FOURTH WINTER SCHOOL (1976)

MESURES VECTORIELLES, MESURES CYLINDRIQUES ET PROPRIÉTÉ DE RADON-NIKODYM

A. GOLDMAN

Notation: $\vec{m} : \Sigma \longrightarrow E$ ( ) est une mesure vectorielle à valeur dans un espace localement convexe séparé

p - est une probabilité sur (T, Σ), $p(T) = 1$

On suppose $\vec{m} << p$ $(p(A) = 0 \Longrightarrow \vec{m}(A) = \vec{0})$.

On note $\forall A \in \Sigma$ par

$$S_A = \left\{ \frac{\vec{m}(B)}{p(B)} \; ; \; B \subset A ; B \in \Sigma, \; p(B) \neq 0 \right\}.$$

On suppose que S_T est borné dans E.

Pour toute partie $N = \{x'_1, \dots, x'_n\} \subset E'$ on note

$$\begin{array}{ccc} E \longrightarrow \mathbb{R}^n & & T \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \Pi_N : x \longrightarrow (x'_i(x)) & \text{et} & f_N : t \longrightarrow (f_{x'_i}(t)) \end{array}$$

(avec $x'_i \circ \vec{m} = f_{x'_i} \cdot p$).

La mesure cylindrique λ associée à $(\vec{m}, p)$ est définie par $\lambda(\Pi_N^{-1}(B)) = p(f_N^{-1}(B))$ $\forall B$ borelien de $\mathbb{R}^n$.

Proposition: Soit $(\vec{m}, p)$ comme ci dessus, il existe toujours une densité scalairement mesurable $\vec{f} : T \longrightarrow (E'', \sigma(E'', E'))$

Corollaire (Metivier). Si $\forall \; \varepsilon > 0$ il existe D_ε disque faiblement compact dans E et $A \subset T$ tels que: $p(T - A) \leq \varepsilon$

et $S_A \subset D_\varepsilon$ alors il existe $\vec{f} : T \longrightarrow E$.

Théorème: I) Soit $\varepsilon > 0$, $A \in \Sigma$, $B \subset E$ tels que $\mu(T - A) \leq \varepsilon$ et $S_A \subset B$. Alors $\lambda(\Pi_N^{-1}(\overline{\Pi_N(B)})) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall N$.

II) Inversement soit B un disque de E tel que $\lambda(\Pi_N^{-1}(\overline{\Pi_N(B)})) \geq 1 - \varepsilon$, alors il existe $A \in \Sigma$ tel que $\mu(T - A) \leq \varepsilon$ et $S_A \subset \overline{B}$.

$\Downarrow$

Théorème (Kupka - Pelloumail). Si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $A \subset T$ et K-compact faible de E tels que $\mu(T - A) \leq \varepsilon$ et $S_A \subset K$ alors il existe une densité faible

$\Downarrow$

Théorème (Hebert). Si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $A \subset T$ et K -compact faible métrisable tel que $\mu(T - A) \leq \varepsilon$ et $S_A \subset K$ alors il existe $\vec{f} : T \longrightarrow E$ totalement mesurable

σ- dentabilité

Def.: Soit $D \subset E$ on note par $\sigma D = \{ \sum \lambda_m x_m ;$ $\sum \lambda_m = 1, \ \lambda_m > 1, \ (x_m) \subset D$ et la somme existe $\}$

Def.: Soit $D \subset E$ on dira que D est K-σ-*dentable* si pour tout $V(0)$ dans E il existe $x \in D$ et K -compact de E tels que $x \notin \sigma(D \setminus (K + V(0)))$.

Théorème: Les conditions suivantes sont équivalentes

a) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall V(0)$ il existe K_ε^V -compact tel que $\lambda^*(K_\varepsilon^V + V) \geq 1 - \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall V(0)$ - " - G_ε^V sous-espace vectoriel de dimension finie tel que $\lambda^*(G_\varepsilon^V + V) \geq 1 - \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall V(0)$ il existe $A \in \Sigma$, tel que $\mu(T - A) \leq \varepsilon$ et $S_A \subset K + V$ (K-compact)

d) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall V(0)$ il existe $A \in \Sigma$, - " - $\mu(T - A) \leq \varepsilon$ et $S_A \subset G + V$ avec G sous-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème: Soit $(\vec{m}, \mu)$ tel que $\forall A \in \Sigma$ il existe $B \subset A$ $B \in \Sigma$ $p(B) \neq 0$ vérifiant: S_B est $K - \sigma$-*dentable*. Alors les conditions du théorème précedent sont réalisées.

$\Downarrow$

Théorème: Si E est un Banach et si $\forall A \in \Sigma$ $\exists B \subset A$ tel que S_B soit K-σ-*dentable* alors il existe $\vec{f}: T \longrightarrow E$ totalement mesurable.

Théorème: Soit E quasi-compact. On a les équivalences.

a) Tout borné B *de* E *est* K-σ-*dentable* .

b) Tout λ provenant d'un couple $(\vec{m}, \mu)$ vérifie la condition de Prokhorov affaiblie

$$(\forall \varepsilon, \forall V, \exists K_\varepsilon^V : \lambda^*(K_\varepsilon^V + V) \geq 1 - \varepsilon).$$

Problèmes

Problème 1. Supposons qu'il existe $\vec{f}: T \longrightarrow E$, λ vérifie-t-elle la condition de Prokhorov affaiblie .

Réponse non. Exemple (E. Thomas) $[0,1] \longrightarrow L^\infty$

$$\vec{f}: t \longrightarrow 1_{[t,1]}$$

Soit $\vec{m}(A) = \int_A \vec{f}\, dp$. Alors on a:

α) $\vec{m}$ est une mesure à valeur dans $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

β) $\vec{f}$ est une densité faible.

γ) $\lambda \neq$ de Radon

Problème 2. Soit E complet tel que tout borné est σ-dentable existe-t-il une densité faible

La réponse est non!

Exemple. Soit $\Omega \subset [0,1]$ $\mu_*(\Omega) = 0$, $\mu^*(\Omega) = 1$. On considère la mesure vectorielle

$$\vec{m} : B([0,1]) \longrightarrow M^\infty(\Omega)$$
$$A \longrightarrow \vec{m}(A)$$

$$(\vec{m}(A))(B) = \mu^*(A \cap B)$$

(avec $\mu \equiv$ mesure de Lebesgue). $M^\infty(\Omega)$ est l'espace de Rome. Alors on a:

α) $\vec{m} << \mu$

β) $M^\infty(\Omega)$ est complet et tout borné B de E est σ-dentable

γ) Il n'existe pas de densité faible.