PROBLÈME DE L'ANALYTICITÉ PAR RAPPORT À UN OPÉRATEUR LINÉAIRE DANS UNE ALGÈBRE NORMÉE

M. NICOLESCU

București

1. À diverses étapes des nos recherches concernant la structure des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires et à coefficients constants, nous avons obtenu, entre autres, les résultats suivants ([1], [2]):

I. Posons $D = \partial^2/\partial y\, \partial x$ et considérons une fonction $u : R^2 \to R$ indéfiniment différentiable. S'il existe une constante positive M telle que $|D^n u(x, y)| \leqq M$, $n = 1, 2, \ldots$ pour tout point (x, y) d'un certain domaine de $\mathscr{R}^2$, alors pour toute paire de points (x, y), (a, b) de ce domaine on a

$$u(x, y) = \sum_0^\infty (x - a)^n (y - b)^n [f_n(x) + g_n(y)]$$

et ce développement est unique. On constate, d'ailleurs, qu'en posant $h_n = f_n + g_n$, on a $Dh_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

II. Posons $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ et considérons une fonction $u : D \to R$, où D est un domaine borné du plan pour lequel le problème à la frontière avec des données continues est possible. Si

$$|\Delta^n u(x, y)| \leqq M\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

qq. soit $(x, y) \in D$ et que le diamètre de D ne dépasse pas une certaine constante, alors

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \varrho^2 u_1(x, y) + \ldots + \varrho^{2n} u_n(x, y) + \ldots,$$

ϱ étant la distance de (x, y) à un point fixe $(a, b) \in D$ et $\Delta u_n(x, y) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

III. Considérons, enfin, l'opérateur parabolique

$${}_p\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$$

dans le plan (x, t) et une fonction réelle u, indéfiniment différentiable dans un domaine borné D, compris entre deux droites $t = t_0$, $t = t_1$ quelconques, pour lequel le premier problème fondamental est possible. Si la „largeur" de ce domaine ne dépasse pas une certaine constante, et si

$$|{}_p\Delta^n\, u(x, t)| < M\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

pour tout $(x, t) \in D$, alors

$$u(x, t) = u_0(x, t) + t\, u_1(x, t) + \ldots + t^n u_n(x, t) + \ldots$$

avec ${}_p\Delta\, u_n(x, t) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Si l'on ajoute à ces trois faits le fait bien connu depuis Serge Bernstein que toute fonction $u : R \to R$ indéfiniment dérivable pour laquelle

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n}\right| < M\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

quelque soit x dans un certain intervalle I, est analytique, c'est-à-dire elle peut être représentée, au voisinage de chaque point $a \in I$ sous la forme

$$u(x) = u_0 + (x - a)\,u_1 + (x - a)^2\,u_2 + \ldots + u_n(x - a)^n + \ldots$$

avec $\mathrm{d}u_n/\mathrm{d}x = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, on constate qu'on est là en présence d'un phénomène commun aux cas considérés, phénomène où la distinction classique entre les trois espèces d'équations ne joue aucun role.

C'est en cherchant à expliquer ce phénomène que j'ai entrepris, tout dernièrement, la tâche de construir une théorie de l'analyticité d'un élément appartenant à une algèbre normée, par rapport à un opérateur linéaire fixe de cette algèbre. Les premiers résultats de cette étude ont été présentés, en 1956, au Congrès des Mathématiciens Autrichiens, à Vienne et publiés consécutivement dans les „Studia Mathematica", t. XVI (1958) (voir [3]).

L'objet de cette conférence est de montrer, par quelques résultats obtenus ultérieurement au travail cité, qu'on peut considérablement élargir le cadre de cette théorie.

Je serai bien obligé, afin de faire conserver à cette exposition un caractère autonome, de reprendre quelques notions et résultats de Mémoire cité [3] que je désignerai par (M_1). Je profiterai aussi de l'occasion pour donner aux axiomes de (M_1) une forme plus précise et en même temps plus générale, et pour en ajouter d'autres, nécessaires à l'élargissement du domaine de la recherche entreprise.

2. Par $x, y, \ldots$ on désignera des éléments d'une algèbre normée $\mathscr{B}$ commutative, à élément multiplicatif neutre e, pour lequel $\|e\| = 1$.

Dans la suite on considèrera une application linéaire distinguée $\mathrm{D} : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$, où $\mathscr{D}$ est une sousalgèbre de $\mathscr{B}$. On n'attribuera aucun sens à $\mathrm{D}x$, pour $x \notin \mathscr{D}$. On supposera que

I_1. Si $\mathscr{D}_i$ est l'ensemble des points de $\mathscr{B}$ pour lesquels $\mathrm{D}^i x$ a un sens, l'ensemble

$$\mathscr{S} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathscr{D}_i\,, \quad (\mathscr{D}_0 = \mathscr{D})$$

n'est pas vide.

I_2. $e \in \mathscr{D}_2$.

De I_2 il résulte que $\mathrm{D}x = e$ a au moins une solution. Nous en distinguerons une, que nous appellerons t. Ainsi $\mathrm{D}t = e$.

L'introduction de t nous permettra de formuler l'axiome suivant:[1])

---

[1]) Cet axiome a été omis, par mégarde, dans (M_1).

I_3. Si

$$B_1(x, y) = D(xy) - x\,Dy - y\,Dx$$

et

$$D_1 x = B_1(x, t) = B_1(t, x),$$

alors $DD_1 - D_1D = \alpha D$.

Posons maintenant la

Définition 1. Si $D_1 x \neq 0$, qq. soit $x \in \mathscr{D}$, D est un opérateur parabolique simple.

3. Soit Π l'ensemble des éléments de $\mathscr{D}$ pour lesquels il existe un nombre naturel n (variant avec l'élément considéré), tel que $D^n x = 0$.

Définition 2. Tout élément de l'adhérence $\bar{\Pi}$ de Π est appelé un élément continu de $\mathscr{B}$ (par rapport à D).

Définition 3. Tout élément $x \in \mathscr{D}$ qui peut se mettre sous la forme

$$x = x_0 + tx_1 + t^2 x_2 + \dots$$

avec

$$Dx_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

est, par définition, un élément analytique de $\mathscr{D}$ (par rapport à D).

Si Δ est l'ensemble des éléments analytiques de $\mathscr{D}$, on a $\bar{\Delta} = \bar{\Pi}$.

Les axiomes I_1, I_2, I_3 nous permettent de démontrer le théorème de structure suivant:

Théorème 1. *Si* D *est parabolique simple et si* $D^n x = 0$, *alors il existe un système* $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ *de n solutions de* $Du = 0$, *telles que*

$$x = x_0 + tx_1 + \dots + t^{n-1} x_{n-1}.$$

4. Si D n'est pas parabolique simple, le théorème de structure précédent reste valable si l'on ajoute aux axiomes I_1, I_2, I_3 l'axiome I_3 de (M_1), que nous désignerons ici par I_4.

5. L'ensemble des éléments continus forme un espace linéaire. Mais si $x \in \bar{\Pi}$ et $y \in \bar{\Pi}$, on ne peut rien affirmer sur l'élément xy, à moins de faire de nouvelle hypothèses. C'est ainsi qu'apparaît justifiée l'introduction de l'axiome suivant I_5. Si $Dx = 0$ et $Dy = 0$, alors xy est un élément continu.

À l'aide de cet axiome on peut démontrer le

Théorème 2. *Le produit de deux éléments continus est un élément continu.*

6. Nous ajouterons, maintenant, aux axiomes précédents, un axiome d'une nature différente.

II. Il existe une algèbre normée $\mathscr{B}'$ distincte de $\mathscr{B}$ et une application linéaire L de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}'$, telle que la restriction de L à l'ensemble $\mathscr{E}_y$ des solutions de $Dx = y$ ait une inverse $\Lambda_y x'$, continue en y pour tout $x' \in \mathscr{B}'$ et continue en x' pour tout $y \in \mathscr{D}_1$.

Nous désignerons dans la suite par des lettres accentuées les éléments de $\mathscr{B}'$. Il est facile d'établir l'identité

$$\Lambda_y x' = \Lambda_y(0') + \Lambda_0 x'.$$

Nous poserons

$$\Lambda_y(0') = Gy\,, \quad \Lambda_0 x' = \Lambda x'\,.$$

On peut vérifier que G est linéaire.

À l'aide du nouvel axiome on peut établir les propositions suivantes:

Théorème 3. *L'application* D^p, *où* p *est un nombre naturel, est fermée.*

En particular: Si $\{x_n\}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{D}_p$, convergeante vers x et telle que

$$\mathrm{D}^p x_n = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

alors $x \in \mathscr{D}_p$ et $\mathrm{D}^p x = 0$.

Théorème 4. *Si* y *est un élément continu, il existe* $x \in \mathscr{D}$ *tel que* $\mathrm{D}x = y$.

Théorème 5. *Si* $y \in \mathscr{S}$ *et si* y *est analytique, tout élément* x *tel que* $\mathrm{D}x = y$, *est analytique.*

7. Nous avons donné, dans (M_1),[1]) le critère suivant d'analyticité, qui constitue la synthèse de tous les critères formulés au début de notre conférence:

Soit $\|G\| = \gamma$. Si $\gamma < 1$ et si l'on a, pour un élément $x \in \mathscr{S}$,

$$\|\mathrm{D}^n x\| < M\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

l'élément x est analytique.

À ce critère nous pouvons en ajouter un autre:

Théorème 6. *Si, pour un élément* $x \in \mathscr{S}$, *on a*

$$\varrho = \lim_n \sup \|\mathrm{D}^n x\|^{1/n} < \infty$$

et si $\|G\| < 1/\varrho$, *l'élément* x *est analytique.*

À l'aide de chacun de ces deux critères on peut démontrer le

Théorème 7. *Si* D *est parabolique simple et si* x *vérifie l'un des critères précédents d'analyticité, alors le développement de* $\mathrm{D}x$ *s'obtient à partir de celui de* x

$$x = x_0 + t x_1 + t^2 x_2 + \ldots + t^n x_n + \ldots$$

en dérivant formellement le second membre par rapport à t.

8. Les résultats précédents permettent d'esquisser une théorie des éléments généralisés (d'ordre fini) de $\mathscr{B}$ (par rapport à D), dans le cas où $\mathscr{B}$ est complet.

Posons à cet effet, les définitions suivantes:

Définition 4. La suite $\{x_n\}_{n\in N}$ d'éléments continus est fondamentale s'il existe un entier non négatif p tel que $\{G^p x_n\}_{n\in N}$ converge.

Définition 5. Deux suites fondamentales $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ soit équivalentes s'il existe un entier non négatif p tel que les suites $\{G^p x_n\}_{n\in N}$, $\{G^p y_n\}_{n\in N}$ convergent vers le même élément de $\mathscr{B}$.

Nous écrivons

$$\{x_n\} \sim \{y_n\}\,.$$

[1]) Voir (M_1), théorème IX, p. 360.

Il est facile de vérifier que la relation ainsi définie est une relation d'équivalence algébrique. Soit **R** cette relation. Nous poserons la

Définition 6. Tout élément de $\overline{\Pi}/\mathbf{R}$ est un élément généralisé de $\mathscr{B}$ (par rapport à D), ou une distribution de $\mathscr{B}$ (relativement à D).

Nous désignerons par x l'élément généralisé défini par la suite fondamentale $\{x_n\}$. Si cette dernière suite est une suite de Cauchy, elle converge vers un élément $x \in \overline{\Pi}$. Il est naturel donc d'identifier dans ce cas-là, la distribution engendrée par $\{x_n\}$ avec l'élément x.

9. Appelons, pour abréger, polynôme tout élément de Π. Si x est un élément généralisé, il existe un entier non négatif p, tel que la suite $\{G^p x_n\}_{n \in N}$ converge. Mois $G^p x_n \in \overline{\Pi}$. Il existe donc un polynome z_n tel que

$$\|G^p x_n - z_n\| < \frac{1}{n}.$$

Si $\lim_{n \to \infty} G^p x_n = u$, on peut écrire

$$\|u - z_n\| \leqq \|u - G^p x_n\| + \frac{1}{n},$$

donc la suite $\{z_n\}$ converge vers u. Ainsi:

Théorème 7. *Toute classe d'équivalence déterminée dans $\overline{\Pi}$ par la relation* **R** *contient une suite fondamentale de polynômes.*

Cette proposition va nous permettre de donner la

Définition 7. Si $\tilde{x}$ est un élément généralisé et si $\{\omega_n\}_{n \in E}$ est la suite fondamentale de polynomes engendrant $\tilde{x}$, la suite $\{D\omega_n\}_{n \in N}$, qui est fondamentale, définit un élément généralisé $\tilde{y}$ qu'on désignera par $D\tilde{x}$.

Ainsi donc, pour tout élément généralisé $\tilde{x}$, $D^p \tilde{x}$ a un sens, quel que soit p. Nous dirons, pour abréger, que $D\tilde{x}$ est la „dérivée" de $\tilde{x}$.

Notons, pour finir, qu'on peut introduire une définition de la limite pour les suites d'éléments généralisés et qu'on peut „dériver" terme à terme toute suite convergente d'éléments généralisés.

Bibliographie

[1] *Miron Nicolescu*: Sur quelques problèmes liés à l'opérateur itéré de la chaleur. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R., t. *1* (*49*) (1957), 327—336.

[2] *Miron Nicolescu*: Le problème de l'analyticité des fonctions réelles. Revue de Math. pures et appl., t. *2* (1957), 53—59.

[3] *Miron Nicolescu*: Problème de l'analyticité par rapport à un opérateur linéaire. Studia Mathematica, t. *16* (1958), 353—363.

[4] *J. Mikusiński*, *R. Sikorski*: The elementary theory of distributions. Warszawa 1957.