M. Antonovskij

Метрические пространства над полуполями

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [64]--68.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700971

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА НАД ПОЛУПОЛЯМИ

М. АНТОНОВСКИЙ,

Ташкент

В работе [1] нами были введены понятие топологического полуполя и понятие метрического пространства над полуполем. Я не привожу определений этих понятий, так как они сформулированы в статье В. Г. Болтянского „Топологические полуполя и их применения" (см. настоящий сборник, стр. 106). Здесь будет рассматриваться сходимость, полнота, компактность и др. вопросы. Использование метрики над произвольными полуполями позволило доказать обобщения таких теорем, как теорема Хаусдорфа (необходимое и достаточное условие компактности), теорема Кантора (необходимое и достаточное условие полноты) и др. Автору кажется особенно привлекательным, что, несмотря на весьма общий характер доказываемых теорем (их естественной областью применения являются вполне регулярные топологические пространства), формулировки этих теорем ничем не отличаются от классических. В конце доклада вводится понятие усиленной полноты, связанное с недавними работами Вл. Птака и И. Л. Келли [2], [3]. Это понятие позволяет перенести теорему Банаха об открытых отображениях на случай нормированных (и даже метрических) пространств над полуполями. Излагаемые здесь результаты были получены совместно В. Г. Болтянским, Т. А. Сарымсаковым и автором доклада.

Прежде всего мы дадим другое, эквивалентное определение естественной топологии метрического пространства над полуполем, основывающееся на понятии сходящейся последовательности. Пусть X — метрическое пространство над полуполем E и Ξ — некоторое направленное множество. Всякое отображение $x : \Xi \to X$ мы будем называть *последовательностью* типа Ξ в пространстве X. Образ $x(\xi)$ элемента $\xi \in \Xi$ при отображении $x : \Xi \to X$ мы будем также обозначать через x_ξ, что позволит нам записывать последовательность в привычном виде $x = \{x_\xi\}$, $\xi \in \Xi$. Пусть Ξ и H — два направленных множества. Отображение $\varphi : H \to \Xi$ будем называть *конфинальным*, если для любого элемента $\xi_0 \in \Xi$ найдется такой элемент $\eta_0 \in H$, что $\varphi(\eta) > \xi_0$ при $\eta > \eta_0$. Пусть теперь $x = \{x_\xi\}$ — произвольная последовательность типа Ξ в X и $\varphi : H \to \Xi$ — конфинальное отображение. Определим последовательность x^φ типа H в X, положив для любого элемента $\eta \in H$:

$$(x^\varphi)_\eta = x_{\varphi(\eta)}\,.$$

Последовательность x^φ мы будем называть *подпоследовательностью* последовательности x (соответствующей конфинальному отображению $\varphi : H \to \to \Xi$).

Последовательность x типа Ξ в X будем называть *сходящейся* к точке $a \in X$, если выполнено следующее условие: для любой окрестности нуля U в метризующем полуполе E существует такой элемент $\xi_U \in \Xi$, что $\varrho(x_\xi, a) \in U$ при $\xi > \xi_U$. Сходимость мы будем обозначать записью $\lim\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi = a$, или $x \to a$. Иначе говоря, если $\lim\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi = a$ в X, то $\lim\limits_{\xi \in \Xi} \varrho(x_\xi, a) = 0$ (в E) и обратно.

Пусть $x = \{x_\xi\}$ — некоторая последовательность типа Ξ в метрическом пространстве X над полуполем E. Точку $a \in X$ мы будем называть *предельной* для последовательности x, если, каковы бы ни были окрестность нуля U в полуполе E и индекс $\xi \in \Xi$, существует такой индекс $\xi' > \xi$, что $\varrho(a, x_{\xi'}) \in U$.

Пусть X — метрическое пространство над полуполем E. Последовательность $\{x_\xi\}$ типа Ξ в пространстве мы будем называть *фундаментальной*, если для любой окрестности нуля U в полуполе E существует такой элемент $\xi_U \in \Xi$, что $\varrho(x_{\xi'}, x_{\xi''}) \in U$ при $\xi', \xi'' > \xi_U$. Метрическое пространство X будем называть *полным*, если любая его фундаментальная последовательность является сходящейся. Пусть Ξ — произвольное направленное множество и для каждого $\xi \in \Xi$ выбрано некоторое подмножество M_ξ метрического пространства X. Если при $\xi' > \xi''$ выполнено включение $M_{\xi'} \subset M_{\xi''}$, то систему множеств $\{M_\xi\}$ мы будем называть *Ξ-системой множеств* в X. Далее, Ξ-систему множеств $\{M_\xi\}$ в X будем называть *стягивающейся*, если для любой окрестности нуля U в полуполе E существует такой элемент $\xi_U \in E$, что $\varrho(x, y) \in U$ для любых двух точек $x, y \in M_{\xi_U}$.

При таком выборе определений сохраняются классические взаимоотношения между указанными понятиями. Так, например, справедливы следующие утверждения. Никакая последовательность не может сходиться одновременно к двум различным точкам. Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к той же самой точке. Точка a тогда и только тогда принадлежит замыканию множества $A \subset X$ (в естественной топологии метрического пространства X над полуполем E), когда существует сходящаяся к точке a последовательность, составленная из точек множества A. Пусть X и Y — метрические пространства над полуполем E и $f : X \to Y$ — произвольное отображение; отображение f непрерывно тогда и только тогда (относительно естественной топологии пространств X и Y), когда для любой сходящейся последовательности $\{x_\xi\}$ в X последовательность $\{f(x_\xi)\}$ сходится в Y и $\lim\limits_{\xi \in \Xi} f(x_\xi) = f(\lim\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi)$.

Далее, всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то и сама последовательность сходится к той же точке. Если X — полное метрическое пространство над полуполем E, то всякое замкнутое подмножество пространства X (рассматриваемое как метрическое пространство над E) полно. Для любой стягивающейся Ξ-системы множеств $\{M_\xi\}$ пересечение $\bigcap_\xi M_\xi$ состоит не более чем из одной точки. Метрическое пространство X над полуполем E тогда и только тогда полно, когда всякая стягивающая Ξ-система непустых замкнутых в X множеств имеет непустое пересечение (теорема Кантора). Полуполе E, рассматриваемое как метрическое пространство над E, тогда и только тогда полно, когда оно изоморфно некоторому полуполю R_Δ. Всякое метрическое пространство X над полуполем R_Δ изометрично вкладывается в некоторое полное метрическое пространство X^* над R_Δ; при этом X всюду плотно в X^* и пространство X^* этими условиями определяется однозначно, с точностью до изометрии (теорема Хаусдорфа). Более полно, пусть $\varphi : X \to X_1^*$ и $\psi : X \to X_2^*$ — такие изометричные вложения пространства X в полные пространства X_1^* и X_2^* соответственно, что $\overline{\varphi(X)} = X_1^*$, $\overline{\psi(X)} = X_2^*$. Тогда существует (и притом только одно) такое изометрическое отображение $g : X_1^* \to X_2^*$ пространства X_1^* на пространство X_2^*, что $g \circ \varphi = \psi$. Пусть X — метрическое пространство над произвольным полуполем E. Тогда E изоморфно вкладывается в полуполе R_Δ (см. [1], 10.2), благодаря чему X может рассматриваться и как метрическое пространство над полным полуполем R_Δ, после чего оно может быть изометрично вложено в полное метрическое пространство X^* над R_Δ. Таким образом, в случае метрического пространства над неполным полуполем E изометричное вложение в полное пространство происходит при помощи двух процессов: пополнения метризующего полуполя E и последующего пополнения пространства X над пополненным полуполем.

Наконец, отметим еще обобщение теоремы Хаусдорфа о компактных метрических пространствах. Пусть X — метрическое пространство над полуполем E. Пусть, далее M и S — произвольные подмножества пространства X и U — некоторая окрестность нуля в полуполе E. Множество S мы будем называть U-сетью в множестве M, если для любой точки $x \in M$ можно найти такую точку $s \in S$, что $\varrho(x, s) \in U$. Будем, далее, называть пространство X *вполне ограниченным*, если для любой окрестности нуля U в метризующем полуполе E существует в X конечная U-сеть. Оказывается, что метрическое пространство X над полуполем E тогда и только тогда компактно (в естественной топологии), когда оно вполне ограниченно и полно. (Отметим, во избежание недоразумений, что топологическое пространство мы называем компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.) Доказательство сформулированной теоремы непросто; оно существенно опирается на теорию абстрактных спектров, развитую П. С. Александровым. Отметим также, что метрическое пространство X над полуполем E тогда и только тогда компактно (в естественной топологии), когда любая последовательность в X имеет по крайней мере одну предельную точку. Точно так же, метрическое пространство X над полуполем E компактно тогда и только тогда, когда из всякой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

В заключение изложим понятие усиленной полноты и сформулируем теорему Банаха об открытых отображениях. Пусть X — метрическое пространство над полуполем E, множество Δ неразложимых корней которого бесконечно. Последовательность $\{x_\xi\}$ типа Ξ в X назовем *слабо фундаментальной*, если для любой окрестности нуля U в полуполе E существует такой элемент $\xi_U \in \Xi$, что для любых элементов $\xi_1, \xi_2 > \xi_U$ найдется элемент $\xi_2' > \xi_2$, удовлетворяющий условию

$$\varrho(x_{\xi_1}, x_{\xi_2'}) \in U .$$

Ясно, что всякая фундаментальная последовательность является также слабо фундаментальной.

Важную роль в дальнейшем будет играть некоторое направленное множество Ω, связанное с метризующим полуполем. Именно, элементами множества Ω являются всевозможные конечные подмножества множества Δ, где Δ — совокупность всех неразложимых корней метризующего полуполя E. Направленность в множестве Ω определяется по включению, т. е. $\mu_1 < \mu_2$ (где $\mu_1, \mu_2 \in \Omega$), если $\mu_1 \subset \mu_2$.

Метрическое пространство X над полуполем E будем называть *усиленно полным*, если всякая его слабо фундаментальная последовательность типа Ω имеет сходящуюся подпоследовательность. Очевидно, что всякое усиленно полное пространство полно.

Теорема (обобщение теоремы Банаха об открытых отображениях). *Пусть X и Y — метрические пространства над полуполем R_Δ, причем пространство X усиленно полно. Пусть, далее, $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, обладающее следующим свойством: для произвольной заполненной*[1]) *окрестности нуля U в полуполе R_Δ существует такая окрестность нуля U^f в полуполе R_Δ, что*

$$\overline{f(\Omega(x, U))} \supset \Omega(f(x), U^f)$$

для любой точки $x \in X$. Тогда для любой окрестности нуля V в полуполе E имеет место соотношение

$$f(\Omega(x, U + V)) \supset \Omega(f(x), U^f) .$$

Из этого, в частности, вытекает, что отображение f открыто.

[1]) См. [1], стр. 30.

Литература

[1] *М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков:* Топологические полуполя. Ташкент, 1960 г.

[2] *V. Pták*: Completeness and the open mapping theorem. Bull. Soc. math. France, *86* (1958), 41–74.

[3] *J. L. Kelley*: Hypercomplete linear topological spaces. The Michigan Math. J., *5* (1958), 235–246.