V. Boltjanski

Топологические полуполя и их применения

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [106]--111.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700958

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОЛУПОЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В. БОЛТЯНСКИЙ

Москва

В работе [1] нами было введено понятие топологического полуполя. В докладе приводится определение топологического полуполя, теорема классификации для полуполей и некоторые применения к вполне регулярным топологическим пространствам, пространствам близости и равномерным структурам. Излагаемые здесь результаты были получены совместно М. Я. Антоновским, Т. А. Сарымсаковым и автором доклада.

Коммутативное ассоциативное топологическое кольцо E называется топологическим полуполем, если в E выделено некоторое множество K, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $K + \bar{K} \subset K, \quad K \,.\, K \subset K$;
2. $K - K = E$;
3. Если $M \subset \bar{K}$ — такое множество, что пересечение $\bigcap\limits_{x \in M} (\bar{K} + x)$ непусто, то существует такой элемент $y \in \bar{K}$, что

$$\bigcap_{x \in M} (\bar{K} + x) = \bar{K} + y\,;$$

4. При $\alpha, \beta \in K$ уравнение $\alpha x = \beta$ имеет в K хотя бы одно решение;
5. Пересечение $\bar{K} \cap (-\bar{K})$ содержит только нуль (нулевой элемент кольца E);
6. Обозначим через F_α $(\alpha \in E)$ совокупность всех элементов $x \in E$, удовлетворяющих условию $\alpha x \in \bar{K}$. Тогда совокупность всех множеств вида $\beta + F_\alpha$ $(\alpha, \beta \in E)$ образует базисную систему замкнутых множеств топологического пространства E; иначе говоря, всякое замкнутое множество пространства E может быть получено из множеств вида $\beta + F_\alpha$ с помощью операций пересечения и конечного об'единения.

Элементы полуполя E, содержащиеся в K, называются *положительными*. Соотношения $x > 0$, $x \geqq 0$, $x > y$, $x \geqq y$ означают соответственно, что $x \in K$, $x \in \bar{K}$, $x - y \in K$, $x - y \in \bar{K}$.

Простейший пример полуполя строится следующим образом. Пусть Δ — произвольное множество. Обозначим через E совокупность всех действительных функций на множестве Δ, а через $K\,(= K_\Delta)$ — совокупность всех положительных действительных функций на Δ. Тогда, рассматривая в E обычные операции сложения и умножения функций и вводя в E тихоновскую топологию, мы получим полуполе, которое будем в дальнейшем обозначать через R_Δ. В этом полуполе множество $\overline{K}_\Delta$ состоит из всех неотрицательных действительных функций на Δ.

Оказывается, что с помощью полуполей вида R_Δ можно дать описание всех вообще полуполей. Для формулировки соответствующей теоремы мы введем понятие *остова*. Пусть Δ – произвольное множество, R_Δ – соответствующее полуполе и K_Δ – множество всех его положительных элементов. Множество $\Sigma \subset \overline{K}_\Delta$ мы будем называть *остовом* на множестве Δ, если выполняются следующие два условия:

а) в множестве Σ существует такой элемент σ, что $\sigma \geqq 1$;

б) каковы бы ни были элементы $x, y \in \Sigma$, существуют такие элементы $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, что $x + y \leqq \sigma_1$, $xy \leqq \sigma_2$.

Теорема. *Пусть Δ – произвольное множество и Σ – некоторый остов на нем. Обозначим через E_Σ множество всех элементов x полуполя R_Δ, для каждого из которых существует такой элемент $\sigma_x \in \Sigma$, что $|x| \leqq \sigma_x$. Тогда E_Σ есть подполуполе полуполя R_Δ; множество K_Σ его положительных элементов состоит из всех тех элементов $x \in K_\Sigma$, для которых выполнены включения $x \in E_\Sigma$, $x^{-1} \in E_\Sigma$. Обратно, любое полуполе представимо в таком виде. Более точно, если E – произвольное полуполе и Δ – множество всех его неразложимых корней* (см. [1]), *то на множестве Δ существует такой остов Σ, что полуполя E и E_Σ изоморфны* (причем изоморфизм устанавливается отображением φ, построенным в п. 10.2 работы [1]).

Приведем примеры к сформулированной теореме:

Пример 1. Примем за Σ множество всех положительных постоянных функций на Δ. Очевидно, что условия а) и б) в определении остова выполнены. Ясно, далее, что E_Σ состоит из всех ограниченных действительных функций на Δ. Согласно доказанной теореме, множество E_Σ (в индуцированной топологии) является полуполем. Множество K_Σ его положительных элементов состоит из всех положительных функций x на Δ, для которых $x \in E_\Sigma$, $x^{-1} \in E_\Sigma$. Иначе говоря, функция x тогда и только тогда принадлежит K_Σ, когда верхняя и нижняя грани ее значений на Δ существуют и положительны.

Пример 2. Пусть Δ – множество всех натуральных чисел, так что R_Δ состоит из всех последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots)$ действительных чисел. Обозначим через Σ множество всех последовательностей вида

$$x_n = ae^{bn}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где a и b – положительные числа. Легко видеть, что условия а) и б) выполняются, т. е. Σ есть остов на множестве Δ. Соответствующее полуполе E_Σ состоит из всех последовательностей, имеющих не более чем экспоненциальный рост, т. е. $\{x_n\} \in E_\Sigma$ тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа a и b, что

$$|x_n| < ae^{bn}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Согласно сформулированной теореме, множество K_Σ состоит из всех последовательностей $\{x_n\}$ положительных чисел, для которых обе последовательности $\{x_n\}$, $\{x_n^{-1}\}$ имеют не более чем экспоненциальный рост. Иначе говоря, последовательность $\{x_n\}$ тогда и только тогда принадлежит K_Σ, когда существуют такие действительные числа $a > 0$, $b > 0$, μ и ν, что

$$ae^{\mu n} < x_n < be^{\nu n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Напомним теперь введенное в [1] понятие метрического пространства над полуполем. Пусть E — некоторое полуполе и K — множество всех его положительных элементов. Множество X будем называть *метрическим пространством* над полуполем E, если задано отображение (называемое *метрикой*)

$$\varrho : X \times X \to \overline{K},$$

удовлетворяющее следующим условиям $(x, y, z \in X)$:

1. $\varrho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;
3. $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z)$.

Если U — произвольная окрестность нуля в метризующем полуполе E и $x \in X$, то через $\Omega(x, U)$ мы будем обозначать множество всех тех элементов $y \in X$, для которых $\varrho(x, y) \in U$. Совокупность всех множеств вида $\Omega(x, U)$ может быть принята за базу окрестностей в X (см. [1], п. 11,1). Получаемая таким образом топология называется *естественной топологией* метрического пространства X. Как показано в [1] (см. п. п. 11.4, 11.5), *естественная топология всегда является вполне регулярной и обратно, любое вполне регулярное топологическое пространство может быть метризовано над некоторым полуполем.*

Изложим теперь некоторые применения к равномерным структурам и пространствам близости. При этом равномерные структуры мы будем рассматривать только в смысле Вейля, а пространства близости — только такие, для которых соответствующая топология вполне регулярна.

Пусть X — метрическое пространство над полуполем E. Для любой окрестности нуля V в полуполе E мы обозначим через V^* совокупность всех тех точек $(x, y) \in X \times X$, для которых $\varrho(x, y) \in V$. Тогда совокупность $\mathscr{V}$ всех множеств вида V^* образует базу некоторой равномерной структуры на множестве X.

Эту структуру мы будем называть *естественной равномерной структурой* метрического пространства X. Оказывается, что *естественная топология этой равномерной структуры совпадает с естественной топологией метрического пространства X.*

Далее, пусть F — равномерная структура на множестве X. Тогда существует такая метрика $\varrho : X \times X \to E$ над некоторым полуполем E, что естественная равномерная структура получающегося метрического пространства (X, ϱ, E) совпадает с исходной равномерной структурой F. Коротко говоря, *всякая равномерная структура может быть метризована над некоторым полуполем E.*

Доказательство использует известный процесс Фринка-Читтендена построения непрерывных функций. Используя эту метризационную теорему для равномерных структур, можно весьма просто доказать ряд известных теорем о равномерных структурах, а также некоторые новые предложения. Так, например,

всякая равномерная структура может быть пополнена, т. е. может быть включена в качестве подструктуры в некоторую полную структуру;

пусть F — некоторая равномерная структура на множестве X; пространство X (в естественной топологии) тогда и только тогда компактно, когда равномерная структура F вполне ограниченна и полна;

всякая топологическая группа G допускает инвариантную метризацию над некоторым полуполем E, т. е. существует такая метрика $\varrho : G \times G \to E$, что $\varrho(x, y) = \varrho(ax, ay)$ для любых элементов $a, x, y \in G$ (обобщение теоремы Какутани [2]).

Таким образом, мы имеем четыре об'екта: вполне регулярная топология, близость, равномерная структура, метрика (над некоторым полуполем). Между этими об'ектами существуют следующие связи. Всякая метрика ϱ на X индуцирует естественную равномерность на X, которую мы обозначим через $w(\varrho)$, естественную близость $e(\varrho)$ и естественную топологию $t(\varrho)$ на X. Далее, всякая равномерная структура F на X индуцирует естественную близость на X, которую мы обозначим через $e(F)$, и естественную топологию $t(F)$. Наконец, всякая близость δ на X индуцирует естественную топологию $t(\delta)$ на X. Имеют место следующие формулы:

$$t(e(w(\varrho))) = t(e(\varrho)) = t(w(\varrho)) = t(\varrho)\,,$$
$$e(w(\varrho)) = e(\varrho)\,, \quad t(e(F)) = t(F)\,.$$

Кроме того, каждая вполне регулярная топология на X индуцируется некоторой (вообще говоря, не определенной однозначно) близостью на X, каждая близость индуцируется некоторой (вообще говоря, не определенной однозначно) равномерной структурой, а каждая равномерная структура — некоторой (также, вообще говоря, не определенной однозначно) метрикой. Иначе говоря, если мы обозначим через $T(X)$ множество всех вполне регулярных топологий на X, через $E(X)$ — множество всех близостей на X, через $W(X)$ — множество всех равномерных структур на X и через $M(X)$ — множество всех метрик (над произвольными полуполями) на X, то естественные отображения w, e, t, указанные выше:

$$T(X) \xleftarrow{t} E(X) \xleftarrow{e} W(X) \xleftarrow{w} \boldsymbol{M}(X)$$

оказываются во всех случаях отображениями *на все множество.*

В множествах $T(X)$, $E(X)$, $W(X)$ можно ввести естественным образом частичное упорядочение. Мы рассмотрим здесь в качестве примера только частичное упорядочение в множестве $W(X)$. Именно, если F_1 и F_2 — равномерные структуры на X, то мы будем говорить, что $F_1 \geqq F_2$, если $F_1 \supset F_2$(т. е. из $Q \in F_2$ следует, что $Q \in F_1$). Использование метрики над полуполями позволяет легко решить вопрос о существовании максимальной (в смысле указанного упорядочения) равномерной структуры, индуцирующей данную топологию. Именно, пусть

$$\varrho_\alpha : X \times X \to E_\alpha\,, \quad \alpha \in A\,,$$

— семейство метрик, заданных на одном и том же множестве X. Обозначим через E прямое произведение всех полуполей E_α, $\alpha \in A$. Элементом полуполя E является всякая функция f, заданная на A и принимающая значения, удовлетворяющие условию $f(\alpha) \in E_\alpha$ $(\alpha \in A)$. Далее, определим отображение

$$\varrho : X \times X \to E\,,$$

принимая за $\varrho(x, y)$ функцию на A, принимающую на α значение $\varrho_\alpha(x, y)$. Легко проверяется, что отображение ϱ представляет собой метрику на X (над полуполем E). Эту метрику мы будем называть *произведением* метрик ϱ_α. Легко проверяется, далее, что

$$w(\varrho) \geqq w(\varrho_\alpha) \quad \text{для любого} \quad \alpha \in A\,.$$

Наконец, если все метрики ϱ_α индуцируют одну и ту же топологию (или близость, или равномерную структуру), то метрика ϱ индуцирует ту же самую топологию (близость, равномерную структуру). Если теперь мы обозначим через $W(\tau)$ совокупность всех равномерных структур F на X, индуцирующих на X заданную топологию τ, то, выбрав для каждой структуры $F \in W(\tau)$ какую-либо метризацию $\varrho_F : X \times X \to E_F$, удовлетворяющую условию $w(\varrho_F) = F$, мы сможем затем построить произведение ϱ всех метрик ϱ_F $(F \in W(\tau))$. Эта метрика ϱ индуцирует на X ту же самую топологию τ (см. выше) и такую равномерность $w(\varrho)$, которая, в силу сказанного выше, удовлетворяет условию

$$w(\varrho) \geqq F \quad \text{для любого} \quad F \in W(\tau)$$

и, кроме того, индуцирует ту же самую топологию τ:

$$t(w(\varrho)) = t(\varrho) = \tau\,.$$

Таким образом, $w(\varrho)$ — максимальная равномерная структура, индуцирующая на X топологию τ.

Литература

[1] *М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков:* Топологические полуполя. Изд-во СамГУ, Ташкент 1961.

[2] *S. Kakutani*: Über die Metrisation der topologischen Gruppen. Proc. Japan Acad. *12* (1936), 82–84.