G. Helmberg
Topologische Untergruppenraüme

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. 196--198.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700990

TOPOLOGISCHE UNTERGRUPPENRÄUME

G. HELMBERG

Innsbruck

Es sei X eine kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe und $\mathfrak{X} = \{X_\varrho : \varrho \in R\}$ die Menge der abgeschlossenen Untergruppen von X. Ist μ'_ϱ das normierte Haarsche Maß auf X_ϱ und ordnet man jeder Untergruppe $X_\varrho \in \mathfrak{X}$ das durch $\mu_\varrho(E) = \mu'_\varrho(E \cap X_\varrho)$ definierte Borel-Maß auf X zu, dann wird dadurch die Menge $\mathfrak{X}$ eineindeutig auf eine schwach abgeschlossene Untermenge $\mathfrak{X}^*$ der Einheitskugel in dem zum Banachraum $\mathfrak{C}$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X konjugierten Raum $\mathfrak{C}^*$ abgebildet (siehe [2]). Überträgt man die auf $\mathfrak{X}^*$ relativierte schwache Topologie in $\mathfrak{C}^*$ auf $\mathfrak{X}$, dann wird $\mathfrak{X}$ zu einem kompakten Hausdorffschen Raum, in dem für beliebige Netze (Moore-Smith-Folgen) $\mathfrak{N} = \{X_\sigma : \sigma \in S\}$ von Untergruppen die Beziehung $\lim_{\sigma \in S} X_\sigma = X_0$ gleichbedeutend ist mit

$$\lim_{\sigma \in S} \int f \, \mathrm{d}\mu_\sigma = \int f \, \mathrm{d}\mu_0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{C} \, .$$

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Charakterisierung dieser Topologie $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{X}$ ohne Rückgriff auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$, sowie eine Übertragung dieser Überlegungen auf abstrakte (nicht topologische) Gruppen.

Für ein Netz $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{X}$ seien die unteren und oberen abgeschlossenen Limites $\underline{\mathrm{Fl}}\, X_\sigma$ und $\overline{\mathrm{Fl}}\, X_\sigma$ erklärt wie bei F. HAUSDORFF. Mit Hilfe von Netzen läßt sich $\mathfrak{T}$ folgendermaßen charakterisieren: Ein Netz $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{X}$ konvergiert dann und nur dann in der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn $\underline{\mathrm{Fl}} X_\sigma = \overline{\mathrm{Fl}}\, X_\sigma$. Falls $\mathfrak{N}$ konvergiert, gilt weiter

$$\underline{\mathrm{Fl}}\, X_\sigma = \overline{\mathrm{Fl}}\, X_\sigma = \lim_{\sigma \in S} X_\sigma \in \mathfrak{X} \, .$$

Ist $\mathfrak{G}$ die Menge aller Untergruppen aus $\mathfrak{X}$, die Häufungspunkte des Netzes $\mathfrak{N}$ sind, dann gilt $\underline{\mathrm{Fl}}\, X_\sigma = \cap\, \mathfrak{G}$ und $\overline{\mathrm{Fl}}\, X_\sigma = \cup\, \mathfrak{G}$. Diese Aussagen bleiben richtig, wenn an Stelle von $\mathfrak{X}$ die Menge $\mathfrak{Y}$ aller abgeschlossenen Normalteiler von X in der auf $\mathfrak{Y}$ relativierten Topologie $\mathfrak{T}$ tritt. Der Unterraum $\mathfrak{Y}$ fällt für eine abelsche Gruppe X mit dem Raum $\mathfrak{X}$ zusammen und wird bei Einführung der Komplexmultiplikation in X als Verknüpfung zu einer kompakten Halbgruppe.

Für eine beliebig gegebene Untergruppe $X_0 \in \mathfrak{X}$, eine beliebige offene Umgebung V der Einheit in X und eine endliche Menge von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in X_0$ sei die Untermenge $\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ von $\mathfrak{X}$ definiert durch

$$\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; V) = \{X_\varrho \in \mathfrak{X} : X_\varrho \cap V x_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \, X_\varrho \subset V X_0\} \, .$$

Dann ist die Familie aller Untermengen $\mathfrak{U}(X_\varrho; X_{\varrho 1}, \ldots, X_{\varrho n}; V)$ von $\mathfrak{X}$ $(X_\varrho \in \mathfrak{X}$, $x_{\varrho i} \in X_\varrho$ für $i = 1, \ldots, n$, V eine offene Umgebung der Einheit in $X)$ ein vollständiges Umgebungssystem für die Topologie $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{X}$. Mit Rücksicht auf die Definition von $\mathfrak{T}$ kann dieser Satz auch folgendermaßen formuliert werden: Es seien $X_0 \in \mathfrak{X}$, $f_i \in \mathfrak{C}$ $(i = 1, \ldots, m)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es eine endliche Menge von Elementen $x_j \in X_0$ $(j = 1, \ldots, n)$ und eine offene Umgebung V der Einheit in X derart, daß aus $X_\varrho \in \mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ die Ungleichungen $\left|\int f_i \, d\mu_\varrho - \int f_i \, d\mu_0\right| < \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, m$ folgen. Umgekehrt existiert zu jeder Untermenge $\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ von $\mathfrak{X}$ eine endliche Anzahl von Funktionen $f_i \in \mathfrak{C}$ $(i = 1, \ldots, m)$ und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß aus

$$\left|\int f_i \, d\mu_\varrho - \int f_i \, d\mu_0\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

die Beziehung $X_\varrho \in \mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ folgt.

Dieser Satz kann verwendet werden, um für eine konkrete Gruppe X den Untergruppenraum $\mathfrak{X}$ zu identifizieren. Beispielsweise ist der Untergruppenraum der eindimensionalen Torusgruppe homöomorph zu einer konvergenten Punktfolge (der die Folge der Untergruppen endlicher Ordnung entspricht) zusammen mit ihrem Grenzpunkt (dem die ganze Gruppe X entspricht). In der zweidimensionalen Torusgruppe bilden die abgeschlossenen nicht diskreten Untergruppen eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{X}$, die mit der ersten Ableitung von $\mathfrak{X}$ zusammenfällt. In der relativierten Topologie ist dieser Unterraum von $\mathfrak{X}$ homöomorph mit der Einpukt-Kompaktifizierung der Menge aller Gitterpunkte einer Halbene, wobei dem Punkt im Unendlichen wieder die Gruppe X entspricht. Der Untergruppenraum der Diedergruppe der eindimensionalen Torusgruppe ist homöomorph mit einer gegen den gemeinsamen Mittelpunkt konvergierenden Folge konzentrischer Kreise, zusammen mit einer getrennt davon liegenden konvergenten Punktfolge samt Grenzpunkt (die dem Untergruppenraum des eindimensionalen Torus entspricht). Den Punkten eines Kreises entsprechen die Dieder-Untergruppen einer bestimmten, endlichen Ordnung von X, dem gemeinsamen Mittelpunkt wieder die ganze Gruppe X.

Unter Heranziehung fastperiodischer Kompaktifizierungen einer abstrakten Gruppe X können diese Resultate auf nicht topologische Gruppen folgendermaßen übertragen werden: Es sei $\mathfrak{A}$ ein voller Modul fastperiodischer Funktionen auf X und (X', φ) eine $\mathfrak{A}$-Kompaktifizierung von X, d. h. eine kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe X' zusammen mit einem Homomorphismus φ von X auf eine dichte Untergruppe von X' derart, daß $\mathfrak{A} = \{g \circ \varphi : g \in \mathfrak{C}'\}$ (siehe [1]). Ferner sei $\mathfrak{X} = \{X_\varrho : \varrho \in R\}$ die Menge aller Untergruppen von X und $\mathfrak{X}'$ der Untergruppenraum von X'. Für $f \in \mathfrak{A}$ sei $M_\varrho(f)$ der über X_ϱ erstreckte Mittelwert der auf X_ϱ beschränkten (und daher auf X_ϱ fastperiodischen) Funktion f. Schreibt man $X_\varrho \equiv X_\sigma$ für: $M_\varrho(f) = M_\sigma(f)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$, dann ist dadurch in der Menge $\mathfrak{X}$ eine Äquivalenzrelation definiert. Die X_ϱ enthaltende Äquivalenzklasse sei mit X''_ϱ bezeichnet und die Menge aller Äquivalenzklassen mit $\mathfrak{X}''$.

Eine nicht negative reellwertige Funktion aus $\mathfrak{A}$, die in der Einheit von X einen positiven Wert annimt, soll Umgebungsfunktion heißen. Es seien $X_0 \in \mathfrak{X}$, sowie $x_i \in X_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und eine Umgebungsfunktion $f \in \mathfrak{A}$ beliebig gegeben. Die Untermenge $\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ von $\mathfrak{X}$ sei definiert durch

$$\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f) = \{X_\varrho \in \mathfrak{X} : \sup_{x_\rho \in X_\rho} f(x_\varrho x_i^{-1}) > 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \\ \inf_{x_\rho \in X_\rho} [\sup_{x_0 \in X_0} f(x_\varrho x_0)] > 0\} .$$

Da die Menge $\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ mit jeder Untergruppe X_ϱ auch alle Untergruppen der Äquivalenzklasse X_ϱ'' enthält, kann sie auch als Untermenge von $\mathfrak{X}''$ aufgefaßt werden. Dies sei durch die Schreibweise $\mathfrak{U}(X_0''; x_1, \ldots, x_n; f)$ hervorgehoben.

Die Familie aller Untermengen $\mathfrak{U}(X_\varrho''; x_{\varrho 1}, \ldots, x_{\varrho n}; f)$ von $\mathfrak{X}''$ $(X_\varrho \in \mathfrak{X}$, $x_{\varrho i} \in X_\varrho$ für $i = 1, \ldots, n, f$ eine Umgebungsfunktion in $\mathfrak{A})$ ist ein vollständiges Umgebungssystem für eine Hausdorffsche Topologie in $\mathfrak{X}''$. Ist $\mathfrak{N} = \{X_\varrho'' : \sigma \in S\}$ ein in dieser Topologie konvergentes Netz in $\mathfrak{X}''$, dann ist $\lim_{\sigma \in S} X_\sigma'' = X_0''$ gleichbedeutend mit

$$\lim_{\sigma \in S} M_\sigma(f) = M_0(f) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{A} .$$

In dieser Topologie ist $\mathfrak{X}''$ homöomorph zu einem Unterraum des topologischen Untergruppenraumes $\mathfrak{X}'$ der $\mathfrak{A}$-Kompaktifizierungsgruppe X' von X. Dieser Unterraum braucht jedoch, wie Beispiele zeigen, weder kompakt noch dicht in $\mathfrak{X}'$ zu sein.

Eine Arbeit über topologische Untergruppenräume, die auch die Beweise der angeführten Resultate enthält, erscheint demnächst im Journal für reine und angewandte Mathematik (siehe [3]).

Literatur

[1] *Nöbeling G.* und *Bauer H.*: Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen. Jahresber. Dtsch. Math. Ver. *58* (1956), 54–72.

[2] *Wendel J. G.*: Haar measure and the semigroup of measures on a compact group. Proc. Amer. Math. Soc. *5* (1954), 923–929.

[3] *Helmberg G.*: Topologische Untergruppenräume. Journal f. d. reine u. angew. Math. *208* (1961), 164–180.