Jürgen Flachsmeyer
Nulldimensionale Räume

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [152]--154.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700951

NULLDIMENSIONALE RÄUME

J. FLACHSMEYER

Berlin

Aus einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit (die voraussichtlich in den „Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg“ erscheinen wird) über den genannten Gegenstand sollen hier einige Punkte berührt werden. Dabei sind 0-dimensionale Räume im Sinne der kleinen induktiven Dimension ind $X = 0$ gemeint, d. h. solche, für die die offenabgeschlossenen Mengen eine offene Basis bilden.

1. Ein Hausdorffscher 0-dimensionaler Raum X gestattet zu je zwei verschiedenen Punkten eine Zerlegung in offene Mengen, die die Punkte trennt. Diese Zerlegungseigenschaft ist äquivalent damit, dass die Quasikomponenten einpunktig sind, also der Raum total-zusammenhangslos ist. Welche Bedingung muss nun noch zu der totalen Zusammenhangslosigkeit dazukommen, damit Äquivalenz zur Nulldimensionalität erreicht wird?

Satz 1. *Ein Hausdorffscher Raum X ist 0-dimensional genau dann, wenn er total-zusammenhangslos und lokal-peripher-kompakt ist.*

Die lokal-periphere Kompaktheit stellt eine von L. ZIPPIN angegebene Abschwächung der lokalen Kompaktheit dar, es wird nämlich zu jedem Punkt nur die Existenz beliebig kleiner offener Umgebungen mit kompakter Begrenzung verlangt.

Eine weitere Bedingung, welche die 0-dimensionalen Räume als Spezialfälle unter den lokal-peripher-kompakten aussondert, gibt die nachstehende Aussage an.

Satz 2. *Ein lokal-peripher-kompakter Hausdorffschen Raum ist 0-dimensional genau dann, wenn jede endliche, offene, peripher-kompakte Überdeckung eine endliche, offen-abgeschlossene Verfeinerung besitzt, deren Elemente disjunkt sind.*

Der in der Formulierung vorkommende Begriff einer peripher-kompakten Überdeckung steht für eine Überdeckung, gebildet aus Überdeckungselementen mit kompakter Begrenzung. Weil in kompakten Räumen jede Überdeckung peripher-kompakt ist, so sagt also Satz 2 in diesem Falle die wohlbekannte Übereinstimmung von kleiner induktiver Dimension 0 und Überdeckungsdimension 0 aus.

2. Wir gehen jetzt zu Betrachtungen in kompakten Hausdorffschen Erweiterungen vollständig regulärer Räume über.

0-dimensionale Hausdorffsche Räume besitzen als vollständig reguläre Räume kompakte Hausdorffsche Erweiterungen. Wir fragen, wann ist solch eine Erweiterung bX selbst wieder 0-dimensional.

Im Hinblick auf den folgenden 3. Punkt beschränken wir uns auf eine funktionale Kennzeichung.

Satz 3. *bX sei eine kompakte Hausdorffsche Erweiterung des vollständig regulären Raumes X. γ bezeichne den Ring der beschränkten, reellen, stetigen Funktionen von X, die sich auf bX stetig fortsetzen lassen. bX ist 0-dimensional genau dann, wenn der Unterring der Funktionen aus γ, die nur endlich viele Werte annehmen, bezüglich gleichmässiger Konvergenz in γ dicht liegt.*

Diese Tatsache kann man leicht aus der Beziehung ablesen, dass für das kompakte bX die kleine induktive Dimension $\operatorname{ind} bX = 0$ gleichbedeutend mit der Überdeckungsdimension $\dim bX = 0$ und dies wiederum gleichbedeutend mit der analytischen Dimension $\operatorname{ad} C^*(bX) = 0$ (vergl. über analytische Dimension das Buch von GILLMAN-JERISON: Rings of continuous functions, van Nostrand 1960). Ein direkter Beweis, der von der Theorie der analytischen Dimension unabhängig ist, kann unter Benutzung folgender beider Beweiselemente geführt werden. Die Dichtigkeit des Unterringes der reellen, stetigen Funktionen aus γ, die nur endlich viele Werte annehmen, ist äquivalent mit der Bedingung: Je zwei bezüglich γ vollständig separierte Mengen A, B von X, für die es also ein $f \in \gamma$ gibt mit $\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = 0$, lassen sich schon durch eine Funktion aus γ, deren Bildmenge endlich ist, in der angegebenen Weise trennen. Weiter sind nun zwei Mengen A, B aus X bezüglich γ vollständig separiert genau dann, wenn die abgeschlossenen Hüllen von A und B in bX disjunkt sind.

Der angeführte Satz gestattet auch eine funktionale Erzeugung der ganzen Skala aller 0-dimensionalen Hausdorffschen kompakten Erweiterungen von X. Dazu betrachte man alle Unterringe $\mathfrak{C}$ mit Eins des Ringes $C^*(X)$ aller stetigen, reellen, beschränkten Funktionen von X, die aus Funktionen gebildet werden, die nur endliche Bildmengen haben. Ist $\mathfrak{C}$ solch ein Unterring von $C^*(X)$ und ist ausserdem die von $\mathfrak{C}$ erzeugte schwache Topologie auf X mit der ursprünglichen identisch, so liefert der Strukturraum der von $\mathfrak{C}$ in $C^*(X)$ erzeugten Banach-Algebra $\mathscr{B}(\mathfrak{C})$ eine 0-dimensionale kompakte Erweiterung. Jede wird auf diese Weise erhalten.

3. Wir bemühen uns jetzt um eine inner-topologische Übersicht über die Skala der 0-dimensionalen kompakten Hausdorffschen Erweiterungen. Das kann wie folgt geschehen.

Wegen der Nulldimensionalität von X gibt es Basen $\mathfrak{B}$ aus offen-abgeschlossenen Mengen. Wir betrachten zu einer solchen Basis $\mathfrak{B}$ das System $\mathscr{U}(\mathfrak{B})$ der endlichen Überdeckungen mit Basiselementen aus $\mathfrak{B}$. Dabei setzen wir jetzt immer voraus, dass zu einer Basis die Grundmenge des Raumes adjungiert sei. Eine Überdeckung $\alpha \in \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ bestimmt sodann eine Äquivalenzrelation R_α, indem zwei Punkte von X genau dann äquivalent sind, wenn mit dem einen Punkt auch stets der andere in demselben Überdeckungselement von α liegt. Die Quotientenräume X/R_α formieren sich zu einem inversen Spektrum $(X/R_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{R_\alpha}$, $\alpha \in \mathscr{U}(\mathfrak{B})$, sofern man die R_α bezüglich der Verfeinerungsbeziehung richtet und dann unter π_α^β im Falle, dass R_β feiner als R_α ist, die kanonische Abbildung von X/R_β auf X/R_α versteht. Dieses Spektrum — wir nennen es ein Zerlegungsspektrum — liefert mit seinem Grenzraum bX eine 0-dimensionale kompakte Erweiterung von X, denn jeder Quotientenraum X/R_α ist ein endlicher diskreter Raum.

Satz 4. *Ausgehend von einer offenen Basis offen-abgeschlossener Mengen eines 0-dimensionalen Hausdorffschen Raumes konstruiert man mittels der aus Basiselementen gebildeten endlichen Überdeckungen ein Zerlegungsspektrum von X. Der Grenzraum dieses Zerlegungsspektrum ist eine kompakte 0-dimensionale Hausdorffsche Erweiterung von X.*

Unterscheidet man zwei Erweiterungen nicht, sobald es eine Homöomorphie zwischen ihnen gibt, welche die Punkte von X festlässt, so kann man folgendes aussprechen.

Satz 5. *Für einen 0-dimensionalen Hausdorffschen Raum liefert die spektrale Erzeugung von kompakten Erweiterungen aus Basen offen-abgeschlossener Mengen, die mit je zwei Mengen auch deren Vereinigung und mit jeder Menge auch deren Komplement enthalten, eine eineindeutige Entsprechung zwischen solchen Basen und den 0-dimensionalen kompakten Hausdorffschen Erweiterungen.*

Die in Rede stehenden Basen bilden in bezug auf die beiden Operationen der symmetrischen Differenz und des Durchschnittes eine Boolesche Algebra. Der Stonesche Darstellungsraum von dieser Algebra ist gerade gleich dem von dieser Basis auf dem oben beschriebenen spektralen Wege erzeugten kompakten Raum.