BEMERKUNGEN ÜBER INTERVALLTOPOLOGIE IN HALBGEORDNETEN MENGEN

M. KOLIBIAR

Bratislava

Im folgenden soll das Symbol P stets eine halbgeordnete Menge bezeichnen. Für $a, b \in P$ wird $N(a)$ die Menge aller Elemente von P bedeuten, die mit a unvergleichbar sind; $N(a, b)$ soll die Menge aller Elemente $x \in P$ bedeuten, für die weder $x \geqq a$ und $x \geqq b$, noch $x \leqq a$ und $x \leqq b$ gilt. Wir sagen, dass eine Teilmenge $A \subset P$ *endlich trennbar* ist, wenn es eine endliche Teilmenge K von A gibt, so dass jedes Element von A mit irgend einem Element von K vergleichbar ist. Ist $A \subset P$, so bezeichnen wir $A^* = \{x \in P \mid x \geqq a \text{ für jedes } a \in A\}$. Wir sagen, dass eine Teilmenge A von P *nach oben gerichtet* ist, wenn es zu je zwei Elementen $a, b \in A$ ein Element $c \in A$ gibt, so dass $a \leqq c$ und $b \leqq c$ gilt. Dual wird eine nach unten gerichtete Menge definiert. P wird *gleichmässig* (uniform [1]) genannt, wenn für jede nach oben gerichtete Teilmenge A von P die Menge A^* nach unten gerichtet ist und dual.

Unter einer *Intervalltopologie* in P versteht man die Topologie in P, deren Subbasis für die abgeschlossenen Mengen die folgenden Mengen bilden: $\{x \in P \mid x \geqq a\}$, $\{x \in P \mid x \leqq a\}$ (a durchläuft alle Elemente aus P) und die Menge P selbst.

Wir werden die folgende Bedingung betrachten:

(α) *Die halbgeordnete Menge P ist ein Hausdorffscher Raum in ihrer Intervalltopologie.*

Y. Matsushima [2] hat bewiesen: *Ist für jedes $a \in P$ die Menge $N(a)$ endlich trennbar, so genügt P der Bedingung* (α).

Die Bedingung von Matsushima ist jedoch nicht zur Gültigkeit von (α) notwendig, wie man an einem einfachen Beispiele zeigen kann: P bestehe aus der Kette

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < u < \ldots < b_3 < b_2 < b_1$$

und aus den Elementen $c_1, c_2, c_3, \ldots$, so dass $a_i < c_i < b_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ und die Elemente $u, c_1, c_2, c_3, \ldots$ untereinander unvergleichbar sind.

Die notwendige und hinreichende Bedingung gibt der folgende

Satz 1. *Genau dann genügt P der Bedingung* (α), *wenn für alle $a, b \in P$, $a \neq b$, die Menge $N(a, b)$ endlich trennbar ist.*

M. Katětov [3] und E. S. Northam [4] haben bewiesen: In einer Booleschen Algebra S ist die Bedingung (α) mit der folgenden Bedingung (β) äquivalent:

(β) *Zu jedem Element $a \in S$, $a \neq 0$, gibt es in S ein Atom $p \leqq a$.*

Dieser Satz kann wie folgt verallgemeinert werden:

Satz 2. *Die Bedingungen* (α) *und* (β) *sind äquivalent in einem komplementären modularen Verband, der die folgende Eigenschaft besitzt:*

(1) *Falls in S ein Atom existiert, so hat es nur endlich viele Komplemente.*

Es gelten auch die folgenden Sätze:

Satz 3. *In einem relativ komplementären Verband mit Null- und Einselement, der der Bedingung* (1) *genügt, folgt aus der Bedingung* (β) *die Bedingung* (α).

Satz 4. *In einem relativ komplementären Verband zieht die Bedingung* (α) *die folgende Bedingung* (γ) *nach sich:*

(γ) *In jedem nichttrivialen Intervall J gibt es einen Sprung* (d. h. es gibt solche Elemente $a, b \in J$, dass $a < b$ oder $b < a$ ist, und es gibt kein c, das echt zwischen a und b liegt).

Anmerkung. In einem semimodularen relativ komplementären Verband S mit Nullelement aus (β) folgt (γ). Ist S dabei auch modular, so gilt auch die umgekehrte Implikation. Ich weiss nicht zur Zeit, ob die letzte Implikation auch dann gilt, wenn S semimodular ist.

In der Arbeit [5] von L. E. WARD JR. ist der folgende Satz enthalten (Theorem 3):

In einem Halbverband P sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

(δ) *Jede isotone Abbildung von P in P besitzt einen Fixpunkt.*

(ε) *P ist kompakt in der Intervalltopologie.*

Diese Behauptung ist nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt: P besteht aus der geordneten Menge C der ganzen negativen Zahlen und aus den Elementen o, a, b, wobei $o < a$, $o < b$ ist und für jedes $n \in C$ gilt: $a < n$, $b < n$. Die Elemente a, b sind unvergleichbar. P ist ein Halbverband und man sieht leicht, dass P der Bedingung (δ), nicht aber der Bedingung (ε) genügt. (Das System $\mathscr{S}$ von abgeschlossenen Mengen $A_n = \langle a, n \rangle \cap \langle b, n \rangle$[1]) ($n \in C$) hat einen leeren mengentheoretischen Durchschnitt, wobei der Durchschnitt eines beliebigen endlichen Teilsystems von $\mathscr{S}$ nicht leer ist.)

Es gelten jedoch die Sätze:

Satz 5. *In einer beliebigen halbgeordneten Menge aus* (ε) *folgt* (δ).

Satz 6. *In einer gleichmässigen halbgeordneten Menge sind die Bedingungen* (δ) *und* (ε) *äquivalent.*

Literatur

[1] *E. S. Wolk*: Dedekind completeness and a fixed-point theorem. Canadian J. Math., *9* (1957), 400–405.

[2] *Y. Matsushima*: Hausdorff interval topology on a partially ordered set. Proc. Amer. Math. Soc. *11* (1960), 233–235.

[3] *M. Katětov*: Remarks on Boolean algebras. Colloquium math. *2* (1951), 229–235.

[4] *E. S. Northam*: The interval topology of a lattice. Proc. Amer. Math. Soc. *4* (1953), 824–827.

[5] *L. E. Ward, Jr.*: Completeness in semi-lattices. Canadian J. Math. *9* (1957), 578–582.

[1]) $\cap$ bedeutet den mengentheoretischen Durchschnitt.