cdot}10^4}_{\text{3. myriada}},\ \dots,\ \underbrace{\dots,10^4{\cdot}10^4{=}10^{1\cdot 8}}_{10^4\text{-tá myriada}}.$$

Poslední číslo, tj. 10^8, nazval *jednotkou druhého řádu*, na toto číslo navázal další úsek posloupnosti přirozených čísel počínající číslem $10^8 + 1$, tzv. *čísla druhého řádu*:

$$\underbrace{10^{1\cdot 8}+1,\dots,2{\cdot}10^{1\cdot 8}}_{10^8\text{ prvků}},\ \underbrace{2{\cdot}10^{1\cdot 8}+1,\dots,3{\cdot}10^{1\cdot 8}}_{10^8\text{ prvků}},\ \dots,\ \underbrace{\dots,10^8{\cdot}10^{1\cdot 8}=10^{2\cdot 8}}_{10^8\text{ prvků}}.$$

Číslo $10^{2\cdot 8}$ nazval *jednotkou třetího řádu* a navázal na ně tzv. *čísla třetího řádu*:

$$\underbrace{10^{2\cdot 8}+1,\dots,2{\cdot}10^{2\cdot 8}}_{10^{2\cdot 8}\text{ prvků}},\ \underbrace{2{\cdot}10^{2\cdot 8}+1,\dots,3{\cdot}10^{2\cdot 8}}_{10^{2\cdot 8}\text{ prvků}},\ \dots,\ \underbrace{\dots,10^8{\cdot}10^{2\cdot 8}=10^{3\cdot 8}}_{10^{2\cdot 8}\text{ prvků}}.$$

Dále uvažoval *čísla čtvrtého řádu* (končí číslem $10^{4\cdot 8}$), *čísla pátého řádu* (končí číslem $10^{5\cdot 8}$) atd., došel až k *číslům řádu myriady myriad* (10^8-tá čísla):

$$\underbrace{10^{(10^8-1)\cdot 8}+1,\dots,2{\cdot}10^{(10^8-1)\cdot 8}}_{10^{(10^8-1)\cdot 8}\text{ prvků}},\ \dots,\ \underbrace{\dots,10^8{\cdot}10^{(10^8-1)\cdot 8}=10^{10^8\cdot 8}}_{10^{(10^8-1)\cdot 8}\text{ prvků}}.$$

Úsek přirozených čísel od čísla 1 do čísla $10^{10^8\cdot 8}$ nazval *první periodou*.

Uvědomme si, že poslední čísla jednotlivých úseků tvořených čísly prvního řádu, druhého řádu, … a 10^8-tého řádu tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem 10^8. Čísel druhého řádu je více než čísel prvního řádu, čísel třetího řádu je více než čísel druhého řádu atd.

---

[2] Viz např. Příruční slovník jazyka českého. Díl II. K-M, Státní nakladatelství, Praha, 1937–1938:
Na nebi byly myriady hvězd. Rudolf Medek
S večerem se vyrojí myriady drobných mušek. Karel Čapek
Luka pestřila se myriadou květů. Emil Vachek

Na první periodu navázal Archimédés *druhou periodu*, která začíná číslem $10^{10^8 \cdot 8} + 1$. Její první čísla končí číslem $10^8 \cdot 10^{10^8 \cdot 8}$, druhá čísla končí číslem $10^{2 \cdot 8} \cdot 10^{10^8 \cdot 8}$, třetí čísla číslem $10^{3 \cdot 8} \cdot 10^{10^8 \cdot 8}$ atd. Druhá perioda končí číslem

$$10^{10^8 \cdot 8} \cdot 10^{10^8 \cdot 8} = \left(10^{10^8 \cdot 8}\right)^2.$$

Následuje *třetí perioda*, která končí číslem

$$10^{10^8 \cdot 8} \cdot \left(10^{10^8 \cdot 8}\right)^2 = \left(10^{10^8 \cdot 8}\right)^3$$

atd. Takových period uvažoval Archimédés myriadu myriad. Poslední, 10^8-tá perioda, končí číslem

$$\left(10^{10^8 \cdot 8}\right)^{10^8} = \left(10^{800\,000\,000}\right)^{100\,000\,000} = 10^{80\,000\,000\,000\,000\,000},$$

tj. číslem $10 \ldots 000$, které má 80 tisíc bilionů nul.

Uvědomme si ještě, že čísla, kterými končí jednotlivé periody, tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $10^{10^8 \cdot 8}$. Čísel druhé periody je více než čísel první periody, čísel třetí periody je více než čísel druhé periody atd.

3 Počítání písku

Jak již bylo řečeno, ve spisu *Psammítés* vypočítal Archimédés horní odhad množství písku, které by zaplnilo celý *vesmír* (řecky *kosmos*), tj. celou sféru Slunce při geocentrickém systému[3] (resp. sféru Země při heliocentrickém systému), a množství písku, které by zaplnilo *sféru hvězd*. Snažil se ukázat obrovské možnosti svého číselného systému a zpochybnit představu o „nespočitatelnosti“ jakéhokoli množství. V úvodu první části svého spisu oslovil krále Gelóna:

Někteří se domnívají, králi Gelone, že počet písku jest nesčíslný; a to, tvrdím, nejen toho, jenž jest v okolí Syrakus a v ostatní Sicilii, ale i na všeliké zemi ať obydlené ať neobydlené. Někteří však nemyslí, že jest neomezený, ale že přece nebyl tak veliký udán, jenž by převyšoval jeho množství. Zřejmo, že kdož takto soudí, kdyby si mysleli z písku tak velikou spoustu nakupenu, jak veliká jednak jest spousta země, a pak kdyby v ní byla vyplněna i všechna moře i dutiny zemské do stejné výše s nejvyššími horami, ti by soudili tím spíše, že asi nikdo by nevyřkl čísla převyšujícího jeho množství. Pokusím se ti dokázati důkazy geometrickými, jež budeš moci sledovati, že mezi čísly námi jmenovanými … převyšují některá nejen počet písku v množství rovném zemi tak vyplněné, jak jsme řekli, ale i v množství rovném vesmíru (kosmu). ([Va2], str. 3)

Chtěl-li Archimédés vypočítat počet zrnek písku, kterými lze vyplnit vesmír, musel vědět

– jak je velký vesmír,

– jak je velké (resp. malé) zrnko písku.

---

[3] Archimédés uvádí, že termínem … *vesmír* (kosmos) *nazývá většina hvězdářů kouli, jejíž střed jest střed zemský, poloměr pak roven přímce mezi středem slunce a středem země.* ([Va2], str. 3)

Archimédés se řídil duchem Eukleidových *Základů*. Nejprve proto zformuloval předpoklady, z nichž pak při výpočtech velikosti vesmíru vycházel:

1. Obvod Země je nejvýše $3 \cdot 10^6$ stadií.[4]
2. Průměr Slunce je větší než průměr Země a ten je větší než průměr Měsíce.
3. Průměr Slunce je nejvýše roven třicetinásobku průměru Měsíce.[5]
4. Průměr Slunce je větší než strana tisíciúhelníka vepsaného do největšího kruhu vesmíru, tj. do ekliptiky.[6]

Ve druhé části spisu *Psammítés* Archimédés vypočetl horní odhad „velikosti“ vesmíru. Jeho výsledek zformulujeme v následující větě.

Věta 1. Průměr vesmíru je nejvýše 10^{10} stadií.

Důkaz: Podle prvního předpokladu je obvod Země nejvýše $3 \cdot 10^6$. Obvod je přitom více než třikrát větší než průměr. Průměr Země je tedy nejvýše 10^6 stadií.

Průměr Slunce je podle druhého a třetího předpokladu nejvýše roven třiceti průměrům Země, tj. nejvýše $30 \cdot 10^6$ stadií.

Obvod vesmíru je podle čtvrtého předpokladu nejvýše roven tisícinásobku průměru Slunce, tj. $3 \cdot 10^{10}$ stadií. Průměr vesmíru je nejvýše roven třetině svého obvodu, je tedy nejvýše 10^{10} stadií. $\square$

Archimédés musel ještě stanovit velikost zrnka písku. Jako pomocný objekt mu posloužilo zrnko máku. Předpokládal toto:

– Do zrnka máku se vejde nejvýše myriada, tj. 10^4 zrnek písku.

– Průměr zrnka máku je menší než jedna čtyřicetina palce.

---

[4] Archimédés současně poznamenal, že někteří (mínil patrně Eratosthena (asi 275 až 195), jehož měření Země mu jistě bylo známo) udávají $3 \cdot 10^5$ stadií, ale on předpokládá desetkrát víc. Připomeňme. že *stadion* (pl. *stadia*) byla délková míra definovaná jako vzdálenost konců závodiště (stadionu). V jednotlivých regionech byla užívána různě dlouhá stadia (zhruba 157 až 193 metrů), nejužívanější bylo *olympijské stadion* (asi $192,3$ m). Eratosthenés odhadl poměrně exaktním způsobem obvod Země na 250 000 stadií. O jeho měření Země podal svědectví Kleomédés (1. až 2. stol.) ve spise *De motu circulari corporum coelestium* (*O kruhovém pohybu nebeských těles*) a později např. Martianus Minneus Felix Capella (1. pol. 5. stol.) v knize *De nuptiis Philologiae et Mercurii* (*Svatba Filologie s Merkurem*). Viz např. [Gold], [BeJ4].

[5] Archimédés připomněl, že Eudoxos (asi 408 až 355) tvrdil, že devítinásobku, Feidiás dvanáctinásobku a Aristarchos (asi 310 až 230) osmnácti až dvacetinásobku. Archimédés patrně znal Aristarchův spis *Peri megethón kai apostématón héliú kai selénés* (*O velikosti a vzdálenosti Slunce a Měsíce*), v němž Aristarchos své výpočty odhadů velikostí a vzdáleností Slunce a Měsíce prezentoval. Viz [Hea2], [Hea4], [Hel].

[6] Archimédés poznamenal, že Aristarchos uvedl, že je roven sedmisetdvacetině obvodu ekliptiky. Oprávněnost tohoto předpokladu Archimédés podrobně zdůvodnil geometrickými úvahami a zkušenostmi z praktických měření úhlové velikosti Slunce. Viz [Va2], str. 5–8.

Zdůvodnění, které podal, je velmi půvabné. Je z něj cítit, jak se snažil dospět k co největšímu počtu zrnek písku. Proto zmenšil velikost zrnka máku a současně zvětšil počet zrnek písku v zrnku máku. Archimédův písek má tedy charakter zcela nepatrného prášku.

Kdyby bylo sebráno množství písku ne větší zrnka máku, nebyl by počet jeho větší než myriada, a průměr zrnka makového nebyl by větší čtyřicetiny palce. Předpokládám pak toto, vyzkoumav to tímto způsobem: Položena byla na hladké pravítko zrnka maková v přímce po jednom, takže se navzájem dotýkala, a zaujalo 25 zrnek místo větší než délka palce. Bera tudíž průměr zrnka makového menší, předpokládám, že jest čtyřicetina palce a ne menší, chtěje tímto co nejpřesněji dokázati své tvrzení. ... ([Va2], str. 9)

Ve třetí části spisu *Psammítés*, jak již bylo výše uvedeno, prezentoval Archimédés svůj číselný systém. Ve čtvrté nejprve vypočetl množství zrnek písku, která vyplní vesmír. Jeho výsledek zformulujeme v následující větě.

Věta 2. Vesmír by zaplnilo 10^{51} zrnek písku.

Důkaz: Podle Věty 1 je průměr vesmíru nejvýše roven 10^{10} stadií.

Připomeňme nejprve, že řecká míra *stadion* obsahuje 600 *stop*, jedna stopa je 16 *palců*. Stadion je tedy $600 \cdot 16 = 9\,600$ palců, tj. téměř 10^4 palců.

Protože je průměr zrnka máku menší než čtyřicetina palce, obsahuje koule o průměru palce nejvýše 64 tisíc zrnek máku, tedy nejvýše 10^9 zrnek písku:

$$40^3 \cdot 10^4 = 640\,000\,000 < 10^9.$$

Archimédovo zdůvodnění tohoto výpočtu je srozumitelné:

Ježto totiž se předpokládá, že průměr zrnka makového není menší než čtyřicetina palce, zjevno, že koule průměru palce není větší než koule, která by pojala šest myriad a čtyři tisíce zrnek makových, neboť jest rovna kouli průměru čtyřicetiny palce násobené řečeným číslem. Jest totiž dokázáno, že koule jsou navzájem v trojnásobném poměru svých průměrů. ([Va2], str. 11)

Následuje posloupnost jednoduchých výpočtů. Zvětšíme-li velikost průměru stokrát ($10^2\times$), zvětší se objem milionkrát ($10^6\times$):

Koule o průměru 100 palců obsahuje 10^{15} zrnek písku.

Koule o průměru stadia (tj. 10^4 palců) obsahuje 10^{21} zrnek písku.

Koule o průměru 100 stadií obsahuje 10^{27} zrnek písku.

Koule o průměru 10^4 stadií obsahuje 10^{33} zrnek písku.

Koule o průměru 10^6 stadií obsahuje 10^{39} zrnek písku.

Koule o průměru 10^8 stadií obsahuje 10^{45} zrnek písku.

Koule o průměru 10^{10} stadií obsahuje 10^{51} zrnek písku. $\square$

Množství písku, které by zaplnilo vesmír, je tedy nejvýše rovno číslu

$$10^{51} = 1\,000 \cdot 10^{6 \cdot 8},$$

tj. *tisíci jednotek sedmého řádu první periody.*

Archimédés dále vypočetl množství písku, které by zaplnilo celou sféru hvězd. Při stanovení její velikosti vyšel z tzv. *Aristarchova předpokladu.* O Aristarchově heliocentrickém názoru na uspořádání světa se zmínil v krátké pasáži na počátku první části spisu *Psammítés*:

Aristarchos Samský však vydal knihy jakési s názvem Hypothesy[7]*, v nichž vychází z jeho předpokladů, že vesmír jest mnohokrát větší, než jak výše bylo řečeno.*[8] *Předpokládá totiž, že stálice a slunce zůstávají nehybné, země pak obíhá po obvodě kruhu kolem slunce, jež stojí uprostřed dráhy, že dále koule stálic rozložená kolem téhož středu jako slunce jest takové velikosti, že kruh, v němž, jak předpokládá, země obíhá, jest ku vzdálenosti stálic v tomtéž poměru, v jakém jest střed koule k povrchu. Totoť, jak patrno, jest nemožno. Neboť, ježto střed koule nemá žádné velikosti, jest se domnívati o něm, že není v žádném poměru k povrchu koule. Jest však přijmouti, že Aristarchos myslil takto: jakmile předpokládáme, že země jest jakoby středem vesmíru, tu v tom poměru, v jakém jest země k tomu, co nazýváme vesmírem, jest koule v níž jest kruh, v němž, jak předpokládá, země obíhá, ke kouli stálic. Neboť důkazy fénoménů přizpůsobuje k tomuto předpokladu, a obzvláště zdá se, že velikost koule, v níž dává zemi se pohybovati, pokládá za stejnou s tím, co nazývá vesmírem.* ([Va2], str. 3–4)

Aristarchův předpoklad je možno stručně zformulovat takto:

5. Poměr průměrů Země a vesmíru je roven poměru průměrů vesmíru a sféry stálic.[9]

Nyní je již možno vypočítat velikost sféry hvězd.

Věta 3. Průměr sféry stálic je nejvýše 10^{14} stadií.

Důkaz: Průměr Země je podle předchozího 10^6 stadií (důsledek prvního předpokladu), průměr vesmíru je podle věty 1 nejvýše 10^{10} stadií.

Podle Aristarchova předpokladu má být poměr $10^6 : 10^{10}$ roven poměru čísla 10^{10} k průměru sféry stálic. Průměr sféry stálic je tedy nejvýše roven 10^4-násobku průměru vesmíru, tj. 10^{14} stadií. □

[7] Přesněji: *vydal spis obsahující jisté hypotézy, ...*

[8] Tato zmínka v Archimédově spisu *Psammítés* je důležitou informací o Aristarchově heliocentrickém systému.

[9] Aristarchův předpoklad, který výrazně „zvětšil“ sféru stálic, je významný. Pokud by Země obíhala kolem Slunce v „malé“ sféře stálic, musely by se zdánlivé vzdálenosti hvězd na obloze během roku měnit. Archimédés přijal Aristarchův předpoklad, neboť chtěl dospět k co největšímu počtu pískových zrn. Z jeho textu však vůbec není jasné, zda zastával geocentrický nebo heliocentrický názor.

Věta 4. Sféru stálic by zaplnilo nejvýše 10^{63} zrnek písku.

Důkaz: Již jsme viděli, že platí následující tvrzení:

Koule o průměru 10^{10} stadií obsahuje 10^{51} zrnek písku.

Odtud vyplývá:

Koule o průměru 10^{14} stadií obsahuje 10^{63} zrnek písku. $\square$

Archimédés tedy ukázal, že počet pískových zrn zaplňujících sféru hvězd je menší než

$$10^{63} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8},$$

tj. menší než *tisíc myriad jednotek osmého řádu první periody.*

Po „spočítání“ zrnek písku vyplňujících sféru hvězd získal Archimédés číslo, které je v jeho číselném systému „na počátku“ první periody, a sice na jejím osmém řádku. Poznamenejme, že se dnes číslem 10^{80} odhaduje počet částic v pozorovatelné části vesmíru.

V závěru spisu *Psammítés* se Archimédés znovu obrátil na krále Gelóna:

Domnívám se, králi Gelone, že toto davu mathematiky neznalému bude se zdáti neuvěřitelným, znalcům však, kteří jak o vzdálenostech tak o velikostech země a slunce a měsíce a celého vesmíru uvažovali, bude uvěřitelným pro tento důkaz. Protož jsem myslil, že také tobě jest vhod toto poznati. ([Va2], str. 13)

O problematice odhadů a výpočtů velikosti vesmíru viz například [Hea], [Hea2], [Hea3], [Hea4], [Hel], [Gold], [BeJ4].

METODA

Zdeněk Halas

Archimédův dopis Eratosthenovi o mechanických větách neboli *Metoda*[1] pojednává o využití těžiště a zákona rovnováhy na páce k výpočtům objemů těles ohraničených různými plochami. Dává nám přitom nahlédnout, jakým způsobem Archimédés objevoval nové výsledky, k nimž pak hledal přesné důkazy pomocí tzv. exhaustivní metody[2]. Tento spis se zachoval v jediném exempláři – v *Archimédově palimpsestu.*[3]

1 Archimédův palimpsest

Palimpsest je rukopis psaný na pergamenu, který byl použit opakovaně. Kodex, jehož text už nebyl považován za potřebný, se rozvázal na jednotlivé listy, z nichž byl text seškrábán či smyt a napsal se na ně text nový. Toto očištění zpravidla nebylo dokonalé, takže původní text slabě prosvítal, nerušil však čtení textu nového. Vzhledem k vysoké ceně pergamenu byla tato praxe poměrně běžná. Kodex s Archimédovými[4] spisy, jenž byl vytvořen někdy kolem poloviny 10. století, podstoupil tuto proceduru[5] v roce 1229 nebo nedlouho předtím[6], kdy na vzniklé listy opsal kněz Ióannés Myronás liturgickou knihu (*Euchologion*).

Počátkem 19. století pak byl kodex z Jeruzaléma převezen do knihovny Řeckého patriarchátu. V jednom z dílů jejího katalogu, který vyšel roku 1899, byl zaznamenán i palimpsestový kodex, z něhož bylo v tomto katalogu opsáno několik málo řádků prosvítajícího textu. Na tento záznam upozornil německý klasický filolog Hermann Schöne dánského klasického filologa a historika antické matematiky Johana Ludviga Heiberga (1854–1928), který byl editorem

[1] Tento spis má dva nadpisy spojené do jednoho, odděleny jsou středníkem. První nadpis je vlastně stručným popiskem celého spisu, druhý může být původním nadpisem.

[2] Archimédés byl mistrem v aplikaci exhaustivní metody. Ukázku jejího užití lze nalézt v kapitole *Měření kruhu.*

[3] Archimédovu palimpsestu a speciálně spisu *Metoda* bude věnována speciální monografie, která bude obsahovat úplný text *Metody,* překlad do češtiny, podrobný matematický komentář a historii vzniku, objevu a zpracování palimpsestového kodexu. Přehledné shrnutí jeho pohnuté historie lze také nalézt v první části této knihy v kapitole M. Bečvářové.

[4] Archimédův kodex, jak jej máme dochován dnes, obsahuje 175 pergamenových listů a sedm listů papírových, které dohromady pocházejí ze sedmi původních kodexů. Ty obsahovaly nejen spisy Archimédovy, ale také promluvy rétora a politika protimakedonského zaměření Hypereida (4. stol. př. Kr.), komentář k Aristotelovým *Kategoriím, Ménaion* (druh liturgických knih), sbírku hagiografických textů a dva texty (označované jako Y a Z), které dosud nebyly identifikovány. Z Archimédových spisů palimpsest obsahuje *O rovnováze rovinných útvarů, O spirálách, Měření kruhu, O kouli a válci, O plovoucích tělesech, Metoda* a *Stomachion.*

[5] Původní listy s Archimédovým textem byly navíc přeloženy, takže vznikl nový kodex polovičního formátu.

[6] Soudí se tak podle rozluštěné poznámky na prvním foliu: „kněz Ióannés Myronás dokončil svou práci 13. dubna 1229“ (den před Velikonoční nedělí).

souborného kritického vydání Archimédových spisů. J. L. Heiberg v těchto řádcích ihned poznal Archimédův matematický text. V létě roku 1906 se vypravil přímo do Konstantinopole, kde kodex prostudoval. Nechal také pořídit kvalitní fotografie, s jejichž pomocí dokončil většinu práce na přepisu. Při této práci objevil dva zcela nové, dosud ztracené spisy: *Metodu* a *Stomachion.* Hned následujícího roku publikoval přepis textu *Metody* v časopise Hermes (viz [Hei1]). Právě tento text se stal základem překladů do němčiny a angličtiny [Hea]. Mimořádně zajímavá je skutečnost, že ihned v roce 1909 vydal ve výroční zprávě c. k. státního gymnasia v Prostějově český překlad [Vr] tohoto řeckého textu gymnaziální profesor František Vrána.

Roku 1908 se J. L. Heiberg vypravil do Konstantinopole znovu, aby ověřil přímo v rukopisu některá nejasná místa a pokračoval ve zkoumání kodexu. V letech 1910 až 1915 pak vydal druhé, doplněné a přepracované vydání Archimédova díla [Hei]. Oba nově objevené spisy, *Metoda* a *Stomachion,* zařadil do druhého dílu, který vyšel roku 1913.

Ve 20. letech byl kodex převezen do Athén a v tomto období se patrně ztratil. Objevil se až po druhé světové válce v soukromé sbírce jedné pařížské rodiny. Po několika neúspěšných pokusech o prodej kodexu předním světovým knihovnám se palimpsest objevil v aukční síni Christies v New Yorku, kde byl vydražen 29. října 1998 za dva miliony dolarů.

Majitel si přál zůstat v anonymitě, poskytl však svůj kodex na deset let k vědeckému studiu. Stav kodexu se za posledních sto let pronikavě zhoršil: byl zasažen plísní, tenké stránky byly místy téměř nečitelné, zčernalé, obsahovaly mnoho drobných děr. Navíc na čtyřech stranách[7] přibyly celostránkové ilustrace evangelistů. Záchrany kodexu se ujalo muzeum umění Walters v Baltimore na východním pobřeží Spojených států.

2 Čtení kodexu

Čtení takto poškozeného kodexu bylo velmi náročné. Předně bylo potřeba jej zbavit vazby, kterou byl opatřen až v posledních letech. Odstranění vazby probíhalo od 3. dubna 2000 do 4. listopadu 2004. Jednotlivé listy pak byly pečlivě očištěny a každý zvlášť byl zasazen do speciálního plastového obalu. Navíc bylo potřeba zařadit jednotlivé fragmenty na příslušná místa.

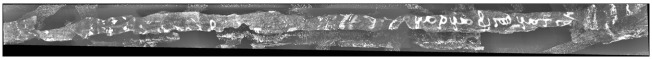
V roce 2004 mohla konečně začít digitalizace celého kodexu.[8] Jelikož je kodex pouhým okem velmi špatně čitelný, bylo potřeba zvolit vhodnou metodu, která by zvýraznila Archimédův text. Jedním z prvních pokusů bylo pořizování fotografií speciálním monochromatickým fotoaparátem RIT. Monochromatické světlo přitom zajišťovaly LED diody. Každé folio bylo fotografováno čtyřicetkrát. Tyto fotografie se poté různě kombinovaly, přičemž vhodnými kombina-

[7] Všechna čtyři zasažená folia obsahují Archimédův text.

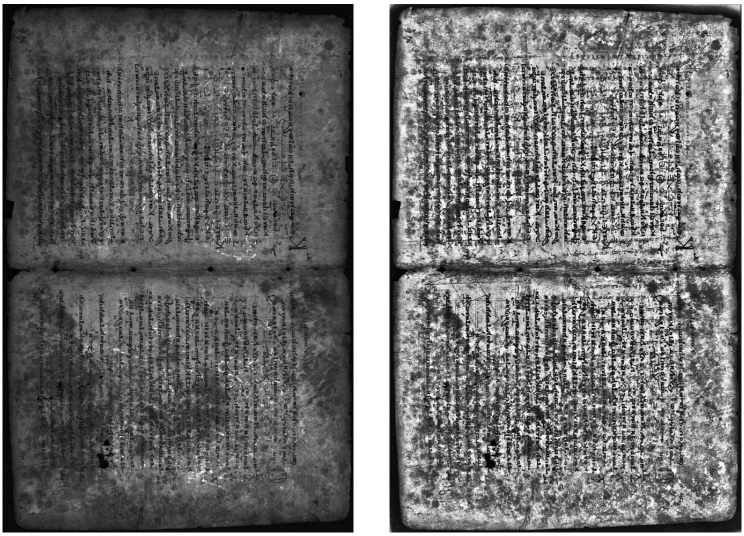
[8] Pro zajímavost uveďme, že celý kodex je naskenován v Google books, kde je také nejstarší knihou. Stránky jsou však prakticky nečitelné. Výstup digitalizace kodexu je dostupný na stránkách http://archimedespalimpsest.net, kde je každý list k dispozici v mnoha podobách ve vysokém rozlišení.

cemi bylo možno zdůraznit špatně čitelný text tak, že na mnoha místech velmi výrazně vystupoval. Přesto však nebylo možné přečíst všechny pasáže.

Jiná metoda, která měla umožnit přečíst Archimédův text tam, kde byl pouhým okem naprosto nerozlišitelný, nebyla založena na optice, ale na rentgenovém záření. Chemickou analýzou se totiž zjistilo, že inkoust, kterým je kodex napsán, obsahuje prvek železo (Fe_2O_3). Pomocí přístroje EDAX Eagle a příslušného software na zpracování získaných dat byla získána mapa rozložení železa. Tímto způsobem sice bylo možno přečíst naprostou většinu dosud nečitelného textu, nicméně zpracování poloviny jediného řádku trvalo asi 15 hodin.



Postup založený na rentgenovém záření byl tedy mimořádně úspěšný, nicméně neúnosně časově náročný. Proto se v roce 2006 přikročilo k práci na větším zařízení – Stanfordském elektron-pozitronovém urychlovači (SPEAR), což vedlo ke značnému urychlení, takže bylo možno přečíst ty části textu, které byly významné a jinými postupy zcela nečitelné. Jednalo se o část závěrečné věty ze spisu *O plovoucích tělesech,* první stránku kodexu (na níž se našlo datum dohotovení opisu) a některé geometrické náčrtky.



Začátek *Metody* v pravých a nepravých barvách.

3 Metoda v antice

O existenci Archimédovy *Metody* se vědělo ze svědectví antických a byzantských autorů. Poměrně dobře známá byla byzantská encyklopedie *Súda,* kde se u hesla Theodosios (2. pol. 2. stol. př. Kr.) píše:

Theodosios, filosof. Napsal Sfériky ve třech svitcích, ... , komentář k Archimédově Metodě (Efodion), ...

Několik svědectví se nám také dochovalo ve spisu *Metrika* slavného mechanika a aplikovaného matematika Héróna Alexandrijského (1. stol.), například:

Archimédés v Metodě dokázal, že každý útvar ohraničený úsečkou a řezem pravoúhlého kužele, tj. parabolou, je 1 a $\frac{1}{3}$ *trojúhelníka, který s ní má společnou základnu a stejnou výšku.* (I,32,58-61)

Máme určit velikost části válce oddělené řezem vedeným středem jedné podstavy. A buď průměr této podstavy AB 7 jednotek, výška tohoto útvaru 20 jednotek. Archimédés dokázal v Metodě, že takovýto [útvar vzniklý] odříznutím je šestinou rovnoběžnostěnu, který má čtyřúhelníkovou podstavu opsanou podstavě válce a výšku stejnou, jako řez ...

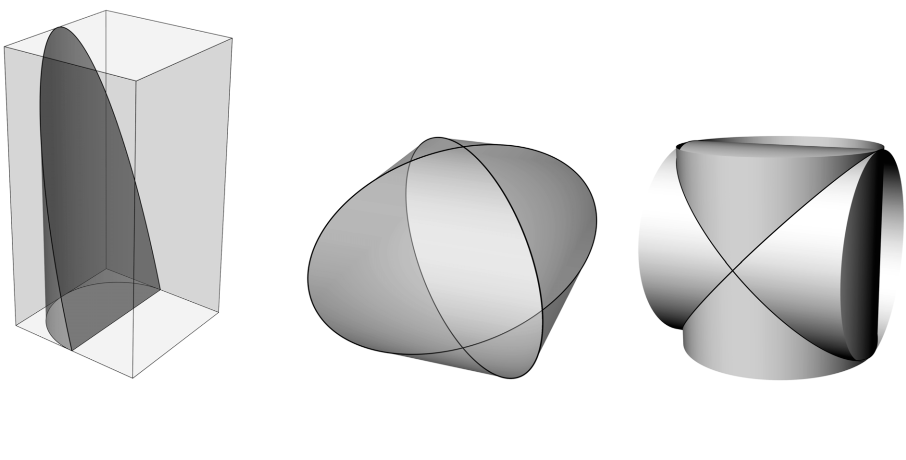
Tentýž Archimédés v téže knize dokazuje, že pokud procházejí krychlí dva válce, jejichž podstavy se dotýkají hran krychle, tak bude průnik těchto válců dvěma třetinami krychle. (II,14,1–15,5)

Nebylo však známo, co přesně tento spis obsahuje, ani jakým postupem byly dosažené výsledky odvozovány.

4 Obsah spisu Metoda

Archimédés píše, že už dříve poslal Eratosthenovi některé z vět k důkazu. Ohlašuje také dvě věty zcela nové, které jsou překvapivé tím, že dávají do souvislosti objemy mnohostěnů a těles ohraničených plochami, jež nejsou rovinami. Poměry těchto objemů jsou přitom vyjádřeny pomocí malých celých čísel. Do té doby totiž Archimédés porovnával koule, elipsoidy či paraboloidy s válcem nebo kuželem.

První věta dává do souvislosti objem úseče válce vepsaného do kvádru se čtvercovou podstavou. Objem této úseče je pak šestinou objemu celého hranolu. Druhá věta se týká tělesa, které vznikne průnikem dvou válců vepsaných do téže krychle; objem tohoto tělesa je roven dvěma třetinám objemu celé krychle. Toto těleso i příslušné válce, jejichž průnikem vzniká, jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Dále Archimédés píše, že Eratosthenovi objasní metodu, pomocí níž objevil některé vztahy. Když jsou totiž tyto vztahy známé, tak se pak snáze dokazují. Odvození pomocí své metody Archimédés nepovažuje za důkaz, neboť na závěr spisu prý uvede ke všem větám důkazy geometrické. Spis se nám však nezachoval celý, ale jen část: od úvodního dopisu obsahujícího znění obou ohlášených vět a některá základní tvrzení bez důkazu, přes ukázky své metody na konkrétních příkladech, až po odvození objemu prvního tělesa (úseče válce) mechanickou metodou i geometricky. Odvození vztahu pro objem druhého tělesa (průnik dvou válců) se nám vůbec nedochovalo, podobně jako geometrické důkazy jednotlivých vět.

Z úvodního dopisu se také dozvídáme, že Archimédés očekával, že současníci či následující generace naleznou pomocí jeho metody další poznatky. Také zde nacházíme významné svědectví o vztahu pro objem jehlanu či kužele, jež jsou třetinou objemu příslušného hranolu, resp. válce. Jako první prý tento fakt uvedl Démokritos, ale bez vysvětlení.[9] První, kdo publikoval důkaz tohoto tvrzení, byl prý Eudoxos.

Z jednoduchých tvrzení z mechaniky uvádí Archimédés bez důkazu zejména následující:

(1) Pokud leží těžiště několika těles v jedné přímce; pak také těžiště celku leží na téže přímce.
(2) Těžiště úsečky – její střed.
(3) Těžiště trojúhelníka – průsečík spojnic vrcholů úhlů a středů protilehlých stran.
(4) Těžiště rovnoběžníka – průsečík úhlopříček.
(5) Těžiště kruhu – jeho střed.
(6) Těžiště válce – střed osy.
(7) Těžiště hranolu – střed osy.[10]
(8) Těžiště kužele – bod, který dělí osu v poměru $3:1$.

Pak už přicházejí věty o obsahu, objemech a těžištích různých geometrických útvarů, a to pravděpodobně v pořadí, v němž je postupně Archimédés pomocí své metody objevoval. Uvádíme jejich schematický přehled.

(1) parabolická úseč $= 1\frac{1}{3}$ vepsaného trojúhelníka
(2) koule je čtyřikrát větší než kužel výšky r, válec $= \frac{3}{2}$ vepsané koule
(3) $\frac{3}{2}$ rotačního elipsoidu = opsaný válec
(4) úseč rotačního paraboloidu je $= \frac{3}{2}$ příslušného kužele
(5) těžiště rotačního paraboloidu je ve $\frac{2}{3}$ osy
(6) těžiště polokoule dělí osu v poměru $5:3$
(7) kulová úseč : vepsaný kužel $= (r + 2r - v) : (2r - v)$
(8) objem úseče elipsoidu

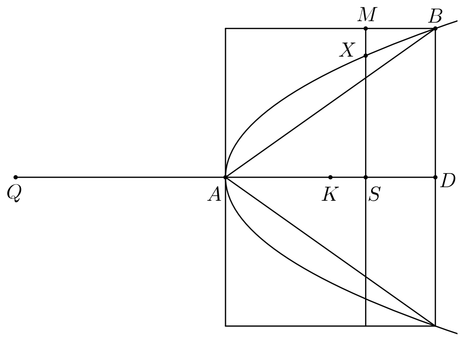
[9] Patrně se jednalo o odvození vycházející z atomismu.

[10] Ve Vránově překladu chybí, podobně také chybí v [Hei1]. Ve Vránově překladu je díky předloze, jež je teprve publikací předběžnou, několik vynechávek, na něž je nedostatečně upozorněno. Obecně ke konci textu narůstá jeho fragmentárnost.

(9) těžiště kulové úseče leží na ose rozdělené v poměru
část osy při vrcholu : část při podstavě = $(v+4(2r-v)) : (v+2(2r-v))$
(10) těžiště elipsoidu
(11) úsek rotačního hyperboloidu : vepsaný kužel = $(v+3a) : (v+2a)$
(12) objem úseče válce z 1. oznámené věty:
úseč válce = $\frac{1}{6}$ opsaného hranolu
(13) objem úseče válce, odvození pomocí řezů
(14) objem úseče válce, pomocná křivka parabola v podstavě
(15) objem úseče válce, geometrický důkaz; závěr je nenávratně ztracen

5 Metoda – rotační paraboloid

Ukažme si, v čem spočívá Archimédova metoda. Nejnázornějším tělesem[11] je úseč rotačního paraboloidu. Její objem je roven $\frac{3}{2}$ vepsaného kužele. Řez vedoucí osou a vrcholem kužele i paraboloidu je uveden na obrázku.



Z vlastností paraboly plyne, že

$$\frac{AD}{AS} = \frac{DB^2}{SX^2}.$$

Tuto rovnost můžeme přepsat ve tvaru

$$AD \cdot (\text{kruh } SX \text{ v paraboloidu}) = AS \cdot (\text{kruh } SM \text{ ve válci}),$$

což můžeme interpretovat jako vztah rovnováhy na páce

$$r_1 \cdot m_1 = r_2 \cdot m_2.$$

Jelikož jsme brali libovolný řez, tak předchozí vztah platí pro každý řez (tedy „pro všechny řezy“, které vlastně tvoří celý válec, resp. celou úseč paraboloidu). Takže paraboloid umístěný v Q (jelikož $AD = AQ$) vyváží válec setrvávající na místě (tj. umístěný ve svém těžišti K). Odtud již dostáváme poměrně elegantně formulovaný výsledek:

$$\text{paraboloid} = \frac{AK}{AD} \cdot \text{válec} = \frac{1}{2} \text{ válce} = \frac{3}{2} \text{ kuželu.}$$

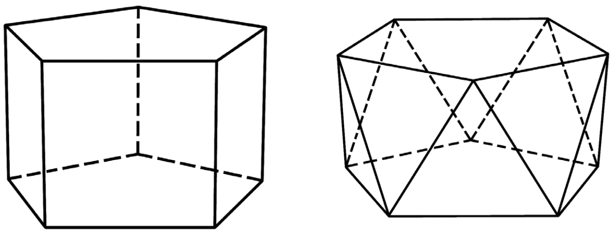
[11] Jelikož se připravuje vydání úplného překladu Archimédovy *Metody* včetně podrobného matematického komentáře, uvádíme pouze jeden ilustrační příklad.

POLOPRAVIDELNÁ TĚLESA

Vlasta Moravcová

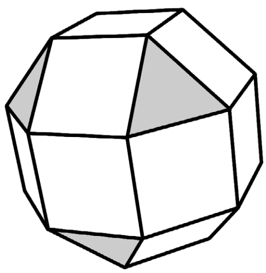
Archimédovými polopravidelnými tělesy nazýváme třináct těles, která patří mezi polopravidelné mnohostěny.

Polopravidelným mnohostěnem rozumíme konvexní mnohostěn, jehož stěnami jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky dvou nebo tří typů, přičemž v každém vrcholu se setkává ve stejném pořadí stejný počet stěn téhož typu.



Obr. 1: Pětiboký hranol a antihranol jako polopravidelná tělesa.

Kromě Archimédových těles patří mezi polopravidelné mnohostěny také speciální hranoly[1] a antihranoly[2] (obr. 1), kterých je nekonečně mnoho. Občas se k polopravidelným mnohostěnům řadí také tzv. Aškinuzeho těleso[3] (obr. 2).



Obr. 2: Aškinuzeho/Millerovo/Johnsonovo těleso.

[1] Pravidelné kolmé n-boké hranoly s výškou rovnou délce podstavné hrany. Povrch tedy tvoří dvě podstavy (pravidelné n-úhelníky) a n bočních stěn (čtverců).

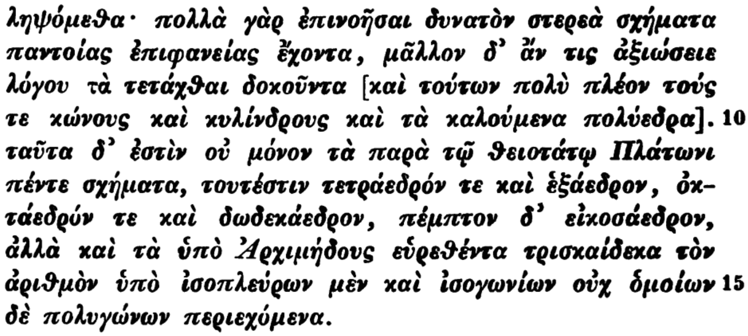
[2] Horní podstavu pravidelného kolmého n-bokého hranolu pootočíme o úhel $\frac{\pi}{n}$ okolo osy hranolu, doplníme n bočních hran tak, aby po stranách vznikly trojúhelníky, a upravíme výšku tak, aby tyto trojúhelníky byly rovnostranné.

[3] Toto těleso, které je uváděno pod různými názvy podle svých objevitelů (též Millerovo nebo Johnsonovo) bylo popsáno až v polovině 20. století. Jedná se o těleso, které vznikne malou úpravou jednoho z Archimédových těles (pootočením několika stěn vůči ostatním). Aškinuzeho těleso sice splňuje definici polopravidelného mnohostěnu (a proto bývá někdy označováno jako čtrnácté Archimédovo těleso), avšak nemá takové symetrické vlastnosti jako zbývajících třináct mnohostěnů. Více viz [Cro], str. 91.

Archimédova tělesa nazýváme podle řeckého matematika Archiméda ze Syrákús, jelikož právě jemu je připisován jejich objev. Archimédovo pojednání o polopravidelných tělesech se bohužel nedochovalo, avšak zmínku o jeho existenci nalézáme v díle Pappa Alexandrijského (3. století n. l.), který v 5. knize *Synagógé* [*Sbírka*] píše [Pap]:[4]

I když si můžeme představit mnohá tělesa s rozličnými povrchy, tak se domníváme, že spíše jsou hodna zmínky ta, která jsou pravidelně uspořádána. Není to pouze těch pět těles, která nacházíme u božského Platóna, tj. čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn a pátý dvacetistěn, ale také třináct těles objevených Archimédem, která jsou ohraničena pravidelnými, avšak ne podobnými mnohoúhelníky ...

Pappův text pokračuje výčtem jednotlivých těles s popisem, které stěny tvoří povrch těchto těles.


ληψόμεθα· πολλὰ γὰρ ἐπινοῆσαι δυνατὸν στερεὰ σχήματα παντοίας ἐπιφανείας ἔχοντα, μᾶλλον δ' ἄν τις ἀξιώσειε λόγου τὰ τετάχθαι δοκοῦντα [καὶ τούτων πολὺ πλέον τούς τε κώνους καὶ κυλίνδρους καὶ τὰ καλούμενα πολύεδρα]. ταῦτα δ' ἐστὶν οὐ μόνον τὰ παρὰ τῷ θειοτάτῳ Πλάτωνι πέντε σχήματα, τουτέστιν τετράεδρόν τε καὶ ἑξάεδρον, ὀκτάεδρόν τε καὶ δωδεκάεδρον, πέμπτον δ' εἰκοσάεδρον, ἀλλὰ καὶ τὰ ὑπὸ Ἀρχιμήδους εὑρεθέντα τρισκαίδεκα τὸν ἀριθμὸν ὑπὸ ἰσοπλεύρων μὲν καὶ ἰσογωνίων οὐχ ὁμοίων δὲ πολυγώνων περιεχόμενα.

Obr. 3: Pappova zmínka o existenci Archimédových těles v kritickém vydání Pappova díla pořízeného F. Hultschem (viz [Pap]).

1 Přehled Archimédových mnohostěnů

V tabulce na následující straně je souhrnný přehled třinácti Archimédových mnohostěnů (obr. 4, 5, 6) a jejich základních vlastností. Současné nejběžněji používané anglické názvy vycházejí z latinských názvů Johanna Keplera (viz obr. 20). V tabulce je u každého tělesa uveden anglický název. Názvy se do češtiny zpravidla nepřekládají, častěji se pro jednotlivá tělesa používá symbolické označení P_k, kde hodnota k odpovídá pořadí, ve kterém uvedl tělesa Pappos Alexandrijský.

Dále je v tabulce uveden počet vrcholů v, počet hran h a počet stěn s všech těles. Jednotlivé členy p_q součtů ve sloupci „Druhy stěn“ označují, že se na povrchu daného tělesa vyskytuje p pravidelných q-úhelníků. Například zápis $4_3 + 4_6$ znamená, že povrch tělesa tvoří 4 rovnostranné trojúhelníky a čtyři

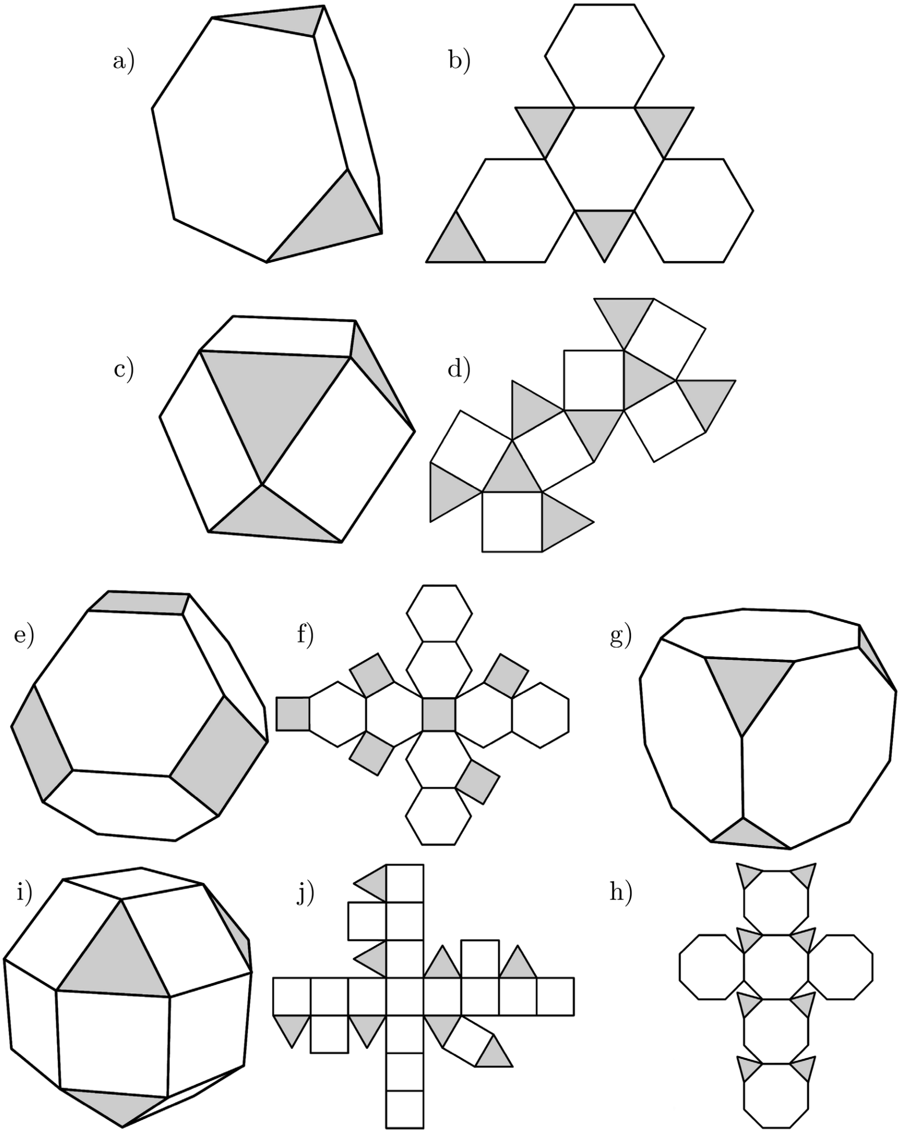
[4] Citace ze starých děl z uvedených zdrojů přeložila a v zájmu srozumitelnosti přizpůsobila současné češtině autorka článku.

pravidelné šestiúhelníky. Počet čísel v závorce ve sloupci „Typ vrcholu“ odpovídá počtu stěn, které se stýkají v jednom vrcholu, a hodnoty těchto čísel udávají, kolikaúhelníkové tyto stěny jsou a v jakém pořadí obklopují každý vrchol. Například zápis (3, 4, 3, 4) znamená, že se v každém vrcholu potkávají rovnostranný trojúhelník, čtverec, další rovnostranný trojúhelník a další čtverec v tomto pořadí.

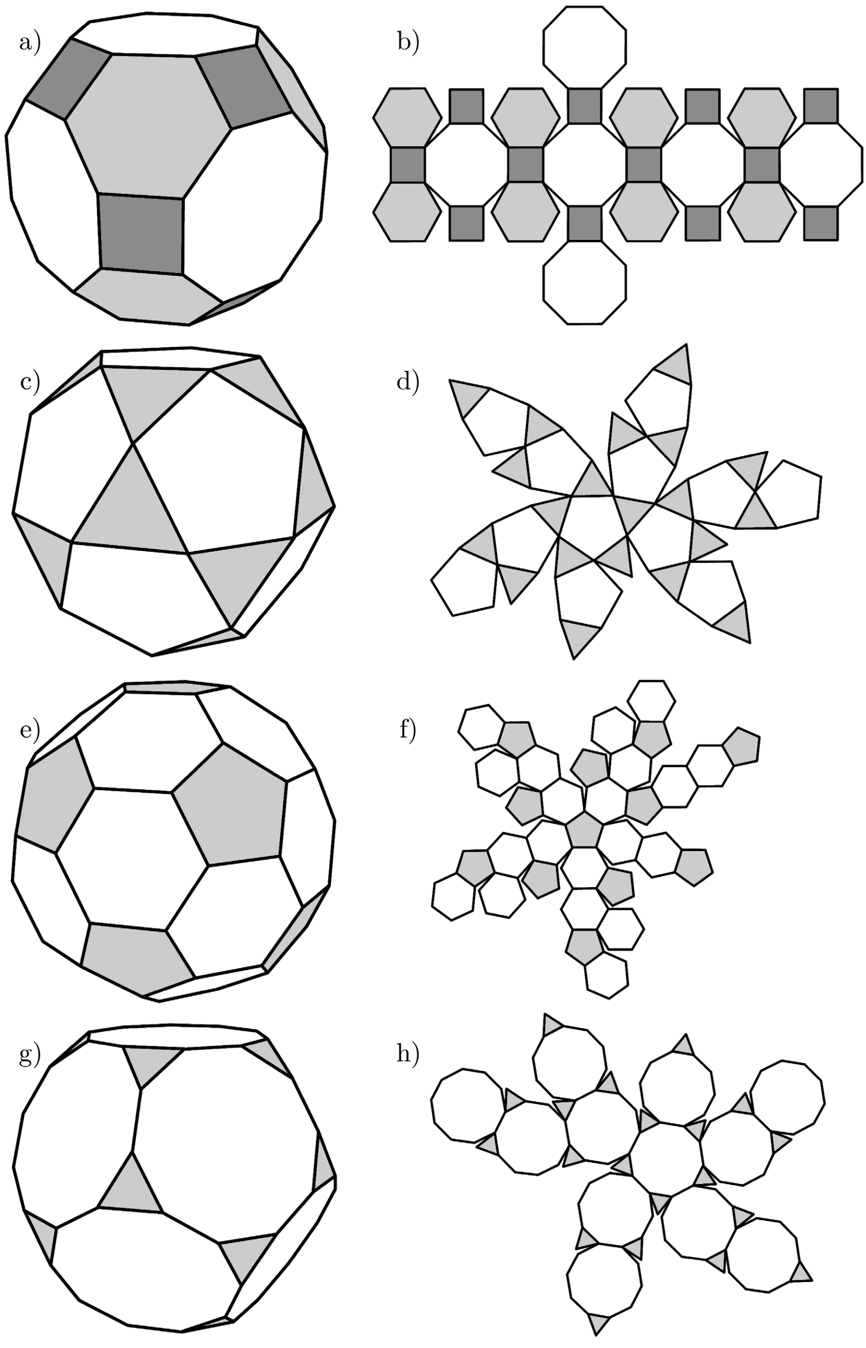
Další vlastnosti těchto těles (poloměry opsaných kulových ploch, kartézské souřadnice vrcholů apod.) lze najít na mnoha webových stránkách.[5]

P_x	Název	v	h	s	Druhy stěn	Typ vrcholu
P_1	Truncated tetrahedron	12	18	8	$4_3 + 4_6$	(3, 6, 6)
P_2	Cuboctahedron	12	24	14	$8_3 + 6_4$	(3, 4, 3, 4)
P_3	Truncated octahedron	24	36	14	$6_4 + 8_6$	(4, 6, 6)
P_4	Truncated hexahedron	24	36	14	$8_3 + 6_8$	(3, 8, 8)
P_5	Rhombicub-octahedron	24	48	26	$8_3 + 18_4$	(3, 4, 4, 4)
P_6	Truncated cuboctahedron	48	72	26	$12_4 + 8_6 + 6_8$	(4, 6, 8)
P_7	Icosidodeca-hedron	30	60	32	$20_3 + 12_5$	(3, 5, 3, 5)
P_8	Truncated icosahedron	60	90	32	$12_5 + 20_6$	(5, 6, 6)
P_9	Truncated dodecahedron	60	90	32	$20_3 + 12_{10}$	(3, 10, 10)
P_{10}	Snub hexahedron	24	60	38	$32_3 + 6_4$	(3, 3, 3, 3, 4)
P_{11}	Rhombicosi-dodecahedron	60	120	62	$20_3 + 30_4 + 12_5$	(3, 4, 5, 4)
P_{12}	Truncated ico-sidodecahedron	120	180	62	$30_4 + 20_6 + 12_{10}$	(4, 6, 10)
P_{13}	Snub dodecahedron	60	150	92	$80_3 + 12_5$	(3, 3, 3, 3, 5)

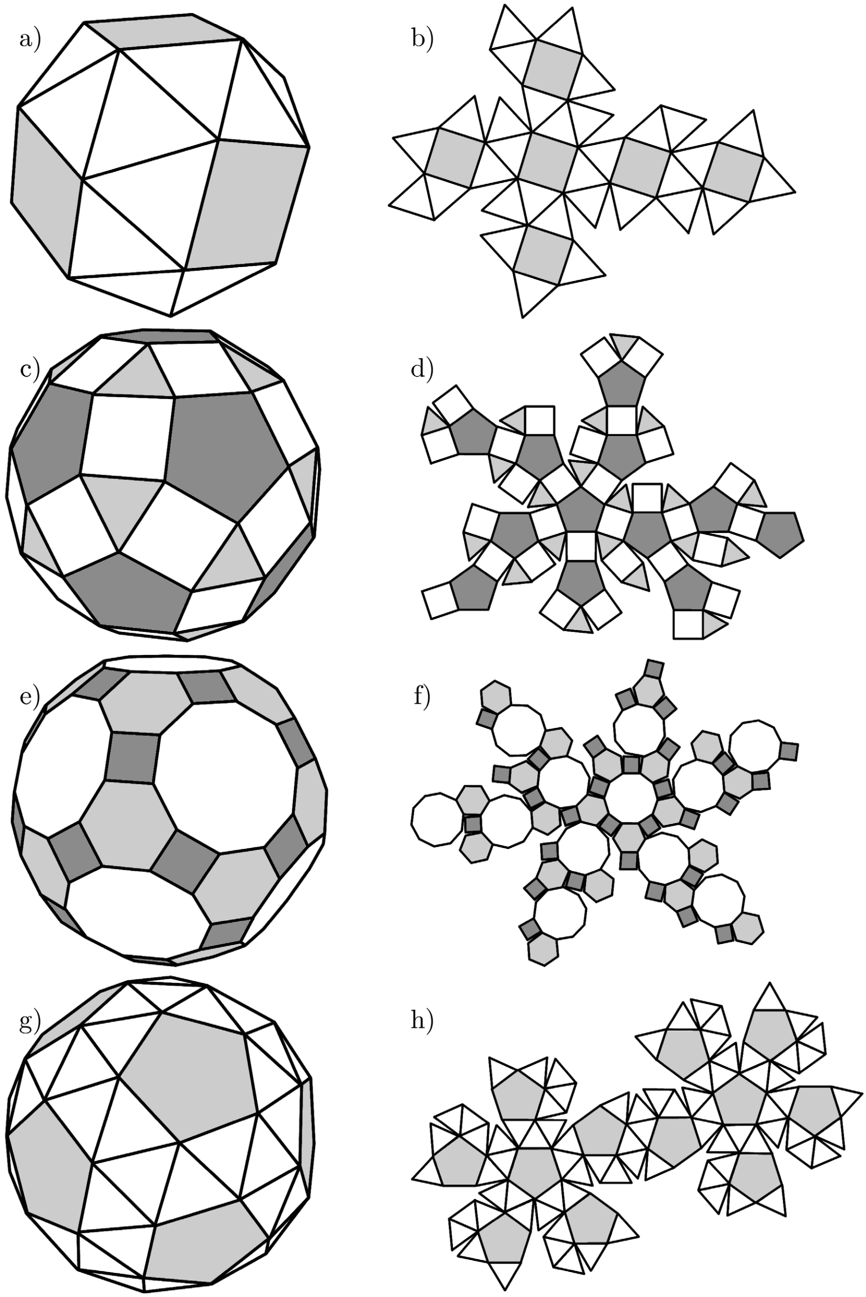
[5] Například na stránce http://en.wikipedia.org/wiki/Semiregular_polyhedron nebo na http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html.



Obr. 4: a) Těleso P_1, b) síť tělesa P_1, c) těleso P_2, d) síť tělesa P_2, e) těleso P_3, f) síť tělesa P_3, g) těleso P_4, h) síť tělesa P_4, i) těleso P_5, jeho úpravou získáme těleso na obr. 2, j) síť tělesa P_5.



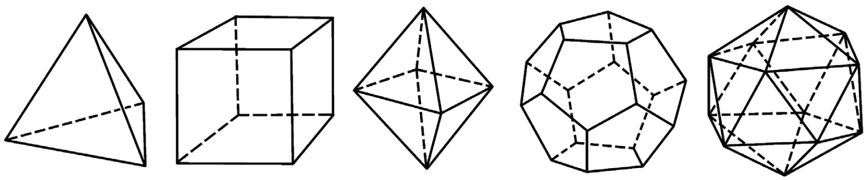
Obr. 5: a) Těleso P_6, b) síť tělesa P_6, c) těleso P_7, d) síť tělesa P_7, e) těleso P_8, f) síť tělesa P_8, g) těleso P_9, h) síť tělesa P_9.



Obr. 6: a) Těleso P_{10}, b) síť tělesa P_{10}, c) těleso P_{11}, d) síť tělesa P_{11}, e) těleso P_{12}, f) síť tělesa P_{12}, g) těleso P_{13}, h) síť tělesa P_{13}.

2 Odvození Archimédových těles z pravidelných mnohostěnů

Všechna Archimédova tělesa lze odvodit z pravidelných (též platónských) mnohostěnů (obr. 7) ořezáním vrcholů nebo hran vhodnými rovinami. Pravidelných těles je právě pět: pravidelný čtyřstěn (tetraedr), pravidelný šestistěn neboli krychle (hexaedr), pravidelný osmistěn (oktaedr), pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr) a pravidelný dvacetistěn (ikosaedr). Těmito tělesy se zabývali již ve 4. století př. n. l. Theaitétos a Platón. Také je jim věnována 13. kniha Eukleidových *Základů*.

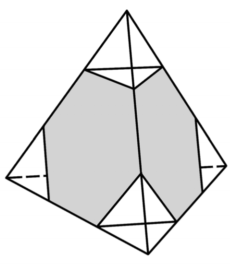


Obr. 7: Tetraedr, hexaedr, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr.

Každé Archimédovo těleso lze odvodit z některého pravidelného mnohostěnu jedním (nebo více) z pěti následujících způsobů. Způsoby a) až d) jsou založené pouze na myšlence odřezávání vrcholů nebo hran pravidelných těles. Způsob e) je složitější, kombinuje myšlenku ořezávání původních těles s otáčením nově vzniklých stěn. Archimédovy mnohostěny lze tedy tvořit:[6]

a) Odříznutím vrcholů pravidelného mnohostěnu rovinami, které zkrátí každou hranu tak, aby z původních n-úhelníkových stěn zbyly pravidelné $2n$-úhelníkové stěny (přičemž je jich stejný počet). Namísto každého vrcholu pravidelného mnohostěnu vznikne pravidelný m-úhelník.

   Takto získáme těleso P_1 z tetraedru (obr. 8),[7] těleso P_3 z oktaedru, těleso P_4 z hexaedru, těleso P_8 z ikosaedru a těleso P_9 z dodekaedru.



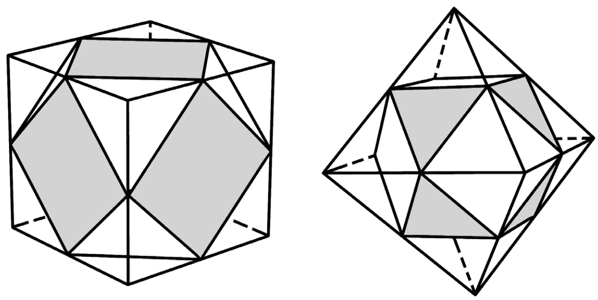
Obr. 8: Vznik tělesa P_1 z tetraedru.

[6] V popisech jednotlivých způsobů odvození Archimédových těles značí n počet vrcholů jedné stěny pravidelného mnohostěnu a m počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu pravidelného mnohostěnu z něhož vycházíme.

[7] V obrázcích 8 až 12 jsou šedě obarveny ty stěny Archimédova tělesa, které leží ve stěnách původního pravidelného mnohostěnu.

b) Odříznutím vrcholů pravidelného mnohostěnu rovinami, které procházejí středy hran sbíhajících se v jednom vrcholu tohoto mnohostěnu. Z původních n-úhelníkových stěn vzniknou menší pravidelné n-úhelníky. Místo každého vrcholu pravidelného mnohostěnu vznikne opět pravidelný m-úhelník.

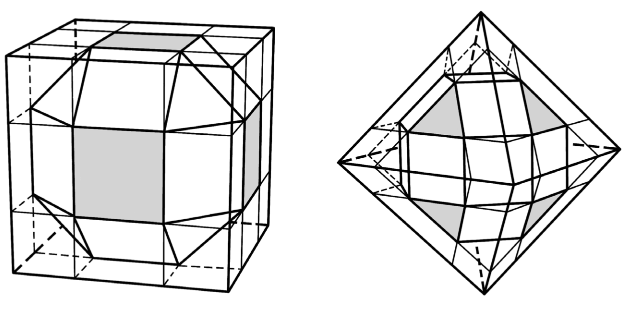
Takto získáme těleso P_2 z hexaedru nebo oktaedru (obr. 9) a těleso P_7 z dodekaedru nebo ikosaedru. Pokud bychom tímto způsobem oddělili vrcholy tetraedru, vznikl by oktaedr.[8]



Obr. 9: Vznik tělesa P_2 z hexaedru nebo oktaedru.

c) Odříznutím hran pravidelného mnohostěnu rovinami rovnoběžnými s jeho hranami tak, aby z původních n-úhelníkových stěn vznikly menší pravidelné n-úhelníky, místo každé hrany vznikl čtverec a místo původních vrcholů vznikly pravidelné m-úhelníky.

Takto získáme těleso P_5 z hexaedru nebo oktaedru (obr. 10) a těleso P_{11} z dodekaedru nebo ikosaedru. Při stejném postupu aplikovaném na tetraedr bychom získali již známé těleso P_2, které lze zkonstruovat snadněji postupem b).

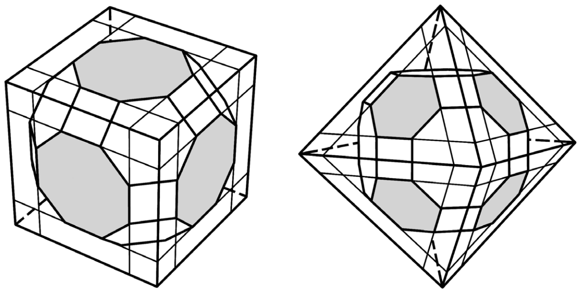


Obr. 10: Vznik tělesa P_5 z hexaedru nebo oktaedru.

[8] Skutečnost, že jedním způsobem lze odvodit totéž těleso ze dvou různých pravidelných mnohostěnů, souvisí s dualitou těchto mnohostěnů. Dva mnohostěny se nazývají duální, pokud je lze do sebe navzájem vepsat tak, že vrcholy jednoho tělesa leží ve středech stěn tělesa druhého. Hexaedr s oktaedrem a dodekaedr s ikosaedrem jsou dvojice duálních těles. Tetraedr je duální sám se sebou.

d) Odříznutím hran pravidelného mnohostěnu rovinami rovnoběžnými s těmito hranami tak, aby z původních n-úhelníkových stěn vznikly menší pravidelné n-úhelníkové stěny, a následným odříznutí vrcholů tak, aby z menších n-úhelníkových stěn vznikly pravidelné $2n$-úhelníky. Místo původních hran doplníme čtverce, místo původních vrcholů vzniknou nové $2m$-úhelníky.

Takto získáme těleso P_6 z hexaedru nebo oktaedru (obr. 11) a těleso P_{12} z dodekaedru nebo ikosaedru.



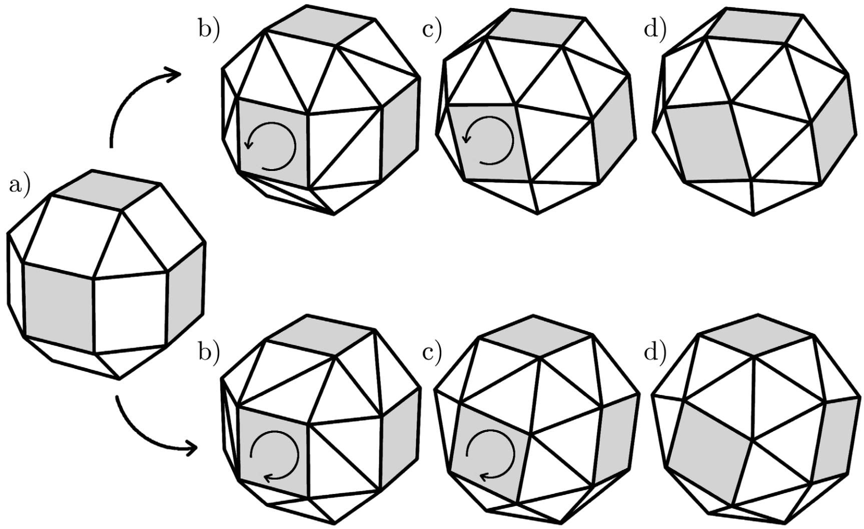
Obr. 11: Vznik tělesa P_6 z hexaedru nebo oktaedru.

e) Zbývající tělesa – P_{10} a P_{13} – již nelze vytvořit tak snadno.

Vznik tělesa P_{10} si můžeme představit takto: Sestrojíme nejprve z hexaedru (resp. oktaedru) těleso P_5 (obr. 12a). Čtverce, které vznikly namísto původních hran hexaedru, rozdělíme úhlopříčkou vždy na dva rovnoramenné trojúhelníky (obr. 12b). Nyní máme těleso, jehož povrch tvoří takový počet čtverců a trojúhelníků, který bychom potřebovali (avšak dvojice některých trojúhelníků leží v jedné rovině a navíc se nejedná o rovnostranné trojúhelníky). Nyní necháme rotovat čtverce v jejich rovinách okolo jejich středů, přičemž současně s nimi se budou ve svých rovinách okolo svých středů otáčet i rovnostranné trojúhelníky, které již na povrchu tělesa leží (obr. 12c), a to do takové polohy, kdy se delší hrany v rovnoramenných trojúhelnících zkrátí tak, že tyto trojúhelníky přejdou v trojúhelníky rovnostranné (obr. 12d). Celý postup lze provést dvěma způsoby, získáme tak dvě formy mnohostěnu P_{10} – levou a pravou (tyto dvě formy jsou v prostoru nepřímo shodné).[9]

Těleso P_{13} lze vytvořit z tělesa P_{11} obdobným způsobem, přičemž je třeba nechat rotovat pětiúhelníkové stěny spolu s rovnostrannými trojúhelníky a přitom čtverce na povrchu tělesa P_{11} rozdělit opět úhlopříčkou na dva trojúhelníky.

[9] Tento postup je názornější při zhlédnutí animace – na internetu je k dispozici animace v Cabri3D na http://gallery.cabri.com/en/snubCube.html.



Obr. 12: Vznik tělesa P_{10} z hexaedru; v horním řádku levá forma, v dolním pravá forma.

3 Znovuobjevování Archimédových těles

Kromě již zmíněného Pappova díla není známo, že by o Archimédových mnohostěnech byla dochována nějaká jiná písemná zmínka evropského původu starší než z 15. století.[10] V renesanci se však v několika dílech matematiků a výtvarníků postupně objevují popisy a nákresy některých ze třinácti Archimédových těles.

Prvními takovými pracemi jsou dva rukopisy Piera della Francesca[11] *Trattato d'abaco* [*Pojednání o abaku*] a *Libellus de quinque corporibus regularibus* [*Knížka o pěti pravidelných tělesech*]. Obě práce vyšly pod jeho jménem tiskem až ve 20. století,[12] byly však sepsány někdy před rokem 1482.

V díle *Trattato d'abaco* se autor věnuje mimo jiné pravidelnému čtyřstěnu a krychli (s odkazem na 13. knihu Eukleidových *Základů*) a jejich vepisování do kulové plochy. Vzápětí formuluje následující dvě úlohy:[13]

---

[10] V arabském světě byl ve 13. století vytvořen dodatek (tzv. XVI. kniha) k Eukleidovým *Základům*, v němž jsou popsány konstrukce polopravidelných mnohostěnů. Toto dílo se však dochovalo jen v jediném exempláři.

[11] Piero della Francesca (?1416/7–1492) byl italský malíř, jeden z představitelů rané renesance. Zabýval se matematikou a geometrií, studoval perspektivu.

[12] Piero della Francesca, *Trattato d'abaco: Dal Codice Ashburnhamiano 280 (359*.291*) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze*, ed. G. Nicco Fasola, Florence, 1942; Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, eds. M. Dalai Emiliani, C. Grayson, C. Maccagni et al., Florence, 1995.

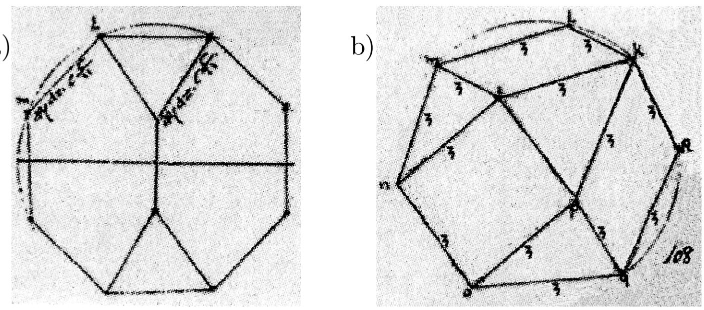
[13] Podle [Fie], str. 248.

Je dána kulová plocha o průměru 6. Vepište do této kulové plochy těleso o osmi stěnách – čtyřech trojúhelnících a čtyřech čtvercích – s navzájem shodnými hranami. Jaká bude délka hrany takového tělesa?

Je dána kulová plocha o průměru 6. Vepište do této kulové plochy těleso o čtrnácti stěnách – šesti čtvercích a osmi trojúhelnících – s navzájem shodnými hranami. Jaká bude délka hrany takového tělesa?

V prvním případě je hledaným tělesem Archimédův mnohostěn P_1. Piero della Francesca svou úlohu provází obrázkem (obr. 13a). V druhém případě se jedná o těleso P_2. Zadání této úlohy je rovněž doplněno obrázkem (obr. 13b) a navíc vysvětlením, že toto těleso získáme ořezáním krychle rovinami procházejícími středy hran krychle.

a) b)



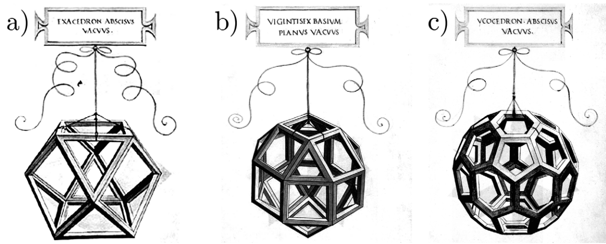
Obr. 13: Konstrukce Piera della Francesca: a) těleso P_1, b) těleso P_2.

V díle *Libellus de quinque corporibus regularibus* Piero della Francesca popisuje dokonce pět polopravidelných mnohostěnů – opět P_1 a dále P_3, P_4, P_8 a P_9, tedy všechna tělesa, která lze vytvořit jednoduchým ořezáním vrcholů pravidelných mnohostěnů, viz způsob a) na str. 75. U každého tělesa odvozuje, v jakém poměru je třeba rozdělit hranu původního pravidelného mnohostěnu na tři díly, aby z n-úhelníkových stěn vznikly pravidelné $2n$-úhelníky. Zatímco u mnohostěnů P_1, P_3 a P_8 je odvození snadné (původní hranu dělíme na tři shodné úsečky), u těles P_4 a P_9 autor uvádí dlouhé a podrobné výpočty, jak vytvořit ze čtverce pravidelný osmiúhelník a z pravidelného pětiúhelníku pravidelný desetiúhelník.

Jen několik let po sepsání výše uvedených rukopisů vyšla tiskem práce *De divina proportione* [*O božském poměru*] (Venice, 1509) od Luca Pacioliho.[14] V tomto díle je popsáno šest Archimédových mnohostěnů, z nichž čtyři (P_1, P_2, P_3 a P_8) znal Pacioli z rukopisů Piera della Francesca.[15] Ilustrace vytvořil Leonardo da Vinci (1452–1519).

[14] Luca Pacioli (1445–?1514/7) byl italský františkánský mnich a matematik. Je znám především jako autor knihy *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (Venice, 1494), v níž shrnul matematické znalosti své doby.

[15] Luca Pacioli byl žákem Piera della Francesca a je známo, že Pacioli ve svých dílech použil mnoho myšlenek a textů svého učitele.

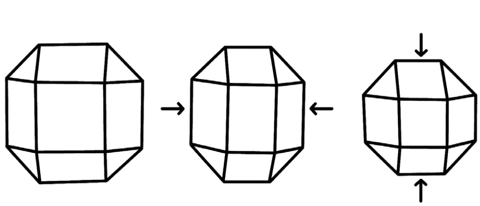


Obr. 14: Ilustrace Leonarda da Vinciho v Pacioliho díle *De divina proportione*: a) těleso P_2, b) těleso P_5, c) těleso P_8.

Pacioli popisuje tělesa o něco podrobněji než Piero della Francesca, avšak z dnešního pohledu poměrně kostrbatě. Například vzhled tělesa P_2 vysvětluje následovně:[16]

Toto těleso vzniklé ořezáním krychle má 24 hran určujících 48 rovinných úhlů [vnitřní úhly stěn], *z nichž 24 je pravých a zbylé jsou ostré. Těleso má 12 vrcholů a jeho povrch tvoří 14 stěn – 6 čtverců a 8 trojúhelníků, přičemž každá strana čtverce je současně stranou trojúhelníku. Těleso vznikne ořezáním krychle skrz středy hran, jak je vidět na obrázku* [(obr. 14a)].

Dále Pacioli popisuje mnohostěny P_5 a P_7 jako tělesa odvozená stejným způsobem (tj. půlením hran) dodekaedru a mnohostěnu P_2. V tomto postupu konstrukce tělesa P_5 je však problém. Pokud ořežeme vrcholy mnohostěnu P_2 rovinami procházejícími středy hran, získáme mnohostěn, který těleso P_5 sice připomíná, ale nejedná se přímo o ně. Ořezáním vrcholů tělesa P_2 nevzniknou na povrchu čtverce, jak bychom si přáli, ale obdélníky. Z tohoto „nepravého“ tělesa P_5 lze to správné vytvořit poměrně snadno pomocí dvou prostorových transformací – „stlačením“ v horizontálním a vertikálním směru (obr. 15). Otázkou je, zda si byl Pacioli tohoto omylu vědom, jelikož se o něm v textu nezmiňuje, avšak da Vinciho ilustrace zobrazuje skutečně těleso P_5 (obr. 14b).



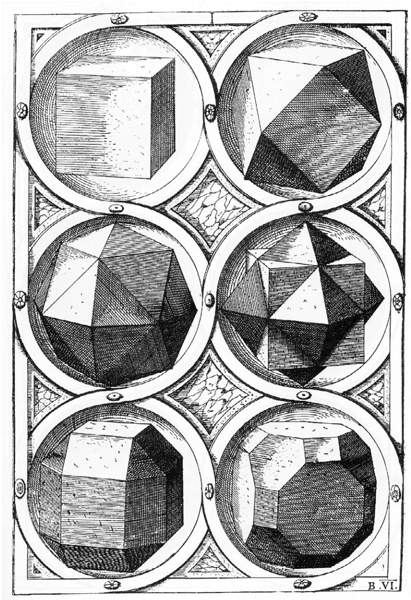
Obr. 15: Vytvoření tělesa P_5 z mnohostěnu, který popsal Pacioli.

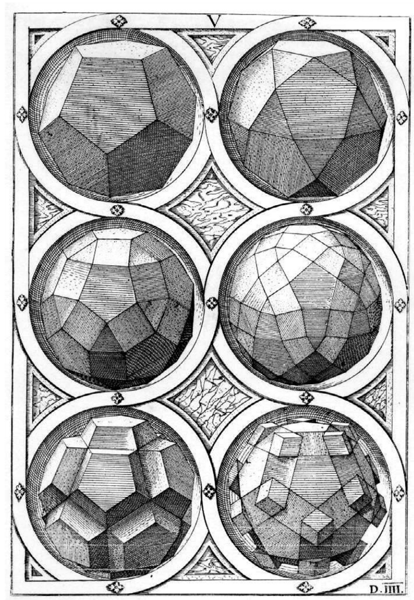
Těleso, které Luca Pacioli ve skutečnosti popsal (tedy to, které získáme ořezáním vrcholů mnohostěnu P_2), zobrazil správně o necelých šedesát let později Wentzel Jamnitzer[17] ve svém díle *Perspectiva corporum regularium* [*Perspek-*

[16] Podle [Fie], str. 254.

[17] Wentzel Jamnitzer (1508–1585) byl německý zlatník a malíř. Zajímal se o geometrii, zejména perspektivu a její užití v malířství.

tiva pravidelných těles] (Nürnberg, 1568), v němž se nezabýval cíleně polopravidelnými mnohostěny, ale mnohostěny, které lze nějak odvodit z jednoho pravidelného tělesa například ořezáváním vrcholů nebo průnikem s dalším pravidelným tělesem (obr. 16).



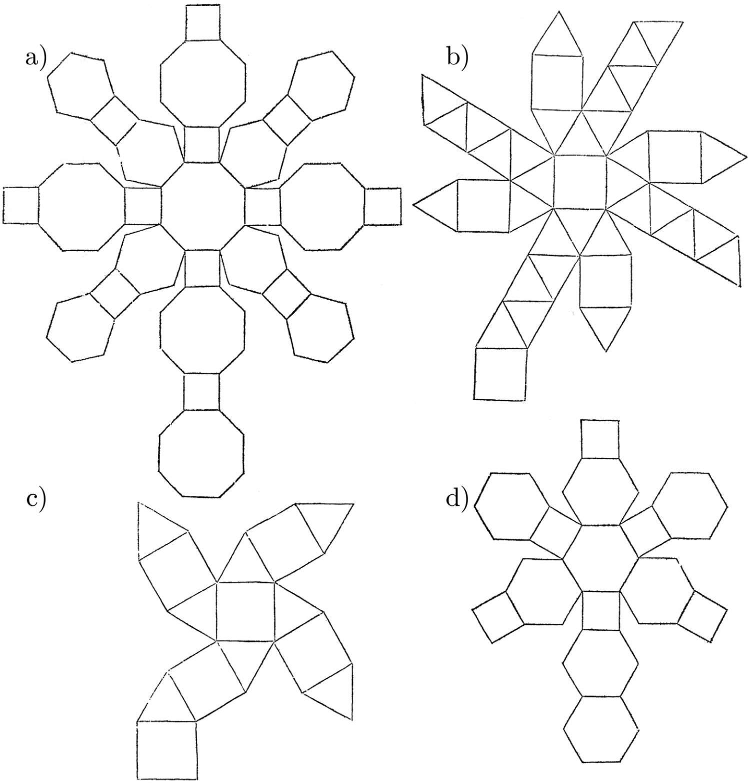


Obr. 16: Ukázka dvou stránek z Jamnitzerovy *Perspectiva corporum regularium*. Ořezaný mnohostěn P_2 je vlevo dole.

Další významnou osobností zabývající se polopravidelnými mnohostěny byl Albrecht Dürer.[18] V prvním vydání svého rozsáhlého díla *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen* [*Pojednání o měření kružítkem a pravítkem na přímkách, v rovinách a tělesech*] (Nürnberg, 1525) představil sedm Archimédových těles, z nichž dvě (P_6, P_{10}) nemohl znát z prací svých renesančních předchůdců. Těmi dalšími jsou tělesa P_1, P_2, P_3, P_4 a P_5.

Dürer však použil zcela novou metodu objevování těchto těles, a sice prostřednictvím jejich sítí. Vyšel od jednoho z pravidelných mnohoúhelníků a přikresloval k jeho stranám souměrně do všech stran další a další pravidelné mnohoúhelníky (obr. 17). Správnost svých sítí Dürer pravděpodobně testoval jejich skládáním (jak napovídá jeho popis jednotlivých těles).

[18] Albrecht Dürer (1471–1528) byl německý malíř, grafik a matematik. Vytvořil přes tisíc uměleckých děl (kresby, malby, rytiny atd.). V oblasti matematiky se zabýval především geometrií. Své poznatky shrnul v díle *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen* (Nürnberg, 1525), což byla první práce tohoto druhu v němčině. Známá je též jeho práce *Vier Bücher von menslicher Proportion* [*Čtyři knihy o lidských proporcích*] (Nürnberg, 1528).

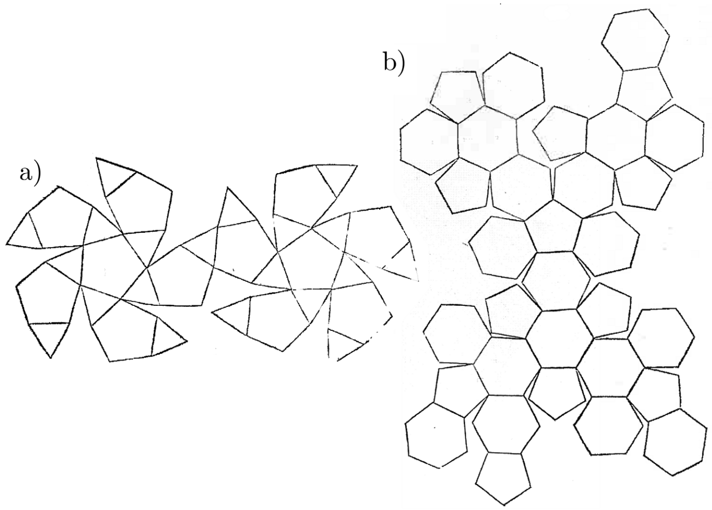


Obr. 17: Ukázky Dürerových sítí: a) síť tělesa P_6,
b) síť tělesa P_{10}, c) síť tělesa P_2, d) síť tělesa P_3.

Dürerův způsob popisu jednotlivých polopravidelných těles si ukážeme na mnohostěnu P_6 [Dür1]:

Toto těleso má 6 osmiúhelníkových, 8 šestiúhelníkových a 12 čtyřúhelníkových stěn. Pokud je složíme, získáme 48 vrcholů a 72 hran.

Field ve svém článku [Fie], str. 269, považuje za pravděpodobné, že Dürer touto metodou objevil i sítě dalších polopravidelných mnohostěnů. Vyhnul se však konstrukci sítí těch těles, jejichž stěny tvoří pravidelné pětiúhelníky nebo desetiúhelníky, jelikož prosazoval konstrukce pouze pomocí pravítka a kružítka a konstrukce pravidelného pětiúhelníku či desetiúhelníku je za těchto podmínek o něco pracnější, a proto by v případě sítí, kde je třeba takových mnohoúhelníků narýsovat více, mohla vést k nepřesnostem v rýsování. Ve druhém vydání Dürerovy práce *Underweysung der Messung* … (Nürnberg, 1538) jsou však vyobrazeny sítě dalších dvou Archimédových těles – P_7 a P_8 (obr. 18), na jejichž povrchu pravidelné pětiúhelníky jsou. Zřejmě se tedy Dürer konstrukci více pravidelných pětiúhelníků v jednom obrázku nevyhýbal a zmíněná tělesa jsou všechna, o nichž Dürer věděl.



Obr. 18: Dürerovy sítě z druhého vydání díla *Underweysung der Messung ...* a) síť tělesa P_7, b) síť tělesa P_8.

Ve znovuobjevování Archimédových mnohostěnů nejdále[19] z renesančních umělců pokročil Daniele Barbaro,[20] který v práci *La Pratica della perspettiva* [*Užití perspektivy*] (Venice, 1568) znázornil a popsal jedenáct Archimédových mnohostěnů, z nichž devět (P_1 až P_9) se objevilo již v dřívějších dílech a dvě (P_{11} a P_{12}) byla nová.

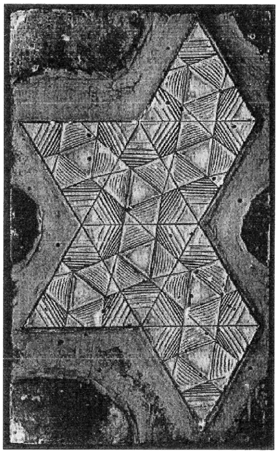
Barbaro byl více výtvarník než matematik. Jednotlivá polopravidelná tělesa popsal jen velmi jednoduše. Striktně se držel metody ořezávání pravidelných mnohostěnů. To je pravděpodobně důvodem, proč nepopsal také těleso P_{10}, které mohl znát z Dürerovy práce. Toto těleso totiž, jak bylo výše uvedeno, nelze jednoduchým ořezáním pravidelného mnohostěnu vytvořit.

Při konstrukci těles P_5 a P_{11} se Barbaro dopustil stejného omylu jako Pacioli. Těleso P_5 popsal jako mnohostěn, který získáme ořezáním vrcholů (rovinami vedenými středy hran) tělesa P_2, a těleso P_{11} popsal chybně jako mnohostěn, který získáme obdobným ořezáním vrcholů tělesa P_7.

[19] Nejdále ve smyslu vyobrazení i slovního popisu těles. V článku [SFS] je popsáno 40 dřevorytin vytvořených pravděpodobně mezi lety 1538 až 1556 (tedy někdy po vydání Dürerova *Underweysung ...* , ale ještě před vydáním Barbarovy práce), na nichž jsou vyobrazeny sítě všech pravidelných a Archimédových mnohostěnů (obr. 19). Není jasné, kdo je autorem těchto rytin, ani zda byly připraveny jako ilustrace k nějakému textu. Nicméně kromě sítí jako takových znázorňují i postupy, jak polopravidelné mnohostěny vznikají z mnohostěnů pravidelných (sítě polopravidelných těles jsou vepsané do sítí těles pravidelných, takže je vlastně v obrázcích naznačeno ořezávání pravidelných mnohostěnů). O těchto rytinách se další autoři nezmiňují. Je-li však správně určeno období jejich vzniku, pak se pravděpodobně jedná o nejstarší dochované vyobrazení sítí všech Archimédových mnohostěnů.

[20] Daniele Barbaro (1514–1570) byl italský filosof a matematik. Je znám svým komentovaným překladem Vitruviova díla (Marcus Vitruvius Polio: *De architectura*, 1. století př. n. l.) do italštiny.

Kromě polopravidelných těles odvodil Barbaro metodou ořezávání vrcholů i další mnohostěny, které mají vrcholy různých typů.



Obr. 19: Dřevorytina neznámého autora zobrazující síť oktaedru s naznačením, jak vytvořit těleso P_{10}.

Zdá se, že se výše uvedení autoři nesnažili podat kompletní seznam polopravidelných těles. Nezabývali se jejich definicí, někteří byli dokonce přesvědčeni, že je jich nekonečně mnoho. Nikdo z nich neuvedl v souvislosti s těmito mnohostěny jméno Archiméda ze Syrákús nebo Pappa z Alexandrie.

Kompletní přehled polopravidelných těles spolu s jejich definicí podal až Johannes Kepler[21] v díle *Harmonices Mundi* [*Harmonie světa*] (Linz, 1619). V úvodu kapitoly věnované těmto mnohostěnům uvádí, že se jedná o tělesa Archimédova. Tuto informaci zřejmě převzal z Pappova díla, které dobře znal a několikrát se na ně v *Harmonices Mundi* odvolává. Kromě Archimédových mnohostěnů popsal jako polopravidelná tělesa též hranoly a antihranoly.

Kepler zkonstruoval všech třináct Archimédových těles tak, že zkoumal všechna možná uspořádání pravidelných mnohoúhelníků okolo jednoho vrcholu mnohostěnu. Všechna přípustná uspořádání stěn kolem vrcholu podrobně diskutoval[22] a pomocí těchto uspořádání také jednotlivá tělesa popisoval. Podívejme se například na Keplerův komentář k mnohostěnu P_5 [Kep], str. 62, kniha II.:

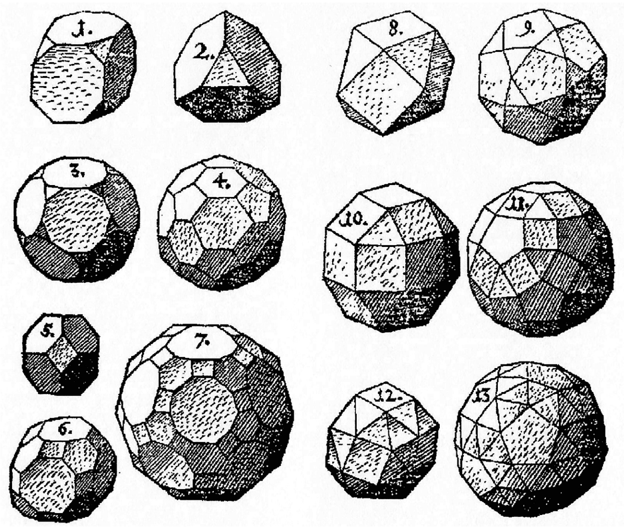
Jeden trojúhelníkový a tři čtyřúhelníkové [úhly] *jsou menší než čtyři pravé* [úhly]. *Takže se spolu pojí osm trojúhelníků a osmnáct (tj. 12 a 6) čtverců a vytvoří jeden Icosihexaedron* [26-stěn], *který nazývám Rhombicuboctaedricus sectus neboli Rhombicuboctaedron.*

---

[21] Johannes Kepler (1571–1630) byl německý matematik, astrolog a astronom. V letech (1600–1612) působil v Praze na dvoře císaře Rudolfa II. Je znám především zformulováním tří (Keplerových) zákonů o pohybu nebeských těles.

[22] Keplerův postup zkoumání přípustných typů vrcholů je popsán v [Cro].

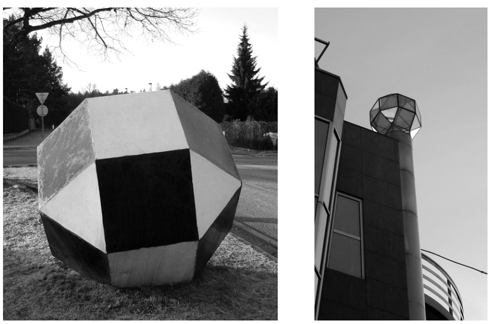
Každé z Archimédových těles je v *Harmonices Mundi* vyobrazeno, tyto ilustrace připravil Wilhelm Shickard (1592–1635). Jednotlivé mnohostěny jsou na obrázku očíslovány, Keplerovo číslování však neodpovídá našemu značení P_k (obr. 20).



Obr. 20: Ilustrace Archimédových mnohostěnů z *Harmonices Mundi*. Johannes Kepler nazval tělesa následovně: (1) cubus truncus, (2) tetraedron truncum, (3) dodecaedron truncum, (4) icosihedron truncum, (5) octaedron truncum, (6) cuboctaedron truncum, (7) icosidodecaedron truncum, (8) cuboctaedron, (9) icosidodecahedron, (10) rhombicuboctaedron, (11) rhombicosidodecaedron, (12) cubus simus, (13) dodecaedron simum.

4 Archimédova tělesa okolo nás

S Archimédovými tělesy (přesněji s modely těchto těles) se setkáváme i v běžném životě, zejména v architektuře.

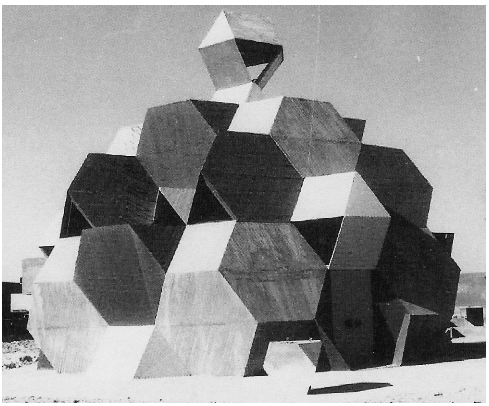


Obr. 21: Model tělesa P_2 v Praze Klánovicích (vlevo) a v Praze v pasáži Archa (vpravo).

V České republice lze najít některé z Archimédových mnohostěnů použité jako dekorativní prvky. Jen v Praze jsou mi známé tři takové situace – plechový model tělesa P_2 o délce hrany asi 80 cm na konečné autobusu v městské části Klánovice (obr. 21), skleněné dekorativní zakončení sloupku tímtéž tělesem v pasáži Archa spojující ulice Na Poříčí a Na Florenci (obr. 21) a tři okrasné skleníky s kopulí ve tvaru tělesa P_8 ve stanici metra Lužiny (obr. 22).

Obr. 22: Těleso P_8 ve stanici pražského metra Lužiny.

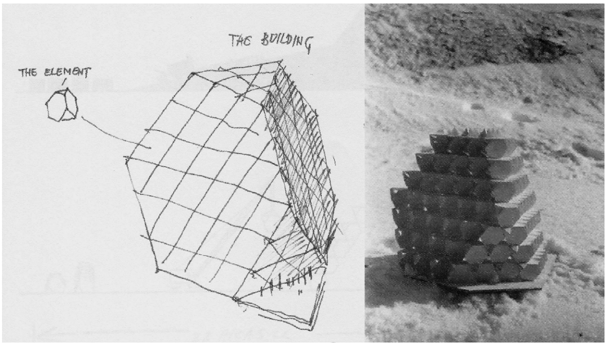
Podobných výjevů bychom jistě našli více. Existují však architekti, kteří práci s (nejen polopravidelnými) mnohostěny dovedli mnohem dál než jen k jejich využití jako dekorativních prvků. Velké nadšení v použití mnohostěnů je zřejmé v díle Alfreda Neumanna[23] a jeho žáků Zvi Heckera a Eldara Sharona.



Obr. 23: Synagoga v izraelské poušti Negev podle návrhu A. Neumanna a Z. Heckera.

[23] Alfred Neumann (1900–1968) se narodil ve Vídni, část života strávil v Brně (zde studoval na Německé technice), působil ve Vídni, Brně, Paříži a Praze. V roce 1945 byl transportován do Terezína. Po válce se vrátil do Brna a roku 1949 emigroval do Izraele. Zde byl roku 1952 jmenován profesorem architektury na Izraelském institutu techniky v Jeruzalémě. V roce 1966 odešel do Kanady, kde žil až do své smrti. Se svými studenty Zvi Heckerem a Eldarem Sharonem spolupracoval v Izraeli od roku 1959.

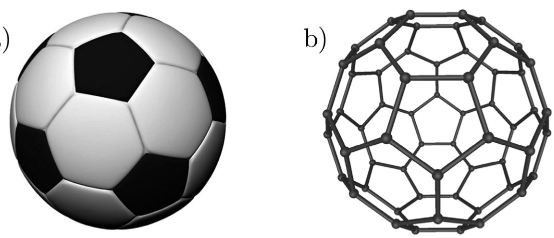
Tito tři architekti pracovali společně na několika projektech založených na vhodné kombinaci mnohostěnů. Jejich zájem se dotkl i Archimédových těles. Některé z těchto projektů byly realizovány – např. projekt synagogy ve vojenském prostoru v poušti Negev v Izraeli (obr. 23). Při stavbě byly použity díly ve tvarech Archimédových mnohostěnů P_1, P_2 a P_3. Projekt je z let 1967–69 a podíleli se na něm A. Neumann a Z. Hecker. K zajímavým nerealizovaným projektům patří návrh synagogy (obr. 24) z roku 1966. Tato stavba byla založena na vhodném poskládání mnohostěnů P_1. Jedná se opět o projekt A. Neumanna a Z. Heckera. O díle Alfreda Neumanna a jeho žáků podrobně pojednává práce [Seg].



Obr. 24: Skica a model nerealizovaného projektu.

S Archimédovými tělesy se však setkáme také v jiných oborech. Populárním mnohostěnem je P_8, jehož tvar je základem při výrobě fotbalových míčů, které vznikají sešitím povrchu tělesa – pravidelných pětiúhelníků a šestiúhelníků. Kulatého tvaru je pak dosaženo nafouknutím míče (obr. 25a). Totéž těleso je též dobře známé chemikům, stabilní molekula uhlíku fulleren C_{60} má totiž svých 60 atomů uspořádaných právě ve vrcholech tělesa P_8 (obr. 25b). V chemii však najdeme i další tvary polopravidelných mnohostěnů, viz například článek [Liu] zabývající se supramolekulami, jejichž tvar souvisí s mnohostěnem P_3.

a) b)



Obr. 25: a) Fotbalový míč, b) fulleren.

STOMACHION

Zdeněk Halas

Archimédův spis *Stomachion* pojednává o stejnojmenné skládačce vyrobené ze čtrnácti kousků slonoviny, jež vznikly rozdělením jednoho velkého čtverce. Jednotlivé dílky mají různé tvary: jeden je pětiúhelník, dva jsou čtyřúhelníky a ostatní jsou různé trojúhelníky. Z těchto kousků bylo možno sestavovat rozličné obrazce ve tvaru zvířat, lidí či předmětů. Archimédés jí věnoval pojednání, z něhož se nám dochovaly jen dva fragmenty: řecký (obsažen v *Archimédově palimpsestu*) a arabský. Tyto zlomky jsou velmi krátké, a tak nám v jejich interpretaci pomáhají zmínky, které se nám o skládačce stomachion dochovaly u několika antických autorů.

1 Stomachion v antice

Nejpodrobnější popis hříčky stomachion nacházíme u římského básníka Decima Magna Ausonia[1] (4. stol. po Kr.), který sestavil na žádost císaře Valentiniana z veršů Vergiliových děl báseň *Cento nuptialis* (Svatební cento), v níž popsal průběh svatby a její završení. Předchází jí úvodní dopis, v němž vysvětluje, co je cento[2] a jak se sestavuje. Vyjmenovává přitom kombinace různých meter, jejichž složením vznikne hexametr. Tato metra je tedy potřeba umně skládat tak, aby se doplňovala a vznikl *hexametr, takže bys mohl říci, že je to jako hra, kterou Řekové nazývají stomachion*[3]*. Jsou to kostečky, celkem jich je čtrnáct, a mají tvar geometrických útvarů. Některé jsou trojúhelníky se stejnými stranami, jiné se stranami různých délek, některé souměrné, některé s pravými úhly, některé s obecnými; nazývají se rovnoramennými a rovnostrannými trojúhelníky, také pravoúhlými a obecnými. Různým sestavováním těchto kousků k sobě vzniknou podoby bezpočtu tvarů: obludný slon, zuřivý kanec, letící husa, gladiátor*[4] *ve zbroji, číhající lovec a štěkající pes – dokonce i věž a konvice*

[1] Ausonius se narodil kolem roku 310 v Burdigale (dnešní Bordeaux), kde se stal profesorem gramatiky a rétoriky. Roku 364 jej povolal ke dvoru císař Valentinianus I., aby vychovával jeho syna Gratiana, budoucího císaře. Následně zastával veřejné funkce včetně konzulátu. Po Gratianově smrti se stáhl do ústraní, kde se věnoval literární tvorbě. Zemřel kolem roku 393/4. Jeho poezii charakterizuje technická a formální dokonalost, vysoká erudice vedená snahou o to, aby se neztratilo nic z římské kultury, zájem o školské prostředí a jistá idealizace projevující se v nevnímavosti ke skutečným problémům doby: vylidňování a chudnutí venkova, bortícím se hranicím říše a náboženským nesvárům.

[2] Jedná se o báseň složenou z veršů a jejich částí, které jsou převzaty z básní jiného autora. Většinou se takto vzniklá báseň týká naprosto odlišného tématu.

[3] V textu latinského vydání Ausonia je sice uvedeno slovo *ostomachion,* z kritického aparátu však vyplývá, že nejlepší rukopisy obsahují slovo *stomachion,* na což upozorňuje také J. L. Heiberg v [Hei]. Slovo *ostomachion* bylo pravděpodobně chybně spojeno s ὀστέον (*osteon*, kost) a μαχία (*machiá*, boj, bitva), tedy *boj kostí.*

[4] Tzv. *murmillo* (u Ausonia psáno *mirmillo*), jedná se o druh těžce ozbrojeného gladiátora, který měl štít chránící celé tělo, chrániče holení a meč. Na jeho přilbě byla nakreslena ryba. Proti němu stál v boji *retiarius* (*síťař*) ozbrojený rybářskou sítí, trojzubou vidlicí a dýkou.

a bezpočet jiných takových obrazců, jejichž různorodost závisí na dovednostech hráče. Zatímco však je harmonické složení dovedného hráče úžasné, směska vytvořená hráčem neobratným je směšná. Když jsem toto předem uvedl, tak uvidíš, že já jsem jako ten druhý druh hráče.

A tak toto malé dílko, cento, je sestaveno stejně jako právě popsaná hra. Dává do souladu různé významy, aby náhodně spojené kousky vypadaly tak, jako by spolu zcela přirozeně souvisely a neprosvítala mezi nimi žádná trhlina, aby to nevypadalo, že byly spojeny násilně, aby podivně nevyčnívaly a nebyly nesouvisle rozloženy.[5]

Ausonius tedy přirovnává druh poezie, v níž se mísí různé druhy meter, ke hře, kterou Řekové nazývali stomachion a která se hrála se čtrnácti kousky slonoviny ve tvaru rovnoramenných, rovnostranných, pravoúhlých či obecných trojúhelníků[6]. Udává přitom příklady obrazců, které lze z těchto kousků složit.

Druhým svědectvím je báseň, která nese „stomachion“ přímo ve svém názvu[7]. Jejím autorem je Magnus Felix Ennodius[8] (473/4–521), který byl biskupem v Pavii.

Stomachion ze slonoviny
(přel. Radomír Bužek)

Mužská srdce umdlévají rozrušená lehkou trýzní:
ženám je dovoleno hrát.
Rozprostírají hru, kterou poslal slon z marmarického kraje,
její rozložené dílky zakrátko dostávají tvar.
Mladé dívky se učí proradně žertovat o trestu:
vždyť ženám je vlastní ubližovat smíchem.
Na tisíc tvarů dokážou poskládat v těsném pouzdře;
veškerá slonovina, ženo, je schránkou tvého srdce.

Ve třetím a čtvrtém verši čteme svědectví o tom, jak se stomachion hrálo: jednotlivé kousky slonoviny ve tvaru geometrických útvarů se rozložily, hráč si je postupně bral a skládal z nich nový či požadovaný obrazec.

Zvláštně vyznívá předposlední verš. Zdá se, jako by se jednotlivé tvary skládaly pouze ve čtvercovém pouzdře, v němž byly dílky umístěny. Není však jasné, co by pak bylo cílem hry – snažili se hráči dílky poskládat vždy jen do čtverce? Střídalo se při tom více hráčů? Tato interpretace by mohla podpořit hypotézu o tom, že Archimédés ve svém spise *Stomachion* zkoumal, kolika způsoby lze

[5] Přeloženo z vydání: *Decimi Magni Ausonii Burdigalensis opuscula.* Ed. R. Peiper, Teubner, Leipzig, 1886.

[6] Je zajímavé, že o čtyřúhelnících a pětiúhelníku není v citátu zmínka.

[7] Báseň je přeložena z vydání [En], str. 602, kde je nadepsána *De ostomachio eburneo.* Nejlepší rukopisy však mají v názvu „stomachio“.

[8] Psal prozaické spisy, básně a epigramy, v nichž je hojně přítomen svět pohanské klasiky, o němž hovoří se steskem, jaký u biskupa udivuje.

všech čtrnáct dílků sestavit do tvaru původního čtverce. U této hypotézy se ještě zastavíme v komentáři k řeckému zlomku textu *Stomachion.* Co se však týče hry samotné, na základě ostatních antických svědectví je pravděpodobnější, že se v tomto verši hovoří o tom, že dívky dokáží z dílků sestavit tvary velmi mnoha různých věcí, přičemž skládání neprobíhá přímo v těsném pouzdře („rozprostírají hru“), ale v něm je jen *uloženo* čtrnáct dílků skrývajících ohromný potenciál variability tisíce tvarů.[9]

Další zmínky o stomachion nacházíme u latinských gramatiků.[10] Na začátku třetí knihy pojednání *Ars Grammatica,* kterou sepsal ve čtyřech knihách Marius Victorinus[11] (4. stol.), je zmíněna tzv. „archimédovská krabička“ (*loculus Archimedius*) obsahující čtrnáct kousků ze slonoviny.

Autorem významného pojednání o metrice věnovaného Neronovi byl Caesius Bassus (1. stol. po Kr.). Tento spis se sice nedochoval, ale na jeho základě sepsal pojednání o metrice latinský gramatik Atilius Fortunatianus (4. stol.). Na jeho konci je uvedena pobídka k praktickému procvičování probrané látky, v níž nacházíme další informace o *loculus Archimedius*:

Došlo-li na procvičování, působí při zkoumání meter potěšení, když hbitě poznáváme, odkud ta která pocházejí, jakým způsobem jsou složena a když můžeme vymýšlet mnohá další.

Jestliže nám totiž byla v chlapeckých letech k posílení paměti velice prospěšná ona archimédovská skládačka, která obsahuje čtrnáct kousků ze slonoviny, každý s různými úhly, které jsou poskládány do čtverce, a díky našemu rozličnému přeskládávání vytváří jednou přilbu, podruhé dýku, jindy sloup, loď či nesčetně mnoho dalších tvarů — oč větší rozkoš a plnější užitek nám mohou přinášet rozličná zpracování meter, držíme-li v rukou básně, když si pak u básníků povšimneme, že metra, jež unikají pozornosti nezkušených, byla tímto uměním rytmizována a spojena se zpěvem?

Kromě seznamu předmětů, které lze z jednotlivých kousků slonoviny složit, zde nacházíme významné svědectví o tom, že pro děti hra sloužila k procvičení paměti. Při skládání stomachion se tedy pravděpodobně nejednalo pouze o kreativní objevování nových tvarů, ale také o opětovné sestavení předložených tvarů známých a osvědčených.

Název hry *loculus Archimedius* však neznamená, že by tuto hru vymyslel sám Archimédés. Označení *Archimedius* může naznačovat, že Archimédés hru

[9] Latinsky *Angusta norunt res mille includere capsa.* Latinské „includere“ také znamená „uzavřít“, „shrnout“.

[10] Keil H.: *Grammatici Latini VI.* Teubner, Leipzig, 1874. Příslušná pasáž z Victorina je uvedena na str. 100, z Fortunatiana je na str. 271 a 272 – odtud také překládáme níže uvedenou pasáž.

[11] Úspěšný řečník pocházející z Afriky; za jeho zásluhy ve školském působení a za kvality plamenného řečníka mu byla na římském foru vztyčena socha. Věnoval se logice a novoplatónské filosofii, po obrácení ke křesťanství sepsal tři knihy *Proti Areiovi* a komentáře k Pavlovým epištolám.

studoval z matematického hlediska. Může však také vyjadřovat její obtížnost, jako je tomu zřejmě i v *Úloze o dobytku*, jejíž dochovaný řecký text nese nadpis *Probléma Archimédeion.*

2 Arabský zlomek

Popisům skládačky stomachion dobře odpovídá arabský text, který nalezl švýcarský historik matematiky Heinrich Suter[12] (1848–1922) ve dvou arabských kodexech[13] uložených v tehdejší královské knihovně v Berlíně. Tentýž arabský text poté nalezl ještě v Bodleyově knihovně v Oxfordu[14] a v Londýně[15]. Protože se text oxfordského a londýnského kodexu neodlišoval od textu kodexů berlínských, zaměřil se H. Suter ve svém vydání[16] arabského textu pouze na oba kodexy berlínské. K arabskému textu připojil také německý překlad, který ve svém novém vydání Archimédova díla [Hei] později přetiskl s malými úpravami[17] dánský klasický filolog a historik antické matematiky Johan Ludvig Heiberg (1854–1928). Následující text vychází z německého překladu Suterova.[18]

Ve jménu boha milosrdného a slitovného! Můj pane, propůjč mi zdar a způsob, ať to pro mne není obtížné![19]

Kniha Archimédova o rozdělení obrazce stomachion[20] *na čtrnáct obrazců, které jsou k němu v [racionálním] poměru*[21].

Narýsujeme čtverec[22]*, nechť je to $ABGD$, rozpůlíme BG v E, sestrojíme EZ kolmo na BG, vedeme úhlopříčky AG, BZ a ZG, rozpůlíme rovněž BE*

---

[12] Většinu svého života působil jako gymnaziální profesor v Curychu. Věnoval se především dějinám islámské matematiky a astronomie.

[13] Oba berlínské kodexy popsal v článku *Über zwei arabische mathematische Manuskripte der Berliner Königl. Bibliothek.* Biblioth. math. 1898, 73–78. Jednalo se o kodexy označené Mf. 258 a Mq. 559.

[14] Tento kodex je označen číslem 960.

[15] Uložen v Library of the India Office.

[16] Suter H.: *Der Loculus Archimedius oder das Syntemachion des Archimedes. Zum ersten mal nach zwei arabischen Manuskripte der Königlichen Bibliothek in Berlin herausgegeben und übersetzt.* Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 9(1899), str. 491–500.

[17] Viz strany 420–424. Jedná se vesměs o interpunkci, členění do odstavců a nahrazení zkratky „Dr.“ pro trojúhelník (něm. *Dreieck*) symbolem $\triangle$.

[18] Pro přehlednost však z Heibergova vydání přejímáme členění do odstavců a označení trojúhelníku pomocí symbolu $\triangle$. Podobně také doplňujeme odkazy do Eukleidových *Základů.* Slova přidaná pro usnadnění pochopení smyslu textu uvádíme v hranatých závorkách. Jelikož se jedná o delší citát, neodlišujeme jej obvyklou kurzívou. Děkuji doc. Leo Bočkovi za pomoc při práci s německým textem.

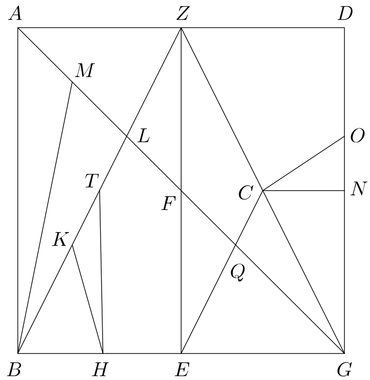
[19] Jedná se o obvyklou úvodní formuli uváděnou ve spisech islámských autorů.

[20] Suterovo vydání obsahuje přepis „siṭemâšion“, připouští se zde také čtení „sitomâšion“; arabský text však není vokalizován, přesné čtení tedy nelze s jistotou určit. Řecké χ se v arabštině obvykle přepisovalo jako „š“, např. arabské „Aršimîdes“ odpovídá řeckému „Archimédés“.

[21] Dnes bychom řekli, že podíl obsahů jednotlivých obrazců k obsahu celého čtverce je racionální číslo.

[22] V obou arabských kodexech je uveden „rovnoběžník“, nicméně celý následující text hovoří o čtverci.

v H a sestrojíme HT kolmo na BE; potom přiložíme pravítko k bodu H a nasměrujeme jej k bodu A a vedeme HK, rozpůlíme AL v M a vedeme BM, tak je obdélník AE[23] rozdělen na sedm dílů. Potom rozpůlíme GD v N, stejně tak ZG v C, vedeme EC, přiložíme pravítko k bodům B a C a vedeme CO, vedeme ještě CN, tak je také obdélník ZG rozdělen na sedm dílů, ale jiným způsobem, než ten první, a tak je celý čtverec [rozdělen] na čtrnáct dílů.



Nyní dokážeme, že každý z těch čtrnácti dílů je k celému čtverci v racionálním[24] *poměru.*

Jelikož je ZG úhlopříčkou obdélníku ZG, tak je $\triangle DZG$ polovinou tohoto obdélníku, tedy čtvrtinou čtverce; ale $\triangle GNC$ je čtvrtinou $\triangle DZG$, protože prodloužíme-li EC, tak prochází bodem D, a pak je také $\triangle GDC$ polovinou $\triangle DZG$ a je roven oběma $\triangle GNC$ a DNC dohromady; je tedy $\triangle GNC = \frac{1}{16}$ čtverce. Jestliže nyní dále předpokládáme, že přímka OC směřuje k bodu B, jak byla také skutečně narýsována, tak je přímka NC rovnoběžná se stranou BG čtverce, resp. $\triangle OBG$, máme tedy poměr [Eukl. VI,2]:

$$BG : NC = GO : NO\,;$$

BG je však čtyřnásobkem NC, je tedy také GO čtyřnásobkem NO, proto je nyní GN trojnásobkem NO a $\triangle GNC$ trojnásobkem ONC [Eukl. VI,1]; protože však, jak jsme ukázali, je $\triangle GNC = \frac{1}{16}$ čtverce, tak je $\triangle ONC = \frac{1}{48}$ čtverce. Protože je dále $\triangle GDZ = \frac{1}{4}$ čtverce, a proto GNC je jeho $\frac{1}{16}$ a $\triangle NCO$ je jeho $\frac{1}{48}$, tak zbývá pro čtyřúhelník $DOCZ = \frac{1}{6}$ plochy čtverce. Podle předpokladu[25] *prochází dále přímka NC bodem F, a CF by bylo rovnoběžné s GE, takže máme poměr [Eukl. VI,4]: $EG : CF = EQ : CQ = GQ : FQ$; protože nyní*[26] *$EQ = 2\,CQ$ a $GQ = 2\,FQ$, tak je $\triangle EQG$ dvojnásobkem každého*

---

[23] V antické matematice se obdélníky a čtverce běžně označovaly pouze pomocí dvou vrcholů představujících jejich úhlopříčku.

[24] Pojem „racionální“ je v arabském textu na tomto místě skutečně uveden. Na začátku a v závěru textu však toto slovo chybí. Doplňujeme jej tam proto v hranatých závorkách.

[25] Míněna je celá konstrukce stomachion.

[26] Zde bychom na základě předchozího poměru očekávali: „Protože nyní $EG = 2\,CF$, je také $EQ = 2\,CQ$ a $GQ = 2\,FQ, \ldots$“

z obou $\triangle$ *GCQ a EFQ [Eukl. VI,1]; je však zřejmé, že je* $\triangle EGZ = 2\triangle EFG$ *[Eukl. VI,1], neboť je* $ZE = 2FE$*;* $\triangle EGZ$ *je však* $= \frac{1}{4}$ *čtverce, tedy* $\triangle EFG$ *je jeho* $\frac{1}{8}$*, ten*[27] *je však trojnásobkem každého z obou* $\triangle$ *EFQ a GCQ, tedy každý z těchto obou* $\triangle = \frac{1}{24}$ *čtverce AG a* $\triangle EGQ$ *je dvojnásobkem každého z obou* $\triangle$ *EFQ a GCQ, je tedy* $= \frac{1}{12}$ *čtverce. Protože je dále* $ZF = EF$*, tak je* $\triangle ZFG = \triangle EFG$ *[Eukl. VI,1]; jestliže nyní odebereme* $\triangle GCQ = \triangle EFQ$*, tak zůstane čtyřúhelník* $FQCZ = \triangle EGQ$*, je tedy také čtyřúhelník* $FQCZ = \frac{1}{12}$ *čtverce AG.*

Nyní máme čtyřúhelník ZG rozdělen na sedm dílů a přecházíme nyní k dělení druhého čtyřúhelníku.

Protože jsou BZ a EC dvě rovnoběžné úhlopříčky [Eukl. VI,2] a $ZF = EF$*, tak je* $\triangle ZLF = EFQ$ *[Eukl. VI,19], a proto* $\triangle ZLF = \frac{1}{24}$ *čtverce AG. Protože* $BH = HE$*, tak je* $\triangle BEZ$ *čtyřnásobkem* $\triangle BHT$*, neboť každý z nich je pravoúhlý;*[28] *jelikož však* $\triangle BEZ = \frac{1}{4}$ *čtverce ABGD, tak je* $\triangle BHT$ *jeho šestnáctinou. Podle našeho předpokladu*[29] *prochází dále přímka HK bodem A, máme tedy poměr [Eukl. VI,4]:*

$$AB : HT = BK : KT\,;$$

je však $AB = 2HT$*, tedy také* $BK = 2KT$*, a proto* $BT = 3KT$*, je tedy* $\triangle BHT$ *trojnásobkem* $\triangle KHT$ *[Eukl. VI,1]; protože však* $\triangle BHT = \frac{1}{16}$ *celého čtverce, tak je* $\triangle KHT =$ *jeho* $\frac{1}{48}$*. Kromě toho je* $\triangle BKH$ *dvojnásobkem* $\triangle KHT$ *[Eukl. VI,1], tedy* $= \frac{1}{24}$ *čtverce. Jelikož je dále* $BL = 2ZL$ *a* $AL = 2LF$*,*[30] *tak je* $\triangle ABL$ *dvojnásobkem* $\triangle ALZ$ *a* $\triangle ALZ$ *dvojnásobkem* $\triangle ZLF$ *[Eukl. VI,1]; protože je však* $\triangle ZLF = \frac{1}{24}$ *celého čtverce, tak je* $\triangle ALZ =$ *jeho* $\frac{1}{12}$*, tedy*[31] $\triangle ABL = \frac{1}{6}$*; je však* $\triangle ABM = \triangle BML$ *[Eukl. VI,1], tedy každý z obou těchto trojúhelníků* $= \frac{1}{12}$ *čtverce. Zbývá ještě pětiúhelník* $LFEHT =$ *polovině šestiny [a] navíc polovině osminy celého čtverce.*[32]

Rozdělili jsme tedy také obdélník[33] *AE na sedm dílů, a tak je celý obrazec ABGD rozdělen na čtrnáct dílů, které jsou k němu v [racionálním] poměru, a to je [to], co jsme chtěli [dokázat].*

Kniha Archimédova o obrazci stomachion byla dokončena v pondělí 6. rabî‘ I. 1061[34]*.*

[27] Míněn je $\triangle EFG$.

[28] Zdůvodnění je zde neúplné; je třeba dodat, že $EZ = 2HT$.

[29] Míněna je opět celá konstrukce stomachion.

[30] Argumentace je chybná; přestože se jedná o správná tvrzení, nenavazují na uvedené předpoklady. Navázat lze například takto: „a $\triangle ABL$ je podobný $\triangle FZL$, tak je $\triangle ABL = 4\triangle ZLF$ [Eukl. VI,4]“.

[31] Míněna je šestina celého čtverce.

[32] Obsah pětiúhelníku je tedy roven $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right)$ obsahu celého čtverce.

[33] Oba arabské kodexy však mají „čtverec“.

[34] Tj. v březnu 1651.

Co se týče názvu hry stomachion, H. Suter předkládá v článku [Sut2] hypotézu, že se stomachion nazývá *syntemachion* (συντεμάχιον). Činí tak na základě arabského *siṭemâšion,* což podle Sutera odpovídá řeckému *syntemachion.* Toto řecké slovo pak odvozuje od *temachion,* což je zdrobnělina *temachos* (τέμαχος, odřezek). Jednalo by se tedy o skládání kousků nějakého celku.

Kromě Suterovy hypotézy se nabízí ještě vysvětlení na základě latinského *stomachari* (zlobit se). Název by pak naznačoval hněv, když se stále nedaří složit něco pěkného. Podobně je zloba z neúspěchu obsažena v názvu známé stolní hry *Člověče, nezlob se.*

Dochovaná podoba arabského textu Archimédova spisu *Stomachion* působí uceleně: má úvod a závěr, který je obvyklý v islámských spisech, cíl uvedený na začátku spisku je v následujícím textu splněn. Přesto nelze vyloučit, že byla do arabštiny přeložena pouze malá část původního pojednání. Podstatně odlišný obraz o podobě Archimédova spisu *Stomachion* totiž podává řecký fragment.

3 Řecký zlomek

Krátce po objevu arabského překladu Archimédova *Stomachion* byl objeven řecky psaný kodex[35], jenž je dnes znám pod označením *Archimédův palimpsest.* Náročného studia smytého matematického textu se ujal dánský klasický filolog a editor Archimédova díla J. L. Heiberg, který zde kromě mimořádně zajímavého a do té doby zcela ztraceného spisu *Metoda* objevil na dvou listech zlomek textu Archimédova *Stomachion.* Jeho přepis pak publikoval roku 1913 ve druhém vydání Archimédova díla [Hei] společně s vlastním překladem do latiny a Suterovým překladem arabské verze do němčiny.

Archimédův palimpsest je dodnes jediným zdrojem řeckého textu *Stomachion.* Zachovalo se z něho velmi málo – pouze dva listy[36]. Navíc se jedná o poslední listy kodexu, takže jsou velmi poškozené jak plísní, tak také mechanicky. Tyto listy jsou velmi tenké, obsahují mnoho menších děr a pouhým okem jsou prakticky nečitelné. K největšímu poškození (zejména plísní) došlo paradoxně v posledních sto letech. Ještě J. L. Heiberg mohl tyto listy poměrně dobře přečíst pouze s pomocí lupy. Fotografie, které přitom pořídil, jsou dodnes nejkvalitnějším záznamem jejich celkové podoby.

Proč se z textu *Stomachion* zachoval pouze začátek, lze snadno vysvětlit. Tento spis byl pravděpodobně zařazen na konci i v původním kodexu. Písař, který jeho listy použil k vytvoření kodexu nového, vyřadil poslední listy, neboť byly nejvíce opotřebované. Do nového kodexu se tak dostala až folia, která byla dále od konce; ze *Stomachion* tedy zbyl jediný list obsahující jeho začátek.

Přepis, který J. L. Heiberg pořídil z těchto dvou listů, obsahoval četné mezery, neboť části textu nebylo možno pouze s pomocí lupy přečíst. Něko-

[35] Jeho objev je popsán ve studii M. Bečvářové v této knize. O dalších osudech tohoto kodexu se lze dočíst např. v [NN], [NNWT] a v této knize v kapitole *Metoda.*

[36] Jedná se o folia 172 a 177, která vznikla z jediného folia 69 obsaženého v původním kodexu s Archimédovými spisy.

lik let po prostudování se kodex ztratil. Objevil se pak až na aukci v New Yorku v roce 1998. Neznámý vlastník, který jej získal za dva miliony dolarů, poskytl celý kodex na deset let ke konzervaci a studiu, jehož výsledky vyústily v publikaci nového přepisu celého textu nejprve na internetu (http://archimedespalimpsest.net) a ve vydání reprezentativní publikace [NNWT] v prosinci roku 2011. Díky moderním technologiím se podařilo zacelit téměř všechny mezery a opravit některá slova v původním přepisu Heibergově.[37] Náš český překlad *Stomachion* vychází právě z tohoto nejnovějšího přepisu[38] řeckého textu.[39]

Archimédovo Stomachion

Jelikož takzvané stomachion může být předmětem různorodých úvah ohledně přemisťování obrazců, z nichž se skládá, uznal jsem za potřebné předně vyložit, když jsem zkoumal velikost celého obrazce, [všechny obrazce,] na které je rozdělen, čemu je každý z nich roven[40] *a podoben, potom pak také jaké úhly [vzniknou,] budou-li brána jejich spojení, a výše [uvedené] je řečeno k poznání toho, kdy z nich vznikající obrazce k sobě pasují, ať už jsou strany vznikající v těchto obrazcích v [jedné] přímce, nebo i maličko schází, [ale] zraku je to skryto; takovéto věci jsou totiž důvtipné; a chybí-li velmi málo, takže to je skryto zraku, tak by pro to neměly být sestavené obrazce odmítnuty. Spíše je z nich nemalé množství*[41] *obrazců, ‖ protože [jeden obrazec] může být sám přemístěn na jiné místo rovného a podobného obrazce a zaujmout jiné postavení. Když pak i dva obrazce jsou dohromady rovny a podobny jednomu obrazci, nebo i dva obrazce jsou dohromady rovny a podobny dvěma [jiným] obrazcům dohromady, více obrazců se tvoří kromě*[42] *přemisťování. Předeslána je jistá věta, která k tomuto směřuje.*

Buď ZG obdélník[43] *a nechť je EZ rozpůlena*[44] *[bodem] K a nechť jsou z [bodů] G, E sestrojeny*[45] *[úsečky] GK, BE.*

---

37 Více se o zpracování *Archimédova palimpsestu* lze dočíst v článku o *Metodě*.

38 Viz [NNWT], druhý díl, str. 284–287.

39 Řecký matematický text je obecně velmi stručný, ve srovnání se současnou češtinou je v něm mnoho slov vynecháno. Čtenář si je tehdy snadno domyslel z kontextu, předložek a členů v různých pádech. Při překladu do češtiny tato slova většinou přidáváme v hranatých závorkách, podobně jako další slova, bez nichž by text utrpěl na srozumitelnosti. Řecká písmena označující jednotlivé body přepisujeme do latinky takto: A – A, B – B, Γ – G, Δ – D, E – E, Z – Z, H – H, Θ – Q, Ξ – X, O – O, X – C. Řecký text byl v původním kodexu s Archimédovými spisy psán ve dvou sloupcích; přechod textu z prvního sloupce do druhého označujeme svislou čarou |, přechod mezi stránkami dvojitou svislou čarou ‖.

40 Míněna je rovnost obsahů; „roven a podoben" je tedy standardní řecké spojení značící shodnost rovinných útvarů.

41 Řecky πλῆθος (*pléthos*); toto nově přečtené slovo se používá jako jeden z argumentů pro podporu hypotézy, která považuje *Stomachion* za spis věnovaný kombinatorice.

42 Řecky ἐκτός (*ektos*).

43 Z kontextu vyplývá, že se jedná o čtverec.

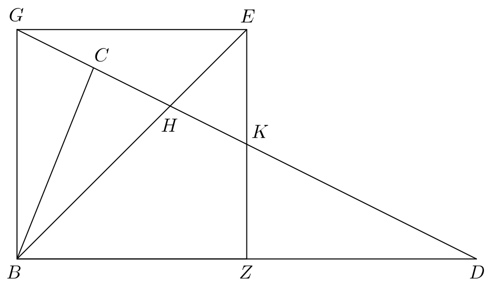
44 Řecky *dedikasthó*, dosl. rozsouzena.

45 Dosl. „spojeny"; tedy „bod G je spojen [s bodem K, čímž vznikne úsečka] GK a bod E je spojen [s bodem B, čímž vznikne úsečka] BE". Jedná se o celou krátkou větu konden-

Je třeba dokázat, že GB je větší než BH.

Nechť jsou prodlouženy GK, BZ a nechť se protínají v D a nechť je sestrojena [úsečka] GH. Jelikož je EK rovna KZ, je také GE, tj. BZ, rovna ZD. Takže je GZ větší než ZD; a úhel ZDG je tedy větší než [úhel] ZGD; [úhly] HBD a BGZ jsou si však rovny, neboť je každý z nich polovinou pravého; takže i [úhel] GZB je větší[46]*; [úhel] GHB je tedy roven dvěma vnitřním a protilehlým*[47] *[úhlům] HBD, HDB, [úhel GHB je větší]*[48] *než [úhel] HGB; takže je GB větší než BH.*

Bude-li tedy GH rozdělena na poloviny v C, pak bude úhel GCB tupý; vskutku, jelikož je GC rovna CH[49] *a CB je společná, tak jsou rovny dvě [strany] dvěma*[50]*; a základna GB je větší než BH; a | [jeden] úhel je tedy větší než [druhý] úhel, takže [úhel] GCB je tupý, přilehlý pak ostrý. [Úhel] GBH je pak polovinou pravého, když se předpokládá rovnostranný rovnoběžník; [úhel] BCH je pak ostrý. Zbylé poloviny [trojúhelníku] GBH jsou si rovny.*[51] *A je sestrojen a rozdělen trojčetný řez.*[52]



Buď AB jiný obdélník s dvojnásobnou stranou, který má [stranu] GA dvojnásobnou oproti [straně] GB a úhlopříčku …[53]

Nechť je GA[54] *rozdělena na poloviny v E a [bodem] E buď rovnoběžně s BG vedena EZ; GZ, ZA jsou tedy čtverce. Nechť jsou vedeny úhlopříčky GD,*

---

zovanou do jediného řeckého slovesa, u něhož stojí označení dvou bodů se členem. Volně lze vyjádřit význam tohoto spojení takto: „nechť jsou spojeny body G a K, čímž vznikne úsečka GK“. Překládáme jednotně: „nechť je sestrojena [úsečka] GK“.

[46] Tj. „než úhel ZGD“.

[47] Tato rovnost vychází z [Eukl. I,32]: úhel GHB je vnějším úhlem prodloužené strany HD trojúhelníku HDB. Velikost tohoto úhlu je rovna součtu velikostí protilehlých vnitřních úhlů, tj. HBD a HDB.

[48] Text je zde velmi nejasný, doplněno dle kontextu.

[49] V textu je zjevná písařská chyba: „GC rovna CB“.

[50] Jedná se o rovnost délek dvou dvojic příslušných stran v trojúhelnících GCB, HCB; tedy: $GC = CH$ a CB je strana společná oběma těmto trojúhelníkům.

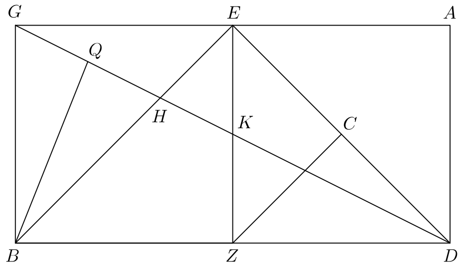
[51] Patrně je míněna rovnost obsahů trojúhelníků GCB, HCB.

[52] Patrně se jedná o úsečku GK, která je rozdělena na tři stejně dlouhé části: GC, CH a HK.

[53] Text je zde na dvou řádcích silně porušen, závěr věty na dalších dvou řádcích je proto nejasný.

[54] Za touto matematickou větou, z níž se nám však dochoval pouze začátek, který je navíc porušen, byl patrně uveden příslušný náčrtek. Připojujeme jeho částečnou rekonstrukci.

BE, ED, a nechť jsou GH, ED rozděleny na poloviny v Q [a] C, a nechť jsou sestrojeny [úsečky] BQ, CZ a [bodem] O [a bodem] K nechť jsou rovnoběžně s BD vedeny KL [a] OX. Na základě předchozí věty bude v trojúhelníku BGQ úhel při Q tupý, zbylý pak ostrý. Takže je zřejmé[55]*, že je ostrý.* ‖



4 Interpretace

Arabský překlad Archimédova spisu *Stomachion* je v dochované podobě ucelený, přesto však nelze vyloučit, že se jedná pouze o malou část původního pojednání, jak naznačuje řecký fragment. Ten dává tušit, že *Stomachion* bylo pojednání podstatně delší. Na úvod jsou totiž uvedena pomocná tvrzení, která budou nejspíše tvořit jen malou část celého spisu. Taková stavba je pro Archimédovy práce typická: Archimédés na začátku uvádí několik jednoduchých tvrzení, potom přejde k delší sérii vět, které vyústí v hlavní výsledky uvedené v samém závěru. Ani úplnější přepis dochovaného řeckého textu tedy neposkytuje dostatek informací k tomu, abychom mohli s jistotou interpretovat *Stomachion* jako celek.

Přestože antická svědectví vypovídají o hře stomachion jako o souboru geometrických útvarů ze slonoviny, z nichž bylo možno skládat tvary různých předmětů či zvířat, tak Reviel Netz předložil v článku [NAW] hypotézu, že v Archimédově spisu *Stomachion* mohlo jít o počet všech možností, jak poskládat dílky stomachion do původního čtverce. Opřel se přitom zejména o větu z úvodu:

Spíše je z nich nemalé množství obrazců, ‖ *protože [jeden obrazec] může být sám přemístěn na jiné místo rovného a podobného obrazce a zaujmout jiné postavení.*

Obrazci by se však v tom případě musela rozumět jednotlivá uspořádání všech čtrnácti dílků do původního čtverce. Pokud budeme zmíněné obrazce chápat jako tvary různých zvířat či věcí, mohl by Archimédův text pojednávat o různých vlastnostech (obsahy, velikosti úhlů, ...) jednotlivých dílků skládačky stomachion, přičemž by se jednalo o různé možnosti složení předepsaných tvarů zvířat a věcí (tj. které lze za předepsané tvary uznat a které nikoli) a o vysvětlení, zda při skládání vycházejí v konkrétních konstelacích pravé a přímé úhly, nebo pouze úhly, jež se od nich liší jen nepatrně. Kterákoli interpretace je však nejistá.

---

[55] V textu je spojení „je zřejmé“ uvedeno dvakrát, patrně se jedná o chybu opisovače (*dittografii*).

ARCHIMÉDOVA ÚLOHA O DOBYTKU

Tereza Bártlová

1 Objev úlohy

Píše se rok 1770 a knihovna v dolnosaském Wolfenbüttelu se těší slávě po celém Německu. Léta, po která v ní shromažďovali knihy brunšvičtí vévodové, v ní skryly velmi cenné písemnosti. Však je kdysi opatroval sám Gottfried Wilhelm Leibniz a nyní zde sedí na místě knihovníka německý novinář, kritik a teolog Gotthold Ephraim Lessing (1729–1781). A právě zde G. E. Lessing objevil v jednom starém řeckém kodexu dosud neznámou úlohu zapsanou 22 řeckými distichy. V roce 1773 pak tuto úlohu zveřejnil ve své knize [Les]. V 19. století byla stejná úloha objevena také v jednom z kodexů Bibliothèque nationale v Paříži.

2 Zadání úlohy

Dnes je tato úloha nazývána jako *Úloha o dobytku, Kraví úloha, Úloha o Héliových býcích, Probléma boeikon, Problema Archimedis, The Cattle Problem, Die Rinder-Aufgabe* a podobně. Dochovaný řecký text úlohy je psán ve verších. Jeho český překlad, který je formulován v próze, zní takto:

Problém, který Archimédés vymyslel a v epigramech jej těm, kteří se v Alexandrii zabývají podobnými otázkami, poslal v dopise Eratosthenovi Kyrénskému.

Řekni mi, příteli, přesný počet Héliova skotu. Pečlivě mi vypočítej, není-li ti moudrost cizí, kolik ho bylo, když se jednou pásl na nivách ostrova Sicílie, rozdělen do čtyř stád. Každé stádo bylo jinak zbarveno; první bylo mléčně bílé, ale druhé zářilo zcela tmavou černí. Třetí pak bylo hnědé, čtvrté strakaté; v každém měli býci v počtu velikou převahu. A tito [býci] *byli nyní v takovémto poměru: bílí se rovnali v počtu hnědým vzatým dohromady s třetinou a polovinou černých, ó příteli. Dále množství černých bylo rovno čtvrtině a pětině strakatých zvětšených o všechny hnědé. Nakonec musíš počet strakatých býků položit rovný, příteli, šestině a sedmině bílých s přičteným ještě množstvím hnědých.*

Jinak však tomu bylo s kravami: ty s bílou srstí byly rovny třetině a čtvrtině černého skotu, krav i býků. Dále černé krávy byly rovny čtvrtině a pětině strakatého stáda, když byli počítáni jak býci, tak krávy. Právě tak byly strakaté krávy pětinou a šestinou všeho [skotu] *s hnědou srstí, když šel na pastvu. Nakonec hnědé krávy byly šestinou a sedminou celého stáda s bílou srstí.*

Můžeš-li mi říci přesně, můj příteli, kolik skotu tam bylo dohromady a také kolik bylo krav každé barvy a dobře živených býků, pak tě věru právem nazývají zdatným v počtech.

Ještě tě však nepočítají k mudrcům; nuže pojď tedy a řekni mi, jak se to má dále:

Když se spojil celkový počet černých a bílých býků, pak zde stáli uspořádáni stejně do šířky jako do hloubky; širé sicilské nivy byly zcela zaplněny tím množstvím býků. Když se však postavili dohromady hnědí a strakatí, pak byl vytvořen trojúhelník, jeden stál na špičce a nechyběl žádný z hnědých a strakatých býků, ani jeden jiné barvy se mezi nimi nenašel.

Když jsi to také vypátral a v duchu pochopil a uvedeš mi poměr, příteli, který se nalézá v každém stádu, pak můžeš pyšně vykračovat jako vítěz, protože teď tvá vědecká sláva jasně září.

Uvedené znění úlohy je citováno z knihy [BŠ], kde je uveden mírně upravený překlad z knihy [Mač]. Navíc je znění úlohy doplněno ještě o překlad úvodu, který v knize [Mač] chybí.

Úkolem Archimédovy úlohy je tedy vypočítat, kolik je bílých, černých, strakatých a hnědých býků a krav pasoucích se na Sicílii ve čtyřech stádech boha Hélia.

3 Výpočet první části úlohy

Podmínky první části úlohy můžeme vyjádřit pomocí sedmi lineárních rovnic o osmi neznámých:

$$\begin{aligned}
X &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot Y+T,\\
Y &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot Z+T,\\
Z &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\cdot X+T,\\
x &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot (Y+y),\\
y &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot (Z+z),\\
z &= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot (T+t),\\
t &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\cdot (X+x),
\end{aligned}$$

kde X, Y, Z, T značí počet bílých, černých, strakatých a hnědých býků a analogicky x, y, z, t je počet bílých, černých, strakatých a hnědých krav. Ve skutečnosti jde o takzvanou diofantickou úlohu, neboť hledáme řešení úlohy v oboru přirozených čísel. Výše uvedenou soustavu rovnic budeme řešit standardním způsobem – nejprve provedeme eliminaci neznámých v prvních třech rovnicích

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{13}{42}\,X+T=\\
&= \frac{13}{42}\left(\frac{5}{6}\,Y+T\right)+T=\\
&= \frac{13}{42}\left[\frac{5}{6}\left(\frac{9}{20}\,Z+T\right)+T\right]+T\,.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$891\,Z = 1\,580\,T.$$

Protože jsou čísla 981 a 1 580 navzájem nesoudělná, rovnost nastává pro

$$Z = 1\,580\,k \quad \text{a} \quad T = 891\,k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nyní již snadno vyjádříme hodnoty X a Y pomocí k:

$$X = 2\,226\,k \quad \text{a} \quad Y = 1\,602\,k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dosadíme-li získané řešení do zbylých rovnic, vypočítáme tak hodnoty x, y, z, t:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{13}{42}\,(X + x)\\
&= \frac{13}{42}\left[X + \frac{7}{12}\,(Y + y)\right]\\
&= \frac{13}{42}\left[X + \frac{7}{12}\left(Y + \frac{9}{20}\,(Z + z)\right)\right]\\
&= \frac{13}{42}\left[X + \frac{7}{12}\left[Y + \frac{9}{20}\left(Z + \frac{11}{30}\,(T + t)\right)\right]\right]\\
&= \frac{13}{42}\left[2\,226\,k + \frac{7}{12}\left[1\,602\,k + \frac{9}{20}\left(1\,580\,k + \frac{11}{30}\,(891\,k + t)\right)\right]\right]\\
&= \frac{5\,439\,213}{4\,657}\,k,
\end{aligned}$$

a dále pak:

$$x = \frac{7\,206\,360}{4\,657}\,k, \quad y = \frac{4\,893\,246}{4\,657}\,k, \quad z = \frac{3\,515\,820}{4\,657}\,k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

My však hledáme celočíselná řešení, proto nejmenší možné řešení zadané úlohy odpovídá 4 657násobku námi získaného řešení:

$$\begin{aligned}
X &= 2\,226 \cdot 4\,657\,n = 10\,366\,482\,n & x &= 7\,206\,360\,n\\
Y &= 1\,602 \cdot 4\,657\,n = 7\,460\,514\,n & y &= 4\,893\,246\,n\\
Z &= 1\,580 \cdot 4\,657\,n = 7\,358\,060\,n & z &= 3\,515\,820\,n\\
T &= 891 \cdot 4\,657\,n \;= 4\,149\,387\,n & t &= 5\,439\,213\,n
\end{aligned}$$

kde opět n musí být nějaké přirozené číslo. Pomocí těchto výsledků můžeme odpovědět na první část Archimédovy úlohy. Celkový počet býků je 29 334 443, celkový počet krav činí 21 054 639, a tudíž celkový počet kusů dobytka Héliových stád na Sicílii je 50 389 082. Uvážíme-li, že rozloha Sicílie je něco přes 25 700 km^2, má pro sebe jeden kus dobytka přibližně 510 m^2.

Všimněme si, že v zadání úlohy se hovoří o tom, že býků je vždy více než krav: *... v každém* [stádu] *měli býci v počtu velikou převahu.* Což ovšem neodpovídá našemu řešení, neboť jsme vypočítali, že počet hnědých býků je menší než počet hnědých krav.

Poznamenejme také, že k úloze bylo později připojeno scholion[1], které publikoval zároveň s úlohou již G. E. Lessing. Toto scholion obsahuje řešení úlohy, jež je 80násobkem námi vypočteného řešení. Celkový počet kusů dobytka pak činí 4 031 126 560. Což vzhledem k rozloze Sicílie znamená, že by měl jeden kus dobytka k dispozici jen o něco málo více než 6 m^2. Z jakého důvodu je však ve scholiu uvedeno větší řešení, které navíc nevyhovuje dodatečným podmínkám z druhé části úlohy, není dosud známo.

4 Výpočet druhé části úlohy

Nezapomeňme, že v druhé části úlohy jsou uvedeny ještě další dvě podmínky. Někteří badatelé je považují za původní, jiní se domnívají, že byly přidány později. Podle doplňujících podmínek je možno bílé a černé býky seřadit do čtverce, zatímco strakaté a hnědé býky je možno seřadit do trojúhelníku. Číslo $X + Y$ má být tedy takzvaným čtvercovým figurálním číslem a číslo $Z + T$ trojúhelníkovým figurálním číslem:

$$X + Y = u^2, \qquad Z + T = \frac{1}{2}\, v\,(v + 1), \qquad \text{kde } u, v \in \mathbb{N}.$$

Zaměřme se nejprve na výpočet čtvercového čísla:

$$\begin{aligned} X + Y &= 2\,226 \cdot 4\,657\, n + 1\,602 \cdot 4\,657\, n = \\ &= 3\,828 \cdot 4\,657\, n = u^2. \end{aligned}$$

Chceme určit $n \in \mathbb{N}$ tak, aby součin $3\,828 \cdot 4\,657\, n$ byl celočíselně odmocnitelný. Využijeme k tomu prvočíselný rozklad:

$$\begin{aligned} X + Y &= 3\,828 \cdot 4\,657\, n = \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657\, n = u^2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že číslo n musí být ve tvaru

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657\, l^2, \quad \text{kde } l \in \mathbb{N}.$$

Získaný výsledek využijeme k určení trojúhelníkového čísla:

$$\begin{aligned} Z + T &= 1\,580 \cdot 4\,657\, n + 891 \cdot 4\,657\, n = \\ &= 2\,471 \cdot 4\,657\, n = \\ &= 2\,471 \cdot 4\,657^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot l^2 = \\ &= 2\,364\,747 \cdot 4\,657^2 \cdot l^2 = \frac{1}{2}\, v\,(v + 1). \end{aligned}$$

[1]Scholion je výkladová poznámka k textu. Scholia byla psána přímo na okraj textu nebo jako samostatná díla.

Dostáváme tak kvadratickou rovnici

$$v^2 + v - 4\,729\,494 \cdot 4\,657^2\, l^2 = 0,$$

pro jejíž kořeny platí známý vzorec

$$v_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4\,729\,494 \cdot 4\,657^2\, l^2}}{2},$$

kde v musí být přirozené číslo. Abychom tuto podmínku splnili, musí být čitatel tohoto zlomku sudé číslo, odmocnina diskriminantu $\sqrt{D}$ tedy musí být číslo přirozené a liché. Hledáme tedy $p \in \mathbb{N}$ takové, že

$$D = 1 + 4 \cdot 4\,729\,494 \cdot 4\,657^2\, l^2 = p^2.$$

Výpočet diskriminantu však není vůbec triviální, neboť vede na řešení Pellovy rovnice, které se zpravidla provádí pomocí řetězových zlomků. Pro přehlednost označme $m = 2 \cdot 4\,657\, l$, a tedy zřejmě $m \in \mathbb{N}$, čímž přejde zmíněná Pellova rovnice na tvar

$$p^2 - 4\,729\,494\, m^2 = 1,$$

kde p hledáme v oboru přirozených čísel.

Z výpočtu je vidět, že ačkoliv na první pohled působí zadání Archimédovy úlohy jednoduše, její řešení je dosti obtížné. Jako první provedl odhad řešení, které vyhovuje i dodatečným podmínkám, matematik A. Amthor (viz druhou část článku [KrA] z roku 1880), který vypočetl, že celkový počet kusů dobytka začíná číslicemi 7 766 a skládá se z 206 545 cifer. Platné jsou však pouze první tři číslice.

Na jeho výpočet navázala skupina matematiků s názvem Hillsboro Mathematical Club z Illinois, kteří spočítali prvních 31 číslic a posledních 12 číslic z celkového počtu dobytka:

$$7\,760\,271\,406\,486\,818\,269\,530\,232\,833\,2\underline{09}\ldots 719\,455\,081\,800.$$

Výsledek jejich čtyřleté práce publikoval A. H. Bell ve svém článku [Bel]. Správných je však pouze prvních 29 cifer, neboť místo podtržených číslic 09 má být 13.

S nástupem počítačů přichází v roce 1965 první úplné řešení problému. První výpočet pomocí počítače byl proveden matematiky z Univerzity ve Waterloo a uveřejněn H. C. Williamsem, R. A. Germanem a C. R. Zarnkem v článku [WGZ]. Autoři článku uvádějí, že výpočet trval 7 hodin a 49 minut a byl vytištěn na 42 arších papíru. Pro představu si uvedeme prvních a posledních padesát číslic:

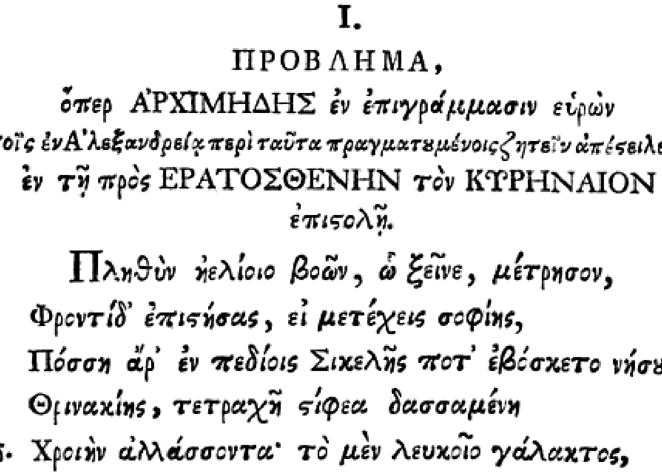
$$7\,760\,271\,406\,486\,818\,269\,530\,232\,833\,213\,886\,664\,232\,322\,405\,923\,3\ldots$$
$$\ldots 05\,994\,630\,144\,292\,500\,354\,883\,118\,973\,723\,406\,626\,719\,455\,081\,800.$$

V roce 1981 dokázal správnost výsledku Harry L. Nelson ve svém článku [Nel1], ale také ve své zprávě [Nel2]. Díky dokonalejšímu přístroji bylo řešení úlohy nalezeno už po 10 minutách.

Dnes můžeme k výpočtu řešení úlohy využít matematické programy[2] podobně, jako je využívá například matematik I. Vardi ve svém článku [Var]. V závěru této studie uvádíme kompletní zdrojový kód pro řešení Archimédovy úlohy o dobytku zapsaný pomocí vestavěných funkcí programu Mathematica. Spustíme-li tento kód v programu Mathematica (verze 8), dostaneme řešení Archimédovy úlohy i s jejími dodatečnými podmínkami za pouhou jednu sekundu.

5 Historické poznámky

Co se týče Archimédova autorství, ani v dnešní době nepanuje na původ úlohy o dobytku jednotný názor. Od 18. století se jich objevilo hned několik. Jeden z nich se opírá o fakt, že starověk připisoval úlohu právě Archimédovi, z čehož se v souhlasu s nadpisem připojeným k úloze vyvozuje, že je Archimédés skutečně jejím původcem.


I.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ,

ὅπερ ἈΡΧΙΜΗΔΗΣ ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν

τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν,

ἐν τῇ πρὸς ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ τὸν ΚΥΡΗΝΑΙΟΝ

ἐπιστολῇ.

Πληθὺν ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
Φροντίδ᾽ ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
Πόσση ἄρ᾽ ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ᾽ ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης, τετραχῆ στίφεα δασσαμένη
Χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,

Začátek úlohy o dobytku z Lessingova vydání.

Většina historiků a filologů se však domnívá, že podoba, v jaké známe úlohu dnes, od samotného Archiméda nepochází. Nepovažují totiž za příliš pravděpodobné, že by Archimédés úlohu sepsal přímo ve verších. Pokud je tedy jejím autorem, tak ji nejspíše sepsal v próze a do veršované podoby byla přebásněna později.

Nelze však vyloučit, že Archimédés úlohu nevytvořil, ale byla podle něj později nazývána díky své náročnosti. Archimédovy spisy totiž získaly už ve sta-

[2] Například Mathematica nebo Maple, zdarma je dostupná Maxima.

rověku punc příslovečné obtížnosti.[3] Velmi zajímavá zmínka o této úloze se objevuje ve scholiu k Platónově dialogu Charmidés[4], kde se píše o úloze „nazvané Archimédem úloha o dobytku.“ Ovšem ani tyto údaje nám definitivní rozřešení problému autorství nedávají. Slovním spojením *Archimédem nazvaná* může být označena jak úloha, kterou Archimédés vymyslel, tak úloha, kterou pouze pojmenoval.

V 19. století se objevila hypotéza o sporu Archiméda ze Syrákús s Apollóniem z Pergé. Podle ní se prý Apollónios snažil dokázat svou matematickou převahu tím, že sledoval Archimédovu práci a precizoval jeho výpočty. Určil například mnohem přesnější odhad čísla π, než jaký je uveden v Archimédově spise *Měření kruhu.* Archimédés na to reagoval tak, že vymyslel slovní úlohu, která ve svém zadání obsahuje pouze malá čísla; při jejím řešení se však objeví čísla nesrovnatelně větší, jež by podle Archiméda zvládl vypočítat zdatný počtář. Na závěr k úloze připojil dovětek, se kterým si už poradí pouze mudrc. Zde mohla být narážka právě na Apollónia a jeho snahu Archiméda překonat. Hypotéza, kterou jsme zde popsali, se objevila například v hesle *Archimedes* Paulyho encyklopedie (viz [Pau1]), které napsal F. O. Hultsch. Tuto hypotézu však není možno nijak ověřit, a tak už o ní v novém vydání [Pau2] nenajdeme ani zmínku.

W. Knorr v [Kno3] na str. 295 naopak uvažuje, že první část úlohy mohl sepsat Eratosthenés z Kyrény, který ji poslal v dopise Archimédovi, neboť byl zvědav, zda Archimédés úlohu vyřeší. Archimédovi se patrně idea úlohy velmi líbila, a tak k ní připsal malý dovětek. Díky tomuto na první pohled nenápadnému dovětku se stalo řešení úlohy nepoměrně obtížnější.

Zatímco první část úlohy bez dodatečných podmínek není příliš náročná a její vyřešení bylo zcela v Archimédových možnostech, dodatečné podmínky činí úlohu značně obtížnou. Zejména řešení Pellovy rovnice je početně velmi náročné a prakticky jej bylo možno provést až s nástupem výpočetní techniky.[5] Považujeme tedy za nereálné, že by Archimédés mohl úlohu zcela vyřešit i s dodatečnými podmínkami. Otázkou zůstává, zda alespoň znal nějakou efektivní cestu, která by vedla k jejímu řešení.

Na závěr se zastavme ještě u překladu Archimédovy úlohy. Údaj o seřazení bílých a černých býků na začátku předposledního odstavce lze totiž interpretovat dvojím způsobem: buď jako seřazení do čtverce (z čehož jsme v našem řešení vycházeli), nebo jako seřazení do obdélníka. Varianta s řazením býků do obdélníka je podstatně jednodušší než s řazením do čtverce. Nicméně ani další část textu, která se týká seřazení hnědých a strakatých býků, není zcela jasná.

[3] Marcus Tullius Cicero použil v dopisech Attikovi na dvou místech (Cic. Att. XII,4 a XIII,28) ustálené spojení *probléma Archimédeion,* resp. *probléma Archimédú,* ve významu *velmi obtížný úkol.*

[4] Jedná se o scholion k odstavci 165e; přesně tytéž věty se také nacházejí v byzantském soupisu definic *Definitiones 135,5,8* chybně připsaném Hérónovi

[5] Pokud bychom psali rychlostí tři číslice za sekundu, trval by nám zápis čísla udávajícího celkový počet dobytka více než devatenáct hodin. Je pochopitelné, že vyřešit takovou úlohu pouze s pomocí tužky a papíru je prakticky nemožné.

Existují varianty překladu, které pracují s trojúhelníkovým číslem zvětšeným o 1, například [Wer]. Do podrobného rozboru jednotlivých variant překladů se již pouštět nebudeme. Čtenáře se zájmem o jednotlivá řešení můžeme odkázat na [KrA] nebo [Hea], kde jsou různá řešení naznačena.

Ať už zvolíme jakoukoli variantu překladu, stále dostáváme obrovský počet kusů dobytka. I s dodatkem tedy úloha vyznívá poněkud absurdně, neboť tak početné stádo je vůči rozloze ostrova Sicílie (i vůči velikosti celé zeměkoule) neúměrně veliké. Jisté však je, že dodnes můžeme obdivovat jednoduchou formulaci úlohy a zároveň překvapivou obtížnost jejího řešení.

6 Zdrojový kód programu pro řešení úlohy o dobytku v softwaru Mathematica

```
     (* zadání první části úlohy *)
Podminka1 =
Solve[{byciBILI == (1/3 + 1/2) byciCERNI + byciHNEDI &&
 byciCERNI == (1/4 + 1/5) byciSTRAKATI + byciHNEDI &&
 byciSTRAKATI == (1/6 + 1/7) byciBILI + byciHNEDI &&
 kravyBILE == (1/3 + 1/4) (byciCERNI + kravyCERNE) &&
 kravyCERNE == (1/4 + 1/5) (byciSTRAKATI + kravySTRAKATE) &&
 kravySTRAKATE == (1/5 + 1/6) (byciHNEDI + kravyHNEDE) &&
 kravyHNEDE == (1/6 + 1/7) (byciBILI + kravyBILE) &&
 X > 0 && Y > 0 && Z > 0 && T > 0 &&
 x > 0 && y > 0 && z > 0 && t > 0},
 {byciBILI, byciCERNI, byciSTRAKATI, byciHNEDI,
 kravyBILE, kravyCERNE, kravySTRAKATE, kravyHNEDE},
 Integers];

     (* výpis řešení první části úlohy *)
X = Podminka1[[1, 1, 2, 1, 1]]
Y = Podminka1[[1, 2, 2, 1, 1]]
Z = Podminka1[[1, 3, 2, 1, 1]]
T = Podminka1[[1, 4, 2, 1, 1]]
x = Podminka1[[1, 5, 2, 1, 1]]
y = Podminka1[[1, 6, 2, 1, 1]]
z = Podminka1[[1, 7, 2, 1, 1]]
t = Podminka1[[1, 8, 2, 1, 1]]


     (* druhá část úlohy - dodatečné podmínky *)
     (* podmínka pro čtvercové číslo *)
u = Sqrt[X + Y]
n = u[[2,1]]

     (* podmínka pro trojúhelníkové číslo *)
castDISKRIMINANTU = Sqrt[4 2 n (Z + T)];
m = castDISKRIMINANTU[[1]]
const = castDISKRIMINANTU[[2,1]]
```

```
     (* určení délky periody *)
delkaperiody = Length[ContinuedFraction[Sqrt[const]][[2]]];
     (* rozhodování, zda je perioda sudá či lichá *)
If[Mod[delkaperiody,2] == 0, , delkaperiody = 2 delkaperiody];

     (* výpočet konvergentů *)
konvergenty = Convergents[Sqrt[const], delkaperiody];
p0 = pi = Numerator[konvergenty[[delkaperiody]]];
q0 = qi = Denominator[konvergenty[[delkaperiody]]];
matice1 = SparseArray[{{1,1} -> p0, {1,2} -> const*q0,
                        {2,1} -> q0, {2,2} -> p0}];
matice2 = SparseArray[{{1,1} -> p0, {2,1} -> q0}];

While[Mod[qi,m] > 0,
 pi = matice2[[1,1]];
 qi = matice2[[2,1]];
 matice2 = matice1.matice2;]
IntegerLength[qi];
const2 = (qi/m)^2 * n;


     (* výpis výsledku - celkového počtu dobytka p *)
p = (X + Y + Z + T + x + y + z + t) * const2;
     (* počet číslic řešení p *)
IntegerLength[p]
     (* prvních a posledních 50 číslic řešení p *)
Take[IntegerDigits[p], 50]
Take[IntegerDigits[p], -50]
     (* výpis všech číslic celkového počtu dobytka *)
p
```

Výstup programu:

```
Out[1]= 10366482    Out[5]= 7206360
Out[2]= 7460514     Out[6]= 4893246
Out[3]= 7358060     Out[7]= 3515820
Out[4]= 4149387     Out[8]= 5439213

Out[10]= 2 Sqrt[4456749]
Out[11]= 4456749
Out[13]= 9314
Out[14]= 4729494

Out[26]= 206545
Out[27]= {7,7,6,0,2,7,1,4,0,6,4,8,6,8,1,8,2,6,9,5,\
 3,0,2,3,2,8,3,3,2,1,3,8,8,6,6,6,4,2,3,2,3,2,2,4,0,5,9,2,3,3}
Out[28]= {0,5,9,9,4,6,3,0,1,4,4,2,9,2,5,0,0,3,5,4,\
 8,8,3,1,1,8,9,7,3,7,2,3,4,0,6,6,2,6,7,1,9,4,5,5,0,8,1,8,0,0}
Out[29]= 7 760 271 406 486 818 269 530 232 833 213...
```

III.

APENDIX

VÝPOČTY ODMOCNIN VE STAROVĚKU

Jindřich Bečvář

V tomto článku se pokusíme dát odpověď na letitý problém: jak byla vypočítána racionální čísla, která jsou horním a dolním odhadem iracionálního čísla $\sqrt{3}$, tj. jak Archimédés (nebo někdo před ním) dospěl k odhadu

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780},$$

který využil ve spisu *Měření kruhu.*[1]

Budeme postupovat zcela elementárním způsobem, nevyužijeme žádné hlubší poznatky (např. řetězové zlomky). Budeme jen mírně modifikovat metodu, která byla pro výpočet odmocnin užívána již v Mezopotámii a ve staré Indii.[2] Hodnotu čísla $\sqrt{3}$ vymezíme v dalším kroku předloženou metodou ještě daleko přesněji, srovnáme výpočty horních i dolních odhadů čísel $\sqrt{3}$ a $\sqrt{2}$ a ukážeme, jak asi byly tyto odmocniny počítány ve staré Indii a staré Mezopotámii. V závěru porovnáme získaná vymezení hodnoty čísla $\sqrt{3}$ s hodnotami konvergentů příslušného řetězového zlomku.

Upozorněme ještě na důležitou skutečnost. Zatímco v Mezopotámii a v Indii pracovali počtáři s *přibližnými hodnotami* čísel $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, Archimédés užíval *horní a dolní odhad* čísla $\sqrt{3}$.

1 Teoretický základ

První způsob. Máme-li vypočítat druhou odmocninu přirozeného čísla A, které není čtvercem, tj.

$$(a-1)^2 < A < a^2 \quad \text{pro přirozené číslo} \quad a,$$

vyjádříme je ve tvaru

$$A = a^2 - r, \quad \text{kde} \quad 1 \leq r < a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1.$$

Potom je

$$\sqrt{A} = a - k, \quad \text{kde} \quad 0 < k < 1.$$

[1] *Měření kruhu* v české verzi viz [Va1], v anglické a německé verzi viz [Hea], v ruské viz [Ve], dále viz [Hei], [Ee].

[2] Některé úvahy o Archimédově výpočtu čísla $\sqrt{3}$ se lze dočíst v anglické verzi Heathova vydání Archimédových spisů [Hea] na str. xc–xcix, případně v německé verzi z roku 1914 na str. 82–93. Thomas Little Heath (1861–1940) zde odkazuje na dvě práce Siegmunda Günthera (1848–1923) – *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* [Gü1] z roku 1882 a *Abriß der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Altertum* [Gü2] z roku 1894, které se touto problematikou podrobně zabývají a uvádějí četné bibliografické prameny.

Odtud

$$a^2 - r = A = (a-k)^2 = a^2 - 2ak + k^2, \quad \text{tedy} \quad 2ak - k^2 = r \quad \text{a} \quad k = \frac{r}{2a-k}.$$

Protože je $0 < k < 1$, je

$$\frac{r}{2a} < k < \frac{r}{2a-1}$$

a

$$\frac{2a^2 - a - r}{2a-1} = a - \frac{r}{2a-1} < \sqrt{A} < a - \frac{r}{2a} = \frac{2a^2 - r}{2a}.$$

Číslo $\sqrt{A}$ tedy leží v intervalu délky

$$\frac{r}{2a-1} - \frac{r}{2a} = \frac{r}{2a(2a-1)}.$$

Vzhledem k tomu, že číslo r je menší než $2a-1$, leží číslo $\sqrt{A}$ v intervalu délky menší než $\frac{1}{2a}$ bez ohledu na to, kde je číslo A umístěno mezi čísly $(a-1)^2$ a a^2. Přesnost odhadu čísla $\sqrt{A}$ se tedy výrazně zvyšuje s rostoucím číslem A.[3] Poznamenejme ještě, že pro výpočet odmocniny čísla A, které se od nejbližšího většího čtverce liší jen o jedničku, tj. pro $r = 1$, leží číslo $\sqrt{A}$ v intervalu délky $\frac{1}{2a(2a-1)}$. Uveďme pro zajímavost několik odhadů:

$$1\frac{1}{3} < \sqrt{2} < 1\frac{1}{2}, \qquad 1\frac{2}{3} < \sqrt{3} < 1\frac{3}{4},$$

$$2\frac{1}{5} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{3}, \qquad 2\frac{4}{5} < \sqrt{8} < 2\frac{5}{6}.$$

Druhý způsob. První způsob s úspěchem použijeme pro malé číslo A, které je „blízké“ čtverci přirozeného čísla, který je větší než A. Je-li

$$a^2 < A < (a+1)^2 \qquad \text{pro přirozené číslo } a,$$

a je-li A naopak blízké čtverci a^2, který je menší než A, postupujeme obdobně. Vyjádříme

$$A = a^2 + r, \quad \text{kde} \quad 1 \le r < (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Potom je

$$\sqrt{A} = a + k, \quad \text{kde} \quad 0 < k < 1.$$

Odtud

$$a^2 + r = A = (a+k)^2 = a^2 + 2ak + k^2, \quad \text{tedy} \quad 2ak + k^2 = r, \quad \text{a} \quad k = \frac{r}{2a+k}.$$

[3] Například pro odmocniny čísel ležících mezi 99^2 a 100^2 je rozdíl horní a dolní meze výše uvedeného odhadu menší než $0,005$.

Protože je $0 < k < 1$, je
$$\frac{r}{2a+1} < k < \frac{r}{2a}$$
a
$$\frac{2a^2+a+r}{2a+1} = a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{A} < a + \frac{r}{2a} = \frac{2a^2+r}{2a}.$$
Číslo $\sqrt{A}$ je tedy v intervalu délky $\frac{r}{2a(2a+1)}$.

Snadno se ukáže, že dolní odhad je při prvním i druhém způsobu stejný, malý rozdíl je v horním odhadu. Uveďme pro srovnání vymezení odmocnin čtyř malých čísel.
$$1\frac{1}{3} < \sqrt{2} < 1\frac{1}{2}, \qquad 1\frac{2}{3} < \sqrt{3} < 2,$$
$$2\frac{1}{5} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{4}, \qquad 2\frac{4}{5} < \sqrt{8} < 3.$$
Při prvním způsobu získáme přesnější vymezení čísel $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, při druhém způsobu lepší vymezení čísla $\sqrt{5}$. Vymezení čísla $\sqrt{2}$ je v obou případech stejné.

2 Vymezení hodnoty čísla $\sqrt{3}$

Archimédův odhad. Podle předchozího (první způsob) máme
$$1\frac{2}{3} < \sqrt{3} < 1\frac{3}{4} \qquad \text{(1. odhad)},$$
odmocnina čísla $3 = 2^2 - 1$ leží tedy v intervalu délky
$$\frac{7}{4} - \frac{5}{3} = \frac{1}{12}.$$

Tato přesnost není postačující. Upřesníme nejprve dolní odhad. Hledejme číslo x, pro které je
$$\left(\frac{5}{3} + x\right)^2 = 3, \quad \text{tj.} \quad \frac{25}{9} + \frac{10}{3}x + x^2 = 3, \quad \text{tj.} \quad \frac{10}{3}x + x^2 = \frac{2}{9}.$$
Zanedbáme-li x^2, dostaneme přibližnou hodnotu x_1 čísla x: vychází $x_1 = \frac{1}{15}$. Protože jsme zanedbali x^2, je $x_1 > x$.[4] Vypočtenou hodnotu x_1 nyní dosadíme za jedno x v dvojmoci x^2 a vypočítáme kořen x_2 rovnice
$$\frac{10}{3}x + \frac{1}{15}x = \frac{2}{9}; \quad \text{odtud} \quad x_2 = \frac{10}{153}.$$
Protože jsme jednu hodnotu čísla x nahradili číslem $x_1 > x$, je $x_2 < x$. Vypočetli jsme tedy dolní odhad čísla $\sqrt{3}$:
$$\frac{5}{3} + \frac{10}{153} = \frac{265}{153} \doteq 1{,}732\,026\,143\ldots$$

[4] Získali jsme tedy horní odhad $\frac{5}{3} + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}$ čísla $\sqrt{3}$, který označíme (1).

Stejným způsobem upřesníme horní odhad. Budeme hledat číslo y, pro které je

$$\left(\frac{7}{4}-y\right)^2=3, \quad \text{tj.} \quad \frac{49}{16}-\frac{7}{2}y+y^2=3, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{16}+y^2=\frac{7}{2}y.$$

Zanedbáme-li y^2, dostaneme přibližnou hodnotu y_1 čísla y: vychází $y_1=\frac{1}{56}$. Protože jsme zanedbali y^2, je $y_1<y$.[5] Vypočtenou hodnotu y_1 nyní dosadíme za jedno y v dvojmoci y^2 a vypočítáme kořen y_2 rovnice

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{56}y=\frac{7}{2}y; \quad \text{odtud} \quad y_2=\frac{14}{780}.$$

Protože jsme jednu hodnotu čísla y nahradili číslem $y_1<y$, je $y_2<y$. Vypočetli jsme tedy horní odhad čísla $\sqrt{3}$:

$$\frac{7}{4}-\frac{14}{780}=\frac{1\,351}{780}\doteq 1{,}732\,051\,282\ldots$$

Poměrně elementárním způsobem jsme dospěli k Archimédovu odhadu

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3}\doteq 1{,}732\,050\,807\ldots < \frac{1\,351}{780} \qquad \text{(2. odhad).}$$

Číslo $\sqrt{3}$ je tedy sevřeno v intervalu délky

$$\frac{1\,351}{780}-\frac{265}{153}=\frac{1}{39\,780}.$$

Další krok. Archimédovo vymezení čísla $\sqrt{3}$ nyní stejnou metodou ještě upřesníme. Hledejme číslo x, pro které je

$$\left(\frac{265}{153}+x\right)^2=3, \quad \text{tj.} \quad \frac{265^2}{153^2}+\frac{2\cdot 265}{153}x+x^2=3, \quad \text{tj.} \quad \frac{2\cdot 265}{153}x+x^2=\frac{2}{153^2}.$$

Zanedbáme-li x^2, vyjde přibližná hodnota $x_1=\frac{1}{153\cdot 265}$.[6] Dosadíme-li ji za jedno x do x^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{2\cdot 265}{153}x+\frac{1}{153\cdot 265}x=\frac{2}{153^2}$$

přibližnou hodnotu

$$x_2=\frac{2\cdot 265}{153\cdot 140\,451}.$$

Číslo

$$\frac{265}{153}+\frac{2\cdot 265}{153\cdot 140\,451}=\frac{265\cdot 140\,453}{153\cdot 140\,451}=\frac{37\,220\,045}{21\,489\,003}\doteq 1{,}732\,050\,807\,568\,876\,043\ldots$$

[5] Získali jsme tedy horní odhad $\frac{7}{4}-\frac{1}{56}=\frac{97}{56}$ čísla $\sqrt{3}$, který označíme (2).

[6] Získali jsme tedy horní odhad $\frac{265}{153}+\frac{1}{153\cdot 265}=\frac{70\,226}{40\,545}$ čísla $\sqrt{3}$, který označíme (3).

je dolním odhadem čísla $\sqrt{3}$, který je velmi přesný (na 14 desetinných míst), neboť

$$\sqrt{3} \doteq 1,732\,050\,807\,568\,877\,293\,527\,...$$

Hledejme dále číslo y, pro které je

$$\left(\frac{1\,351}{780} - y\right)^2 = 3, \quad \text{tj.} \quad \frac{1\,351^2}{780^2} - \frac{2 \cdot 1\,351}{780} y + y^2 = 3.$$

Zanedbáme-li y^2, vyjde přibližná hodnota $y_1 = \frac{1}{2 \cdot 780 \cdot 1\,351}$.[7] Dosadíme-li ji za jedno y do y^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{1}{780^2} + \frac{1}{2 \cdot 780 \cdot 1\,351} y = \frac{2 \cdot 1\,351}{780} y$$

přibližnou hodnotu

$$y_2 = \frac{2 \cdot 1\,351}{780 \cdot 7\,300\,803}.$$

Číslo

$$\frac{1\,351}{780} - \frac{2 \cdot 1\,351}{780 \cdot 7\,300\,803} = \frac{1\,351 \cdot 7\,300\,801}{780 \cdot 7\,300\,803} = \frac{9\,863\,382\,151}{5\,694\,626\,340} \doteq$$

$$\doteq 1,732\,050\,807\,568\,877\,293\,536\,...$$

je horním odhadem čísla $\sqrt{3}$, který je velice přesný (na 19 desetinných míst), výrazně přesnější než výše uvedený dolní odhad. Je tedy

$$\frac{37\,220\,045}{21\,489\,003} < \sqrt{3} < \frac{9\,863\,382\,151}{5\,694\,626\,340} \qquad \text{(3. odhad).}$$

Tímto výpočtem jsme sice přesně vymezili číslo $\sqrt{3}$, se získanými odhady se však klasickým způsobem (bez výpočetní techniky) již nedá rozumným způsobem dále počítat.

3 Vymezení hodnoty čísla $\sqrt{2}$

Obdoba Archimédova vymezení. Pro výpočet odmocniny čísla $2 = 1^2 + 1$ dostaneme (prvním i druhým způsobem) nerovnosti

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} < \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dolní i horní odhad nyní upřesníme. Hledejme číslo x, pro něž

$$\left(\frac{4}{3} + x\right)^2 = 2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{8}{3} x + x^2 = \frac{2}{9}.$$

[7] Získali jsme tedy další horní odhad $\frac{1\,351}{780} - \frac{1}{780 \cdot 2 \cdot 1\,351} = \frac{3\,650\,401}{2\,107\,560}$ čísla $\sqrt{3}$, který označíme (4).

Zanedbáme-li x^2, vyjde přibližná hodnota $x_1 = \frac{1}{12}$. Dosadíme-li ji za jedno x do x^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{8}{3}x + \frac{1}{12}x = \frac{2}{9}$$

přibližnou hodnotu $x_2 = \frac{8}{99}$. Protože je $x_1 > x$, je $x_2 < x$, a proto je číslo

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{99} = \frac{140}{99}$$

dolním odhadem čísla $\sqrt{2}$.

Hledejme dále číslo y, pro něž

$$\left(\frac{3}{2} - y\right)^2 = 2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{1}{4} + y^2 = 3y.$$

Zanedbáme-li y^2, vyjde přibližná hodnota $y_1 = \frac{1}{12}$. Dosadíme-li ji za jedno y do y^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12}y = 3y$$

přibližnou hodnotu $y_2 = \frac{3}{35}$. Protože je $y_1 < y$, je $y_2 < y$, a proto je číslo

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{35} = \frac{99}{70}$$

horním odhadem čísla $\sqrt{2}$. Je tedy

$$\frac{140}{99} \;<\; \sqrt{2} \;<\; \frac{99}{70},$$

číslo $\sqrt{2}$ leží uvnitř intervalu délky

$$\frac{99}{70} - \frac{140}{99} = \frac{1}{6\,930}.$$

Tento odhad je tedy výrazně horší než odpovídající výše uvedený 2. odhad čísla $\sqrt{3}$.

Další krok. Provedeme ještě jeden krok a předchozí odhad stejným způsobem upřesníme. Hledejme číslo x, pro které je

$$\left(\frac{140}{99} + x\right)^2 = 2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{140^2}{99^2} + \frac{280}{99}x + x^2 = 2.$$

Zanedbáme-li x^2, vyjde přibližná hodnota $x_1 = \frac{1}{99 \cdot 140}$. Dosadíme-li ji za jedno x do x^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{280}{99}x + \frac{1}{99 \cdot 140}x = \frac{2}{9\,801}$$

přibližnou hodnotu $x_2 = \frac{280}{99 \cdot 39\,201}$. Číslo

$$\frac{140}{99} + \frac{280}{99 \cdot 39\,201} = \frac{140 \cdot 39\,203}{99 \cdot 39\,201} \doteq 1,414\,213\,562\,373\,048\,100\ldots$$

je dolním odhadem čísla $\sqrt{2}$. Srovnejme jej se skutečnou hodnotou

$$\sqrt{2} \doteq 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\ldots$$

Hledejme dále číslo y, pro které je

$$\left(\frac{99}{70} - y\right)^2 = 2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{99^2}{70^2} - \frac{99}{35}y + y^2 = 2.$$

Zanedbáme-li y^2, vyjde přibližná hodnota $y_1 = \frac{1}{70 \cdot 198}$. Dosadíme-li ji za jedno y do y^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{1}{70^2} + \frac{1}{70 \cdot 198}y = \frac{99}{35}y$$

přibližnou hodnotu $y_2 = \frac{198}{70 \cdot 39\,203}$. Číslo

$$\frac{99}{70} - \frac{198}{70 \cdot 39\,203} = \frac{99 \cdot 39\,201}{70 \cdot 39\,203} \doteq 1,414\,213\,562\,373\,141\,997\ldots$$

je horním odhadem čísla $\sqrt{2}$.[8] Tedy

$$\frac{140 \cdot 39\,203}{99 \cdot 39\,201} \;<\; \sqrt{2} \;<\; \frac{99 \cdot 39\,201}{70 \cdot 39\,203}.$$

4 Historie

Odmocniny ve staré Indii. Odmocniny čísel 2 a 3 byly ve staré Indii vyjádřeny již v době před Archimédem ve spisu *Śulbasūtra* takto:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52}.$$

Dospějeme k nim následujícím postupem.

Vyjdeme od dolního odhadu $\frac{4}{3}$ čísla $\sqrt{2}$ a upřesníme jej.

$$\left(\frac{4}{3} + x\right)^2 = 2, \quad \text{po zanedbání čtverce } x^2 \text{ řešíme rovnici} \quad \frac{8}{3}x = \frac{2}{9}.$$

[8] O výpočtu čísla $\sqrt{2}$ a o dalších souvislostech viz např. [BD1] a [BD2].

Pro vypočtenou hodnotu $x_1 = \frac{1}{12}$ je $x_1 > x$. Tuto hodnotu znovu upřesníme:

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{12} - y\right)^2 = 2, \quad \text{po zanedbání čtverce } y^2 \text{ řešíme rovnici} \quad \frac{34}{12}y = \frac{1}{144}.$$

Pro vypočtenou hodnotu $y_1 = \frac{1}{12 \cdot 34}$ je $y_1 < y$. Získali jsme tedy přibližnou hodnotu

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \doteq 1{,}414\,215\,686\ldots,$$

která je horním odhadem čísla $\sqrt{2} \doteq 1{,}414\,213\,562\ldots$

Vyjdeme od dolního odhadu $\frac{5}{3}$ čísla $\sqrt{3}$ a upřesníme jej.

$$\left(\frac{5}{3} + x\right)^2 = 3, \quad \text{po zanedbání čtverce } x^2 \text{ řešíme rovnici} \quad \frac{10}{3}x = \frac{2}{9}.$$

Pro vypočtenou hodnotu $x_1 = \frac{1}{15}$ je $x_1 > x$. Tuto hodnotu znovu upřesníme:

$$\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{15} - y\right)^2 = 3, \quad \text{po zanedbání čtverce } y^2 \text{ řešíme rovnici} \quad \frac{52 \cdot 15}{225}y = \frac{1}{225}.$$

Pro vypočtenou hodnotu $y_1 = \frac{1}{15 \cdot 52}$ je $z_1 < y$. Získali jsme tedy přibližnou hodnotu

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} = \frac{1\,351}{780} \doteq 1{,}732\,051\,282\ldots,$$

která je horním odhadem čísla $\sqrt{3} \doteq 1{,}732\,050\,807\ldots$ Obě odmocniny jsou vypočteny s přesností na 5 desetinných míst.

Indické vyjádření čísel $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ přesně koresponduje s naším výše uvedeným výpočtem. Zdá se tedy velmi pravděpodobné, že k nim indičtí počtáři došli právě takto. Není příliš podstatné, zda byly výpočty prováděny aritmeticky nebo zda byly chápány a znázorňovány geometricky.[9]

Odmocniny v Mezopotámii. V Mezopotámii znali velmi přesně (na pět desetinných míst) hodnotu čísla $\sqrt{2}$ již ve druhém tisíciletí př. Kr. Dokládá to tabulka YBC 7289 s obrázkem čtverce s vyznačenými úhlopříčkami, vepsanými délkami strany a úhlopříčky a přibližnou hodnotou čísla $\sqrt{2}$, případně tabulka YBC 7243 se soupisem různých konstant.[10] V šedesátkové soustavě byla $\sqrt{2}$ vyjádřena v tvaru

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \doteq 1{,}414\,212\,963\ldots$$

Babylonský výpočet přibližné hodnoty čísla $\sqrt{2}$ se nyní pokusíme (v šedesátkové soustavě) reprodukovat. Vyjdeme z dolního odhadu

$$\frac{4}{3} = \frac{80}{60} < \sqrt{2},$$

[9] Pro další informace o výpočtu odmocnin ve staré Indii viz [Bü], [Dat], [Hen], [Plo], [Sar], [Katz].

[10] Viz např. [NgS], [FwR] a [Katz].

upřesníme jej, tj. vypočteme neznámou x z rovnice

$$\left(\frac{80}{60}+x\right)^2=2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{2\cdot 80}{60}x+x^2=\frac{800}{60^2}.$$

Zanedbáme x^2, získaný kořen x_1 tedy bude proto větší než hledaný kořen x.

$$x_1=\frac{800}{60^2}\cdot\frac{60}{2\cdot 80}=\frac{5}{60}.$$

Jako druhou aproximaci proto vezmeme jen $\frac{84}{60}=1+\frac{24}{60}$; tuto hodnotu upřesníme stejným způsobem. Budeme řešit rovnici

$$\left(\frac{84}{60}+x\right)^2=2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{2\cdot 84}{60}x+x^2=\frac{144}{60^2}.$$

Zanedbáme x^2, získaný kořen x_2 bude proto větší než hledané x:

$$x_2=\frac{144}{60^2}\cdot\frac{60}{2\cdot 84}=\frac{1}{60^2}\cdot\frac{360}{7} > \frac{51}{60^2};$$

není třeba provádět exaktní dělení sedmi, což dělalo v šedesátkové soustavě problémy, ale stačí pouze najít odhad.

Získanou hodnotu

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}$$

znovu upřesníme. Budeme řešit rovnici

$$\left(\frac{84\cdot 60+51}{60^2}+x\right)=2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{2\cdot 5\,091}{60^2}x+x^2=\frac{1\,719}{60^4}.$$

Zanedbáme opět x^2, získaný kořen x_3 bude větší než hledané x.

$$x_3=\frac{1\,719}{60^4}\cdot\frac{60^2}{2\cdot 5\,091}=\frac{1}{60^3}\cdot\frac{51\,570}{5\,091} > \frac{10}{60^3};$$

opět není třeba dělit, stačí porovnat čísla 51 570 a 5 091. Tak jsme došli k hodnotě

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3},$$

která je uváděna na mezopotamských tabulkách.[11]

Poznamenejme, že se výpočtem odmocnin zabýval i Leonardo Pisánský (Fibonacci, asi 1170 až 1250) ve svých knihách *Liber abaci* z roku 1202 (druhá verze z roku 1228) a *De practica geometrie* z roku 1223. Jeho početní postupy byly velmi nápadité. Viz např. [BeJ2], str. 278–283, resp. původní latinský text [LP] a překlad [Sig].

[11] Některé aspekty výpočtu čísla $\sqrt{2}$ viz [BD1] a [BD2].

5 Archimédovy odhady odmocnin

Archimédés nahradil při výpočtu horního a dolního odhadu obvodu kruhu ve spisu *Měření kruhu* hodnoty sedmi odmocnin poměrně velkých čísel jejich vhodnými horními nebo dolními odhady.[12]

Výše uvedený (podle prvního či druhého způsobu) horní a dolní odhad odmocniny $\sqrt{A}$ se pro další výpočet nehodí, neboť připojený zlomek má v čitateli a zejména ve jmenovateli velká čísla. Přitom je lhostejné, zda vyjdeme (podle výše uvedené teorie) od dolního nebo horního odhadu, které se (pro velká čísla) liší jen nepatrně. Uvedenou hodnotu je třeba vhodným způsobem buď trochu zmenšit nebo trochu zvětšit, a to tak, aby se při dalším výpočtu se zvolenými zlomky dalo rozumně pracovat. Archimédés to provedl takto:

$$\sqrt{349\,450} > 591\,\frac{1}{8}, \quad \sqrt{1\,373\,943\,\frac{33}{64}} > 1\,172\,\frac{1}{8}, \quad \sqrt{5\,472\,132\,\frac{1}{16}} > 2\,339\,\frac{1}{4},$$

$$\sqrt{9\,082\,321} < 3\,013\,\frac{3}{4}, \quad \sqrt{3\,380\,929} < 1\,838\,\frac{9}{11}, \quad \sqrt{1\,018\,405} < 1\,009\,\frac{1}{6},$$

$$\sqrt{4\,069\,284\,\frac{1}{36}} < 2\,017\,\frac{1}{4}.$$

Vyjádříme nyní výše uvedená čísla A ve tvaru $A = a^2 + r$, připojíme dolní odhad jejich odmocnin $a + \frac{r}{2a+1}$ a Archimédem upravenou hodnotu:

1.	$349\,450 = 591^2 + 169$	$591\,\frac{169}{1\,183} > 591\,\frac{1}{8}$
2.	$1\,018\,405 = 1\,009^2 + 324$	$1\,009\,\frac{324}{2\,019} < 1\,009\,\frac{1}{6}$
3.	$1\,373\,943\,\frac{33}{64} = 1\,172^2 + 359\,\frac{33}{64}$	$1\,172\,\frac{359}{2\,345} > 1\,172\,\frac{1}{8}$
4.	$3\,380\,929 = 1\,838^2 + 2685$	$1\,838\,\frac{2\,685}{3\,677} < 1\,838\,\frac{9}{11}$
5.	$4\,069\,284\,\frac{1}{36} = 2\,017^2 + 995\,\frac{1}{36}$	$2\,017\,\frac{995}{4\,035} < 2\,017\,\frac{1}{4}$
6.	$5\,472\,132\,\frac{1}{16} = 2\,339^2 + 1\,211\,\frac{1}{16}$	$2\,339\,\frac{1\,211}{4\,679} > 2\,339\,\frac{1}{4}$
7.	$9\,082\,321 = 3\,013^2 + 4\,152$	$3\,013\,\frac{4\,152}{6\,027} < 3\,013\,\frac{3}{4}$

[12] O Archimédových odmocninách viz [Hea], str. lxxx–xcix.

Některé Archimédovy odhady jsou zcela průhledné:

2. $6 \cdot 324 = 1\,944 < 2\,019 < 2\,268 = 7 \cdot 324,$

proto je zlomek zvětšen na $\dfrac{1}{6}$

5. $4 \cdot 995 = 3\,980 < 4\,035 < 4\,975 = 5 \cdot 995,$

proto je zlomek zvětšen na $\dfrac{1}{4}$

6. $3 \cdot 1\,211 = 3\,633 < 4\,679 < 4\,844 = 4 \cdot 1\,211,$

proto je zlomek zmenšen na $\dfrac{1}{4}$

Ve dvou případech je výše uvedený princip mírně porušen, je volen „sousední" kmenný zlomek (místo sedminy osmina):

1. $7 \cdot 169 = 1\,183 < 1\,352 = 8 \cdot 169,$

přesto je zlomek zmenšen na $\dfrac{1}{8}$

3. $6 \cdot 359 = 2\,154 < 2\,345 < 2\,513 = 7 \cdot 359,$

přesto je zlomek zmenšen na $\dfrac{1}{8}$

V dalších dvou případech nebylo možno volit kmenné zlomky:

4. Je zjevné, že $\frac{2\,685}{3\,677} < \frac{9}{12} < \frac{9}{11},$

7. Je zjevné, že $\frac{4\,152}{6\,027} < \frac{3}{4}.$

6 Řetězové zlomky

Hodnotu čísla $\sqrt{3}$ lze vyjádřit pomocí řetězového zlomku

$$[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}};$$

jeho hodnotou je limita posloupnosti dílčích zlomků (tzv. konvergentů) $\dfrac{a_k}{b_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, přičemž $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ a pro každé $k = 1, 2, \dots$ je

$$a_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k-2}, \qquad a_{2k+1} = a_{2k} + a_{2k-1},$$
$$b_{2k} = b_{2k-1} + b_{2k-2}, \qquad b_{2k+1} = b_{2k} + b_{2k-1}.$$

V následující tabulce uvedeme čitatele a_k a jmenovatele b_k konvergentů řetězového zlomku $[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$ pro $k = 0, 1, \dots, 36$. Pro sudé hodnoty k dostáváme dolní odhady a pro liché hodnoty k horní odhady čísla $\sqrt{3}$. Současně je v tabulce poznamenáno, pro které hodnoty k vycházejí konvergenty odpovídající výše uvedeným horním a dolním odhadům čísla $\sqrt{3}$.

k	a_k	b_k	poznámka
0	1	1	$t = 0$
1	2	1	$t = 1$
2	5	3	1. dolní odhad
3	7	4	1. horní odhad, $t = 2$
4	19	11	
5	26	15	horní odhad (1)
6	71	41	
7	97	56	horní odhad (2), $t = 3$
8	265	153	2. dolní odhad
9	362	209	
10	982	571	
11	1351	780	2. horní odhad
12	3 691	2 131	
13	5 042	2 911	
14	13 775	7 953	
15	18 817	10 864	$t = 4$
16	51 409	29 681	
17	70 226	40 545	horní odhad (3)
18	191 861	110 771	
19	262 087	151 316	
20	716 035	413 403	
21	978 122	564 719	
22	2 672 279	1 542 841	
23	3 650 401	2 107 560	horní odhad (4)
24	9 973 081	5 757 961	
25	13 623 482	7 865 521	
26	37 220 045	21 489 003	3. dolní odhad
27	50 843 527	29 354 524	
28	138 907 099	80 198 051	
29	189 750 626	109 552 575	
30	518 408 351	299 303 201	
31	708 158 977	408 855 776	$t = 5$
32	1 934 726 305	1 117 014 753	
33	2 642 885 282	1 525 870 529	
34	7 220 496 869	4 168 755 811	
35	9 863 382 151	5 694 626 340	3. horní odhad
36	17 083 879 020	9 863 382 151	

Hodnoty prvních tří dolních i horních odhadů čísla $\sqrt{3}$, které byly elementárním způsobem vypočteny, odpovídají v tabulce hodnotám uvedeným pro $k = 2, 3, 8, 11, 26, 35$. Z tabulky je zřejmé, proč je 2. horní odhad čísla $\sqrt{3}$ přesnější než 2. dolní odhad a proč je 3. horní odhad výrazně přesnější než 3. dolní odhad.

Poznamenejme ještě, že rychleji než řetězový zlomek konverguje k hodnotě $\sqrt{3}$ posloupnost

$$H_0 = 1, \quad H_{t+1} = \frac{1}{2}\Big(H_t + \frac{3}{H_t}\Big) = \frac{H_t^2 + 3}{2H_t}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Jejími prvními členy jsou čísla

$$1, \quad 2, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{97}{56}, \quad \frac{18\,817}{10\,864}, \quad \frac{708\,158\,977}{408\,855\,776}, \; \ldots,$$

která odpovídají výše uvedeným hodnotám pro $k = 0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$ Uvedená tabulka umožňuje srovnání rychlosti konvergence řetězového zlomku, posloupnosti H_t a elementárních výpočtů.[13]

[13] Obdobná problematika týkající se čísla $\sqrt{2}$ je předmětem článků [BD1] a [BD2]. O řetězových zlomcích viz např. [Chi].

IV.

ADDENDA

LITERATURA

1 Vydání a překlady Archimédových spisů

[Czw1] Archimedes: *Über Spiralen.* Übersetzt und mit Anmerkungen und einem Anhang versehen von Dr. Arthur Czwalina-Allenstein. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 201, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1922, 71 stran.

[Czw2] Archimedes: *Kugel und Zylinder.* Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. Arthur Czwalina-Allenstein. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 202, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1922, 80 stran.

[Czw3] Archimedes: *Über Quadratur der Parabel und Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen.* Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. Arthur Czwalina-Allenstein. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 203, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1923, 64 stran.

[Czw4] Archimedes: *Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide.* Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. Arthur Czwalina. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 210, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1923, 73 stran.

[Czw5] Archimedes: *Über schwimmende Körper und die Sandzahl.* Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. Arthur Czwalina. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 213, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1925, 82 stran.

[Czw6] Archimedes: *Abhandlungen; Über Spiralen/Kugel und Zylinder/Die Quadratur der Parabel/Über das Gleichgewicht ebener Flächen/Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide/Über schwimmende Körper/Die Sandzahl.* Übers. u. Anm.: A. Czwalina-Allenstein, 3., erw. Auflage. Reprint der Einzelbände 201, 202, 203, 210 und 213, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2009, 386 stran.

[Ee] Ver Eecke P.: *Les Oeuvres Complètes d'Archimède.* Paris, Bruxelles, 1921; 2. vydání (bez Eutokiových komentářů): Paris, Bruxelles, 1960.

[Hea] Heath T. L.: *The Works of Archimedes. Edited in Modern Notation with Introductory Chapters.* Cambridge University Press, 1897; další vydání: Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2002; německý překlad: *Archimedes Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen.* Deutsch von Dr. Fritz Kliem, Verlag von O. Häring, Berlin, 1914.

[Hea1] Heath T. L.: *The Method of Archimedes, Recently Discovered by Heiberg. A Supplement to The Works of Archimedes.* Cambridge University Press, 1912.

[Hei] Heiberg J. L. (ed.): *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii, I.–III.*, Teubner, Leipzig, 1880–1881; 2. vydání (výrazně přepracované a doplněné): Teubner, Leipzig, 1910, 1913, 1915; reprint Stuttgart, 1972.

[Hei1] Heiberg J. L.: *Eine neue Archimedeshandschrift.* Berlin, Hermes, XLII(1907), 234–303.

[Mu] Mugler C.: *Archimède. Texte et traduction, I.–IV.* Les Belles Lettres, Paris, 1970–1972.

[Ne] Netz R.: *The Works of Archimedes.* Translation and Commentary. Volume 1: The Two Books *On the Sphere and the Cylinder.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Niz] Nizze J. E.: *Archimedes von Syrakus Vorhandene Werke.* C. Loeffler, Stralsund, 1824.

[Pet] Archimed: *Dve knigy o šare i cilindre, izmerenie kruga i lemmy.* Perevod s grečeskogo F. Petruševskogo. SPb, 1823.

[Rud] Rudio F.: *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre.* Leipzig, 1892. (obsahuje Archimedův spis *Über Kreismessung*); rusky: *O kvadrature kruga.* 3. vydání, Moskva, Leningrad, 1936.

[Sut2] Suter H.: *Der Loculus Archimedius oder das Syntemachion des Archimedes. Zum ersten mal nach zwei arabischen Manuskripte der Königlichen Bibliothek in Berlin herausgegeben und übersetzt.* Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 9(1899), 491–500.

[Ve] Veselovskij I. N.: *Archimed. Sočinenija.* Perevod, vstupitel'naja stat'ja i kommentarii I. N. Veselovskogo; perevod arabskich tekstov B. A. Rozenfel'da. Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva, 1962.

České překlady

[Va1] *Archimedovo měření kruhu. Úvod a překlad M. Valouch.* Výroční zpráva c. k. státního vyššího gymnasia v Litomyšli, Litomyšl, 1903, 1–25.

[Va2] *Archimeda Syrakusského Počet pískový.* Přeložil prof. Miloslav Valouch, Výroční zpráva c. k. státního vyššího gymnasia v Litomyšli roku 1905–06, Litomyšl, 1906, 3–13; přetisk: Česká matice technická, Praha, 1993.

[Vr] *Archimedův výklad Eratosthenovi o mechanických způsobech zkoumání.* Z řečtiny přeložil Fr. Vrána, III. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově za školní rok 1908/9, tiskem knihtiskárny Václava Horáka v Prostějově, nákladem vlastním, Prostějov, 1909, 3–18.

[Ma] Mačák K.: *Tři středověké sbírky matematických úloh. Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil.* Dějiny matematiky, sv. 15, Prometheus, Praha, 2001.

[St] Studnička F. J.: *Archimedes.* Živa 8(1898), č. 5, str. 133–135, č. 6, str. 178–180.

2 Literatura

[Aus] Ausonius: *Decimi Magni Ausonii Burdigalensis opuscula.* Ed. R. Peiper, Teubner, Leipzig, 1886; 2. vyd. rev. Sextus Prete, Teubner, Leipzig, 1978.

[Bar] Barbaro D.: *La Pratica della perspettiva.* Venice, 1568.

[BBB] Berggren L., Borwein J. M., Borwein P.: *Pi: A Source Book.* Springer, 2004.

[BD1] Bečvář J., Dlab V.: *Babylonský výpočet čísla* $\sqrt{2}$. Učitel matematiky 19(2011), 66–71.

[BD2] Bečvář J., Dlab V.: *Ještě k číslu* $\sqrt{2}$*: Babylon a řetězové zlomky.* Učitel matematiky 20(2011), 26–29.

[Bec] Beckmann P.: *A History of* π. St. Martin's Press, New York, 1971; česky: *Historie čísla* π. Academia, Praha, 1998.

[BeJ1] Bečvář J.: *Hrdinský věk řecké matematiky II.* In Historie matematiky II, Edice Dějiny matematiky, sv. 7, Prometheus, Praha, 1997, 6–28.

[BeJ2] Bečvář J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě.* Edice Dějiny matematiky, sv. 19, Prometheus, Praha, 2001.

[BeJ3] Bečvář J.: *Cesta k Eukleidovým Základům.* G – Slovenský časopis pre geometriu a grafiku 4(2007), č. 7, 5–24.

[BeJ4] Bečvář J.: *Aristarchovo měření vesmíru a Eratosthenovo měření Země.* Sborník *Astronomie pro všechny,* Hvězdárna Valašské Meziříčí, 2008, 3–16.

[BeJ5] Bečvář J.: *Teorie proporcí (od Eudoxa až k Dedekindovi).* In L. Dostálová (ed.): *Eukleides: Základy geometrie.* Sborník příspěvků ze semináře katedry filozofie Fakulty filozofické ZČU, Plzeň, 2008, 63–105.

[BeM1] Bečvářová M.: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 20, Prometheus, Praha, 2002, 297 stran.

[BeM2] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.

[BeM3] Bečvářová M.: *Archimédovy práce česky.* 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2008, str. 92–102.

[Bel] Bell A. H.: *The "Cattle Problem". By Archimedes 251 B.C.* Amer. Math. Monthly 2(1895), 140–141.

[BŠ] Bečvář J., Štoll I.: *Archimedes. Největší vědec starověku.* Edice Velké postavy vědeckého nebe, svazek č. 11, Prometheus, Praha, 2005.

[Bü] Bürk A.: *Das Āpastamba-Śulba-Sūtra.* Zeitschrift D. M. G. 55(1901), 543–591, 56(1902), 327–391.

[Ci] Cicero M. T.: *Tuskulské hovory.* Svoboda, Praha, 1976.

[Cl1] Clagett M.: *Archimedes in the Middle Ages.* Vol. I, University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 1964.

[Cl2] Clagett M.: *Archimedes in the Middle Ages.* Vol. II–V, American Philosophical Society, Philadelphia, 1976–1984.

[Cro] Cromwell P. R.: *Polyhedra.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Dat] Datta B.: *Ancient Hindu Geometry: The Science of the Sulba.* Cosmo Publications, New Delhi, 1993.

[Dij] Dijksterhuis E. J.: *Archimedes.* Ejnar Munksgaard, Copenhagen, 1956; anglický překlad: C. Dikshoorn, with a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr, Princeton University Press, Princeton, 1987.

[Dür1] Dürer A.: *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen.* Nürnberg, 1525.

[Dür2] Dürer A.: *Vier Bücher von menslicher Proportion.* Nürnberg, 1528.

[En] Ennodius: *Magni Felicis Ennodii opera omnia.* Recensuit et commentario critico instruxit Guilelmus Hartel. Wien, 1882.

[EL] Eymard P., Lafon J.-P.: *Autour du nombre π.* Hermann, Paris, 1999; anglický překlad: *The number π.* American Mathematical Society, 2004.

[Eukl] Eukleides: *Eukleidovy Základy (Elementa).* Přeložil František Servít, Jednota českých mathematiků, Praha, 1907, 315 stran..

[Fie] Field J. V.: *Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler.* Archive for History of Exact Sciences 50(1997), 241–289.

[Fra1] della Francesca P.: *Libellus de quinque corporibus regularibus.* Eds. M. Dalai Emiliani, C. Grayson, C. Maccagni et al., Florence, 1995.

[Fra2] della Francesca P.: *Trattato d'abaco: Dal Codice Ashburnhamiano 280 (359*.291*) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze.* Ed. G. Nicco Fasola, Florence, 1942.

[FwR] Fowler D., Robson E.: *Square Roots Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context.* Historia Mathematica 25(1998), 366–378.

[Gold] Goldstein B.: *Eratosthenes on the measurement of the Earth.* Historia mathematica 11(1984), 411–416.

[Gow] Gow M.: *Archimedes: Mathematical Genius of the Ancient World.* Great Minds of Science Series, Enslow Publishers, Inc., Berkeley Heights, NJ, U.S.A., 2005.

[Gü1] Günther S.: *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden.* Leipzig, 1882.

[Gü2] Günther S.: *Abriß der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterum.* in Iwan von Müller: *Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft.* Band V., Teil 1, München, 1894.

[Hea2] Heath T. L.: *Aristarchus of Samos.* Oxford, 1913; reprint: Dover, New York, 1981.

[Hea3] Heath T. L.: *A History of Greek Mathematics I, II.* Clarendon Press, Oxford, 1921, reprint: Dover, New York, 1981.

[Hea4] Heath T. L.: *Greek Astronomy.* Dent, London, 1932; reprint: Dover, New York, 1991.

[Hel] van Helden A.: *Measuring the Universe: Cosmic Dimensions from Aristarchus to Halley.* Chicago University Press, Chicago, 1984.

[Hen] Henderson D. W.: *Square Roots in the Sulbasutra.* In C. A. Gorini (ed.): *Geometry in Work.* Papers in Applied Geometry, MAA Notes Number (53)2000, 39–45.

[Chi] Chinčin A. J.: *Řetězové zlomky.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[Jam] Jamnitzer W.: *Perspectiva corporum regularium.* Nürnberg, 1568.

[Kag] Kagan V. F.: *Archimedes. Stručný nástin života a díla.* Orbis, Praha, 1953; přeloženo z ruského originálu: *Archimed.* Gosudarstvennoe izdatelstvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva-Leningrad, 1951.

[Katz] Katz V. J. (ed.): *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook.* Princeton University Press. Princeton, Oxford, 2007.

[Kep] Kepler J.: *Harmonices Mundi libri V.* Godofredi Tampachii, Linz, 1619.

[Kno1] Knorr W. R.: *Archimedes and the Measurement of the Circle: A New Interpretation.* Archive for History of Exact Science 15(1975/1976), 115–140.

[Kno2] Knorr W. R.: *Archimedes and the Elements: Proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus.* Archive for History of Exact Sciences 19(1978), 211–290.

[Kno3] Knorr W. R.: *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1986.

[Kno4] Knorr W. R.: *Archimedes' Dimension of the Circle: A View of the Genesis of the Extant Text.* Archive for History of Exact Science 35(1986), 281–324.

[Kno5] Knorr W. R.: *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry.* Birkhäuser, Boston, 1989.

[KrA] Krumbiegel B., Amthor A.: *Das problema bovinum des Archimedes.* Zeitschrift für Mathematik und Physik (Historisch-literarische Abtheilung) 25(1880), 121–136, 153–171.

[Les] Lessing G. E.: *Zur Geschichte und Litteratur. Aus den Schätzen der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel.* Zweyter Beytrag, Braunschweig, 1773.

[Liu] Liu Y., Hu C., Comotti A., Ward M. D.: *Supramolecular Archimedean Cages Assembled with 72 Hydrogens Bonds.* Science 333(2011), 436–440.

[LP] Leonardo Pisano: *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, I.–II., pubblicati da Baldassarre Boncompagni.* Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Roma, 1857, 1862.

[Mač] Mačák K.: *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Dějiny matematiky, Praha, 2001, 58–60.

[NAW] Netz R., Acerbi F., Wilson N.: *Towards a Reconstruction of Archimedes' Stomachion.* Sciamus 5(2004), 67–99.

[Nel1] Nelson H. L.: *A solution to Archimedes' Cattle Problem.* J. Recreational Math. 13(1981), 162–176.

[Nel2] Nelson H. L.: *Oxen of the Sun.* Scientific American 245(1981) no. 1, p. 84.

[NgS] Neugebauer O., Sachs A.: *Mathematical Cuneiform Texts.* American Oriental Series, Vol. 29, American Oriental Society, New Haven, Connecticut, 1945.

[NN] Netz R., Noel W.: *The Archimedes Codex. How a Medieval Prayer Book is Revealing the True of Genius of Antiquitys Greatest Scientist.* Orion Publishing Group, Weidenfeld & Nicolson, London, Da Capo Press, Cambridge, Mass., 2007; český překlad: *Archimedův kodex.* Přeložila Tereza Senjuková. Deus, Praha, 2008.

[NNWT] Netz R., Noel W., Wilson N., Tchernetska N.: *The Archimedes palimpsest I, II.* Cambridge University Press, New York, 2011.

[NST1] Netz R., Saito K., Wilson N., Tchernetska N.: *A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest.* Part 1, Sciamus 2(2001), 9–29.

[NST2] Netz R., Saito K., Wilson N., Tchernetska N.: *A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest.* Part 2, Sciamus 3(2002), 109–125.

[Pac1] Pacioli L.: *De divina proportione.* Venice, 1509.

[Pac2] Pacioli L.: *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalità.* Venice, 1494.

[Pal] http://www.archimedespalimpsest.org [cit. 23. 5. 2012].

[Pap] Hultsch F. (ed.): *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt. I–III.* Weidmann, Berlin, 1876–1878.

[Pau1] Pauly A. (ed.): *Paulys Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft.* Neue Bearbeitung begonnen von G. Wissowa fortgeführt von W. Kroll und K. Mittelhaus. J. B. Metzler, Stuttgart, Munich, 1894–1980.

[Pau2] Cancik H., Schneider H.: *Brills New Pauly. Antiquity volumes.* Brill Online, 2012. http://referenceworks.brillonline.com/entries/brill-s-new-pauly/ [cit. 19. 11. 2012].

[Phi] Phillips G. M.: *Two Millenia of Mathematics.* Canadian Mathematical Society, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2000, xii+223 stran.

[Pic] Pickover C. A.: *Archimedes to Hawking: Laws of Science and the Great Minds Behind Them.* Oxford University Press, Oxford, 2008.

[Pl1] Plutarchos: *Životy slavných Řeků a Římanů.* Díl I., Živá díla minulosti, Odeon, Praha, 1967.

[Plo] Plofker K.: *Mathematics in India.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[Pog] Pogoda Z.: *Galeria wielościanów.* Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 2005.

[Sar] Saraswathi T. A.: *Development of Mathematical Ideas in India.* Indian Journal of History of Science 4(1969), 59–78.
http://www.dli.gov.in/rawdataupload/upload/insa/INSA_1/20005b65_59.pdf.

[Sat] Sato T.: *Archimedes' On the Measurement of a Circle, Proposition 1: An Attempt at Reconstruction.* Japanese Studies in the History of Science 18(1979), 83–99.

[Seg] Segal R.: *The Space Packed Architecture of Alfred Neumann, 1949–1968.* Dissertation, Princeton University, Princeton, 2011.

[SFS] Schreiber P., Fischer G., Sternath M. L.: *New light on the rediscovary of the Archimedean solids during the Renaissance.* Archive for History of Exact Sciences 62(2008), 457–467.

[Sche] Schepler H. C.: *The Chronology of π.* Mathematics Magazine 23(1950), 165–170, 216–228, 279–283.

[Sig] Sigler, L.: *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation.* Springer, New York, 2002.

[Sut1] Suter H.: *Über zwei arabische mathematische Manuskripte der Berliner Königl. Bibliothek.* Biblioth. math. 1898, 73–78.

[Var] Vardi I.: *Archimedes' Cattle Problem.* Amer. Math. Monthly 105(1998), 305-319.

[Vat] http://www.ibiblio.org/expo/vatican.exhibit/exhibit/d-mathematics/
Greek_math.html [cit. 19. 11. 2012].

[VeJ] Veselý J.: π *aneb 3,141 592 …* Učitel matematiky 3(1995), č. 3(15), 1–10, č. 4(16), 1–13.

[Vet] Vetter Q.: *Několik poznámek in margine Archimedových spisů, zvláště „Metody“.* Čas. pěst. mat. a fyz., 49(1920), 224–244.

[Vi] Vitruvius: *Deset knih o architektuře.* Přel. Alois Otoupalík, Antická knihovna 42/R, Arista, Baset, 2001.

[Wer] Wertheim G.: *Die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie.* Anhang III. In: Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantos von Alexandria. Teubner, Leipzig, 1890.

[WGZ] Williams H. C., German R. A., Zarnke C. R.: *Solution of the Cattle Problem of Archimedes.* Math. Comp. 19(1965), 671–674.

REJSTŘÍK

SEZNAM AUTORŮ

Všichni autoři jednotlivých kapitol působí na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8. Uvádíme tedy pouze jejich e-mailové adresy a případná další pracoviště:

Mgr. Tereza Bártlová
e-mail: *Tereza.Bartlova@mff.cuni.cz*

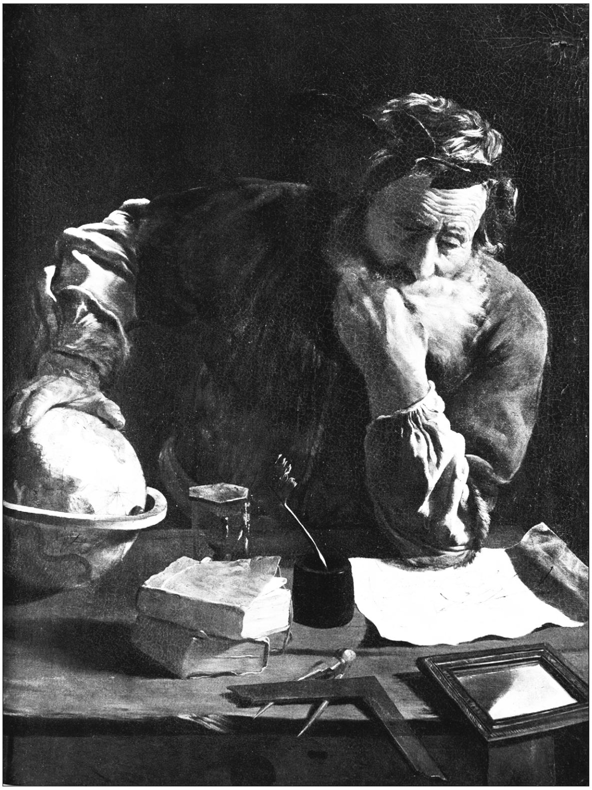
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
e-mail: *becvar@karlin.mff.cuni.cz*

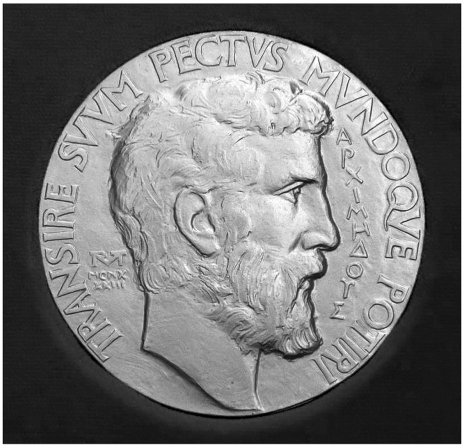
doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *nemcova@fd.cvut.cz, becvamar@fd.cvut.cz*

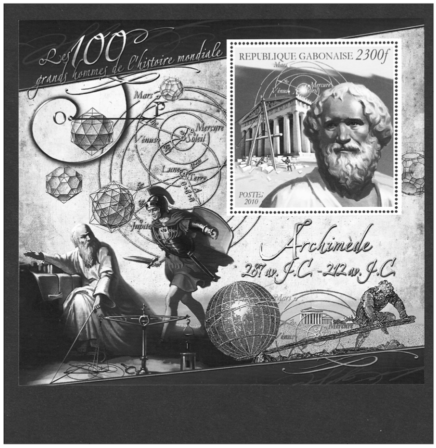
Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
e-mail: *halas@karlin.mff.cuni.cz*

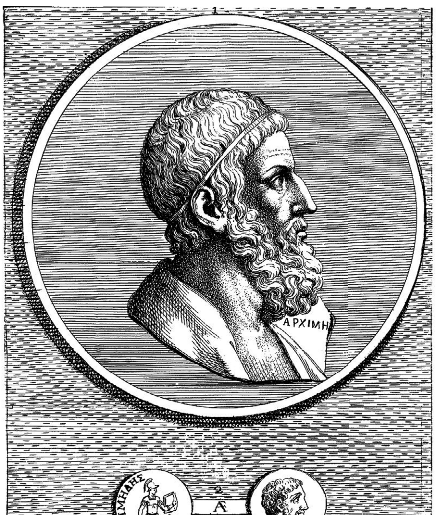
RNDr. Vlasta Moravcová
e-mail: *morava@karlin.mff.cuni.cz*

Vyobrazení Archiméda



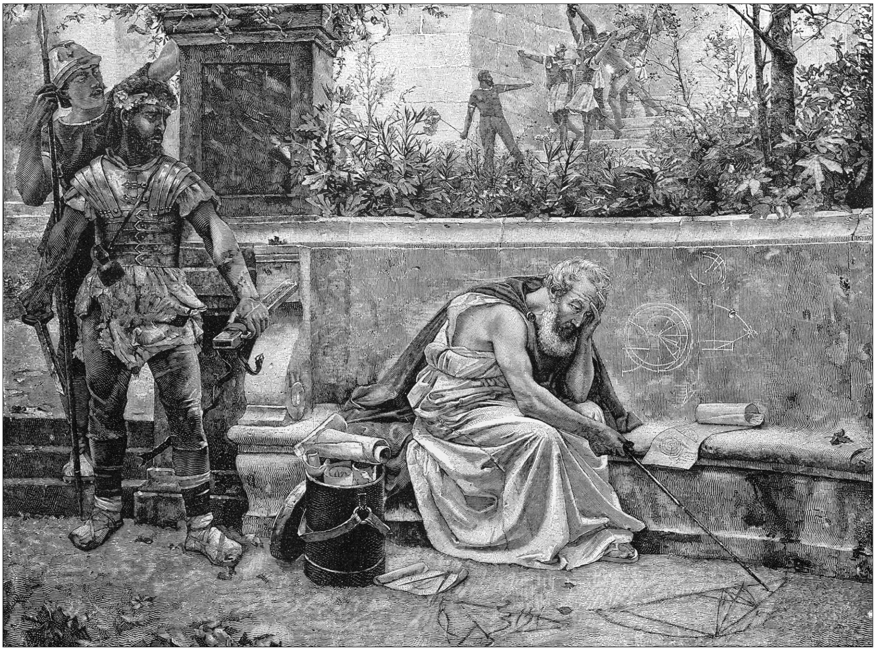

TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRI
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ


Les 100 grands hommes de l'histoire mondiale
REPUBLIQUE GABONAISE 2300f
POSTES 2010
Archimède
287 av. J.-C. - 212 av. J.-C.

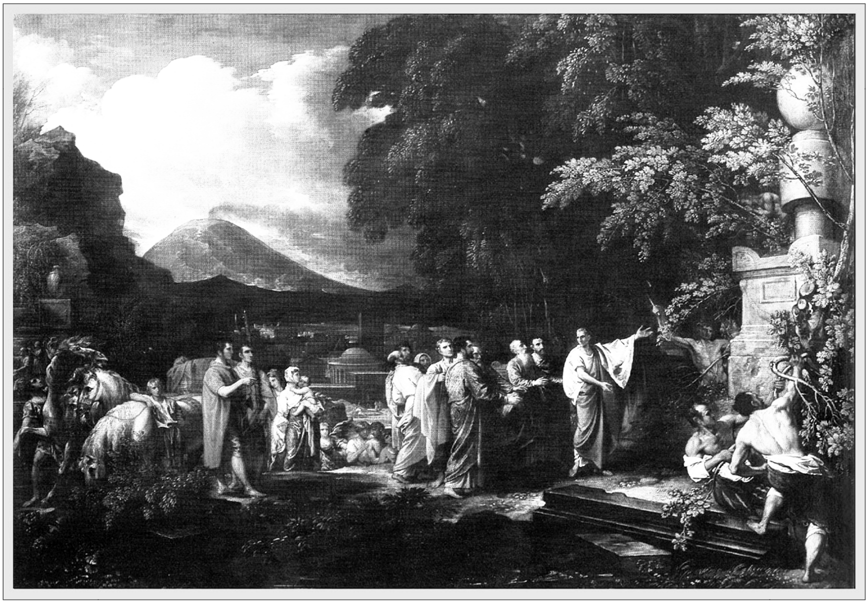

ΑΡΧΙΜΗ
ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ
ARCHIMEDES
1. Archimedis Effigies marmorea in veteri anaglypho Romæ aßervato Ejusdemque nomine insignito.
2. Eadem in antiquo numismate græco. Obiit Archim. Olym. 142 anno 1 ante Æram Chr. an. 212.


ARCHIMEDES
Ex Dactylioth. Lipperti.

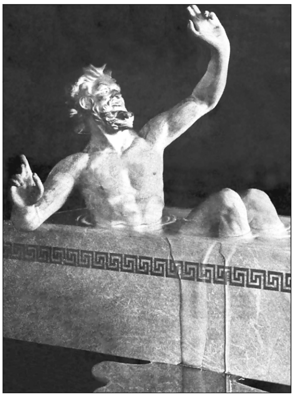
Smrt Archimédova

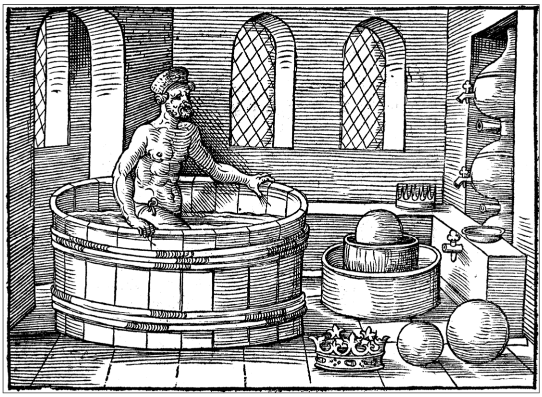


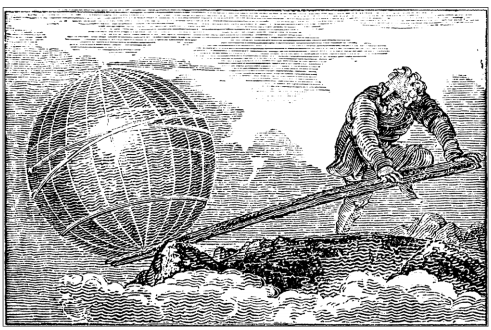
Hrob Archimédův

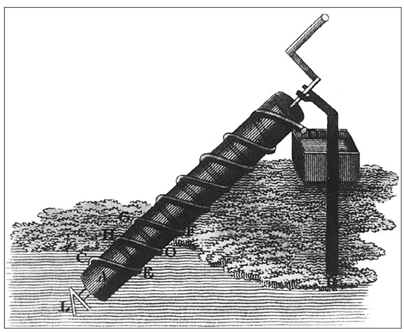


Archimédés vynálezce









Přehled vydaných svazků edice

DĚJINY MATEMATIKY

http://fd.cvut.cz/personal/becvamar/edice/edice.htm

1. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Historie matematiky I*, 1994

2. J. Bečvář a kol.: *Eduard Weyr (1852 – 1903)*, 1995

3. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 19. století*, 1996

4. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Člověk, umění, matematika*, 1996

5. J. Bečvář (ed.): *Jan Vilém Pexider (1874 – 1914)*, 1997

6. P. Šarmanová, Š. Schwabik: *Malý průvodce historií integrálu*, 1996

7. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Historie matematiky II*, 1997

8. P. Šišma: *Teorie grafů 1736 – 1963*, 1997

9. K. Mačák: *Počátky počtu pravděpodobnosti*, 1997

10. M. Němcová: *František Josef Studnička (1836 – 1903)*, 1998

11. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků I*, 1998

12. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 16. a 17. století*, 1999

13. M. Bečvářová: *Z historie Jednoty (1862 – 1869)*, 1999

14. K. Lepka: *Historie Fermatových kvocientů (Fermat – Lerch)*, 2000

15. K. Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh*, 2001

16. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků II*, 2001

17. E. Fuchs (ed.): *Mathematics throughout the Ages*, 2001

18. K. Mačák, G. Schuppener: *Matematika v jezuitském Klementinu v letech 1600 – 1740*, 2001

19. J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, 2001

20. M. Bečvářová: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, 2002

21. P. Šišma: *Matematika na německé technice v Brně*, 2002

22. M. Hykšová: *Karel Rychlík (1885 – 1968)*, 2003

23. J. Bečvář, M. Bečvářová, H. Vymazalová: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, 2003

24. J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků III*, 2004

25. E. Fuchs (ed.): *Mathematics throughout the Ages II*, 2004

26. K. Mačák: *Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938*, 2005

27. Z. Kohoutová, J. Bečvář: *Vladimír Kořínek (1899 – 1981)*, 2005

28. J. Bečvář, M. Bečvářová, J. Škoda: *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, 2006

29. A. Slavík: *Product Integration, its History and Applications*, 2007

30. L. Lomtatidze: *Historický vývoj pojmu křivka*, 2006

31. H. Vymazalová: *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty*, 2006

32. E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků IV*, 2007

33. M. Bečvářová, J. Bečvář (ed.): *Matematika v proměnách věků V*, 2007

34. M. Bečvářová: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*, 2008

35. J. Bečvář: *Z historie lineární algebry*, 2007

36. E. Pecinová: *Ladislav Svante Rieger (1916 – 1963)*, 2008

37. J. Hudeček: *Matematika v devíti kapitolách*, 2008

38. J. Bečvář, A. Slavík (eds.): *Jan Vilém Pexider (1874 – 1914)*, 2009 (anglická verze 5. svazku)

39. V. Chmelíková: *Zlatý řez nejen v matematice*, 2009, 2011

40. M. Bečvářová: *České kořeny bulharské matematiky*, 2009

41. M. Bečvářová, Ch. Binder (eds.): *Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire (Budapest 2009)*, 2010, 2011

42. J. Mikulčák: *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, 2010

43. M. Bečvářová, I. Netuka: *Jarník's Notes of the Lecture Punktmengen und reelle Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen 1928)*, 2010 (anglicky, německy)

44. M. Kašparová, Z. Nádeník: *Jan Sobotka 1862 – 1931*, 2010

45. J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): *Matematika v proměnách věků VI*, 2010

46. M. Bečvářová, J. Čižmár: *Karel Zahradník (1848 – 1916). Praha – Záhřeb – Brno*, 2011

47. S. Domoradzki: *The Growth of Mathematical Culture in the Lvov Area in the Autonomy Period (1870 – 1920)*, 2011

48. Z. Nádeník: *Moji učitelé geometrie*, 2011

49. M. Chocholová: *Wilhelm Matzka (1798 – 1891)*, 2011

50. M. Bečvářová a kol.: *Zapomenutý matematik Henry Lowig (1904 – 1995)*, 2012

51. M. Hykšová: *Pravděpodobnost v díle českých myslitelů*, 2011

52. M. Bečvářová et al.: *The Forgotten Mathematician Henry Lowig (1904 – 1995)*, 2012

53. B. Sedlačíková: *Historie matematické lingvistiky*, 2012

54. Z. Halas (ed.): *Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla*, 2012

Archimédés

Několik pohledů do jeho života a díla

Zdeněk Halas (ed.)

Edice **Dějiny matematiky**, 54. svazek

http://fd.cvut.cz/personal/becvamar/edice/edice.htm

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 422. publikaci

Z předloh připravených v systému $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

Vydání první

Praha 2012

ISBN 978-80-7378-228-3