Toposym 1

Igor Kluvánek

Sur la représentation des transformations linéaires

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [250]--251.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700932

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

SUR LA REPRÉSENTATION DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

I. KLUVÁNEK

Bratislava

Le théorème célèbre de F. Riesz sur la représentation des fonctionelles linéaires sur l'espace des fonctions continues était généralisé en plusieurs directions. Une généralisation, on peut dire „vectorielle", a été donnée par R. G. BARTLE, N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ dans le Canad. J. Math. en 1955, 289—305. Leurs résultats concernent des transformations linéaires continues de l'espace $C(S)$ des fonctions continues sur le compact S dans un espace de Banach X arbitraire. Ils ont démontré qu'une telle transformation T peut être mise sous la forme de l'intégrale par rapport à une mesure vectorielle, si et seulement si la transformation T est faiblement compacte, c'est-à-dire l'image de la sphère

$$\{f : f \in C(S), \|f\| \leqq 1\}$$

est compacte dans la topologie faible de l'espace X. Dans ce but ils ont développé une théorie de l'intégration par rapport à une mesure vectorielle définie sur une σ-algèbre, une mesure vectorielle étant une fonction d'ensemble σ-additif avec les valeurs dans un espace de Banach.

Soit maintenant S un espace topologique arbitraire. Désignons par $C(S)$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur S à support compact, muni de la norme de convergence uniforme. Essayons de représenter les transformations T linéaires et continues sur l'espace $C(S)$ dans un espace de Banach X sous la forme de l'intégrale, c'est-à-dire sous la forme

$$T(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu$$

où μ est une mesure vectorielle convenablement choisie. Evidemment, on ne peut plus exiger que la mesure μ soit définie sur une σ-algèbre. J'ai développé alors une théorie de l'intégration des fonctions scalaires (reélles ou complexes) par rapport à une mesure vectorielle définie sur un δ-corps d'ensembles (δ-corps est une famille d'ensembles fermée par rapport aux opérations de différence, des unions finies et des intersections dénombrables d'ensembles). Cette théorie est une généralisation naturelle de celle de Bartle, Dunford et Schwartz et en même temps de la théorie de l'intégration par rapport à une mesure non-négative non nécessairement finie.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Une transformation T du type envisagé peut être écrite sous la forme de l'intégrale, si et seulement si l'image de l'ensemble

$$\{f : |f| \leqq h, f \in C(S)\}$$

est faiblement compacte dans X pour chaque fonction $h \in C(S)$.

On voit facilement que la condition de téorème précédent se réduit à celle des auteurs cités si S est un espace compact.

Pour indiquer les méthodes de démonstration, introduisons quelques notions:

Soit $\mathscr{E}$ un treillis linéaire des fonctions réelles sur un ensemble abstrait S. On apelle l'intégrale vectorielle de Daniell sur $\mathscr{E}$ chaque transformation I de $\mathscr{E}$ dans un espace de Banach X jouissant des propriétés suivantes:

1. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$, α, β réels; $f, g \in \mathscr{E}$.
2. On a $I(f_n) \to 0$, lorsque $f_n(s) \to 0$ en décroissant partout.

L'intégrale I est dite saturée (au sens de Lebesgue) s'il y a lieu:

3. Si $f_n \in \mathscr{E}$, $|f_n| \leqq h \in \mathscr{E}$, $n = 1, 2, \ldots$ et $f(s) = \lim f_n(s)$ partout, on a $f \in \mathscr{E}$.

Le théorème énoncé est une conséquence des théorèmes plus généraux suivants:

Pour qu'une intégrale vectorielle de Daniell I admette une extension J saturée, il faut et il suffit que l'ensemble

$$\{I(f) : |f| \leqq h, f \in \mathscr{E}\}$$

soit faiblement compact dans X pour chaque $h \in \mathscr{E}$.

L'intégrale vectorielle de Daniell I saturée et jouissant de la propriété suivante: $f \in \mathscr{E} \Rightarrow \min \{f, 1\} \in \mathscr{E}$ (où $\mathscr{E}$ est le domaine de l'intégrale I) peut être écrite sous la forme

$$I(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu ,$$

où μ est une mesure vectorielle définie sur un δ-corps.

Les démonstrations détaillées de ces théorèmes seront publiées dans le Czechoslovak Mathematical Journal sous le titre „Quelques généralisations du théorème de Riesz-Kakutani" (en russe).