НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ВЛОЖЕНИИ

ЛЮДМИЛА КЕЛДЫШ

Москва

1.

Мы рассматриваем некоторые непрерывные разбиения E^n_f эвклидова пространства E^n на точки и континуумы и изучаем вопрос о вложении пространства разбиения $f(E^n)$ в эвклидово пространство E^m, где $m \geqq n$. Предполагается, что каждый невырожденный элемент ξ (т. е. содержащий более одной точки) разбиения E^n_f есть *клеточно вложенный в* E^n континуум.

Определение. Континуум $K \subset E^n$ называется клеточно вложенным в E^n, если во всякой его окрестности U найдется другая окрестность Q такая, что:

$$K \subset Q \subset \bar{Q} \subset U$$

и $\bar{Q}$ — замыкание Q есть n-мерный топологический куб. Такую окрестность Q мы называем *клеточной окрестностью* K.

Заметим, что из теорем доказанных М. Брауном [4] легко следует, что свойство континуума быть клеточно вложенным в E^n эквивалентно свойству быть точечно-подобным, т. е. дополнение к нему $E^n \setminus K$ гомеоморфно дополнению к точке $E^n \setminus \{p\}$.

Пусть P — множество $\{\xi\}$ всех невырожденных элементов разбиения E^n_f, а $P^* = f^{-1}(P) = \bigcup \xi$. Мы рассматриваем следующие случаи:

Случай a) P — компакт и $\dim P = 0$.

Случай b) P — произвольное счетное множество.

Бинг построил непрерывное разбиение пространства E^3 удовлетворяющее условию a) такое, что все невырожденные элементы — ручные простые дуги, а пространство разбиения $f(E^3)$ не вложимо в E^3 [1], и непрерывное разбиение E^3, удовлетворяющее условию b), где все невырожденные элементы разбиения — клеточно вложенные в E^n континуумы, а $f(E^3) \not\subset E^3$ [2].

Мы указываем достаточные условия для того, чтобы в случае a) или в случае b) имело место: $f(E^n) = E^n$, и показываем, что в обоих случаях a) и b) имеет место $f(E^n) \subset E^{n+1}$.

Определение. Множество $A \subset E^n$ называется *клеточно разделенным* в E^n, если для каждой его компоненты K в каждой ее окрестности U найдется клеточная окрестность Q такая что (гр. $Q) \cap A = \Lambda$. (Через гр. Q обозначается граница множества Q).

Рассмотрим сначала случай а).

2.

Теорема 1. *Пространство $f(E^n)$ непрерывного разбиения E^n на компоненты клеточного разделенного в E^n компакта P^* и точки $x \in E^n \setminus P^*$ гомеоморфно E^n.* Заметим что в случае $n = 3$ эта теорема следует из теоремы Харрольда [5].

Компакт P^* можно представить в виде:

$$P^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{R_k} U_r^k\,,$$

где $P^* \cap$ гр. $U_r^k = \Lambda$, $\overline{U}_r^k \subset U_\varrho^{k-1}$, и $\overline{U}_r^k \cap \overline{U}_{r'}^k = \Lambda$ для $r \neq r'$, причем U_r^k — область в E^n, вообще говоря, не клеточная. Каждая компонента ξ компакта P^* есть пересечение:

$$\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{r_k}^k\,; \quad \overline{U}_{r_k}^k \subset U_{r_{k-1}}^{k-1}\,.$$

В нашем случае в каждое покрытие $\{U_r^k\}$, $r = 1, 2, \ldots R_k$ компакта P^* можно вписать покрытие $\{Q_m^k\}$, $m = 1, \ldots M_k$, где каждый $\overline{Q}_m^k$ — топологический куб, (гр. $Q_m^k) \cap P^* = \Lambda$ и для каждой компоненты ξ найдется Q_m^k такой, что

$$\xi \subset Q_m^k \subset \overline{Q}_m^k \subset U_r^k\,.$$

При этом возможно $Q_m^k \cap Q_{m'}^k \neq \Lambda$ для некоторых m и m'. Рассматривая такие покрытия, можно построить последовательность гомеоморфизмов $\varphi_k : E^n \to E^n$ так, что для каждой компоненты ξ компакта P^*:

$$\operatorname{diam} \varphi_k(\xi) < 1/k$$

и последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ равномерно сходится к заданному непрерывному отображению $f : E^n \to E^n$.

Теорема 2. *Если $f(E^n)$ — пространство непрерывного разбиения E^n на точки и клеточно вложенные в E^n континуумы, которые являются компонентами компакта P^*, то $f(E^n) \subset E^{n+1}$.*

Для доказательства мы строим вложение (гомеоморфное отображение) Φ пространства E^n в E^{n+1} так, что множество $\Phi(P^*)$ клеточно разделено в E^{n+1}. Пространство непрерывного разбиения E_ψ^{n+1} пространства E^{n+1} на точки и компоненты $\Phi(P^*)$ в силу теоремы 1 гомеоморфно E^{n+1}. А непрерывное отображение $\Psi\Phi : E^n \to E^{n+1}$ топологически эквивалентно f, следовательно, $f(E^n) \subset E^{n+1}$.

Для построения вложения Φ мы определяем на E^n действительную функцию F так, что F постоянна на каждом элементе ξ разбиения и $F[\xi] \neq F[\xi']$, если $\xi \neq \xi'$. Положим $F[\xi] = t_\xi$. $\Phi(E^n)$ есть график функции F, т. е. множество точек $\{x, F(x)\}$, $x \in E^n$. Множество $\Phi(P^*)$ представимо в виде:

$$\Phi(P^*) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{R_{k+1}} \left(Q^k_{mx} \times i^{k+1}_r\right); \quad \overline{U}^{k+1}_r \subset Q^k_m$$

где $\overline{Q}^k_m$ топологический куб из покрытия $\{Q^k_m\}$, а $\bar{i}^{k+1}_r$ – сегмент оси Ot, причем

$$\bar{i}^{k+1}_m \cap \bar{i}^{k+1}_{r'} = \Lambda \quad \text{для} \quad m \neq m' \quad \text{и} \quad \bar{i}^{k+1}_m \subset \bar{i}^k_\varrho .$$

Следовательно, $\left(\overline{Q}^k_m \times \bar{i}^{k+1}_r\right) \cap \left(\overline{Q}^k_{m'} \times \bar{i}^{k+1}_{r'}\right) = \Lambda$ для $r \neq r'$ и $\Phi(\xi) = \xi \times t_\xi$ для $\xi \in P$.

3.

Аналогичные теоремы имеют место в случае b).

Теорема 3. *Пусть E^n_f непрерывное разбиение E^n на точки и счетное множество D континуумов ξ_i, причем множество $D^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} \xi_i$ клеточно разделено в E^n. Тогда $f(E^n)$ гомеоморфно E^n.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Пусть в условиях теоремы 3 $\overline{Q}$ – топологический n-мерный куб такой, что

$$D^* \cap \text{гр.}\ Q = \Lambda .$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфизм $\varphi : E^n \to E^n$ такой, что $\varphi(x) = x$ для $x \in E^n \setminus Q$, и $\operatorname{diam} \varphi(\xi_i) < \varepsilon$ для $\xi_i \subset Q$.

С помощью этой леммы строится последовательность гомеоморфизмов E^n на себя $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$, такая, что

$$\operatorname{diam} \varphi_k(\xi_i) < 1/k \quad \text{для} \quad \xi_i \in D ,$$

которая равномерно сходится к непрерывному отображению $f : E^n \to E^n$ определенному заданным непрерывным разбиением.

Теорема 4. *Пространство $f(E^n)$ непрерывного разбиения E^n на точки и счетное множество клеточно вложенных в E^n континуумов топологически вкладывается в E^{n+1}.*

Аналогично случаю теоремы 2, строится топологическое вложение Φ пространства E^n в E^{n+1} так, что множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(\xi_i)$ клеточно разделено в E^{n+1}. В силу теоремы 3, пространство $\Psi(E^{n+1})$ непрерывного разбиения E^{n+1} на точки и континуумы $\Phi(\xi_i)$ гомеоморфно E^{n+1}, а $\Psi\ \Phi(E^n)$ есть вложение $f(E^n)$ в E^{n+1}.

Для построения вложения Φ мы строим на E^n действительную функцию F так, что:

1. F постоянна на каждом ξ_i;

2. Для каждого ξ_i существует окрестность U_i в E^n такая, что $F(x) > F(x')$, если $x \in \xi_i$, $x' \in U_i \setminus \xi_i$. $\Phi(E^n)$ есть график функции F, т. е. множество точек $\{x, F(x)\}$, $x \in E^n$.

Пусть $F(\xi_i) = t_i$; в силу 2 имеем:

$$(U_i \times t_i) \cap \Phi(E^n) = \xi_i \times t_i .$$

Пусть Q — произвольная клеточная окрестность ξ_i содержащаяся в U_i. Граница области $Q \times t_i$ в гиперплоскости $t = t_i$ не пересекается в $\Phi(E^n)$. Следовательно, для достаточно малого $\varepsilon < 0$ топологическое произведение (гр. Q_i) $\times [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]$ также не пересекается с $\Phi(E^n)$. При этом, в силу 1) и счетности множества D, ε можно выбрать так, что гиперплоскости $t = t_i - \varepsilon$ и $t = t_i + \varepsilon$ не пересекают множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(\xi_i)$. Тогда

$$V = Q \times (t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$$

есть клеточная окрестность континуума $\xi_i \times t_i$ в E^{n+1}, причем

$$\text{(1)} \qquad (\text{гр. V}) \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(\xi_i)\Big) = \Lambda .$$

Так как Q произвольная клеточная окрестность ξ_i содрежащаяся в U_i, а ε — произвольное положительное число, то V — сколь угодно малая окрестность $\Phi(\xi_i)$ и (1) означает, что множество $\Phi(D^*)$ клеточно разделено в E^{n+1}.

4.

В заключение рассмотрим вопрос о вложении пространства непрерывного разбиения E^n на точки и *конечное число произвольных компактов*. Р. Г. Бинг и М. Л. Куртис [3] построили непрерывное разбиение E^3_f пространства E^3 на точки и девять окружностей такое, что пространство разбиения $f(E^3)$ не вложимо в E^4. Имеет место

Теорема 5. *Пространство непрерывного разбиения E^n на точки и конечное число произвольных компактов топологически вкладывается в E^{n+2}.*

Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_r$ — все невырожденные элементы разбиения E^n_f.

Мы строим топологическое вложение Φ пространства E^n в E^{n+2}, определив на E^n пару непрерывных функций $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $x \in E^n$, следующим образом:

$$\text{(2)} \qquad \varphi(x) = i/r \quad \text{для} \quad x \in K_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r\,; \quad 0 \leqq \varphi(x) \leqq 1\,.$$

$$\text{(3)} \qquad \psi(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \bigcup_{i=1}^{r} K_i\,; \quad 1 \geqq \psi(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \in E^n \setminus \bigcup_{i=1}^{r} K_i\,.$$

$\Phi(E^n)$ есть график этой системы функций в пространстве E^{n+2}, т. е. множество точек $\{x, \varphi(x), \psi(x)\}$, где $x \in E^n$. В силу (3) пересечение $\Phi(E^n)$ с $(n+1)$-мерной гиперплоскостью пространства E^{n+2} определенной уравнением $v = 0$ есть $\bigcup_{i=1}^{r} \Phi(K_i)$, где

$$\Phi(K_i) = K_i \times u_i\,, \quad u_i = i/r\,.$$

Для каждого компакта $\Phi(K_i)$ выберем содержащий его и лежащий в n-мерной гиперплоскости определенной уравнениями $u = u_i$, $v = 0$ n-мерный шар Δ_i^n.

$$\Phi(K_i) \subset \Delta_i^n .$$

В силу (3) имеем

$$\Phi(E^n) \cap \Delta_i^n = \Phi(K_i) . \tag{4}$$

Пусть E_ψ^{n+2} — непрерывное разбиение пространства E^{n+2} на точки и шары Δ_i^n. Очевидно, что $\Psi(E^{n+2}) = E^{n+2}$, следовательно, $\Psi\Phi(E^n) \subset E^{n+2}$. Но в силу (4) — на $\Phi(E^n)$ разбиение E_ψ^{n+2} индуцирует разбиение на точки и компакты $\Phi(K_i)$, т. е. оно топологически эквивалентно непрерывному разбиению E_f^n, следовательно, $\Psi\Phi(E^n)$ есть топологическое вложение $f(E^n)$ в E^{n+2}.

В силу теоремы Дайера [6] для непрерывного разбиения E_f^n пространства E^n на клеточно вложенные континуумы имеем всегда

$$\dim f(E^n) \leqq n .$$

Следовательно,

$$f(E^n) \subset E^{2n+1} .$$

Правдоподобно, однако, что $f(E^n)$ вложимо в пространство E^m, где m значительно меньше чем $2n + 1$.

Вопрос 1. В пространство E^m какой наименьшей размерности $m > n$ вложимо произвольное непрерывное разбиение E^n на точки и клеточно вложенные в E^n континуумы?

Вопрос 2. В пространство E^m какой наименьшей размерности $m > n$ вложимо всякое непрерывное разбиение E^n на точки и *нульмерное* множество P клеточно вложенных в E^n континуумов, если P некомпактно и несчетно?

Литература

[1] *R. H. Bing*: A decomposition of E^3 into points and tame arcs such that the decomposition space is topologically different from E^3. Ann. of Math., *65* (1957), 484—498.

[2] *R. H. Bing*: Point-like decompositions of E^3. Notices Am. Math. Soc. 7, *50* (1960), 576—144.

[3] *R. H. Bing* and *M. L. Curtis*: Imbedding decompositions of E^3 in E^4. Proc. Amer. Math. Soc., *11* (1960), 149—155.

[4] *M. Brown*: A proof of the generalized Schoenflies theorem. Bull. Am. M. S., *66* (1960), 74—76.

[5] *O. G. Harrold*: A sufficient condition that a monotone image of the three-sphere be a topological three-sphere. Proc. Am. Math. Soc., *9* (1958), 846—850.

[6] *E. Dyer*: Certain transformations which lower dimension. Ann. Math., *63* (1956), 15—19.