Aleksei Georgievich Sveshnikov

Неполный метод Галеркина в задачах математической физики

In: Michal Greguš (ed.): Equadiff 5, Proceedings of the Fifth Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications held in Bratislava, August 24-28, 1981. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 47. pp. 314--317.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/702313

НЕПОЛНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. Г. Свешников

Москва, СССР

Доклад посвящен развитию метода сведения краевых и начально-краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных к задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод допускает рассмотрение несамосопряженных краевых задач и знакснеопределенных операторов. Рассматриваются также вопросы численной реализации метода.

I. Пусть L – линейный дифференциальный оператор второго порядка, заданный в области $D \subset R^n$ с границей $\partial D \in A^{(1,\lambda)}$ Введем в области D криволинейную систему координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ так, что любое сечение S_{x_n} области D гиперплоскостью $x_n = Const$, $0 \le x_n \le x_n^0$ представляет собой связную область. Разобьем границу $\partial D = \partial D' + \partial D''$ где $\partial D' = \partial S_{x_n} \times (0, x_n^0)$, $\partial D'' = S_0 + S_{x_n^0}$

Рассмотрим краевую задачу

$$L[u] + \hat{\alpha}(x) u(x) = -f(x), \quad x \in D \tag{I}$$

$$P_1[u] = 0, \quad x \in \partial D' \tag{2}$$

$$P_2[u] + \hat{\gamma}(x) u(x) = -\varphi(x) \tag{3}$$

где тензоры $\hat{\alpha}(x)$ и $\hat{\gamma}(x)$ имеют вид $\hat{\alpha}(x) = \hat{\alpha}^{(1)}(x) + \hat{\alpha}^{(2)}(x)$, $\hat{\gamma}(x) = \hat{\gamma}^{(1)}(x) + \hat{\gamma}^{(2)}(x)$ причем $\hat{\alpha}^{(1)}$ и $\hat{\gamma}^{(1)}$ – эрмитовы, а $\hat{\alpha}^{(2)}$ и $\hat{\gamma}^{(2)}$ – диагональные.

Пусть квадратичные формы $\mathrm{Im}(\hat{\alpha}^{(2)} u, u^*)$ и $\mathrm{Im}(\hat{\gamma}^{(2)} u, u^*)$ – знакоопределенные.

В общем случае задача (I)-(3) несамосопряженная, а оператор $L + \hat{\alpha}$ – знаконеопределенный.

Будем рассматривать случай, когда выполнены условия однозначной разрешимости [I] краевой задачи (I)-(3).

При дополнительном условии

$$\mathrm{Im}(\hat{\alpha}^{(2)} u, u^*) \cdot \mathrm{Im}(\hat{\gamma}^{(2)} u, u^*) < 0 \tag{4}$$

для классического решения задачи (I)-(3) с помощью энергетических соотношений можно получить априорные оценки [2]

$$\|u\|_{W_2^1(D)} \leq M_1, \quad \|u\|_{L_2(\partial D'')} \leq M_2 \tag{5}$$

2. Перейдем к построению приближенного решения задачи (I)-(3). Пусть в D определена система линейно-независимых вектор-функций $v_m(x)$ таких, что

$$P_1[v_m(x)] = 0, \quad x \in \partial D' \tag{6}$$

и пусть для любой вектор-функции $w(x)$, $x \in D$ удовлетворяющей (6) и обладающей той же гладкостью, что и классическое решение задачи (I)-(3) справедливо представление

$$w(x) = \sum_{m=1}^{N} c_m(x_n) v_m(x) + R_N(x), \tag{7}$$

причем для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ такое, что

$$\|R_N\|_{W_2^1(D)} < \varepsilon, \quad \|R_N\|_{L_2(\partial D'')} < \varepsilon \tag{8}$$

Приближенное решение $u_N(x)$ задачи (I)-(3) ищем в виде

$$u_N(x) = \sum_{m=1}^{N} a_m(x_n) v_m(x), \tag{9}$$

где коэффициенты $a_m(x_n)$ определяются как решение на отрезке $[0, x_n^0]$ краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся из проекционных соотношений специального вида [2].

Проекционные соотношения выбраны так, что приближенное решение (9) удовлетворяет тем же энергетическим соотношениям, что и точное решение исходной задачи (I)-(3). Это позволяет доказать следующие основные теоремы.

Теорема I. Если выполнено условие (4) и система функций $\{v_m(x)\}$ линейно независима и удовлетворяет условию (6), то решение краевой задачи для $a_m(x_n)$ при любом N существует и единственно, а для построенного по (9) семейства функций $\{u_N(x)\}$ справедливы равномерные по N оценки (5).

Теорема 2. Если помимо условий теоремы I система функций $\{v_m(x)\}$ удовлетворяет условиям (7),(8), то при $N \to \infty$

$$\|u - u_N\|_{W_2^1(D)} \to 0 \tag{10}$$

где $u(x)$ - классическое решение исходной задачи (I)-(3).

Эти теоремы и дают обоснование неполного метода Галеркина для рассматриваемого класса краевых задач.

3. Остановимся на некоторых вопросах численной реализации данного метода. Краевая задача для коэффициентов $a_m(x)$ является двух-

точечной краевой задачей вида

$$\dot{\vec{Y}}(t) = A(t)\vec{Y}(t) + \vec{F}(t), \qquad 0<t<t^{\circ} \tag{II}$$

$$B_{\circ}\vec{Y}(0) = \vec{b}_{\circ} \tag{I2}$$

$$B^{\circ}\vec{Y}(t^{\circ}) = \vec{b}^{\circ}, \tag{I3}$$

где $\vec{Y}(t)$ – N– мерный вектор, на левом конце интервала $[0,t^{\circ}]$ задано $N-r$, на правом $-r$ граничных условий. Как известно [4], [3], при выполнении условия $\exp(\mathrm{Re}\,\lambda_N \cdot t^{\circ}) \gg 1$, где λ_N – собственное значение матрицы $A(t)$ с наибольшей действительной частью, при решении задачи (II)-(I3) методом ортогональной прогонки может возникнуть численная неустойчивость. Предложена модификация метода ортогональной прогонки – метод направленной ортогонализации, для которой при определенных условиях удается доказать численную устойчивость [5] .

Решение задачи (II)-(I3) строится, как обычно, в виде

$$\vec{Y}(t) = \vec{Y}^{(0)}(t) + Y(t)\vec{C}(t), \tag{I4}$$

где $\vec{Y}^{(0)}(t)$ – частное решение (II), удовлетворяющее (I2), $Y(t) = (\vec{Y}^{(1)}(t), \ldots, \vec{Y}^{(r)}(t))$ – матрица, составленная из частных решений однородного уравнения (II), удовлетворяющих однородным условиям (I2), а вектор $\vec{C}(t)$ определяется из (I3) и условий непрерывности $\vec{Y}(t)$ в узлах ортогонализации t_m, где производится ортогонализация частных решений $Y(t_m+0) = Y(t_m-0)\,H_m$. Для построения матрицы ортогонализации H_m в узле t_m определяются все собственные вектора $\vec{\varepsilon}^{(n)}$ матрицы $A(t_m)$ и производится разложение $Y(t_m-0) = \varepsilon^+ B^+ + \varepsilon^- B^-$ где $\varepsilon^+ = (\vec{\varepsilon}^{(N-r+1)}, \ldots \vec{\varepsilon}^{(N)})$ – матрица, составленная из собственных векторов $\vec{\varepsilon}^{(n)}$, соответствующих r собственным значениям λ_n с наибольшими действительными частями. Если $H_m = (B^+)^{-1}$, то метод направленной ортогонализации оказывается численно устойчивым для достаточно широкого класса матриц $A(t)$.

4. Неполный метод Галеркина в сочетании с методом направленной ортогонализации эффективно применяется при решении широкого круга задач математической теории дифракции [6], [7].

Литература

I. А.В. Бицадзе, Некоторые классы уравнений в частных производных, М., "Наука", I98I.

2. А.Г. Свешников, ДАН СССР, т.236, №5, 1076, (1977).

3. M.R. Scott, H. A. Watts. Siam. J. Numerical Analysis, 14, N1, 40, (1975).

4. Н.С. Бахвалов, Численные методы, М., "Наука", 1975.

5. А.А. Быков, ДАН СССР, т.251, №5, 1039, (1980).

6. А.Г. Свешников, в сб. Проблемы математической физики и примыкающие к ним вопросы вычислительной математики и дифф.уравнений, "Наука", 1977.

7. А.Н. Тихонов, А.С. Ильинский, А.Г. Свешников, в Сб.Проблемы вычислительной математики, Изд. Моск.университета, 1980.