Igor E. Zino

Perturbation methods in the theory of heat conduction

In: Michal Greguš (ed.): Equadiff 5, Proceedings of the Fifth Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications held in Bratislava, August 24-28, 1981. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 47. pp. 374--377.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/702325

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Игорь Е.Зино
ЛПИ, Ленинград, СССР

Тема работы относится к интенсивно развивающейся проблематике уравнений в частных производных, когда по малым параметрам системы можно сформулировать ту или иную задачу сингулярных возмущений [1,2]. Проведено построение асимптотической теории теплопроводности для тонких тел, у которых относительная малость размеров в одном направлении позволяет начать процесс сингулярных итераций с задачи меньшей размерности. При этом в тепловой системе оказывается возможной оценка различных неравномерных переходов, неоднородностей, разрывов, ребер, включений и т.п., чему используемые асимптотические методы - метод погранслойных поправок и метод сращиваемых асимптотических разложений - дают адекватное классификационное описание. Формальное обоснование процессов асимптотического интегрирования представленных задач дается построением полной процедуры возмущений по выбранному параметру, представляющей (по стандартным меркам [3,4]) условие самосогласованности подобных подходов.

Первая часть работы посвящена расчету тонких ($\varepsilon = a/L \ll 1$) стержней произвольной формы с переменным по длине сечением и с произвольным теплообменом на боковой поверхности, описываемым условием вида

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h u^{\beta} \Big|_{S} = 0 . \qquad (1)$$

Предельным элементом асимптотических разложений при этом оказывается известная одномерная теория распространения тепла [5]

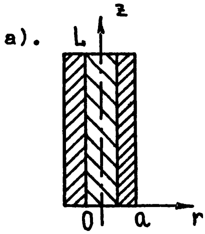
$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{P}{S} h T = - \frac{Q(x)}{\lambda} , \qquad (2)$$

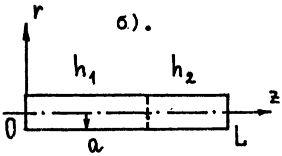
а последующие приближения дают возможность оценить краевые эффекты, связанные с отличием реальных задач от идеальных одномерных моделей.

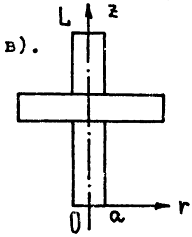
В тех случаях, когда геометрия самой плоской области поперечного сечения стержня или ее частей характеризуется малыми параметрами ("тонкие" области), оказывается возможным вновь прибегнуть к асимптотической процедуре. Некоторая громоздкость возникающего при этом разветвленного итерационного процесса компенсируется простотой задач-"блоков", решаемых последовательно в ходе такого процесса. Характерным примером такого подхода может служить решение задачи теплопроводности на нахождение температурного поля в цилиндре конечной длины с большим числом узких продольных ребер.

Большую группу исследованных задач составляют задачи для тонких стержней с физическими (разрыв коэффициентов в граничных условиях, являющийся результатом различия теплофизических параметров сред) и геометрическими (наличие ребер) неоднородностями. При этом из рассмотрения уравнений и краевых условий для первых приближений можно прийти к заключению, что найденные особенности структуры исследуемых температурных полей (квазиодномерное "ядро", внутренние погранслойные поправки [6]) сохраняются и в высших приближениях, уравнения которых будут отличаться от уравнений нулевых приближений только другими правыми частями. Выделение же "основной" части решения позволяет получить задачу для соответствующего пограничного слоя в более простой области с более простыми граничными условиями, т.е. задачу, которая несет меньше теплофизической или геометрической информации по сравнению с исходной. Это оказывается особенно удобным в задачах оптимизации, поскольку построение приближений для пограничных слоев оказывается общим для всех вариантов.

Примером задач первого типа может сужить, например, задача для двухслойного цилиндра в случае свободно-конвективного теплообмена на одном из его торцов (рис а.). Особенности расчета длинных стержневых элементов (в частности, элементов трубопроводной арматуры) с резкой сменой по высоте режима охлаждения иллюстрируются построением асимптотики решения задачи для однородного цилиндра с кусочно--постоянным коэффициентом теплообмена на боковой поверхности (рис б.)







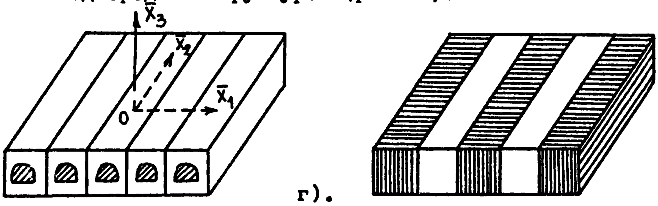
Структура температурных полей в цилиндрах с дисковыми ребрами оказывается более сложной (рис в.). Асимптотическая методика приводит в этом случае к разветвленному итерационному процессу, в ходе которого строится поле температур в цилиндре, ребре и переходной области. Резкий излом образующей рассматриваемых тел приводит к появлению в асимптотических разложенийях решений логарифмических членов вида $\varepsilon^{n}\ln^{m}\varepsilon$ (n,m - целые числа), а для погранслойных функций - к необходимости решения смешанных краевых задач в бесконечных (полубесконечных) областях, для чего проведено обобщение существующих приемов решения таких задач на сложные типы граничных условий.

Во второй части работы рассматриваются задачи теплопроводности для тонких анизотропных нелинейных пластин, температурное поле в которых описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left(\bar{\lambda}_{ij}(T)\,\frac{\partial T}{\partial \bar{x}_j}\right) = -\bar{Q} \qquad (3)$$

(суммирование ведется по повторяющимся индексам, а коэффициенты теплопроводности зависят от температуры, причем их тензор - симметричный, т.е. $\bar{\lambda}_{ij} = \bar{\lambda}_{ji}$).

Крупномасштабные разложения приводят при этом к более простым по сравнению с исходными уравнениям в частных производных (в частности, линейным), а оценка краевых эффектов вблизи границ тела, в областях смены тепловых режимов или в окрестности изменения толщины пластины сводится к разысканию гармонических функций в плоских областях, что позволяет использовать мощный аппарат теории функций комплексного переменного. Рассмотрены несколько конкретных задач теплопроводности для пластин с малыми включениями и пластин с периодически-неоднородной структурой (рис г.).



г).

В последней задаче, т.е. в случае быстро меняющихся в пространстве параметров, используется еще один вариант метода сингулярных возмущений, широко применяемый в задачах нелинейной механики, - метод двухмасштабных разложений [2] . При этом оказывается возможным из полного трехмерного уравнения теплопроводности получить двумерное и построить алгоритм, последовательно вычисляющий необходимые поправки к двумерному полю температур. На этом пути определяются, в частности, асимптотически точные эффективные коэффициенты теплопроводности $\lambda_{\parallel}$ и $\lambda_{\perp}$ без каких-либо произвольных гипотез о распределении температуры по толщине пластины или по сечению стержня [7] .

Для определения погрешности получаемых в процессе решения асимптотических разложений имеется возможность оценить остаточный член приближенного решения по соответствующей норме через невязки в уравнении и граничных условиях, поскольку эти невязки представляют собой произведения ограниченных функций на малые величины. Кроме того, для улучшения получаемых асимптотических рядов можно воспользоваться интенсивно разрабатываемыми в настоящее время методами [8].

Отметим также, что распространение методов сингулярных возмущений на задачи теории теплопроводности позволяет обеспечить подход к созданию единой теории тепловых напряжений в тонких телах, основанной на общих с асимптотической теорией упругости [9] предпосылках и методах расчета.

Литература

1. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.,"Мир", 1967.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.,"Мир", 1972.
3. Kruskal M.D. Asymptotology. Plasma physics. Vienna,1965,373-387.
4. Баранцев Р.Г. Об асимптотологии."Вестник ЛГУ", сер.мех.мат., №1, 1976, 69-77.
5. Лыков А.В. Теория тепло-проводности. М.,"Высшая школа", 1967.
6. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. "Успехи матем.наук", 1957, 12, №5(77), 3-122.
7. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Ленинград, ЛГУ, 1978.
8. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. Киев, "Наукова думка", 1980.
9. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.,"Наука", 1976.