Jürgen Eichhorn

Yang-Mills-Theorie über offenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

In: Zdeněk Frolík and Vladimír Souček and Jiří Vinárek (eds.): Proceedings of the Winter School "Geometry and Physics". Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1985. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Supplemento No. 9. pp. [61]--72.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/701390

YANG-MILLS-THEORIE ÜBER OFFENEN RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

Jürgen Eichhorn

1. Einleitung

In den letzten 7 Jahren wurden in einer Fülle von Arbeiten differentialgeometrische Methoden und solche aus der algebraischen Geometrie auf die Theorie der Yang-Mills-Felder angewendet. Grundsätzliche Voraussetzung hierbei war, daß die unterliegende 4-dimensionale Mannigfaltigkeit kompakt oder der $\mathbb{R}^4$ war. Für offene $M^4 \neq \mathbb{R}^4$ fallen wesentliche Säulen des angewendeten Begriffsapparates weg. Eine Vielzahl von Schwierigkeiten tritt auf. Die vorliegende Arbeit ist die erste einer Serie von Arbeiten, die der Yang-Mills-Theorie auf offenen Mannigfaltigkeiten gewidmet sind. Sie hat zum großen Teil einführenden Charakter. Im §2 werden die bekannten Begriffe der Yang-Mills-Theorie zusammengestellt und Topologien eingeführt, die der Offenheit von M Rechnung tragen. Der §3 ist der 4-dimensionalen Theorie gewidmet. Als besonders interessantes Phänomen ergeben sich L_2-charakteristische Zahlen. Satz 3.6 schließlich ist ein sehr einfacher Satz über die Isolation flacher Yang-Mills-Felder, der unmittelbar aus Abschätzungen von Min-Oo und Dodziuk folgt.

2. Der Raum der Zusammenhänge über offenen Mannigfaltigkeiten

Seien G eine kompakte Liegruppe mit der Liealgebra $\mathfrak{g}$, $\varrho : G \longrightarrow O_N$ eine treue Darstellung, (M^n, g) eine glatte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $P = P(M, G)$ ein G-Hauptfaserbündel. Ein Bündelatlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$, $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times G$, $\varphi_\alpha(u) = (\pi(u), h_\alpha(u))$, definiert lokale Schnitte $s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$, $s_\alpha(x) = u \cdot h_\alpha(u)^{-1}$, $u \in \pi^{-1}(x)$, und Übergangsfunktionen $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ durch $\psi_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(u) h_\beta(u)^{-1}$, $u \in \pi^{-1}(x)$. Zu P sind vermöge $Ad : G \longrightarrow G$, $ad : G \longrightarrow \mathfrak{g}$, $\varrho : G \longrightarrow O_N \subseteq GL(E^N)$ die Bündel $G_P = P \times_G G$, $\mathfrak{g}_P = P \times_G \mathfrak{g}$, $F = P \times_G F^N$, $O_F = P \times_G O_N$, $\mathfrak{o}_E = P \times_G \mathfrak{o}_N$ assoziiert. Man hat Einbettungen $i_1 : G_P \longrightarrow O_F$, $i_2 : \mathfrak{g}_P \longrightarrow \mathfrak{o}_E$. Sei $G_E = \mathrm{im}\, i_1$, $\mathfrak{g}_E = \mathrm{im}\, i_2$.

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

Dann gilt natürlich $G_P \cong G_E$, $\mathfrak{g}_P \cong \mathfrak{g}_E$. Ein Bündelautomorphismus $f: P \longrightarrow P$ über id_M, $f(ua) = f(u)a$, $a \in G$, heißt Eichtransformation. Die Menge aller Eichtransformationen bildet eine Gruppe, die Eichgruppe $\mathcal{G} = \mathcal{G}_P$. $\mathcal{G}_P$ kann mit den Schnitten $C^\infty(G_P)$ identifiziert werden. Entsprechend wird definiert $\mathcal{G}_E = C^\infty(G_E) \cong \mathcal{G}_P$. $f \in \mathcal{G}_P$ definiert lokal Funktionen $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$ durch $f(\sigma_\alpha(x)) = \sigma_\alpha(x) \cdot f_\alpha(x)$.
Sei $x_0 \in M$ fixiert. $\mathcal{G}_P$ enthält die Gruppe $\mathcal{G}_{P,x_0} =$
$= \{ g \in \mathcal{G}_P \mid g(x_0) = id_{\pi^{-1}(x_0)} \}$ als Normalteiler, und es gilt $\mathcal{G}_P / \mathcal{G}_{P,x_0} \cong G$. Die reduzierte Eichgruppe $\overline{\mathcal{G}}_P$ wird definiert durch $\overline{\mathcal{G}}_P = \mathcal{G}_P / Z(\mathcal{G}_P)$, wobei $Z(\mathcal{G}_P)$ das Zentrum von $\mathcal{G}_P$ bezeichne. $\mathfrak{G}_P = C^\infty(\mathfrak{g}_P) \cong C^\infty(\mathfrak{g}_E) = \mathfrak{G}_E$ bildet eine Liealgebra.
$\mathfrak{G}_{P,x_0}$ wird definiert durch $\mathfrak{G}_{P,x_0} = \{ \xi \in \mathfrak{G}_P \mid \xi(x_0) = 0 \} \cong \mathfrak{G}_{E,x_0}$.
Die Faser von $\mathfrak{g}_E \cong \mathfrak{g}_P$ über x besteht aus schiefsymmetrischen Endomorphismen von E_x, und man hat ein kanonisches Skalarprodukt $(\ ,\ )$ vermöge $(A,B) = \frac{1}{2} tr(A^t \circ B)$. Dies erfüllt die Ungleichung $\|[A,B]\| = \sqrt{2}\, \|A\|\, \|B\|$. Wie üblich bezeichne für ein Vektorbündel F über M $\Omega^p(F)$ den Vektorraum der p-Formen auf M mit Werten in F. Insbesondere ist $\Omega^0(F) = C^\infty(F)$.

Ein Zusammenhang für P bzw. E ist gegeben durch jedes der nachfolgenden Objekte,

1. durch ein Feld horizontaler Teilräume $H_u \subset T_u P$, $H_{ua} = (R_a)_* H_u$,
2. durch eine Zusammenhangsform $\omega : TP \longrightarrow \mathfrak{g}$, $(R_a)^* \omega = ad(a^{-1})\omega$,
3. durch ein Feld horizontaler Teilräume in TE,
4. durch eine kovariante Ableitung $\nabla^\omega : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$.

$\mathcal{C}_P$ bzw. $\mathcal{C}_E$ bezeichne die Menge der Zusammenhänge auf P bzw. E.
Sei Θ die kanonische Form auf G. Lokal erhält man mit
$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega$, $\Theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^* \Theta$ durch Differentiation von
$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x)$

$$\omega_\beta = \sigma_\beta^* \omega = ad(\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1})\, \omega_\alpha + \Theta_{\alpha\beta} \tag{2.1}$$

und

$$\omega = ad(h_\alpha^{-1})\pi^* \omega_\alpha + h_\alpha^* \Theta . \tag{2.2}$$

$\mathcal{G}_P$ wirkt auf $\mathcal{C}_P$ vermöge $\omega \cdot g := g^* \omega$. g definiert lokal Abbildungen $g_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$ durch $g(\sigma_\alpha(x)) = \sigma_\alpha(x) \cdot g_\alpha(x)$. In lokalen Koordinaten gilt $\sigma_\alpha^*(\omega \cdot g) = \sigma_\alpha^*(g^* \omega) = (g\, \sigma_\alpha)^* \omega = (\sigma_\alpha g_\alpha)^* \omega =$
$= ad(g_\alpha^{-1})\omega_\alpha + g_\alpha \Theta$, also

$$(\omega \cdot g)_\alpha = ad(g_\alpha^{-1})\omega_\alpha + g_\alpha \Theta . \tag{2.3}$$

$\mathcal{G}_E$ wirkt auf $\mathcal{C}_E$ vermöge

$$\nabla^{(\omega \cdot g)} = g^{-1} \circ \nabla^\omega \circ g . \tag{2.4}$$

Jede kovariante Ableitung ∇^ω auf E induziert eine kovariante Ableitung ∇^ω auf $\mathfrak{g}_E$. Für $\varphi \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ wird definiert

$$\nabla^\omega \varphi = [\nabla^\omega , \varphi] ,$$

d.h. für $\varphi \in \Omega^0(E)$ $\quad (\nabla^\omega \varphi)(\sigma) = \nabla^\omega(\varphi(\sigma)) - \varphi(\nabla^\omega \sigma)$.

Wir bezeichnen i.f. wegen der eineindeutigen Beziehung die kovariante Ableitung ∇^{ω} auch als einen Zusammenhang. Sind ω, ω' Zusammenhänge auf $\mathfrak{g}_F$, so gilt

$$\nabla^{\omega} - \nabla^{\omega'} = [\omega - \omega', \cdot\,] . \tag{2.5}$$

Für ein Vektorbündel F induziert ein Zusammenhang $\nabla^{\omega}: \Omega^0(F) \longrightarrow \Omega^1(F)$ Differentiale $d^{\omega}: \Omega^p(F) \longrightarrow \Omega^{p+1}(F)$ vermöge

$$d^{\omega}(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^p \alpha \otimes \nabla^{\omega} s \tag{2.6}$$

und linearer Fortsetzung. Für p = 0 gilt $d^{\omega} = \nabla^{\omega}$. Die Krümmungs-2-Form $R^{\omega} = d^{\omega} d^{\omega} = d^{\omega} \circ \nabla^{\omega} \in \Omega^2(\mathrm{End}\, F)$ erfüllt die Gleichung $R^{\omega}_{X,Y}(s) = (d^{\omega} \nabla^{\omega} s)_{X,Y} = [\nabla^{\omega}_X, \nabla^{\omega}_Y] s - \nabla^{\omega}_{[X,Y]} s$, wobei $\nabla_X s = (\nabla s)(X)$ ist. ω ist flach, falls $R^{\omega} = 0$, d.h. $d^{\omega} d^{\omega} = 0$ ist.

Das nächste Ziel ist die Einführung geeigneter Topologien in $\mathcal{G}_P, \mathcal{G}_F, \mathfrak{g}_P, \mathfrak{g}_F, \mathcal{C}_P, \mathcal{C}_E$. Dazu betrachten wir die Liealgebra $M(N, \mathbb{R})$ aller N-reihigen quadratischen reellen Matrizen. Aus den Darstellungen $\rho: G \longrightarrow O_N$, $\rho_*: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{o}_N \subset M(N, \mathbb{R})$ erhält man G_E, $\mathfrak{g}_F \subseteq F_M = P \times_G M(N, \mathbb{R})$, $\mathcal{G}_F \subset C^{\infty}(F_M)$, $\mathfrak{g}_F \subset C^{\infty}(F_M)$. Eine Topologie auf $\mathcal{R} := C^{\infty}(F_M)$ induziert eine solche auf $\mathcal{G}_F$, $\mathfrak{g}_F$. Wir fixieren von nun ab eine lokal endliche Überdeckung $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ von M^n durch Bündelkarten und Karten $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}_\alpha$ für M^n. Ist $l = (l_1, \ldots, l_n)$ ein Multiindex, so sind die Ausdrücke $D^l(\varphi_\alpha(f-g)\chi_\alpha^{-1})$, $\int_{U_\alpha} \sum_{|l| \le k} |D^l(\varphi_\alpha(f-g)\chi_\alpha^{-1})|^2 d\mathrm{vol} = \|f-g\|^2_{\alpha,k}$ für $f, g \in \mathcal{R}$ wohldefiniert. Hierbei ist $|f-g|^2 = (f-g, f-g) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}((f-g)^t \cdot (f-g))$ und dvol die durch die Riemannsche Metrik definierte Volumenform. Wir setzen jetzt für $f \in \mathcal{R}$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$

$$U_{\varepsilon,k}(f) = \{g \in \mathcal{R} \mid (\sum_\alpha \|f-g\|^2_{\alpha,k})^{1/2} < \varepsilon\} . \tag{2.7}$$

Das System aller $U_{\varepsilon,k}(f)$, $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{R}$, definiert dann eine lokal metrisierbare Topologie auf $\mathcal{R}$. $\mathcal{G}_F, \mathfrak{g}_F$ werden für jedes $k \ge 0$ mit der Spurtopologie versehen, und wir erhalten Räume $\mathcal{G}_{E,k}$, $\mathfrak{g}_{F,k}$. Wegen der Isomorphie $\mathcal{G}_E \cong \mathcal{G}_P$, $\mathfrak{g}_F \cong \mathfrak{g}_P$ werden $\mathcal{G}_P$, $\mathfrak{g}_P$ entsprechend topologisiert. Die Räume $\mathcal{G}_{E,k}, \ldots$ sind nicht vollständig. Die Vervollständigungen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}^k_E$ usw.. $\mathcal{G}_{E,0}$ enthält als Untergruppe alle Eichtransformationen mit kompaktem Träger, wobei für $f \in \mathcal{G}_F$ der Träger definiert ist durch $\mathrm{supp}\, f = \mathrm{cl}\, \{x \in M \mid f|_{\pi^{-1}(x)} \ne \mathrm{id}_{\pi^{-1}(x)}\}$. Allerdings ist die Abschließung dieser Untergruppe nicht notwendig gleich $\mathcal{G}^0_F$. Hierfür konstruiert man sehr einfach geometrische Beispiele P(M,G), M offen.

$\Omega^p_0(F)$ seien die Formen mit kompaktem Träger. $\Omega^p_0(F)$ besitzt ein natürliches Skalarprodukt $\langle\, ,\, \rangle$,

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_M (\varphi, \psi)_x d\mathrm{vol}_x , \tag{2.8}$$

wobei $(\varphi,\psi)_x = \sum_{i_1<\dots<i_p} (\varphi_{e_{i_1},\dots,e_{i_p}}, \psi_{e_{i_1},\dots,e_{i_p}})$ und $e_1,\dots,e_n$ eine Orthonormalbasis in T_xM ist. Diese Definition stimmt für $\varphi = \alpha \otimes s$, $\psi = \beta \otimes s'$ mit

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M (s,s')\alpha \wedge *\beta \qquad (2.9)$$

überein. Man kann auch mit (2.9) starten und allgemein durch lineare Fortsetzung definieren. Für $F = \mathfrak{g}_E = \mathfrak{g}_P$ erhält man dann

$$\langle \alpha \otimes s, \beta \otimes s' \rangle = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(s^* \cdot s')\alpha \wedge *\beta \quad . \qquad (2.10)$$

Sei $\omega \mathrel{\hat{=}} \nabla^\omega$ ein Zusammenhang. Der zu $d^\omega : \Omega_0^p(\mathfrak{g}_F) \longrightarrow \Omega_0^{p+1}(\mathfrak{g}_F)$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ adjungierte Operator werde mit δ^ω bezeichnet, $\langle d^\omega \varphi , \psi \rangle = \langle \varphi , \delta^\omega \psi \rangle$, $\varphi \in \Omega_0^p(\mathfrak{g}_F)$, $\psi \in \Omega_0^{p+1}(\mathfrak{g}_E)$. $\Omega_0^p(\mathfrak{g}_F)$ wird vermöge (2.10) und linearer Fortsetzung Prähilbertraum mit $\|\varphi\|_0^2 = \|\varphi\|^2 = \langle \varphi , \varphi \rangle$. Die Vervollständigung werde mit $\Omega^{p,o}(\mathfrak{g}_E)$ bezeichnet. $\Omega^{p,o}(\mathfrak{g}_E)$ ist der Hilbertraum aller meßbaren quadratintegrierbaren p-Formen mit Werten in $\mathfrak{g}_E$. Versieht man $\Lambda^p T^*M \otimes \mathfrak{g}_F$ mit dem aus dem Levi-Civita-Zusammenhang und dem von ∇^ω herrührenden Produktzusammenhang, der wieder mit ∇^ω bezeichnet werde, so gilt

$$(d^\omega \varphi)_{X_0,\dots,X_p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (\nabla^\omega_{X_k} \varphi)_{X_0,\dots,\hat{X}_k,\dots,X_p},$$

$$(\delta^\omega \varphi)_{X_1,\dots,X_{p-1}} = -\sum_{j=1}^{n} (\nabla^\omega_{e_j}\varphi)_{e_j,X_1,\dots,X_{p-1}}.$$

Hierbei ist $e_1,\dots,e_n$ eine Orthonormalbasis in T_xM.
$\Delta^\omega = d^\omega \delta^\omega + \delta^\omega d^\omega : \Omega_0^p(\mathfrak{g}_E) \longrightarrow \Omega_0^p(\mathfrak{g}_E)$ heißt der zu ω gehörige Laplaceoperator. Sei S eine Menge von Polynomen in d^ω und δ^ω, z.B. $S = \{d^\omega\}$, $S = \{\delta^\omega\}$, $S = \{d^\omega\delta^\omega + \delta^\omega d^\omega\} = \{\Delta^\omega\}$ oder $S = \{(\Delta^\omega)^0, (\Delta^\omega)^1, \dots, (\Delta^\omega)^k\}$. Dann definieren wir

$$\Omega_S^p(\mathfrak{g}_F,\omega) = \{\varphi \in \Omega^{p,o}(\mathfrak{g}_F) \cap \Omega^p(\mathfrak{g}_E) \mid \|D\varphi\|_0^2 = \langle D\varphi, D\varphi\rangle < \infty \text{ für jedes } D \in S\},$$

$\Omega^{p,S}(\mathfrak{g}_F,\omega)$ = Abschließung von $\Omega_S^p(\mathfrak{g}_E,\omega)$ bezüglich der Norm

$$\|\varphi\|_S^2 = \|\varphi\|_0^2 + \sum_{D\in S} \|D\varphi\|_0^2,$$

$\mathring{\Omega}^{p,S}(\mathfrak{g}_E,\omega)$ = Abschließung von $\Omega_0^p(\mathfrak{g}_E)$ in $\Omega^{p,S}(\mathfrak{g}_E,\omega)$ bezüglich der Norm $\|\ \|_S$. Im Fall geschlossener Mannigfaltigkeiten gilt für ω,ω' $\Omega^{p,S}(\Omega_F,\omega) = \Omega^{p,S}(\mathfrak{g}_E,\omega')$. Für offene Mannigfaltigkeiten ist dies i.a. falsch.
Jetzt können wir $\mathcal{C}_P \cong \mathcal{C}_E$ mit einer geeigneten Topologie versehen. Seien $\omega \in \mathcal{C}_P$, $\varepsilon > 0$. Dann definieren wir

$$U_{\varepsilon,o}(\omega) = \{\omega' \in \mathcal{C}_P \mid \omega - \omega' \in \Omega^{1,o}(\mathfrak{g}_E), \|\omega - \omega'\|_o < \varepsilon\} .$$

Das System aller $U_{\varepsilon,o}(\omega)$, $\omega \in \mathcal{C}_P$, $\varepsilon > 0$, erzeugt eine wohlbestimmte lokal metrisierbare Topologie auf $\mathcal{C}_P$. Der entstehende Raum werde mit $\mathcal{C}_{P,o}$ bezeichnet. $\mathcal{C}_{P,o}$ ist nicht vollständig. $\mathcal{C}_P^o$ sei die Vervollständigung.

<u>Lemma 2.1.</u> Seien $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_P$, $\omega - \omega' \in \Omega^{1,0}(\mathfrak{g}_E) \cap \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$.
a. Es ist $\eta \in \Omega^1_{\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ genau dann, wenn $\eta \in \Omega^1_{\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega')$.
b. Es ist $\eta \in \Omega^1_{\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ genau dann, wenn $\eta \in \Omega^1_{\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega')$.
Beweis. a. Sei $\eta \in \Omega^1_{\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$. Dann gilt gemäß (2.5),(2.6) $\|d^{\omega'}\eta\| \le \|(d^{\omega'} - d^{\omega})\eta\| + \|d^{\omega}\eta\| = \|[\omega'-\omega, \eta]\| + \|d^{\omega}\eta\| = C\|\omega - \omega'\| \|\eta\| + \|d^{\omega}\eta\| < \infty$. Vertauschung von ω und ω' ergibt die andere Beweisrichtung. b. Aus $\eta \in \Omega^1_{\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ folgt $\|\delta^{\omega'}\eta\| \le \|(\delta^{\omega'} - \delta^{\omega})\eta\| + \|\delta^{\omega}\eta\| = \|*(d^{\omega'} - d^{\omega}) * \eta\| + \|\delta^{\omega}\eta\| = \|[\omega' - \omega, *\eta]\| + \|\delta^{\omega}\eta\| \le C'\|\omega' - \omega\| \|\eta\| + \|\delta^{\omega}\eta\| < \infty$. Die andere Beweisrichtungerhält man wieder durch Vertauschung von ω und ω'. □

<u>Folgerung 2.2.</u> Es gilt für $\omega - \omega' \in \Omega^{1,0}(\mathfrak{g}_E)$
$$\Omega^1_{\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) = \Omega^1_{\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega'),\quad \Omega^1_{\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) = \Omega^1_{\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega'),$$
$$\Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) = \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega'),\quad \Omega^{1,\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) = \Omega^{1,\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega').$$
Letzteres gilt im Sinne der Äquivalenz von Banachräumen. □

Definition. Ein topologischer Raum T heißt lokal affin, falls zu jedem $x \in T$ eine Umgebung $U(x)$ und ein Vektorraum V_x existieren, so daß $U(x)$ ein affiner Raum mit V_x als Vektorraum ist und alle V_x isomorph sind (nicht notwendig kanonisch).

Seien $\omega \in \mathcal{C}_P$, $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann wird definiert
$$U_{\varepsilon,\{d\}}(\omega) = \{\omega' \in \mathcal{C}_P \mid \omega - \omega' \in \Omega^1_{\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) \text{ und } \|\omega - \omega'\|_{\{d\}} < \varepsilon\},$$
$$U_{\varepsilon,\{\delta\}}(\omega) = \{\omega' \in \mathcal{C}_P \mid \omega - \omega' \in \Omega^1_{\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) \text{ und } \|\omega - \omega'\|_{\{\delta\}} < \varepsilon\},$$
allgemeiner
$$U_{\varepsilon,S}(\omega) = \{\omega' \in \mathcal{C}_P \mid \omega - \omega' \in \Omega^1_S(\mathfrak{g}_E, \omega) \text{ und } \|\omega - \omega'\|_S < \varepsilon\}.$$

<u>Satz 2.3.</u> Alle $U_{\varepsilon,S}(\omega)$, $\omega \in \mathcal{C}_P$, $\varepsilon > 0$, erzeugen auf $\mathcal{C}_P$ eine lokal metrisierbare Topologie. Sei $\mathcal{C}_P^S$ die Vervollständigung des entsprechenden Raumes $\mathcal{C}_{P,S}$. Dann sind $\mathcal{C}_P^{\{d\}}$ und $\mathcal{C}_P^{\{\delta\}}$ lokal affine Räume.
Beweis. Die erste Behauptung folgt aus 2.1. Zum Beweis der 2. Behauptung setzt man $U(\omega) = \omega + \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ bzw. $U(\omega) = \omega + \Omega^{1,\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$. Alle $\Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$, $\omega \in \mathcal{C}_P$, sind als separable unendlichdimensionale Hilberträume isomorph. Entsprechendes gilt für die $\Omega^{1,\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$, $\omega \in \mathcal{C}_P$. □

Damit ist eine erste Strukturaussage über den Raum der Zusammenhänge gewonnen. Für spätere Anwendungen sind die nachfolgenden einfachen Lemmata von großer Bedeutung.

Lemma 2.4. Seien (M^n,g) vollständig, $\omega \in \mathcal{C}_p$. Dann gilt für jedes $\varphi \in D_{\overline{d^\omega}} = \Omega^{p,\{d\}}(\mathfrak{g}_E,\omega)$, $\psi \in D_{\overline{\delta^\omega}} = \Omega^{p+1,\{\delta\}}(\mathfrak{g}_E,\omega)$

$$\langle \overline{d^\omega}\varphi,\psi\rangle = \langle \varphi, \overline{\delta^\omega}\psi\rangle . \qquad (2.11)$$

Beweis. Der Beweis verläuft wie für gewöhnliche Formen und sei der Vollständigkeit halber angegeben. Zu jedem $x_0 \in M$ existiert eine Familie $\{\lambda_R\}_R$ Lipschitz-stetiger Funktionen $\lambda_R : M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.

a. $\operatorname{supp} \lambda_R \subset B_{2R}(x_0)$,
b. $0 \le \lambda_R \le 1$,
c. $\lambda_R|B_R(x_0) = 1$,
d. $\lim\limits_{R\to\infty} \lambda_R = 1$,
e. $|d\lambda_R| < \frac{c}{R}$ fast überall, c unabhängig von R.

Sicher gilt für die Einschränkung d_0^ω bzw. δ_0^ω von d^ω bzw. δ^ω auf Formen mit kompaktem Träger

$$\langle \overline{d_0^\omega}\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \overline{\delta_0^\omega}\psi\rangle , \qquad (2.12)$$

denn aus $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$, $d_0^\omega\varphi_\nu \longrightarrow \overline{d_0}\varphi$, $\psi_\mu \longrightarrow \psi$, $\delta_0^\omega\psi_\mu \longrightarrow \overline{\delta_0^\omega}\psi$, $\langle d_0^\omega\varphi_\nu, \psi_\mu\rangle = \langle \varphi_\nu, \delta_0^\omega\psi_\mu\rangle$ und der Stetigkeit des Skalarproduktes folgt gerade (2.12). Man hat also nur $\overline{d_0^\omega} = \overline{d^\omega}$, $\overline{\delta_0^\omega} = \overline{\delta^\omega}$ zu zeigen. Klar ist $\overline{d_0^\omega} \subseteq \overline{d^\omega}$. Zu zeigen ist $\overline{d^\omega} \subseteq \overline{d_0^\omega}$. Sei $\varphi \in D_{\overline{d^\omega}}$, $\varphi = \lim\limits_\nu \varphi_\nu$. Es gilt auch $\varphi = \lim\limits_\nu \lambda_\nu\varphi_\nu$: $\|\varphi - \lambda_\nu\varphi_\nu\| \le \|\varphi - \lambda_\nu\varphi\| + \|\varphi - \varphi_\nu\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$. Ferner gilt $\|d^\omega\varphi_\nu - d^\omega(\lambda_\nu\varphi_\nu)\| = \|d^\omega\varphi_\nu - (d^\omega\lambda_\nu)\wedge\varphi_\nu - \lambda_\nu d^\omega\varphi_\nu\| \le |1-\lambda_\nu|\,\|d^\omega\varphi_\nu\| + \frac{c}{\nu}\|\varphi_\nu\| \longrightarrow 0$.
Mit der allgemeingültigen Tatsache $\overline{d_0^\omega} = \delta^*$, $\overline{d^\omega} = \delta_0^*$ und der eben bewiesenen Gleichung $\overline{d_0^\omega} = \overline{d^\omega}$ erhalten wir $\overline{d_0^\omega}^* = \delta^{**} = \overline{\delta^\omega}$, $\overline{d^\omega}^* = \delta_0^{\omega *} = \overline{\delta_0^\omega}$, $\overline{\delta_0^\omega} = \overline{\delta^\omega}$. □

Folgerung 2.5. Sind (M^n,g) vollständig, $\omega \in \mathcal{C}_p$, $\varphi, \psi \in D_{\overline{\Delta^\omega}}$, so gilt

$$\langle \overline{\Delta^\omega}\varphi, \psi\rangle = \langle \overline{d^\omega}\varphi, \overline{d^\omega}\psi\rangle + \langle \overline{\delta^\omega}\varphi, \overline{\delta^\omega}\psi\rangle . \qquad (2.13)$$

Lemma 2.6. Seien (M^n,g) vollständig, $\omega \in \mathcal{C}_p$. Dann ist Δ^ω auf $\Omega_0^p(\mathfrak{g}_E)$ wesentlich selbstadjungiert.

Beweis. Wir benutzen wie in [7] folgende Tatsache. Seien X ein Hilbertraum, $A: D_A \longrightarrow X$ abgeschlossen, $A \ge 0$, symmetrisch, $\overline{D_A} = X$. Dann ist $A = A^*$ genau dann, wenn in D_A keine Eigenvektoren zu einem negativen Eigenwert existieren. Dies wenden wir auf $\overline{\Delta^\omega}$ an und haben zu zeigen, daß aus $\overline{\Delta^\omega}\varphi = \mu\varphi$, $\mu < 0$, $\varphi \in \Omega^{p,0}(\mathfrak{g}_E)$ folgt $\varphi = 0$. Angenommen, es existiere ein $\mu < 0$, $\varphi \in \Omega^{p,0}(\mathfrak{g}_E)$ mit $\overline{\Delta^\omega}\varphi = \mu\varphi$. Dann gilt gemäß Folgerung 2.5 $\mu\langle\lambda_R^2\varphi, \varphi\rangle =$
$= \langle\lambda_R^2\varphi, \Delta^\omega\varphi\rangle = \langle d^\omega(\lambda_R^2\varphi), d^\omega\varphi\rangle + \langle\delta^\omega(\lambda_R^2\varphi), \delta^\omega\varphi\rangle =$
$= \lambda_R^2\langle d^\omega\varphi, d^\omega\varphi\rangle + \lambda_R^2\langle\delta^\omega\varphi, \delta^\omega\varphi\rangle + 2\langle\lambda_R d^\omega\lambda_R\wedge\varphi, d^\omega\varphi\rangle -$

$- 2\langle \varphi, \lambda_R d^\omega \lambda_R \wedge \delta^\omega \varphi\rangle$. Hieraus folgt $\|\lambda_R d^\omega \varphi\|^2 + \|\lambda_R \delta^\omega \varphi\|^2 \leq$
$\leq 2\, |\langle \lambda_R d^\omega \lambda_R \wedge \varphi, d^\omega \varphi\rangle + \langle \varphi, \lambda_R d^\omega \lambda_R \wedge \delta^\omega \varphi\rangle| \leq$
$\leq 2\, \frac{c}{R} \|\varphi\| \, (\|\lambda_R d^\omega \varphi\| + \|\lambda_R \delta^\omega \varphi\|).$ (2.14)
Die Ungleichung $a^2+b^2 \leq c(|a|+|b|)$ impliziert $|a|+|b| \leq 2c$.
Dies angewendet auf (2.14) ergibt

$$\|\lambda_R d^\omega \varphi\| + \|\lambda_R \delta^\omega \varphi\| \leq \frac{4c}{R} \|\varphi\| . \qquad (2.15)$$

Nimmt man auf beiden Seiten von (2.15) $\lim_{R \to \infty}$, so erhält man $d^\omega \varphi = 0 = \delta^\omega \varphi$, $\Delta^\omega \varphi = 0$, $\varphi = \mu^{-1} \Delta^\omega \varphi = 0$, also $\varphi = 0$, da φ eine C^∞-Form sein muß. □

Seien ω ein Zusammenhang auf P, $\nabla^\omega : \Omega^0(\mathfrak{g}_E) \longrightarrow \Omega^1(\mathfrak{g}_F)$ die zugehörige kovariante Ableitung und R^ω die Krümmungsform. Dann wird das Yang-Mills-Funktional $\mathcal{YM}(\ )$ definiert durch

$$\mathcal{YM}(\omega) := \frac{1}{2} \int_M |R^\omega|^2 \, dvol = \frac{1}{2} \int_M R^\omega \wedge * R^\omega . \qquad (2.16)$$

$\mathcal{YM}(\ )$ ist also nur für ω mit quadratintegrierbarer Krümmung definiert. Sei $\mathcal{C}^{\{d\}}_{P,f} \subset \mathcal{C}^{\{d\}}_P$ die Menge dieser Zusammenhänge.

<u>Lemma 2.7.</u> a. $\mathcal{G}^2_P$ läßt $\mathcal{YM}(\ )$ invariant, operiert also auf $\mathcal{C}^{\{d\}}_{P,f}$.
b. $\mathcal{C}^{\{d\}}_{P,f}$ ist ein offener lokal affiner Unterraum von $\mathcal{C}^{\{d\}}_P$ mit $\Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_F, \ )$ als Vektorraum.

Beweis. a. Für $g \in \mathcal{G}_P$ gilt $R^{(\omega \cdot g)} = g^{-1} \circ R^\omega \circ g$, also

$$\int_M |R^{(\omega \cdot g)}|^2 dvol = \int_M |R^\omega|^2 dvol. \qquad (2.17)$$

Ist $g \in \mathcal{G}^2_P$ und $(g_\nu)_\nu \longrightarrow g$ eine gegen g konvergente Folge aus $\mathcal{G}_{P,2}$, so ist gemäß (2.17) $\int_M |R^{(\omega \cdot g_\nu)}|^2 dvol = \text{const}$, also gleich $\int_M |R^\omega|^2 dvol$.

b. Seien $\omega \in \mathcal{C}^{\{d\}}_{P,f}$, $U(\omega) = \omega + \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$. Dann gilt für $\omega' \in U$, $\omega - \omega' = \eta$, $R^{\omega'} = R^\omega + d^\omega \eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta]$. Hieraus folgt $|R^{\omega'}|^2 = |R^\omega|^2 + |d^\omega \eta|^2 + \frac{1}{4} |[\eta, \eta]|^2 + 2\,(d^\omega \eta, R^\omega) +$
$+ (d^\omega \eta, [\eta, \eta]) + (R^\omega, [\eta, \eta]).$ (2.18)
Aus den Voraussetzungen $R^\omega, \eta, d^\omega \eta$ quadratintegrierbar folgt die Integrierbarkeit der rechten Seite von (2.18) und die Quadratintegrierbarkeit von $R^{\omega'}$. □

Definition. $\omega \in \mathcal{C}^{\{d\}}_{P,f}$ heißt Yang-Mills-Zusammenhang, falls ω ein kritischer Punkt von $\mathcal{YM}(\ )$ ist.

<u>Satz 2.8.</u> Seien (M^n, g) vollständig, $\omega \in \mathcal{C}^{\{d\}}_{P,f}$ und $R^\omega \in \Omega^{2,\{\delta\},\Delta\}}(\mathfrak{g}_F, \omega)$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig.
a. ω ist Yang-Mills-Zusammenhang.
b. $\delta^\omega R^\omega = 0$.
c. $\Delta^\omega R^\omega = 0$.

Beweis. Sei ω_t eine differenzierbare Kurve von Zusammenhängen in $\mathcal{C}_{P,f}$ mit $\omega_0 = \omega$ und $\eta_t = \omega_t - \omega$,

$\beta = \frac{d}{dt}\eta|_{t=0} \in \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_F,\omega)$. Dann gilt $R^{\omega_t} = R^{\omega} + d^{\omega}\eta_t + \frac{1}{2}[\eta_t,\eta_t]$, $\frac{d}{dt}\mathcal{YM}(\omega_t)|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_M \frac{d}{dt}|R^{\omega_t}|^2|_{t=0}\,dvol = \int_M (\frac{d}{dt}R^{\omega_t}, R^{\omega_t})|_{t=0}\,dvol = \int_M (d^{\omega}\beta, R^{\omega})dvol = \langle d^{\omega}\beta, R^{\omega}\rangle = \langle\beta, \delta^{\omega}R^{\omega}\rangle$. Hieraus folgt die Gleichwertigkeit von a. und b.. In der letzten Gleichung wurde Lemma 2.4 wesentlich benutzt. Wegen der Bianchiidentität $d^{\omega}R^{\omega} = 0$ sind andererseits die Bedingungen $\delta^{\omega}R^{\omega} = 0$ und $\Delta^{\omega}R^{\omega} = 0$ gleichwertig. □

Folgerung 2.9. Seien $\omega \in \mathcal{C}^{\{d\}}_{P,f}$, Δ^{ω} der Laplaceoperator auf den 2-Formen, $\mathfrak{s}(\Delta^{\omega})$ das Spektrum und $\inf \mathfrak{s}(\Delta^{\omega}) > 0$. Dann ist ω kein Yang-Mills-Zusammenhang. □

3. Die 4-dimensionale Theorie

Auf 4-dimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten definiert die orthogonale Involution $*: \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ eine Zerlegung in die (± 1)-Eigenräume, $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, $\Lambda^2_+ \perp \Lambda^2_-$. Der Riemannsche Krümmungstensor R ist als Bündelmorphismus $\Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ aufzufassen. W sei der Weylsche konforme Krümmungstensor. Die Zerlegung $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ induziert eine Zerlegung $W = W_+ + W_-$. τ bezeichne die skalare Krümmung und B den spurfreien Riccitensor.

Satz 3.1. $R: \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_- \longrightarrow \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ ist ein selbstadjungierter Endomorphismus und besitzt eine Zerlegung ([4])

$$R = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix} + \frac{\tau}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

(M^4,g) heißt selbstdual bzw. antiselbstdual, falls $W_- = 0$ bzw. $W_+ = 0$ ist. $M^4 = S^2(\lambda) \times H^2(-\lambda)$ ist ein Beispiel einer selbstdualen offenen vollständigen Mannigfaltigkeit.

Eine entsprechende Zerlegung wird von $*$ auch auf $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}_F$ und somit auf $\Omega^2(\mathfrak{g}_F)$ erzeugt, $\Omega^2(\mathfrak{g}_F) = \Omega^2_+(\mathfrak{g}_F) \oplus \Omega^2_-(\mathfrak{g}_F)$. Insbesondere wird für einen Zusammenhang ω der Krümmungstensor R^{ω} in einen selbstdualen Anteil R^{ω}_+ und einen antiselbstdualen Anteil R^{ω}_- zerlegt, $R^{\omega} = R^{\omega}_+ + R^{\omega}_-$. Der Zusammenhang ω heißt selbstdual bzw. antiselbstdual, falls $R^{\omega}_- = 0$ bzw. $R^{\omega}_+ = 0$ ist. Aus der Orthogonalität der Zerlegung folgt $|R^{\omega}|^2 dvol = R^{\omega} \wedge * R^{\omega} = (|R^{\omega}_+|^2 + |R^{\omega}_-|^2)dvol$.

Satz 3.2. Ist $\omega \in \mathcal{C}^{\{d\}}_{P,f}$ selbstdual oder antiselbstdual, so ist ω ein Yang-Mills-Zusammenhang.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus $R^{\omega} = R^{\omega}_{\pm}$, $*R^{\omega}_{\pm} = \pm R^{\omega}$, Satz 2.8 und der Bianchiidentität. □

Sei $\omega \in \mathcal{C}_{P,f} \subset \mathcal{C}_P$. Dann definiert gemäß der Chern-Weil-Konstruktion $R^\omega \wedge R^\omega$ die 1. Pontrjaginklasse von $\mathfrak{g}_F$. Die Klasse von $R^\omega \wedge R^\omega$ ist also unabhängig von ω, sondern durch $\mathfrak{g}_F$, d.h. durch P allein bestimmt. Wegen $R^\omega \wedge R^\omega = (|R_+^\omega|^2 - |R_-^\omega|^2)dvol$ und $\int_M (|R_+^\omega|^2 + |R_-^\omega|^2)dvol < \infty$ existiert $\int_M R^\omega \wedge R^\omega$. Ist M^4 kompakt, so ist $p_1(\mathfrak{g}_F) = \frac{1}{4\pi^2}\int_M R^\omega \wedge R^\omega$ gerade die 1. Pontrjaginzahl von $\mathfrak{g}_E$ und somit von ω unabhängig. Im Falle einer offenen vollständigen M^4 ist diese Frage, d.h. die Unabhängigkeit von $p_1(\mathfrak{g}_F,\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\int_M R^\omega \wedge R^\omega$ von ω, noch offen. Wir geben eine partielle Antwort. Seien dazu ${}_1\Omega^p = {}_1\Omega^p(M) = \{\varphi \in \Omega^p \mid \int_M |\varphi| dvol < \infty, \int_M |d\varphi|\, dvol < \infty\}$ und ${}^1\Omega^p$ die Vervollständigung bezüglich der Norm ${}_1\|\varphi\| = \int_M |\varphi| dvol + \int_M |d\varphi|\, dvol$. Die Kohomologie des Komplexes

$$0 \to {}^1\Omega^0 \xrightarrow{d} {}^1\Omega^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} {}^1\Omega^p \xrightarrow{d} {}^1\Omega^{p+1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} {}^1\Omega^n \xrightarrow{d} 0$$

heißt L_1-Kohomologie $H_1^*(M)$ von M^n, $H_1^p(M) := \ker(d: {}^1\Omega^p \longrightarrow {}^1\Omega^{p+1}) / \mathrm{im}(d: {}^1\Omega^{p-1} \longrightarrow {}^1\Omega^p)$. Entsprechend definiert man die reduzierte L_1-Kohomologie $\bar{H}_1^p(M)$ von M^n, indem man die Quotientenbildung nach $\overline{\mathrm{im}(d: {}^1\Omega^{p-1} \longrightarrow {}^1\Omega^p)}$ vornimmt. $H_1^*(M)$ und $\bar{H}_1^*(M)$ sind Invarianten von (M^n, g).

Satz 3.4. Seien (M^4, g) vollständig, $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_{P,f}^{\{d\}}$ und $R^{\omega'} \wedge R^{\omega'}$, $R^\omega \wedge R^\omega$ Elemente ein und derselben Kohomologieklasse in $H_1^4(M^4)$. Dann gilt $p_1(\mathfrak{g}_E, \omega) = p_1(\mathfrak{g}_E, \omega')$, d.h. $p_1(\mathfrak{g}_F, \omega)$ ist eine Invariante der Kohomologieklasse von $R^\omega \wedge R^\omega$ in $H_1^4(M)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $R^{\omega'} \wedge R^{\omega'} - R^\omega \wedge R^\omega = d\varphi$, $\varphi \in {}^1\Omega^3$. Entsprechend einem fundamentalen Resultat von Gaffney ([5])gilt für $\varphi \in {}^1\Omega^{n-1}$, (M^n, g) vollständig, $\int_M d\varphi = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Korollar 3.5. Sei (M^4, g) vollständig. Dann gilt für jeden Zusammenhang $\omega \in \mathcal{C}_{P,f}^{\{d\}}$ $\quad 4\pi^2 |p_1(\mathfrak{g}_E, \omega)| \le \mathcal{YM}(\omega)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn ω selbstdual ist. Insbesondere ist

$$\inf_{\omega \in \mathcal{C}_{P,f}^{\{d\}}} |p_1(\mathfrak{g}_F, \omega)|$$

eine untere Schranke für das Yang-Mills-Funktional. □

Bemerkung. Es wäre wünschenswert, $R^{\omega'} \wedge R^{\omega'} \sim R^\omega \wedge R^\omega$ in H_1^4 durch Bedingungen an ω, ω' zu charakterisieren. Dies ist gegenwärtig nur zur Hälfte gelungen. Sei $\omega' \in U(\omega) = \omega + \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$. Dann gilt

$$d\varphi = R^{\omega'} \wedge R^{\omega'} - R^\omega \wedge R^\omega = d^\omega\eta \wedge d^\omega\eta + \frac{1}{4}[\eta,\eta] \wedge [\eta,\eta] + 2R^\omega \wedge d^\omega\eta + R^\omega \wedge [\eta,\eta] + d^\omega\eta \wedge [\eta,\eta]. \qquad (3.2)$$

Jeder Summand der rechten Seite von (3.2) ist aber absolut integrierbar, denn für $\psi_1, \psi_2 \in \Omega^{2,0}(\mathfrak{g}_F)$ gilt $\int |\psi_1 \wedge \psi_2|\, dvol = \int |\psi_1 \wedge **\psi_2| dvol = \int |(\psi_1, *\psi_2)| dvol \le \|\psi_1\|\, \|*\psi_2\| =$

$= \|\psi_1\| \, \|\psi_2\|$. Damit ist $d\varphi$ absolut integrierbar. Es ist aber nicht klar, daß ein absolut integrierbares φ' existiert mit $d\varphi = d\varphi'$. Ein solches φ' wäre dann $\in {}^1\Omega^3$.
L_2-charakteristische Klassen und Zahlen werden ausführlich in einer späteren Arbeit studiert.
Als interessante Frage stellt sich die Frage nach der Existenz bzw. Nichtexistenz von Yang-Mills-Zusammenhängen. Hierfür werde abschließend ein Spezialfall studiert.
Seien U Definitionsbereich einer Bündelkarte, s_i lokale Schnitte, $\alpha \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$. Die Weitzenboeckformel ([1] , Seite 354)

$$\Delta^\omega \alpha = -(\nabla^\omega)^* \nabla^\omega \alpha + \frac{1}{3}\tau \cdot \alpha - W(\alpha) - [R^\omega, \alpha]$$

wird in einer Karte mit $R^\omega(s_i) = \sum_j R^\omega_{ij} \otimes s_j$ wie folgt geschrieben

$$(\Delta^\omega \alpha)_{i_1 i_2} = -((\nabla^\omega)^* \nabla^\omega \alpha)_{i_1 i_2} + \frac{1}{3}\tau\, \alpha_{i_1 i_2} - W(\alpha)_{i_1 i_2} - R^\omega_{i_1 i}\, \alpha^i{}_{i_2} - R^\omega_{i_2 i}\, \alpha^i{}_{i_1}. \qquad (3.3)$$

Die Indexsenkung $\sigma(4) \longrightarrow \Lambda^2$, $\beta^i{}_j \longrightarrow \beta_{ij}$, ist eine Äquivalenz der adjungierten Darstellung $SO(4) \longrightarrow GL(\sigma(4))$ und der Tensordarstellung $SO(4) \longrightarrow GL(\Lambda^2)$, d.h. man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & GL(\Lambda^2) \arrow[d, shift left] \\ SO(4) \arrow[ur] \arrow[r] & GL(\sigma(4)) \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

und eine Isomorphie $\Lambda^2 \longrightarrow \sigma(4)$, $(u \wedge v)(w) = (u,w)v - (v,w)u$.
Der Zerlegung $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ in invariante Teilräume entspricht eine Zerlegung $\sigma(4) = \sigma_+ \oplus \sigma_-$, die invariant unter der adjungierten Darstellung ist. Auf der Ebene der Lieschen Algebren bedeutet dies $[\sigma(4), \sigma_\pm] \subset \sigma_\pm$, $[\sigma_+, \sigma_-] = 0$, $[\sigma_\pm, \sigma_\pm] \subset \sigma_\pm$.
Insbesondere erhalten wir

$$[R^\omega_\pm, \alpha_\mp] = 0. \qquad (3.4)$$

Die orthogonale Zerlegung $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ induziert eine Zerlegung $\Delta^\omega = \Delta^\omega_+ + \Delta^\omega_-$, $\Delta^\omega_\pm : \Omega^{2,\{\Delta\}}_\pm(\mathfrak{g}_E, \omega) \longrightarrow \Omega^{2,0}_\pm(\mathfrak{g}_E)$. $\alpha = \alpha_+ + \alpha_- \in \Omega^{2,\{\Delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ ist harmonisch genau dann, wenn α_+ und α_- harmonisch sind (im L_2-Sinn).
Eine geringfügige Variation der Abschätzungen in [2] , [6] ergibt folgenden

<u>Satz 3.6.</u> Seien $\omega \in \mathcal{C}_{P,f}$, (M^4,g) offen, vollständig und lokal konform eben. Gilt $\frac{\tau}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}|R^\omega_+| \geq 0$, $\frac{\tau}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}|R_-| \geq 0$ und das Ungleichheitszeichen in einem Punkt, so ist ω entweder ein flacher

oder kein Yang-Mills-Zusammenhang.
Beweis. Aus (M^4,g) lokal konform eben folgt $W = 0$. Sei $\alpha \in \Omega^{2,\{\Delta\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$, $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$, $\lambda = \lambda_R$ wie in §2. $b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1 \leq \frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3)^2$, $|[X,Y]| \leq \sqrt{2}\,|X|\cdot|Y|$ für $X,Y \in \mathfrak{g}$ ergeben für die punktweise Norm

$$|[\alpha_\pm, \lambda^2\alpha_\pm]| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|\lambda\alpha_\pm|^2 \tag{3.5}$$

und gemäß (3.4)

$$|([R_\pm^\omega, \alpha_\pm], \lambda^2\alpha_\pm)| = |(R_\pm^\omega, [\alpha_\pm, \lambda^2\alpha_\pm])| \leq$$
$$\leq \frac{2}{\sqrt{3}}|R_\pm^\omega|\,|\lambda\alpha_\pm|^2. \tag{3.6}$$

Mit $\int_M \Delta^\omega|\lambda^2\alpha_\pm|^2 dvol = 0$ und

$$\int_M (\nabla^\omega\alpha_\pm, \nabla^\omega\lambda^2\alpha_\pm)dvol = \|\nabla^\omega(\lambda\alpha_\pm)\|^2 - \|d\lambda\otimes\alpha_\pm\|^2 \geq$$
$$\geq \|\nabla^\omega(\lambda\alpha_\pm)\|^2 - \frac{c^2}{R^2}\int_{B_{2R}\setminus B_R}|\alpha_\pm|^2 dvol$$

erhalten wir schließlich

$$\langle\Delta_\pm^\omega\alpha_\pm, \lambda^2\alpha_\pm\rangle = \|\nabla^\omega(\lambda\alpha_\pm)\|^2 - \frac{c^2}{R^2}\int_{B_{2R}\setminus B_R}|\alpha_\pm|^2 dvol +$$
$$+ \int_M \left(\frac{\tau}{6} - \frac{2}{3}|R_\pm^\omega|\right)|\lambda\alpha_\pm|^2 dvol. \tag{3.7}$$

Die Anwendung von $\lim_{R\to\infty}$ in (3.7) und die Voraussetzungen ergeben entweder $\Delta_+^\omega\alpha_+ \neq 0$ und $\Delta_-^\omega\alpha_- \neq 0$ oder $\alpha = 0$, woraus für $\alpha = R^\omega$ die Behauptung folgt. □

Weiteren Existenzkriterien, L_2-charakteristischen Zahlen und der Klassifikation von Yang-Mills-Feldern, die außerhalb eines Kompaktums eben sind, ist die Arbeit [3] gewidmet.

LITERATUR

[1] BLEEKER D.D., BOOS B. "Topology and Analysis", Universitext, New York 1985.

[2] DODZIUK J., MIN-OO "An L_2-isolation theorem for Yang-Mills fields over complete manifolds", Compositio Mathematica, 47 /1982/, 165-169.

[3] EICHHORN J. "Gauge theory over open manifolds", ersch. in Lecture notes in mathematics, Proc. Conf. Diff. Geom. Penisco-

la 1985.

[4]FRIFDRICH T. " Self duality of Riemannian manifolds and connections", Teubner-Texte zur Mathematik 34/1981/, 56-104.

[5]GAFFNFY M. "A special Stokes' theorem for complete Riemannian manifolds", Ann. of Math., /60/1954/,140-145.

[6]MIN -OO "An L_2-isolation theorem for Yang-Mills fields", Compositio Mathematica, /47/1982/,153-163.

[7]STRICHARTZ R.S. "Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold", J. of Funct. Analysis,/52/1983/,48-79.

JÜRGEN FICHHORN
DDR-2200 GRFIFSWALD
SEKTION MATHEMATIK
JAHNSTRAßE 15a