EQUADIFF 5

R. Gabasov; F. M. Kirillova

Конструктивная теория оптимизации дифференциальных систем

In: Michal Greguš (ed.): Equadiff 5, Proceedings of the Fifth Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications held in Bratislava, August 24-28, 1981. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 47. pp. 103--106.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/702269

Terms of use:

© BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1982

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Р.Габасов, Ф.М.Кириллова
Минск, СССР

I. Проблемы оптимального управления являются во многом и проблемами теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения разнообразных типов составляют неотъемлемую часть главных моделей теории оптимального управления. Специфические свойства решений дифференциальных уравнений лежат в основе фундаментального результата математической теории оптимальных процессов – принципа максимума Понтрягина. Общеизвестно и то, что новая сфера приложений дифференциальных уравнений, какой является теория оптимального управления, стала поставлять новые задачи для теории дифференциальных уравнений. Поэтому не удивительно, что проблемы оптимального управления постоянно обсуждаются на форумах специалистов по дифференциальным уравнениям.

Настоящий доклад посвящен конструктивной теории оптимального управления. Это сравнительно новое и пока мало разработанное направление оптимального управления постепенно выходит на передний край исследований в области экстремальных задач. Может показаться странным, что в такой прикладной науке, какой является теория оптимального управления, основные результаты носят качественный характер, а конструктивные аспекты теории, связанные с обоснованием эффективных алгоритмов, почти не изучены, представляют по существу лишь набор общих рекомендаций и схем, перенесенных из математического программирования. А дело обстоит именно так. Основной результат теории оптимального управления – принцип максимума Понтрягина – это не принцип построения оптимальных управлений, а "только" самое сильное необходимое условие оптимальности, которое в конструктивном отношении не эффективнее других необходимых условий оптимальности, известных из вариационного исчисления и математического программирования. Во всех результатах, подобных принципу максимума, дается качественная характеристика оптимальных экземпляров и исходная проблема поиска оптимума сводится к другой проблеме (к решению конечных, дифференциальных и др. уравнений). В этом суть классического пути исследования задач на экстремум, и принцип максимума полностью следует этому пути. Понятно, что указанный путь не оканчивается в сфере необходимых условий оптимальности, но принято считать, что дальнейшие его участки принадлежат уже другим разделам математики. Не умаляя значения обсуждаемого классического пути решения экстремальных задач, следует подчеркнуть, что это только один из возможных путей и возник он во времена, когда еще не знали о возможностях современных ЭВМ.

Впервые принципиальные трудности при численной реализации классического метода на ЭВМ обнаружились в линейном программировании, при решении задач с неклассическими ограничениями типа неравенств. Эти трудности были преодолены с созданием симплекс-метода, наметившим новые пути решения экстремальных задач. Можно считать, что симплекс-метод – первый конструктивный метод теории экстремальных задач, в котором проблема оптимизации решается полностью, т.е. исходная задача не сводится к другой, а предлагается конечная последовательность определенных операций, завершающихся построением оптимального плана. Под конструктивной теорией оптимального управления в докладе понимаются исследования по алгоритмам оптимального управления, обладающим основными достоинствами симплекс-метода.

Можно понять, почему в отличие от качественной теории исследования по алгоритмам оптимального управления начались не с тщательного изучения линейных задач, а с описания и реализации общих схем для нелинейных задач. В подобной ситуации раньше оказалось и математическое программирование. По мере развития конструктивной теории становится все более очевидным, что "обход" линейных задач, увлечение только нелинейными моделями, пренебрежение всесторонними испытаниями предлагаемых методов на линейных задачах затрудняет развитие и обедняет теорию.

В связи со сказанным представляется естественным, приступая к построению алгоритмов оптимального управления, начать работу с линейных задач. Не менее очевидно и то, что трудно предложить сколь-нибудь эффективный алгоритм в линейном управлении, не разобравшись в сущности, не проанализировав особенности симплекс-метода. Такая работа ведется авторами с 1970 г. Ее результаты изложены в нашей монографии "Методы линейного программирования", изданной в Минске тремя частями в 1977, 1978, 1980 гг. Основные конструкции доклада базируются на разработанном в этой монографии подходе и его дальнейшем развитии.

2. Простейшая (а в некотором смысле и основная) задача линейного оптимального управления имеет следующий вид

$$J(u) = c'x(t_1) \longrightarrow \max, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Gx(t_1) = g, \tag{1}$$
$$f_* \le u(t) \le f^*, \quad t \in T = [0, t_1],$$

где x - n - вектор состояния, u - управление, t - время, g - m -

вектор, символ $'$ (штрих) - операция транспонирования.

Нетривиальность задачи (I) определяется ограничением $Gx(t_1)=g$. В отличие от многих работ постоянное (в процессе решения) соблюдение этого ограничения далее считается главной характеристикой метода. Она свойственна симплекс-методу линейного программирования и важна для многих прикладных задач. Методы, в которых это ограничение выполняется асимптотически или через конечное (не известное заранее) число итераций, обладают принципиальными недостатками. Если отказаться от требования $Gx(t_1)=g$, то задача (I) становится тривиальной, и поэтому в ряде работ основной считается задача управления нелинейной системой:

$$(2)\ J(u)=c'x(t_1)\to max,\ \dot{x}=f(x,u),\ x(0)=x_0,\ f_*\le u(t)\le f^*,\ t\in T=[0,t_1].$$

С точки зрения алгоритмов решения общей задачи

$$(3)\ J(u)=\varphi_0(x(t_1))\to max,\ \dot{x}=f(x,u),\ x(0)=x_0,\ g(x(t_1))=0,\ u(t)\in U,\ t\in T,$$

задача (I) имеет более важное значение, чем задача (2), ибо в последней отсутствует один из принципиальных элементов задачи (3), в то время как задачи (I), (3) отличаются между собой только классом участвующих в их формулировках функций. Обобщение алгоритмов задачи (I) на задачу (3) представляет традиционный в математике способ, чего нельзя сказать о переходе от (2) к (3).

3. В некоторых приложениях управляющие сигналы $u(t), t\in T$, могут реализоваться только в определенных классах функций. Часто таким классом оказывается класс импульсных функций, представляющих кусочно-постоянные функции с заданными периодами квантования:

$$u(t)=u_k,\ t\in[kh,(k+1)h[,\quad k=\overline{0,N-1},\quad h=t_1/N.$$

В этих классах задача (I) становится задачей дискретного управления

$$(4)\ J(u)=c'x(N)\to max,\ x(k+1)=Cx(k)+du_k,\ x(0)=x_0,\ Gx(N)=g,\ f_*\le u_k\le f^*,\ k=\overline{0,N-1}.$$

Часто к (4) приходят от задачи (I) при использовании разностных методов. В этом суть метода математического программирования.

Задача (4) - специфическая задача линейного программирования, непосредственное применение симплекс-метода к которой неэффективно. Авторами совместно с О.И.Костюковой и В.С.Глушенковым разработаны конечные алгоритмы решения задачи (4), учитывающие ее особенности. Алгоритмы реализованы и экспериментально испытаны на ЭВМ В.С.Глушенковым.

4. Несмотря на свою распространенность, переход к (4) с помощью квантования управляющих сигналов задачи (I) имеет недостатки. В си-

туациях, когда решение задачи (I) ищется с высокой точностью, в рассмотренном методе могут встретиться затруднения из-за чрезмерно больших N . Поэтому возникает необходимость в алгоритмах оптимального управления, непосредственно опирающихся на непрерывную модель (I). Другими словами, требуется отделить процедуру оптимизации от процедуры вычисления необходимых величин. В докладе излагается алгоритм решения задачи (I), разработанный авторами совместно с С.В.Гневко.

5. Важным элементом многих актуальных в приложениях задач оптимального управления являются фазовые ограничения. Учет подобных ограничений в теории принципа максимума встретил в свое время серьезные трудности, но сейчас эта проблема считается решенной. Однако ее результаты почти не пригодны для построения эффективных алгоритмов. В докладе приводятся результаты, полученные авторами совместно с О.И.Костюковой для задачи:

$$J(u) = c'x(t_1) \to max, \ \dot{x} = Ax + bu, \ x(0) = 0, \ g'x(t) \le 1, \ |u(t)| \le 1, \ t \in T.$$

6. Идеи, положенные в основу алгоритма предыдущего пункта, можно развить для решения задач со смешанными ограничениями

$$J(u) = c'x(t_1) \to max, \ \dot{x} = Ax + bu, \ x(0) = 0, \ g'x(t) + u(t) \le d, \ |u(t)| \le 1, \ t \in T,$$

которые представляют линейную модель актуальных в приложениях задач и имеют самостоятельное значение в теории оптимального управления.

7. Изложенный выше вариант конструктивной теории оптимального управления разработан для ключевых линейных задач. Предложенные алгоритмы программируются и будут экспериментально испытаны на ЭВМ. Начата работа по развитию теории на нелинейные задачи. Здесь неожиданно обнаружилось, что для построения конечных алгоритмов нужно принципиально изменить известные схемы построения итераций для учета возможности появления особых управлений.