E. J. Akutowicz

Certaines classes de distributions quasi-analytiques au sens de S. Bernstein

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [35]--40.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700939

CERTAINES CLASSES DE DISTRIBUTIONS QUASI-ANALYTIQUES AU SENS DE S. BERNSTEIN

E. J. AKUTOWICZ

Montpellier

1. Introduction. Une découverte particulièrement heureuse de S. BERNSTEIN était qu'il n'existe pas une approximation polynomiale à une fonction continue non identiquement nulle d'une précision trop élevée si la fonction donnée prend la valeur zéro dans une partie assez étendue de son domaine de définition. Autrement dit, si la convergence d'une suite de polynomes est suffisamment rapide, alors la limite possède nécessairement une certaine raideur. Précisons cet énoncé. Etant donnée une courbe γ et une suite infinie n_k d'entiers positifs, les classes $C(n_k, \gamma)$ de Bernstein se composent des fonctions f définies et continues sur γ et y admettant une approximation

$$\sup |f(x) - P_k(x)| \leqq r^{n_k}, \quad (0 < r < 1),$$

P_k désignant un polynome de degré n_k.

Théorème (BERNSTEIN, H. SZMUSZKOWICZÓWNA [1]). *Si une fonction appartenant à une classe $C(n_k, \gamma)$ s'évanouit sur un sousensemble $\gamma_0 \subset \gamma$ de capacité logarithmique positive, alors elle est identiquement nulle.*

Notre but sera de résumer quelques résultats du même genre dans le cadre de distributions à support discret. A ce moment il est évident que la topologie d'espace fonctionnel jouera un rôle important; dans le cas dont nous nous occuperons elle est définie par un ensemble de normes de Banach. Les démonstrations détaillées paraîtront prochainement dans les Annales de l'Ecole Normale Supérieure.

2. L'espace fondamental. On connait la notion de distribution ou fonction généralisée; c'est une forme linéaire continue définie sur un espace fondamental de „bonnes" fonctions. Nous allons discuter l'espace suivant, composé de certaines fonctions holomorphes [2].

Soient a, b, C trois paramètres positifs et $B(b)$ la bande $|y| < b$ dans le plan de la variable $z = x + iy$. Désignons par $\mathscr{A}_{a,b}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f(z)$ holomorphes dans la bande $B(b)$ et elles que

$$|f(z)| \leqq C \exp(-a|x|), \quad z \in B(b), \tag{1}$$

pour une constante $C = C(f)$. Posons

$$\|f\|_{a,b} = \sup_{z \in B(b)} |f(z)| \exp a|x| \quad (a, b \text{ fixés}).$$

Muni de cette norme, $\mathscr{A}_{a,b}$ est un espace de Banach. On considère l'espace vectoriel

$$\mathscr{A} = \bigcup_{a,b} \mathscr{A}_{a,b}$$

comme une limite inductive des espaces $\mathscr{A}_{a,b}$. Le dual fort $\mathscr{A}'$ est formé de certaines distributions. La transformation de Fourier est un automorphisme dans les deux espaces $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$; grâce à cette circonstance on peut établir l'analogie entre nos résultats et celui de Bernstein que nous venons de citer.

On note $\langle S, f\rangle$ la valeur de $S \in \mathscr{A}'$ en $f \in \mathscr{A}$.

Un ensemble borné $\mathscr{B} = \mathscr{B}(a, b, C)$ est constitué par des fonctions $f(z)$ qui satisfont à l'inégalité (1) avec a, b, C fixes. La convergence de S vers T dans la topologie de $\mathscr{A}'$ veut alors dire que

$$\sup_{f \in \mathscr{B}} |\langle S - T, f\rangle|$$

tend vers 0 pour un ensemble borné arbitraire $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{A}$.

On peut caractériser les fonctions appartenant à $\mathscr{A}$ de la manière suivante.

Proposition. *Une fonction $f(x)$ définie sur la droite réelle et indéfiniment dérivable appartient à l'espace $\mathscr{A}$ si et seulement s'il existe des constants c, h, k pouvant dépendre de f telles que les inégalités suivantes aient lieu*:

$$|x^n f(x)| \leqq ch^n n!\,, \quad |f^{(n)}(x)| \leqq ck^n n!\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

On sait qu'il correspond à chaque élément $\varphi \in \mathscr{A}'$ une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans $y \neq 0$ et soumise aux conditions naturelles de croissance sur les horizontales telle que

$$\varphi = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \varphi(x + iy) - \lim_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} \varphi(x + iy)\,,$$

les limites étant prises dans $\mathscr{A}'$ [3].

3. Un problème de quasi-analyticité dans $\mathscr{A}'$. Prenons une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans le demi-plan supérieur telle que la limite

$$\lim_{y \to 0} \varphi(x + iy)$$

existe dans $\mathscr{A}'$. Elle définit alors un élément $\varphi \in \mathscr{A}'$. Il s'ensuit que φ est la transformée de Fourier d'un élément Φ appartenant, lui aussi, à $\mathscr{A}'$. Notre hypothèse est que le support de Φ se trouve dans la partie non négative de l'axe réel.

Désignons par $a_1 < a_2 < \ldots$ une suite de nombres positifs et par $\mathscr{D}_N$ l'ensemble de distributions d'ordre inférieur ou égal à N dont les supports soient contenus dans l'ensemble

$$A_N = \{\pm a_1, \ldots, \pm a_N\}\,.$$

Ainsi un élément de $\mathscr{D}_N$ est une combinaison linéaire des dérivées d'ordre inférieur ou égal à N des mesures de Dirac portées par les points de A_N.

On étudie alors l'approximation d'un élément φ satisfaisant lesdites conditions par des éléments de $\mathscr{D}_N$ lorsque $N \to \infty$. La meilleure approximation de φ sera par définition

$$E_N = E_N(\mathscr{B}, \varphi) = \inf_{D_N \in \mathscr{D}_N} \sup_{f \in \mathscr{B}} |\langle \varphi - D_N, f \rangle| \tag{2}$$

où $\mathscr{B} = \mathscr{B}(a, b, C)$ désigne un ensemble borné de l'espace $\mathscr{A}$. Notons $\mathscr{B}_N = \mathscr{B}_N(a, b, C)$ la trace sur $\mathscr{B}$ de l'hyperplan défini par

$$f^{(n)}(a_k) = 0\,, \quad a_k \in A_N\,, \quad 0 \leqq n \leqq N\,.$$

Posons

$$F_N = \mathscr{B}_N(a, b + 2, C)\,,$$
$$\Delta_N = \sup_{f \in F_N} |f(z_0)|\,, \quad (1 + b < \operatorname{Im} z_0 < 2 + b)\,.$$

Théorème 1. *L'inégalité*

$$\underline{\lim} \sqrt[N]{E_N} < \overline{\lim} \sqrt[N]{\Delta_N}$$

entraîne $\varphi = 0$.

On remarque que la quantité Δ_N est un espèce de capacité.

Les étapes suivants montrent l'idée de la démonstration.

1° On laisse tomber la condition extrémisante

$$\inf_{D_N \in \mathscr{D}_N}$$

dans (2) après avoir montré l'existence d'un élément extrémal D_N^0.

2° On remarque que $g(t) \in \mathscr{B}_N(a, b, C)$ entraîne

$$\frac{g(t)}{t - t_0} \in \mathscr{B}_N(a, b, C)$$

en raison de $\operatorname{Im} z_0 > 1 + b$. On a donc la minoration

$$E_N \geqq \sup_{g \in \mathscr{B}_N(a,b,C)} \left| \left\langle \varphi, \frac{g}{t - z_0} \right\rangle \right| . \tag{3}$$

3° En développant le noyau de Cauchy dans une série de puissances convenables on arrive à la seconde minoration

$$E_N \geqq C^{te} . \sup_{f \in F_N} \left| \int \frac{\varphi(t) f(t)}{t - z_0} \, dt \right| , \tag{4}$$

l'intégrale étant étendue sur l'horizontale $\operatorname{Im} t = p_0$, $(\operatorname{Im} z_0 < p_0 < 2 + b)$. La constante ne dépend pas de N.

4° En combinant les inégalités (3) et (4) et en utilisant la formule de Cauchy on achève la démonstration.

Dans le cas où la suite a_k coïncide avec les entiers naturels on a un énoncé plus direct:

Théorème 2. *Il existe une constante absolue* $r_0 > 0$ *de telle sorte que si l'on a*

$$\lim \sqrt[N^2]{E_N(\mathscr{B}, \varphi)} < r_0\,,$$

alors $\varphi = 0$.

Remarquons que la racine N^2-ième est l'analogue naturelle de la racine N-ième qui intervient dans le théorème de Bernstein sur l'approximation polynomiale uniforme.

La démonstration résulte du Théorème 1 par un choix convenable d'une fonction intervenant dans la concurrence définissant la quantité Δ_N. On trouve que $r_0 \geqq$ $\geqq 3/e^2$. Je ne connais pas la valeur exacte de r_0.

4. Quasi-analyticité de distributions à support ponctuel. Soit φ un élément de $\mathscr{A}'$ ayant l'origine comme support. Un tel élément peut être exprimé par une série infinie de dérivées de la mesure de Dirac,

$$\varphi = \sum c_n \delta^{(n)} , \tag{5}$$

la série convergeant pour la topologie de $\mathscr{A}'$. Nous allons étudier l'approximation à φ par des combinaisons linéaires de $\delta^{(n)}$. (Ici la question se pose d'éclaircir la relation entre les sommes partielles de (5) et les éléments D_N^0 de meilleure approximation.) Vu l'invariance des espaces $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ vis-à-vis de la transformation de Fourier, notre problème revient à l'étude de l'approximation polynomiale de la fonction entière de type exponentiel nul qui est la transformée de Fourier de φ. Notons Φ cette fonction entière.

Tandis que pour le Théorème 1on avait supposé la transformée de Fourier Φ nulle sur une demi-droite, maintenant la prémisse homologue de celle-là sera l'existence de lacunes dans la série (5). Le problème d'approximation est encore lié à un second problème extrémal. Désignons par Σ l'ensemble des indices n pour lesquelles c_n diffère de 0 dans (5). Soit $\mathscr{B}$ un ensemble borné de $\mathscr{A}$ et posons

$$r_N = r_N(\mathscr{B}) = \sup |G^{(N)}(0)| , \quad N \in \Sigma ,$$

le supremum étant relatif à l'ensemble des fonctions $G \in \mathscr{B}$ telles que $G^{(n)}(0) = 0$ pour $n \in \Sigma - \{N\}$.

Théorème 3. *Soit Σ une suite d'entiers non negatifs de densité $d < \frac{1}{2}$ dans l'ensemble des entiers non negatifs. Soit φ une distribution de la forme (5) telle que sa transformée de Fourier Φ soit d'ordre $\varrho > 0$ (au sens de la théorie des fonctions entières). Si la meilleure approximation E_N de φ vérifie l'inégalité*

$$\lim \frac{N \log N}{\log^+ (r_N/E_N)} < \varrho \tag{6}$$

alors $\varphi = 0$.

Dans les hypothèses où nous nous sommes placés, l'évaluation (6) n'est pas loin d'être la meilleure possible. Or, pour tout $\varphi \neq 0$ on a

$$E_N(\mathscr{B}, \varphi) \geqq r_N(\mathscr{B}) \, |c_N| , \quad N \in \Sigma . \tag{7}$$

Prenons pour Σ une suite d'entiers impairs et étudions l'approximation d'un φ de telle sorte que $\varrho = 1$ et $|c_n| \, n!$ ne croit pas. Etant donné $\mathscr{B}(a, b, C)$ il existe alors une fonction intervenant dans la définition de r_N ayant des poles *en* $\pm\, ib_1$ $(b_1 > b)$. De (7) il vient

$$\underline{\lim}\, \sqrt[N]{(E_N/|c_N|\, N!)} \geqq \frac{1}{b}\,.$$

D'autre part, les conditions imposées à φ entraînent

$$\overline{\lim}\, \sqrt[N]{(E_N/|c_N|\, N!)} \leqq \frac{1}{b}\,.$$

5. Caracterisation du dual $\mathscr{A}'$. Pour l'espace fondamental $\mathfrak{A}$ qui se compose des fonctions holomorphes sur une courbe fermée Γ sur la sphère de Riemann, M. G. KÖTHE a caractérisé le dual $\mathfrak{A}'$ comme l'espace $\mathfrak{A}_0$ de toutes les fonctions localement holomorphes dans le complémentaire de Γ qui s'annulent à l'infini. Rappelons que l'espace $\mathfrak{A}$ est une limite inductive définie à partir de la famille des normes de la convergence uniforme sur les voisinages compactes de Γ, et que $\mathfrak{A}_0$ est une limite projective donnée par les normes de la convergence uniforme sur les compacts du complémentaire de Γ. Un résultat de cette simplicité ne subsiste pas pour la droite.

D'après C. ROUMIEU [3] à chaque élément $\varphi \in \mathscr{A}'$ correspond une fonction holomorphe $\varphi(x + iy)$ dans $y \neq 0$ telle que l'égalité à la fin du numéro 2 tient et de telle sorte que quels que soient H_1, H_2, K positifs, il existe une constante A telle que

$$|\varphi(x + iy)| \leqq A \exp\frac{|x|}{K} \quad \text{dans} \quad \frac{1}{H_1} \leqq |y| \leqq \frac{1}{H_2}\,, \tag{8}$$

et réciproquement à chaque fonction $\varphi(x + iy)$ de cette sorte correspond un élément $\varphi \in \mathscr{A}'$. On appelle la fonction $\varphi(x + iy)$ une indicatrice de φ. Cette fonction est déterminée seulement à une fonction entière près, de la même croissance. Notons par J_0 l'ensemble de ces fonctions entières. Par la famille de normes

$$\|\varphi(x + iy)\|_{H_1, H_2, K} = \sup_{\frac{1}{H_1} \leqq |y| \leqq \frac{1}{H_2}} |\varphi(x + iy)| \exp\left(-\frac{|x|}{K}\right)$$

on munit l'espace $\mathscr{A}_0$ de fonctions holomorphes dans $y \neq 0$ satisfaisant à (8) de la topologie d'une limite projective. Désignons par $\tilde{\mathscr{A}_0}$ l'espace quotient

$$\tilde{\mathscr{A}_0} = \mathscr{A}_0/J_0$$

(J_0 est fermé dans $\mathscr{A}_0$). C'est un espace de Fréchet défini par la famille de normes habituelles.

Théorème 4. *L'espace vectoriel topologique $\tilde{\mathscr{A}_0}$ est isomorphe au dual $\mathscr{A}'$.*

Bibliographie

[1] *H. Szmuszkowiczówna*: Un théorème sur les polynômes et application à la théorie des fonctions quasi analytiques. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. *198* (1934), 1119–1120.

[2] *G. Doetsch*: Handbuch der Laplacetransformation I. Basel 1953.

[3] *C. Roumieu*: Sur quelques extensions de la notion de distribution. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. t. *77* (1960), 41–120.

[4] *G. Köthe*: Die Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Zeits. *57* (1952), 13–33.

[5] *G. Köthe*: Dualität in der Funktionentheorie. J. reine angew. Math. *191* (1953), 153—172.