Bernhard Gramsch
Integration in topologischen Vektorräumen und lokal p-konvexen Algebren

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 147--155.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700894

INTEGRATION IN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN UND LOKAL p-KONVEXEN ALGEBREN

B. GRAMSCH

Mainz

In [1] wurde das Integrationsproblem für Funktionen mit Werten in einem lokalbeschränkten (p-normierten) Vektorraum gelöst: Es gibt eine Funktionenklasse, die alle vektorwertigen holomorphen Funktionen enthält, auf der das Integral einen stetigen Homomorphismus darstellt; andererseits existieren im Gegensatz zu lokalkonvexen Räumen stetige Funktionen auf [0, 1] mit Werten in l^p $(0 < p < 1)$, für die das Riemannsche Integral nicht existiert. Aus den dort entwickelten Methoden ergaben sich eine Reihe von Resultaten, z. B. der Funktionalkalkül für holomorphe Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen ([2]) sowie eine wesentliche Verschärfung ([5]) eines Satzes von Grothendieck über die vektorwertige Integration durch die Einführung des p-Tensorproduktes in [1]. D. Przeworska-Rolewicz und S. Rolewicz haben in der kürzlich erschienenen Arbeit [4] gezeigt, daß die Riemannschen Zwischensummen gewisser Funktionen mit Werten in einem vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorraum konvergieren, ohne dabei aber eine Topologie einzuführen. Mit der Tensorproduktmethode von [1] und [2] läßt sich das Integral als topologischer Homomorphismus gewinnen, und es ergibt sich sofort, daß das Integral einer Funktionenreihe (vgl. Satz 1.4) mit der gliedweise integrierten Reihe identisch ist. Im 2. Abschnitt zeigen wir, wie sich diese Integrationsmethode auf Funktionen mit Werten in einem topologischen Vektorraum übertragen läßt und wenden dies dann auf vektorwertige holomorphe Funktionen an. Im letzten Abschnitt gewinnen wir den Funktionalkalkül für holomorphe Funktionen auf dem Spektrum eines Elementes einer lokal p-konvexen Algebra mit stetigen Inversen, deren Topologie durch ein System submultiplikativer p_α-Halbnormen, $0 < p_\alpha \leqq 1$, q_α gegeben ist.

1. Integration von Funktionen mit Werten in einem metrisierbaren topologischen Vektorraum

Sei $\mathscr{E}$ ein vollständiger metrisierbarer topologischer Vektorraum und $q(x)$, $x \in \mathscr{E}$, die auf $\mathscr{E}$ gegebene F-Norm; q hat folgende Eigenschaften:

1) $q(x) > 0$ für $x \neq 0$,
2) $q(x + y) \leqq q(x) + q(y)$,
3) $q(\lambda x) \leqq q(x)$ für $|\lambda| \leqq 1$,
4) $\lim_{n \to \infty} q(x/n) = 0$ für alle x.

Auf dem algebraischen Tensorprodukt $\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}$ des Raumes $\mathscr{E}$ mit dem Banachraum $\mathscr{F}$ führen wir eine F-Norm ein: Sei $u \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{F}$; dazu definieren wir

$$\tilde{q}(u) = \inf \{ \sum_{i=1}^{n} q(x_i \|y_i\|) \} ,$$

wobei sich das Infimum über alle endlichen Darstellungen $\sum_i x_i \otimes y_i$ von u erstreckt.

Lemma 1.1. *$\tilde{q}$ ist eine F-Norm auf $\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}$, und es gilt*

$$\tilde{q}(x \otimes y) = q(x\|y\|) .$$

Beweis. zu 1) Wir setzen die Abbildung $(x, y) \to xy'(y)$ für festes y' aus dem dualen Raum $\mathscr{F}'$ von $\mathscr{F}$ auf das Tensorprodukt fort $:\sum_i x_i \otimes y_i \to \sum_i x_i y'(y_i) \in \mathscr{E}$. Ist nun $u = \sum_i x_i \otimes y_i \neq 0$, so gilt $0 < q\,(\sum_i x_i y'(y_i)) \leqq \sum_i q(x_i y'(y_i)) \leqq \sum_i q(x_i\|y_i\|)$, falls $\|y'\| \leqq 1$, $y' \in E'$, $y'(y_1) \neq 0$ und sowohl die x_i als auch die y_i linear unabhängig sind; in den beiden letzten Ungleichungen kann man zum Infimum über alle Darstellungen von u übergehen, so daß 1) gezeigt ist. 2), 3) und 4) sind klar. Zu $\tilde{q}(x \otimes y) = q(x\|y\|)$: Zunächst gilt $\tilde{q}(x \otimes y) \leqq q(x\|y\|)$. Umgekehrt sei $\|y'\| = 1$ $y'(y) = \|y\|$, dann erhält man $q(x\|y\|) = q(xy'(y)) = \sum_i q(x_i y'(y_i)) \leqq \sum_i q(x_i\|y_i\|)$ für alle Darstellungen $\sum_i x_i \otimes y_i = x \otimes y$.

Satz 1.2. *$\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{F}$ sei die vollständige Hülle von $\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}$ bzgl. $\tilde{q}$. Die auf $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{F}$ fortgesetzte F-Norm bezeichnen wir wieder mit $\tilde{q}$. Für jedes $u \in \mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{F}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Folgen $\{x_i\} \subset \mathscr{E}$ und $\{y_i\} \subset \mathscr{F}$ mit*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} q(x_i\|y_i\|) \leqq \tilde{q}(u) + \varepsilon .$$

Es gilt also

$$\tilde{q}(u) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} q(x_i\|y_i\|) : u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i,\ x_i \in \mathscr{E},\ y_i \in \mathscr{F} \} .$$

Beweis. Zu $u \in \mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{F}$ gibt es eine Folge $u_n \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{F}$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ und $\tilde{q}(u_n - u) < \varepsilon/2^{n+2}$, womit man $\tilde{q}(u_n - u_m) < \varepsilon/2^{n+1}$ für $n \leqq m$ hat. u läßt sich darstellen in der Form $u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots$, u_1 besitzt eine Darstellung

$$u_1 = \sum_{i=1}^{k_1} x_i^{(1)} \otimes y_i^{(1)}, \quad \sum_{i=1}^{k_1} q(x_i^{(1)}\|y_i^{(1)}\|) \leqq \tilde{q}(u_1) + \frac{\varepsilon}{4},$$

und ebenso für $n \geqq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{i=1}^{k_{n+1}} x_i^{(n+1)} \otimes y_i^{(n+1)}, \quad \sum_{i=1}^{k_{n+1}} q(x_i^{(n+1)}\|y_i^{(n+1)}\|) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

so daß wir

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} x_i^{(n)} \otimes y_i^{(n)}$$

mit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} q(x_i^{(n)}\|y_i^{(n)}\|) \leqq \tilde{q}(u_1) + \tfrac{1}{4}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \leqq \tilde{q}(u_1 - u) + \tilde{q}(u) + \tfrac{3}{4}\varepsilon \leqq \tilde{q}(u) + \varepsilon$$

erhalten.

Ist y' eine beschränkte Linearform auf $\mathscr{F}$, so läßt sich die durch $(x, y) \to xy'(y)$ auf $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ gegebene stetige bilineare Abbildung $B_{y'} : \mathscr{E} \times \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ zu einer stetigen linearen Abbildung von $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{F}$ in (auf) $\mathscr{E}$ fortsetzen.

$\mathscr{C}(K)$ sei der Banachraum der reell- oder komplexwertigen stetigen Funktionen auf einer kompakten, im Jordanschen Sinne meßbaren Teilmenge $K \subset \mathscr{R}^n$, $\|f\| = \max_{t\in K} |f(t)|$, $f \in \mathscr{C}(K)$. $\sum(K, \mathscr{E})$ sei die Menge der Abbildungen $F : K \to \mathscr{E}$, die sich in der Form $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(t)$, $t \in K$, $x_k \in \mathscr{E}$, $f_k \in \mathscr{C}(K)$ darstellen lassen, wobei $\sum_{k=0}^{\infty} q(x_k\|f_k\|) < \infty$ erfüllt ist; auf dem linearen Raum $\sum(K, \mathscr{E})$ definieren wir eine Metrik

$$\bar{q}(F) = \inf\{\sum_{k=0}^{\infty} q(x_k\|f_k\|)\},$$

wobei sich das Infimum über alle Darstellungen $\sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(t)$ von $F(t)$ erstreckt. Es ist leicht zu sehen, daß $\bar{q}$ die obigen Eigenschaften 1) bis 4) hat. Der Raum $\sum(K, \mathscr{E})$ war für p-Normen, $q(\lambda x) = |\lambda|^p q(x)$, $0 < p \leqq 1$, der Ausgangspunkt der Integrationstheorie in [1] u. [2], womit man eine geeignete Menge im Riemannschen Sinne integrierbarer Funktionen gewonnen hatte.

Satz 1.3. *Der lineare Raum $\sum(K, \mathscr{E})$ versehen mit der Metrik $\bar{q}$ ist zum topologischen Tensorprodukt $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{C}(K)$ topologisch isomorph, also insbesondere vollständig.*

Beweis. Die durch $\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes f_k \to \sum_{k=1}^{n} x_k f_k(t)$ gegebene Abbildung von $\mathscr{E} \otimes \mathscr{C}(K)$ in $\sum(K, \mathscr{E})$ ist stetig und injektiv, sie läßt sich auf $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{C}(K)$ fortsetzen. Damit erhalten wir die Zuordnung $\sum_{k=0}^{\infty} x_k \otimes f_k \to F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(t) \in \sum(K, \mathscr{E})$. Wir zeigen nun, daß der Kern dieser Abbildung nur aus dem Nullelement besteht. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(t) \equiv 0$ auf K, dann erhalten wir mit einer der Überdeckung $\{U_i\}$ von K zugeordneten Zerlegung $\{\varphi_i(t)\}$ der Einheit $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(\xi_i))\,\varphi_i(t) = 0$, $\xi_i \in U_i$, in $\mathscr{E} \otimes \mathscr{C}(K)$. Durch Summationsvertauschung in $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{C}(K)$ gewinnt man

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(f_k - \sum_{i=1}^{n} f_k(\xi_i))\,\varphi_i(t), \quad \xi_i \in U_i.$$

Hieraus folgt mit $\|f_k\| = 1$

$$\tilde{q}(F) \leqq \sum_{k=0}^{N} q(x_k\|(f_k - \sum_{i=1}^{n} f_k(\xi_i))\,\varphi_i(t)\|) + \sum_{k=N+1}^{\infty} q(2x_k) \leqq \sum_{k=0}^{N} q(x_k\delta) + \sum_{k=N+1}^{\infty} q(2x_k),$$

wenn die Überdeckung so gewählt ist, daß die Schwankung der f_k $(k = 0, 1, \ldots, N)$ auf jedem einzelnen U_i höchstens δ ist. Es gilt also $\tilde{q}(F) = 0$, womit wegen Satz 1.2. die Behauptung bewiesen ist.

Unter dem Integral einer Funktion $F(t) \in \sum(K, \mathscr{E}) \cong \mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{C}(K)$ verstehen wir die von der bilinearen Abbildung $(x, f) \to x \int_K f(t)\,\mathrm{d}\mu$, wobei μ das Jordanmaß auf K ist, induzierte stetige lineare Abbildung von $\mathscr{E} \otimes \mathscr{C}(K)$ auf $\mathscr{E}$. Eine auf K gegebene punktweise erklärte Funktion $F(t)$ mit Werten in $\mathscr{E}$ nennen wir im Riemannschen Sinne integrierbar, wenn die Riemannschen Zwischensummen bei Verfeinerung der Unterteilung konvergieren, den Grenzwert bezeichnen wir mit $\int_K F(t)\,\mathrm{d}\mu$.

Satz 1.4. 1) *Jede Funktion* $F(t) \in \sum(K, \mathscr{E})$ *ist im Riemannschen Sinne integrierbar* ([4]).

2) *Ist* $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(t)$, *so gilt* $\int_K F(t)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \int_K f_k\,\mathrm{d}\mu$ *und* $q(\int_K F(t)\,\mathrm{d}\mu) \leqq \leqq q(\tilde{F})$, $\mu(K) = 1$;

3) *Das Integral ist unabhängig von der speziellen Reihenentwicklung, es läßt sich jeweils durch gliedweiss Integration angeben.*

4) *Konvergiert die Folge* $f_n \in \mathscr{C}(K)$ *gegen* 0, *so gilt dies auch für die Folge* $\int_K f_n(t)\, F(t)\,\mathrm{d}\mu$.

5) *Das Riemannsche Integral ist identisch mit der durch die bilineare Abbildung* $(x, f) \to x \int_K f\,\mathrm{d}\mu$ *induzierten stetigen linearen Abbildung von* $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{C}(K)$ *in* $\mathscr{E}$.

Beweis. Sei $\{K_i\}_{i=1}^n$ eine Unterteilung von K in Jordanmeßbare Mengen. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\mu(K_i) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(\xi_i)\Big)\,\mu(K_i)\,, \quad \xi_i \in K_i\,,$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \Big(\sum_{i=1}^{n} f_k(\xi_i)\,\mu(K_i)\Big)\,,$$

denn diese Umordnung ist wegen $F(t) \in \sum(K, \mathscr{E})$ erlaubt.

Wir zeigen nun die Konvergenz der Riemannschen Zwischensummen gegen $\sum_{k=0}^{\infty} x_k \int_K f_k\,\mathrm{d}\mu$ bei Verfeinerung der Unterteilung;

$$q\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \int_K f_k\,\mathrm{d}\mu - \sum_{k=0}^{\infty} x_k\Big(\sum_{i=1}^{n} f_k(\xi_i)\,\mu(K_i)\Big)\right) \leqq$$
$$\leqq q\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k\left(\int_K f_k\,\mathrm{d}\mu - \sum_{i=1}^{n} f_k(\xi_i)\,\mu(K_i)\right)\right) +$$
$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} q(x_k \|f_k\|\,\mu(K)) + \sum_{k=N+1}^{\infty} q\Big(x_k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\mu(K_i)\Big) \leqq$$
$$\leqq \underbrace{\sum_{k=0}^{N} q\left(x_k \left|\int_K f_k\,\mathrm{d}\mu - \sum_{i=1}^{n} f_k(\xi_i)\,\mu(K_i)\right|\right)}_{(*)} + \underbrace{2 \sum_{k=N+1}^{\infty} q(x_k \|f_k\|\,\mu(K))}_{(**)}$$

N sei so gewählt, daß (**) klein ist; aufgrund der Dreiecksungleichung sieht man, daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu(K) = 1$ gesetzt werden kann. Halten wir nun N fest und lassen das Maximum des Durchmessers der K_i gegen 0 gehen, so wird auch (*) beliebig klein. Die Aussagen 2) und 3) sind klar. 4) gewinnt man durch Einsetzen aus der Abschätzung unter 2). Aus den Eigenschaften des Tensorproduktes ergibt sich nun auch 5) wegen der Möglichkeit der gliedweisen Integration.

Das Riemannsche Integral ist also ein topologischer Homomorphismus von $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{C}(K)$ auf $\mathscr{E}$. Es wird besonders darauf hingewiesen, daß wegen Satz 1.3. die wichtige Aussage 3) in obigem Satz von der Existenz des Riemannschen Integrals unabhängig ist. Die Abbildung $\int : \sum(K, \mathscr{E}) \to \mathscr{E}$ ist noch bezüglich einer wesentlich schwächeren F-Norm auf $\sum(K, \mathscr{E})$ stetig. Sei $\|f\|_1 = \int_K |f(t)| \, d\mu$ und $q_1(F) = \inf \{ \sum_{k=0}^{\infty} q(x_k \|f_k\|)\}$, wobei sich das Infimum über Darstellungen $\sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(t) = F(t)$ mit $\sum_k q(x_k \|f_k\|) < \infty$ erstreckt. Wir erhalten

$$q\left(\int_K F(t) \, d\mu\right) \leqq q_1(F) ,$$

daher läßt sich das Integral auf die vollständige Hülle $\overline{\sum(K, \mathscr{E})}^{q_1}$ von $\sum(K, \mathscr{E})$ bzgl. q_1 fortsetzen. Für p-normierte Räume $\mathscr{E}$ wurde in [2] unter Verwendung des Hauptresultates in [5] ($\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{L}^1(K)$ ist ein Funktionenraum) gezeigt, daß der so entstandene Raum ein Raum fast überall erklärter Funktionen mit Werten in $\mathscr{E}$ ist; auf diese Weise gelangt man also zu einer Integrationstheorie im Lebesgueschen Sinne. Auch für F-normierte Räume $\mathscr{E}$ läßt sich mit den Methoden in [5] zeigen, daß $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{L}^{\infty}(K)$ ein Funktionenraum ist, für $\mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{L}^1(K)$ ist es aber bisher nicht bekannt.

2. Integration stetiger Funktionen mit Werten in einem topologischen Vektorraum

Die Topologie eines topologischen Vektorraumes $\mathscr{E}$ kann durch ein System von F-Halbnormen q_α, $\alpha \in A$, gegeben werden. Mit $\sum(K, \mathscr{E})$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Funktionen $F(t)$ auf K mit Werten in dem folgenvollständigen topologischen Vektorraum $\mathscr{E}$, deren Restklassen Funktionen $F_\alpha(t)$ mit Werten in $\mathscr{E} = \mathscr{E}/\mathscr{N}_\alpha$, $\mathscr{N}_\alpha = \{x \in \mathscr{E}, \, q_\alpha(x) = 0\}$, in $\sum(K, \mathscr{E}_\alpha)$ (vgl. vor Satz 1.3.) liegen. Damit haben wir auf $\sum(K, \mathscr{E})$ auch eine Schar von F-Halbnormen $\tilde{q}_\alpha$ für die

$$q_\alpha(\sum F(t_i) \, \Delta_i) \leqq \tilde{q}_\alpha(F) , \quad \sum_i |\Delta_i| \leqq 1 ,$$

erfüllt ist. Das Riemannsche Integral für Funktionen aus $\sum(K, \mathscr{E})$ existiert, wie man aufgrund von Satz 1.4. sieht und ist bzgl. der auf $\sum(K, \mathscr{E})$ durch das System $\{\tilde{q}_\alpha\}$ gegeben Topologie stetig.

3. Vektorwertige holomorphe Funktionen

Definition 3.1. *G sei ein Gebiet in der komplexen Ebene und $F(z)$ eine stetige Abbildung von G in den vollständigen F-normierten Raum $\mathscr{E}$. $F(z)$ heißt holomorph auf G, wenn es zu jedem $z_0 \in G$ eine Umgebung $U(z_0)$ gibt, so daß $F(z) = \sum_k x_k f_k(z)$ auf $U(z_0)$ mit $x_k \in \mathscr{E}$, $\sum_{k=0} q(x_k \|f_k\|) < \infty$, wobei die skalaren Funktionen $f_k(z)$ holomorph auf $\overline{U(z_0)}$ sind.* ($\|f_k\| = \sup_{z \in U(z_0)} |f(z)|$).

Die Menge der auf G holomorphen Funktionen mit Werten in $\mathscr{E}$ bezeichnen wir mit $\mathscr{H}(G, \mathscr{E})$.

Satz 3.2. *Ist G einfach zusammenhängend, Γ eine geschlossene Kurve endlicher Länge und $F(z) \in \mathscr{H}(G, \mathscr{E})$, so gilt*

$$\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Beweis. Lokal ist dies wegen 3.1. nach gliedweiser Integration klar. Global folgt es durch Triangulierung nach 1.4. 3).

Satz 3.3. *Ist Γ eine einfach geschlossene Kurve endlicher Länge im einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathscr{C}$ und $F(z) \in \mathscr{H}(G, \mathscr{E})$, so gilt für z_0 aus dem Innern des von Γ umschlossenen Gebietes*

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\,.$$

Beweis. Dies folgt aus 3.2. vermöge einer Entwicklung von F um z_0 durch gliedweise Integration.

Aus Satz 3.3. kann man nun die Entwickelbarkeit von $F(z)$ in eine Potenzreihe im größten in G enthaltenen Kreis um z_0 gewinnen, wenn man 1.4. 4) benützt.

Satz 3.4. *Sei $F(z) \in \mathscr{H}(G, \mathscr{E})$ und K eine in G enthaltene kompakte Menge, dann gibt es zwei Folgen $\{x_k\} \subset \mathscr{E}$ und $\{f_k\} \subset \mathscr{H}(G', \mathscr{C})$, $K \subset G' \subset \bar{G}' \subset G$, $\bar{G}'$ kompakt, so daß sich $F(z)$ in der Form*

$$F(z) = \sum_k x_k f_k(z) \quad \mathit{mit} \quad \sum_k q(x_k \|f_k\|_K) < \infty$$

darstellen läßt, wobei $\|f_k\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$.

Beweis. $\bar{G}'$ läßt sich durch endlich viele Umgebungen $U_i(z_i)$, $z_i \in \bar{G}'$, überdecken, auf denen $F(z)$ die in 3.1. gegebenen Entwicklungen hat. Nun wählen wir eine der Überdeckung $\{U_i\}$ zugeordnete Zerlegung $\{\varphi_i\}$ der Einheit auf $\bar{G}'$: $F(z) = (\sum_{i=1}^n \varphi_i(z))\,F(z)$; hiermit erhalten wir nun eine Funktion aus $\sum(\bar{G}', \mathscr{E}) = \mathscr{E} \tilde{\otimes} \mathscr{C}(\bar{G}')$: $F(z) = \sum_{k=0}^\infty x_k\, g_k(z)$, $g_k(z) \in \mathscr{C}(\bar{G}')$. Γ sei der rektifizierbare Rand von G'.

Es gilt für $z_0 \in K$

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \frac{g_k(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} x_k \int_{\Gamma} \frac{g_k(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\ ;$$

$$f_k(z) = \int_{\Gamma} \frac{g_k(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

ist aber auf G holomorph.

Nun wenden wir uns wieder folgenvollständigen topologischen Vektorräumen $\mathscr{E}$ zu.

Definition 3.5. *Eine Abbildung $F : G \to \mathscr{E}$ heißt holomorph,* (vgl. 2. Abschnitt) *falls die Restklassenfunktionen $F_\alpha(z)$ auf G holomorph sind.*

Auch in diesem Fall sind die Sätze 3.3. und 3.4. richtig, denn bei Anwendung jeder F-Halbnorm q_α, $\alpha \in A$, sind sie erfüllt.

Ein topologischer Vektorraum heißt lokal p-konvex, wenn seine Topologie durch ein System $\{q_\alpha\}$ von p_α-Halbnormen, $\alpha \in A$, $0 < p_\alpha \leqq 1$, gegeben wird. ($q_\alpha(x) \geqq 0$, $q_\alpha(\lambda x) = |\lambda|^{p_\alpha} q_\alpha(x)$, $q_\alpha(x + y) \leqq q_\alpha(x) + q_\alpha(y)$).

Satz 3.6. *$\mathscr{E}$ sei ein lokal p-konvexer folgenvollständiger topologischer Vektorraum und $F(z)$ eine im Innern des Kreises $K(z_0)$ holomorphe Funktion mit Werten in $\mathscr{E}$. Dann läßt sich $F(z)$ auf dem Innern von $K(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln, die im Innern von $K(z_0)$ bezüglich jeder p_α-Halbnorm q_α gleichmäßig absolut konvergiert.*

Beweis. Sei Γ' der Rand eines echt in $K(z_0)$ enthaltenen Kreises $K'(z_0)$ um den Mittelpunkt z_0 und z aus dem Innern von $K'(z_0)$. Dann gilt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

$F_\alpha(z)$ liegt in $\sum(\Gamma', \mathscr{E}_\alpha)$ und hat die p_α-Norm $\tilde{q}_\alpha(F_\alpha)$.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

(vgl. [1], 5).

Ferner gilt

$$\tilde{q}_\alpha\left(\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\right) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\right|^{p_\alpha} \tilde{q}_\alpha(F)\ ;$$

daraus folgt mit

$$q_\alpha\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right) \leqq \left|\frac{1}{2\pi i}\right|^{p_\alpha} \frac{\tilde{q}_\alpha(F)}{|\zeta - z_0|^{(k+1)p_\alpha}} |\Gamma'|^{p_\alpha}\,,$$

wobei $|\Gamma'|$ die Länge von Γ' ist, die absolute Konvergenz der Potenzreihenentwicklung von $F(z)$ im Innern von $K(z_0)$.

4. Anwendung auf lokal p-konvexe Algebren

Nun sei $\mathscr{E}$ eine folgenvollständige, kommutative topologische Algebra mit Einselement e, deren Topologie durch ein System $\{q_\alpha\}$ submultiplikativer p_α-Halbnormen, $0 < p_\alpha \leqq 1$, gegeben ist $(q_\alpha(xy) \leqq q_\alpha(x)\, q_\alpha(y),\ q_\alpha(e) = 1)$; $\mathscr{E}$ habe ferner stetige Inversen (vgl. [3], § 8.3).

Beispiel: Sei $\mathscr{W}^{\frac{1}{2}+}$ die Menge der Funktionen auf $[-\pi, +\pi]$, die sich in der Form $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$ darstellen lassen, wobei

$$q_\alpha(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^{p_\alpha} < \infty\,, \quad \tfrac{1}{2} < p_\alpha \leqq 1\,.$$

Das Spektrum $\sigma(x)$ von $x(t)$ fällt mit dem Wertebereich von $x(t)$ zusammen, und $\mathscr{W}^{\frac{1}{2}+}$ ist eine Algebra mit stetigen Inversen; dies kann man aufgrund der Ergebnisse in [7], § 6, einsehen. Die Submultiplikativität von q_α ist klar.

Żelazko hat in [7] für solche Algebren den Satz von Gelfand und Mazur bewiesen ohne die Verwendung des Integrals, das allerdings die Beweise erheblich vereinfacht.

Satz 4.1. *Sei $x \in \mathscr{E}$, $\mathscr{H}(\sigma(x))$ die Menge der auf dem Spektrum $\sigma(x)$* ([6], S. 159) *von x holomorphen Funktionen. Es gibt genau einen folgenstetigen multiplikativen Homomorphismus Φ mit $\Phi(1) = e$, $\Phi(z) = x$, der $\mathscr{H}(\sigma(x))$ in $\mathscr{E}$ abbildet; dieser Homomorphismus Φ ist durch*

$$(*) \qquad \Phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (ze - x)^{-1} f(z)\, dz$$

gegeben, wobei Γ ein das Spektrum $\sigma(x)$ umschließendes geeignetes Kurvensystem ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß durch (*) ein multiplikativer Homomorphismus gegeben ist. Die Linearität ist klar, denn das Integral über $(ze - x)^{-1} f(z)$ existiert, da $\mathscr{E}/\mathscr{N}_\alpha$, $\mathscr{N}_\alpha = \{x \in E,\ q_\alpha(x) = 0\}$ eine vollständige lokal beschränkte Algebra ist, und demnach die $(ze - x)^{-1}$ zugeordnete Restklassenfunktion in $\sum(\Gamma, \mathscr{E}_\alpha)$ enthalten ist ([1], Satz 2.1.). Für $\mathscr{E}_\alpha$ gilt nach [1] der Funktionalkalkül. Nun haben wir zu zeigen $\Phi(fg) = \Phi(f)\, \Phi(g) : q_\alpha(\Phi(fg) - \Phi(f)\, \Phi(g)) = q_\alpha(\Phi_\alpha(fg) - \Phi_\alpha(f)\, \Phi_\alpha(g)) = 0$ für alle α.

Die Eindeutigkeit gewinnt man vermöge der Folgenstetigkeit in bekannter Weise aus dem Satz von Runge.

Wie in [6] und [2] kann man auch den Funktionalkalkül für Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen erhalten, indem man die Resultate für lokalbeschränkte Algebren in [2] benützt.

L. Waelbroeck hat mit mitgeteilt, daß er im Anschluß an [1] den Funktionalkalkül für lokal p-konvexe Algebren mit stetigen Inversen ohne die Annahme der Submultiplikativität der die Topologie erzeugenden p_α-Halbnormen erhalten hat.

Literatur

[1] *B. Gramsch:* Integration und holomorphe Funktionen in lokalbeschränkten Räumen. Math. Ann. *162* (1965), 190—210.

[2] *B. Gramsch:* Funktionalkalkül mehrerer Veränderlichen in lokalbeschränkten Algebren. Habilitationsschrift Mainz 1966 (erscheint in Math. Ann.).

[3] *M. A. Neumark:* Normierte Algebren. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.

[4] *D. Przeworska-Rolewicz and S. Rolewicz:* On integrals of functions with values in a complete linear metric space. Studia Math. *26* (1966), 121—131.

[5] *D. Vogt:* Integrationstheorie in p-normierten Räumen. Erscheint in Math. Ann.

[6] *L. Waelbroeck:* Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. J. math. pures appl. *33* (1954), 147—186.

[7] *W. Żelazko:* On locally bounded and m-convex topological algebras. Studia Math. *19* (1960), 333—356.