Toposym 1

M. Fréchet

L'espace des courbes n'est qu'un semi-espace de Banach

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [155]--156.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700968

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

L'ESPACE DES COURBES N'EST QU'UN SEMI-ESPACE DE BANACH

M. FRÉCHET

Paris

1. Pour essayer de faire d'un espace dont chaque élément est une courbe, un espace de Banach, il est naturel de généraliser les définitions relatives à l'espace euclidien de la manière suivante.

On prendra:

pour l'élément neutre, Θ, une courbe réduite à un point fixe;

pour la norme $\|\xi\|$ d'une courbe ξ, le maximum de la distance de Θ aux points de ξ;

pour le produit par scalaire, $a\,.\,\xi$, l'homothétique de ξ, dans le rapport a, avec Θ pour centre d'homothétie.

Théorème 1. *Il n'existe aucune définition de la somme qui, combinée avec les trois definitions précédentes, fasse d'un espace de courbes, un espace de Banach.*

2. Il est naturel de généraliser la définition de la somme de deux vecteurs de la façon suivante.

Soient deux paramètres *intrinsèques*, t, t' (variant de 0 à 1) définissant les positions de deux points M, M' des courbes ξ, η.[1])

Soit $\overline{ON}$, la somme géometrique des vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{OM'}$. *La somme* $\xi + \eta$ des courbes ξ, η, sera, par définition, la courbe décrite par le point N, quand t croît et que *t' reste égal à t.*

Nous prendrons pour espace des courbes, soit l'ensemble $\mathfrak{C}$ des arcs de courbes continues orientées, soit une famille $\mathfrak{F}$ de courbes continues orientées. Nous supposerons que la famille $\mathfrak{F}$ et la paramètrisation intrinsèque, p, choisie satisfont aux quatre conditions suivantes:

A. La famille $\mathfrak{F}$ contient au moins une courbe réduite à un point.

B. Si ξ appartient à $\mathfrak{F}$, il en est de même du produit par scalaire $a\,.\,\xi$.

C. Si ξ, η appartiennent à $\mathfrak{F}$, il en est de même de leur somme $\xi + \eta$.

D. Soient N un point de $a\,.\,\xi$ et M un point de ξ. Si M, N se correspondent dans l'homothétie de ξ à $a\,.\,\xi$, N correspond à la même valeur du paramètre intrinsèque que M.

---

[1]) Quand il s'agit de l'espace R, des courbes *rectifiables*, le choix d'un paramètre intrinsèque parait s'imposer: on prendra $t = \beta/L$, β étant l'abscisse curviligne $\overset{\frown}{AM}$ du point M et L la longueur de ξ.

(Les conditions A, B, C, D sont vérifiées par les exemples simples, connus, d'espaces de courbes.)

Théorème 2. *Quand les conditions* A, B, C, D *sont vérifiées par un espace de courbes, les définitions précédentes de l'élément neutre, de la norme, du produit par scalaire et de la somme, vérifient les axiomes de Banach, sauf, peut-être, les axiomes*

3° $(\xi + \eta) + \zeta = \xi + (\eta + \zeta)$.

4° *Si* $\xi + \eta = \xi + \zeta$, *on a* $\eta = \zeta$.

Et, d'après le Théorème 1, *l'un au moins de ces axiomes n'est pas vérifié: Par contre, sont vérifiées deux conséquences plus faibles de ces deux axiomes, à savoir*

16° bis $\|\xi - \eta\| \leqq \|\xi - \zeta\| + \|\zeta - \eta\|$;

4° bis $\xi - \eta = \Theta$ *a pour conséquence* $\xi = \eta$.

Définition. Nous appellerons *semiespace de Banach*, tout espace où les axiomes 16° bis et 4° bis sont vérifiés ainsi que les axiomes de Banach, sauf peut-être 3°, 4°.

Application. Nous avons défini en 1925 la différentielle de $Y = F(X)$ quand X et Y appartiennent à deux espaces de Banach (distincts ou non).

Théorème 3. 1° *On peut étendre cette définition au cas où X et Y appartiennent à deux* semi-*espaces de Banach distincts ou non.*

2° *Dans ce cas plus général, plusieurs propriétés importantes de la différentielle classique sont conservées.*

Exemples d'espaces de courbes. 1° L'exemple le plus simple est l'espace des courbes rectifiables. Pour cet espace, on voit immédiatement que les conditions A, B, D, sont vérifiées et on démontre facilement qu'il en est de même de la condition C.

2° Quand on prend pour famille $\mathfrak{F}$ l'ensemble $\mathfrak{C}$ de toutes les courbes continues orientées, le choix d'un paramètre intrinséque ne parait plus s'imposer. Nous en avons proposé un exemple, pour lequel, on voit immédiatement que les conditions A, B, C, D sont vérifiées.

Pour ces deux espaces de courbes, la somme de deux lignes polygonales est aussi une ligne polygonale. Ce résultat facilite le choix de deux contre-exemples simples, montrant que *pour ces deux espaces, ni* 3°, *ni* 4° *ne sont vérifiées.*

Remarque. Il existe une autre paramétrisation intrinséque des courbes continues orientées, définie postérieurement par Marston Morse et qui lui atendu service en Calcul des Variations. Dès lors, il en existe une infinité d'autres.

On trouvera plus de détails sur les mêmes sujets, dans nos 5 Notes aux *Comptes-Rendus*, présentées à l'Académie des Sciences:

11 Janvier 1960: L'espace des courbes est-il un espace de Banach, 248—249.

20 Avril 1960: L'espace des courbes n'est pas un espace de Banach, 2787—2790.

26 Septembre 1960: L'espace dont chaque élément est une courbe n'est qu'un semi-espace de Banach, 1258—1260.

24 Octobre 1960: Exemples de semi-espaces de Banach, 1702—1703.

23 Janvier 1961: La différentielle sur deux semi-espaces de Banach, 481—482.