# BEZIEHUNGEN ZWISCHEN GEWISSEN TOPOLOGIEN IN NOETHERSCHEN RINGEN

L. BUDACH

Berlin

Jeder Oberring $B$ eines kommutativen Ringes $A$ definiert eine Topologie in $A$ als Einschränkung der natürlichen Topologie von $B$ auf $A$ (siehe dazu etwa [1], [2]). Allgemeiner definiert jede $(F, A)$-Funktion $v$ (siehe [3]) eine Topologie in $A$, indem man als Umgebungen der Null alle Ideale $v(\mathfrak{f})$ mit $\mathfrak{f} \in F$ betrachtet. Man erkennt bereits aus diesen Andeutungen, dass die Betrachtung des Verbandes aller Lineartopologien von $A$ gewisse Rückschlüsse auf die realen und idealen Erweiterungen von $A$ erlaubt (Ein Beispiel für Untersuchungen dieser Art im Spezialfall der Grellschen Ringe wurde in [1], [2] gegeben). Die vorliegende Arbeit ist vor allem der Aufgabe gewidmet, einem Einblick in die Struktur des Verbandes aller Lineartopologien zu gewinnen. Das geschieht, indem man gewisse Lineartopologien, nämlich die einbettungsfreien auszeichnet und die Struktur der Halbordnung aller einbettungsfreien Lineartopologien eines Noetherschen Ringes $A$ aufklärt. In einer späteren Arbeit werden die dabei gewonnenen Ergebnisse auf die Erweiterungstheorie von Noetherschen Ringen angewendet werden.

**1.** Alle in dieser Arbeit betrachteten Ringe sind kommutativ und besitzen ein Einselement. Im übrigen werden alle Begriffe, wie Idealfilterbasis, Idealfilter, $F < G$, $F \triangleq G$, $BF$, $F \cap A$, $\bar{F}$, $V(F)$, $I(X)$ usw. in der gleichen Bedeutung verwendet wie in der Arbeit [3], die im folgenden mit QUE zitiert wird[1]). Jede Idealfilterbasis $F$ eines Ringes $A$ definiert eine Lineartopologie in $A$ (die Umgebungen der Null sind die Ideale aus $F$), die ebenfalls mit $F$ bezeichnet wird. Zwei Idealfilterbasen $F$ und $G$ definieren genau dann die gleiche Topologie in $A$, wenn $\bar{F} = \bar{G}$ ist, d. h. die induzierten Idealfilter übereinstimmen. Die Menge aller Lineartopologien, oder gleichbedeutend damit, die Menge aller Idealfilter bildet einen vollständigen modularen Verband **Top** $A$. Ist $\{F_i;\ i \in I\}$ eine Menge von Idealfiltern so ist $\sup F_i = \sum F_i = \bigcap F_i$ und $\inf F_i$ dasjenige Idealfilter, das durch die Filterbasis aller Durchschnitte von endlich vielen Idealen aus $\bigcup F_i$ erzeugt wird. Das grösste Element dieses Verbandes ist die Topologie $A = \{A\}$ das kleinste Element die Topologie $0 = \{\bar{0}\}$. Ist $F \in$ **Top** $A$ so bezeichne **Top** $(A \parallel F)$ den Verband aller $G \in$ **Top** $A$ mit $F < G$, d. h. $G \subseteq F$. Ist $X$ eine Teilmenge von $A$, $F$ eine Idealfilterbasis, so bezeichne in Abweichung

[1]) Siehe auch den Vortrag von Haße auf diesem Symposium.

von QUE (3.2.3) $F\mathscr{C}X$ die topologische Abschliessung von $X$ bezüglich der durch $F$ definierten Lineartopologie. Bekanntlich ist $F\mathscr{C}X = \bigcap_{\mathfrak{f}\in F} X + \mathfrak{f}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $A$ und $F$ ein Idealfilter, so ist $F\mathscr{C}\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{f}\in F} \mathfrak{f}$.

**2.** Sei $H$ eine Halbordnung und $\{X_h;\ h\in H\}$ eine mit $H$ indizierte Menge von Halbordnungen $X_h$ die jeweils ein grösstes Element $1_h$ besitzen. Eine Funktion $h \rightsquigarrow x_h$, $x_h \in X_h$ heisse eine Schicht, wenn für $h, g \in H$ mit $h \lneqq g$ stets gilt $x_h = 1_h$ oder $x_g = 1_g$. Die Menge aller Schichten bildet eine Unterhalbordnung des direkten Produktes $\mathbf{X}\{X_h;\ h\in H\}$ aller $X_h$. Diese Unterhalbordnung bezeichnen wir als *Schichtprodukt* $\mathbf{S}\{X_h;\ h\in H\}$ der Halbordnungen $X_h$ bezüglich $H$.

**3.** Ein Ideal von $A$ heisse einbettungsfrei, wenn es Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten ist. Eine Lineartopologie $F$ heisse einbettungsfrei, wenn es eine zu $F$ äquivalente Idealfilterbasis von einbettungsfreien Idealen gibt. Die Halbordnung (die im allgemeinen kein Verband ist) aller einbettungsfreien Topologien, die gröber als eine Topologie $F$ sind, bezeichnen wir mit $\mathbf{Top}^e\,(A \parallel F)$ und wir setzen $\mathbf{Top}^e\,A = \mathbf{Top}^e\,(A \parallel 0)$. Die Struktur der Halbordnungen $\mathbf{Top}^e\,A$ und $\mathbf{Top}^e\,(A \parallel F)$ wird durch den folgenden Satz beschrieben:

**4. Hauptsatz.** *Sei $A$ ein Noetherscher Ring. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A$ bezeichne $A_\mathfrak{p}$ den Quotientenring nach $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ das Maximalideal von $A_\mathfrak{p}$ und $\langle\mathfrak{m}_\mathfrak{p}\rangle$ die $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$-adische Topologie, die durch die Potenzen von $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ in $A_\mathfrak{p}$ definiert wird. Sei schliesslich $F$ eine Lineartopologie in $A$, so gibt es Isomorphien*

$$\mathbf{Top}^e\,A \simeq \mathbf{S}\{\mathbf{Top}\,(A_\mathfrak{p} \parallel \langle\mathfrak{m}_\mathfrak{p}\rangle)\,;\quad \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A\}$$
$$\mathbf{Top}^e\,(A \parallel F) \simeq \mathbf{S}\{\mathbf{Top}\,(A_\mathfrak{p} \parallel \langle\mathfrak{m}_\mathfrak{p}\rangle)\,;\quad \mathfrak{p}\in V(F)\}\,.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A$, $F \in \mathbf{Top}^e\,A$ so setzen wir

$$l_\mathfrak{p}F = A_\mathfrak{p} \quad \text{für} \quad \mathfrak{p}\notin \min V(F)$$
$$l_\mathfrak{p}F = A_\mathfrak{p}F \quad \text{für} \quad \mathfrak{p}\in \min V(F)$$

Die Funktion $\mathfrak{p} \rightsquigarrow l_\mathfrak{p}F$ ist offensichtlich eine Schicht in $\mathbf{X}\,\mathbf{Top}\,(A_\mathfrak{p} \parallel \langle\mathfrak{m}_\mathfrak{p}\rangle)$ da 1. $A_\mathfrak{p}$ das grösste Element in $\mathbf{Top}\,(A_\mathfrak{p} \parallel \langle\mathfrak{m}_\mathfrak{p}\rangle)$ ist, 2. von zwei Primidealen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ mit $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ höchstens eins aus $\min V(F)$ sein kann und 3. für alle $\mathfrak{f}\in F$, $\mathfrak{p}\in \min V(F)$ entweder $\mathfrak{p}\in D(F)$ d. h. $A_\mathfrak{p}\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}\in \min V(\mathfrak{f})$ und damit $A_\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ ein zu $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist, in jedem Fall also $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}^n \subseteq A_\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ für eine genügend grosse natürliche Zahl $n$ ist. Da für alle $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A$ $l_\mathfrak{p}$ ein Ordnungshomomorphismus ist, ist die Abbildung

$$l : \mathbf{Top}^e\,A \to \mathbf{S}\,\{\mathbf{Top}\,(A_\mathfrak{p} \parallel \langle\mathfrak{m}_\mathfrak{p}\rangle)\,;\quad \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A\}$$
$$F \rightsquigarrow [l_\mathfrak{p}F;\ \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A]$$

ein Ordnungshomomorphismus. Der Beweis, dass $l$ ein Isomorphismus ist, wird in mehreren Schritten geführt:

**5. Satz.** *Ist $F$ eine einbettungsfreie Lineartopologie, so gibt es zu jedem $\mathfrak{f} \in F$ ein einbettungsfreies $\mathfrak{g} \in F$ mit* $\min V(\mathfrak{g}) \subseteq \min V(F)$ *und* $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{f}$.

Beweis. Sei $V_{n+1}(F) = \min V(F_n)$, $F_{n+1} = F_n + I(V_{n+1}(F)) = F + I(V_{n+1}(F))$, $F_0 = F$, dann ist $V(F) = \bigcup_n V_n(F)$ da jedes Primideal endlichen Rang hat. Wir beweisen zunächst durch vollständige Induktion die folgende Aussage:

*$A(n)$: ist $\mathfrak{p} \in V_n(F)$, $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal aus $F$, so gibt es ein einbettungsfreies Ideal $\mathfrak{g} \in F$ mit* $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{q}$, $\min V(\mathfrak{g}) \subseteq \min V(F) = V_1(F)$.

Wir zeigen: gilt $A(i)$ für alle $i < n$, so gilt $A(n)$. Sei dazu $\mathfrak{p} \in V_n(F)$, $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal aus $F$. Sei $\mathfrak{p}_0 \in V_1(F)$ so ist $\mathfrak{p}_0$ aus $F$ und es gibt daher ein einbettungsfreies Ideal $\mathfrak{a} \in F$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{q}$. Da $\mathfrak{p}_0 \in V(\mathfrak{a}) \cap \min V(F) \subseteq \min V(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{a}$ einbettungsfrei ist, ist $\mathfrak{p} \notin \min V(\mathfrak{a})$ und daher ebenfalls $\mathfrak{p} \notin \min V(\mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{S}_\mathfrak{p}} = \mathfrak{a} : \mathfrak{s}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}_\mathfrak{p} = A - \mathfrak{p}$. Sei $\mathfrak{p}' \in \min V(\mathfrak{b})$ so ist $\mathfrak{p}' \in V(F)$ und daher $\mathfrak{p}'$ aus $V_i(F)$ für ein gewisses $i$. Da $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p} \in F_i$, denn $\mathfrak{p} \in F$ und wäre $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^* \in V_i(F)$, so $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}^*$, was unmöglich ist, da $V_i(F)$ nicht zwei echt ineinander enthaltene Ideale besitzt. Da $\mathfrak{p} \in F_i$, ist $\mathfrak{p} \in V_j(F)$ mit $j > i$. Daher ist, da $\mathfrak{p} \in V_n(F)$, $\mathfrak{p}' \in V_i(F)$ mit $i < n$. Sei $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$, $\mathfrak{p}_i$ das Radikal von $\mathfrak{q}_i$, so ist $\mathfrak{p}_k \in V_{i_k}(F)$ mit $i_k < n$ und infolgedessen gibt es zu jedem $k = 1, 2, \ldots, r^k$ ein einbettungsfreies Ideal $\mathfrak{g}_k \in F$ mit $\mathfrak{g}_k \subseteq \mathfrak{q}_k$, $\min V(\mathfrak{g}_k) \subseteq V_1(F)$. Also ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_r \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ und $\min V(\mathfrak{g}) \subseteq \bigcup_k \min V(\mathfrak{g}_k) \subseteq V_1(F)$, $A(n)$ ist bewiesen. Damit ist gezeigt: Ist $\mathfrak{q}$ ein Primärideal aus $F$, so gibt es ein $\mathfrak{g} \in F$ mit $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{q}$, $\min V(\mathfrak{g}) \subseteq V_1(F)$. Sei nun $\mathfrak{f} \in F$ ein beliebiges Element und $\mathfrak{f} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ eine Primäridealzerlegung, so zeigt man genau wie soeben, dass es ein in $\mathfrak{f}$ enthaltenes $\mathfrak{g} \in F$ gibt mit $\min V(\mathfrak{g}) \subseteq \min V(F)$.

**6. Satz.** *Sind $F$ und $G$ einbettungsfreie Lineartopologien und ist $l(F) < l(G)$ d. h. $l_\mathfrak{p}(F) < l_\mathfrak{p}(G)$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, ist $F < G$. Ist im besonderen $l(F) = l(G)$, so ist $F = G$. Die Abbildung $l$ ist also injektiv.*

Beweis. Sei $\mathfrak{g} \in G$, so gibt es ein einbettungsfreies Ideal $\mathfrak{g}' \in G$ mit $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ und $\min V(\mathfrak{g}') \subseteq \min V(G)$ nach 5. Sei $\mathfrak{g}' = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ und $\mathfrak{p}_i$ das Radikal von $\mathfrak{q}_i$. Da $\mathfrak{p}_i \in \min V(G)$ ist, gilt $A_{\mathfrak{p}_i}\mathfrak{q}_i \in A_{\mathfrak{p}_i}G = l_{\mathfrak{p}_i}F$ und es gibt daher ein $\mathfrak{f}_i \in F$ mit $A_{\mathfrak{p}_i}\mathfrak{f}_i \subseteq A_{\mathfrak{p}_i}\mathfrak{q}_i$ (es ist notwendigerweise $\mathfrak{p}_i \in \min V(F)$, da ansonsten $l_{\mathfrak{p}_i}F = A_{\mathfrak{p}_i}$ wäre, so dass nicht gelten könnte $l_{\mathfrak{p}_i}F < l_{\mathfrak{p}_i}G$). Also ist für alle $i$ $\mathfrak{f}_{i\mathfrak{S}_i} = A_{\mathfrak{p}_i}\mathfrak{f}_i \cap A \subseteq A_{\mathfrak{p}_i}\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{q}_i$. Sei $\mathfrak{f}$ ein Element, das in allen $\mathfrak{f}_{i\mathfrak{S}_i}$ enthalten ist (ein solches Element gibt es sicherlich, da $F$ ein Idealfilter ist), so gilt $\mathfrak{f} \subseteq \bigcap \mathfrak{f}_i \subseteq \bigcap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ d. h. $F < G$ w. z. b. w.

**7. Satz.** $l$ ist *surjektiv.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \rightsquigarrow F_\mathfrak{p}$ eine Schicht in **X Top** $(A_\mathfrak{p} \| \langle \mathfrak{m}_\mathfrak{p} \rangle)$ und $M = \{\mathfrak{p}; F_\mathfrak{p} \neq A_\mathfrak{p}\}$, $F'_\mathfrak{p} = \overline{F_\mathfrak{p} \cap A} = \{\mathfrak{f} \cap A; \mathfrak{f} \in F_\mathfrak{p}\}$ dann ist $F_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}F'_\mathfrak{p}$. Sei $F = \inf F_{\mathfrak{p}'}$, so ist $V(F) =$

$= \bigcup\{V(F'_\mathfrak{p});\ \mathfrak{p} \in M\} = \bigcup\{V(\mathfrak{p});\ \mathfrak{p} \in M\} = V(M)$ und daher $M = \min V(F)$. Da $F \subseteq F'_\mathfrak{p}$ ist $A_\mathfrak{p}F \supseteq A_\mathfrak{p}F_\mathfrak{p} = F_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \min V(F)$. Sei $\mathfrak{f} \in F$ so gibt es endlich viele Ideale $\mathfrak{f}_i \in F_{\mathfrak{p}_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mit $F \ni \mathfrak{f}' = \mathfrak{f}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{f}_n \subseteq \mathfrak{f}$. Nun ist

$$\mathfrak{f}_i : S_\mathfrak{p} = \begin{cases} A & \text{für} \quad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i \\ \mathfrak{f}_i & \text{für} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \end{cases}$$

da $\sqrt{\mathfrak{f}_i} = \mathfrak{g}_i$ und daraus folgt

$$A_\mathfrak{p}\mathfrak{f}' = A_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}' : S_\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}(\bigcap \mathfrak{f}_i : S_\mathfrak{p}) = \begin{cases} A_\mathfrak{p}A = A_\mathfrak{p} & \text{für} \quad \mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \\ A_\mathfrak{p}\mathfrak{f}_i & \text{für} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \end{cases}$$

und d. h. in jedem Fall $A_\mathfrak{p}\mathfrak{f}' \in A_\mathfrak{p}F'_\mathfrak{p} = F_\mathfrak{p}$. Da $A_\mathfrak{p}\mathfrak{f}' \subseteq A_\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ ist also auch $A_\mathfrak{p}\mathfrak{f} \in F_\mathfrak{p}$ und d. h. $A_\mathfrak{p}F \subseteq F_\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}F = F_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \min V(F)$. Da $M = \min V(F)$ ist also $l_\mathfrak{p}F = F_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und damit $l$ surjektiv.

Nach 6. und 7. ist $l$ bijektiv und da $l$ ein Ordnungshomomorphismus und $l^{-1}$ nach 6. ebenfalls ein Ordnungshomomorphismus ist, ist $l$ Isomorphismus.

Der zweite Teil des Hauptsatzes 4 ist eine unmittelbare Folge des ersten Teils. Der Hauptsatz ist damit bewiesen. Er zeigt, dass man die Struktur von $\mathbf{Top}^e$ überblickt, wenn man die Struktur des Verbandes $\mathbf{Top}\,(L \,\|\, \langle\mathfrak{m}\rangle)$ eines jeden lokalen Noetherschen Ringes $L$ mit $\mathfrak{m}$ als Maximalideal beherrscht, wobei $\langle\mathfrak{m}\rangle$ die durch die Potenzen von $\mathfrak{m}$ definierte $\mathfrak{m}$-adische Topologie bezeichne. Die Struktur dieses Verbandes wird durch den folgenden Satz beschrieben:

**8. Hauptsatz.** *Sei $L$ ein lokaler Noetherscher Ring, $\mathfrak{m}$ sein Maximalideal, $\langle\mathfrak{m}\rangle$ die $\mathfrak{m}$-adische Topologie, $\bar{A}$ die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung von $A$ und $\mathbf{H}(\bar{A})$ der Verband aller Ideale von $\bar{A}$. Unter diesen Voraussetzungen gibt es einen Isomorphismus:*

$$\mathbf{Top}\,(L \,\|\, \langle\mathfrak{m}\rangle) \simeq \mathbf{H}(\bar{A})$$

**9.** Zur Vorbereitung des Beweises, dienen die folgenden Bemerkungen, die im wesentlichen an bekannte Ergebnisse aus der Theorie der lokalen Ringe erinnern.

**9.1.** Sei $F$ eine Lineartopologie des Ringes $A$, $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von Elementen aus $A$. Ein Element $a \in A$ heisst $F$-Limes der Folge $a_i$, wenn für jedes $\mathfrak{f} \in F$ fast alle Differenzen $a - a_i$ in $\mathfrak{f}$ enthalten sind.

Die Menge aller $F$-Limites bezeichnet man als $F$-$\lim a_i$. Ist die Topologie $F$ separiert, so ist $F$-$\lim a_i$ entweder leer oder besteht aus genau einem Element.

**9.2.** Ist $L$ ein lokaler Noetherscher Ring, $\mathfrak{m}$ sein Maximalideal $\bar{L}$ seine $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung und $\mathfrak{m}$ das Maximalideal von $\bar{L}$, so gilt für alle Ideale $\mathfrak{a}$ aus $L$:

$\bar{L}\mathfrak{a} = \langle\mathfrak{m}\rangle\mathrm{C}\mathfrak{a}$ und daraus folgt
$\bar{L}\mathfrak{a} \cap A = \langle\mathfrak{m}\rangle\mathrm{C}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ (siehe etwa [2] I)

Daraus folgt, dass für jede Lineartopologie $F$ in $L$ gilt: $\bar{L}F \cap L = F$.

**9.3.** Seien $F$ und $G$ zwei Idealfilterbasen, so bezeichne $FCG$ die Menge aller $FC\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \in G$ d. h. die Menge aller topologischen Abschliessungen von Idealen aus $G$ bezüglich der durch $F$ definierten Topologie. Dann ist offensichtlich $FCG$ ebenfalls eine Idealfilterbasis. Die durch $FCG$ definierte Lineartopologie bezeichnen wir als topologische Abschliessung der Topologie $G$ bezüglich der Topologie $F$. Wir sagen, dass $G$ in $F$ dicht ist, wenn $FCG \triangleq F$, d. h. wenn $FCG = F$ ist.

Ist $F$ eine Lineartopologie eines lokalen Noetherschen Ringes $L$ mit $\mathfrak{m}$ als Maximalideal und $\langle \mathfrak{m} \rangle < F$, so ist $\langle \mathfrak{m} \rangle$ in $F$ dicht, da einerseits natürlich $FC\langle \mathfrak{m} \rangle < F$ ist, zum anderen aber $FC\mathfrak{m}^n = \mathfrak{f}_n$ für ein gewisses $\mathfrak{f}_n \in F$ gilt, da $A/\mathfrak{m}^n$ Artinsch ist. Diese Tatsache zeigt, dass jede Lineartopologie $F$ mit $\langle \mathfrak{m} \rangle < F$ durch eine Kette von Idealen $\mathfrak{f}_n = FC\mathfrak{m}^n$ definiert werden kann.

**9.4.** Ist $L$ ein kompletter lokaler Noetherscher Ring, $\mathfrak{m}$ sein Maximalideal, so gibt es keine separierte, von $\mathfrak{m}$ verschiedene Lineartopologie, die gröber als $\langle \mathfrak{m} \rangle$ ist. Denn sei $\langle \mathfrak{m} \rangle < F$ wo $F$ eine separierte Topologie ist, $\mathfrak{f}_n$ definierende Kette von Idealen, so ist $\bigcap \mathfrak{f}_n = 0$, und es gibt daher zu jedem $n$ ein $r(n)$ mit $\mathfrak{f}_{r(n)} \subseteq \mathfrak{m}^n$ (siehe etwa [4]) und das heisst $F < \langle \mathfrak{m} \rangle$, $F \triangleq \langle \mathfrak{m} \rangle$.

**10.** Beweis von 8. Sei $F$ eine Idealfilterbasis in $L$ und $\langle \mathfrak{m} \rangle < F$. Dann gilt:

**10.1.** *Sei* $a = \langle \overline{\mathfrak{m}} \rangle$-lim $a_i$, $a_i \in L$, *so ist* $a \in (\bar{L}F)\,C0 = \bigcap_{f \in F} \bar{L}\mathfrak{f}$ *genau dann, wenn* $0 \in F$-lim $a_i$.

Beweis. Sei $a \in \bigcap \bar{L}\mathfrak{f}$ und $a = \langle \mathfrak{m} \rangle$-lim $a_i$, $a_i \in L$, so ist $a - a_i \in \overline{\mathfrak{m}}^{s(i)}$ wobei $s(i)$ mit $i$ gegen unendlich strebt. Sei $\mathfrak{f} \in F$ und $i$ so gross gewählt, dass $\mathfrak{m}^{s(i)} \subseteq \mathfrak{f}$, dann ist $a_i \in (a + \overline{\mathfrak{m}}^{s(i)}) \cap L \subseteq (L\mathfrak{f} + L\mathfrak{m}^{s(i)}) \cap L = \bar{L}\mathfrak{f} \cap L = \mathfrak{f}$ und d. h. $0 \in F$-lim $a_i$. Sei umgekehrt $a = \langle \overline{\mathfrak{m}} \rangle$-lim $a_i$ und $0 \in F$-lim $a_i$, $\mathfrak{f} \in F$, so gibt es ein $i$ mit $\mathfrak{m}^i \subseteq \mathfrak{f}$, d. h. $\overline{\mathfrak{m}}^i \subseteq L\mathfrak{f}$ und ein $j$ mit $a - a_n \in \overline{\mathfrak{m}}^i \subseteq L\mathfrak{f}$ für alle $n \geqq j$. Da $0 \in F$-lim $a_i$, ist $a_n \in \mathfrak{f}$ für fast alle $n$ und daher $a \in a_n + \bar{L}\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{f} + \bar{L}\mathfrak{f} = \bar{L}F$. Also ist $a \in \bigcap \bar{L}\mathfrak{f}$ w. z. b. w.

**10.2.** *Wir setzen* $\Phi(F) = (\bar{L}F)C0 = \bigcap_{f \in F} \bar{L}\mathfrak{f}$; *dann gilt:*

$$\bar{L}F \triangleq \sup(\{\Phi(F)\}, \langle \overline{\mathfrak{m}} \rangle)\,.$$

Beweis. Da $\Phi(F) \subseteq \bar{L}\mathfrak{f}$ für alle $\mathfrak{f} \in F$ ist $\{\Phi(F)\} < \bar{L}F$. Da ausserdem $\langle \mathfrak{m} \rangle < F$ und damit $\langle \overline{\mathfrak{m}} \rangle < \bar{L}F$ ist, gilt: $\sup(\{\Phi(F)\}, \langle \overline{\mathfrak{m}} \rangle) < \bar{L}F$. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, bemerken wir, dass die durch $LF$ im Faktorring $A/\Phi(F)$ induzierte Topologie separiert ist und infolgedessen zur $(A/\Phi(F))$ $\mathfrak{m}$-adischen Topologie äquivalent ist (nach 9.4). Also gibt es zu jedem $n$ ein $\mathfrak{f} \in F$ mit $\bar{L}\mathfrak{f} \subseteq \Phi(F) + \mathfrak{m}^n$, d. h. $\bar{L}F < \sup(\{\Phi(F)\}, \langle \overline{\mathfrak{m}} \rangle)$.

**10.3.** *Sei* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal in L, so setzen wir*

$$\Psi(\mathfrak{a}) = L \cap \sup(\{\mathfrak{a}\}, \langle \overline{\mathfrak{m}} \rangle)$$

*dann gilt für alle L-Idealfilter F mit* $\langle \mathfrak{m} \rangle < F : \Psi\Phi(F) = F$.

Beweis. $\mathbf{\Psi\Phi}(F) = L \cap \sup(\{\mathbf{\Phi}(F), \langle\overline{\mathfrak{m}}\rangle\}) = L \cap \bar{L}F = \bar{F} = F$. Nach 10.2 und 9.2.

**10.4.** $\mathbf{\Phi\Psi}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ *für alle Ideale* $\mathfrak{a}$ *aus* $L$.

Beweis. Sei $a' \in \mathfrak{a}$ so ist $a' = \langle\overline{\mathfrak{m}}\rangle$-lim $a_i$, $a_i \in L$ und d. h. $a' - a_i \in \overline{\mathfrak{m}}^{s(i)}$, wobei $s(i)$ mit $i$ gegen unendlich konvergiert.

Also ist $a_i \in (\mathfrak{a}' + \overline{\mathfrak{m}}^{s(i)}) \cap L \subseteq (\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{m}}^{s(i)}) \cap L$ und d. h. $0 \in \mathbf{\Psi}(\mathfrak{a})$-lim $a_i$ und daraus folgt $a' \in \mathbf{\Phi\Psi}(\mathfrak{a})$ nach 10.1 und d. h. $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{\Phi\Psi}(\mathfrak{a})$. Umgekehrt ist

$$\mathbf{\Phi\Psi}(\mathfrak{a}) = \bigcap\{\bar{L}\mathfrak{f};\ \mathfrak{f} \in \mathbf{\Psi}(\mathfrak{a})\} = \bigcap_n \bar{L}((\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n) \cap L) \subseteq \bigcap_n \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n = \mathfrak{a}$$

da jedes Ideal abgeschlossen bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie ist.

**10.5.** *Da offensichtlich* $\mathbf{\Phi}$ *und* $\mathbf{\Psi}$ *Ordnungshomomorphismen sind und* $\mathbf{\Phi} \circ \mathbf{\Psi}$ *die identische Abbildung von* $\mathbf{H}(\bar{A})$ *auf sich,* $\mathbf{\Psi} \circ \mathbf{\Phi}$ *die identische Abbildung von* $\mathbf{Top}\,(L \,\|\, \langle\mathfrak{m}\rangle)$ *auf sich ist, ist* $\mathbf{\Phi} : \mathbf{Top}\,(L \,\|\, \langle\mathfrak{m}\rangle) \to \mathbf{H}(\bar{A})$ *ein Verbandsisomorphismus und* $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi}^{-1}$ *und damit ist der Hauptsatz bewiesen.*

**Literatur**

[1] *L. Budach:* Aufbau der ganzen Abschliessung einartiger Noetherscher Integritätsbereiche I, II. Math. Nachr. *25* (1963), 5—17, 129—149.

[2] *L. Budach:* Erweiterungstheorie der Grellschen Präschemata. Math. Nachr. *25* (1963), 339—380.

[3] *L. Budach:* Quotientenfunktoren und Erweiterungstheorie. Berlin 1966 (im Druck) (Zitiert mit QUE).

[4] *D. G. Northcott:* Ideal theory. Cambridge 1953.