SYNTOPOGENE HALBGRUPPEN

Á. CSÁSZÁR

Budapest

Topologische Halbgruppen und insbesondere topologische Gruppen wurden seit langer Zeit ausführlich untersucht; in der Theorie der letzteren spielen auch gewisse uniforme Strukturen eine wesentliche Rolle. Da der Begriff der syntopogenen Struktur [1] eine gemeinsame Verallgemeinerung der Begriffe von Topologie und uniformer Struktur (sowie von anderen Strukturen) darstellt, ist es natürlich solche Gruppen und Halbgruppen zu untersuchen, die mit einer syntopogenen Struktur versehen sind, die — selbstverständlich — in einer gewissen Weise mit der algebraischen Struktur verträglich ist. Für Terminologie und Notation verweisen wir auf [1].

Im folgenden bezeichnet E eine (multiplikativ geschriebene) Halbgruppe mit Einselement e und $\mathcal{S}$ eine syntopogene Struktur ([1], S. 71) auf E. $\mathcal{S}$ heisst *linkstetig*, wenn die Links-Translationen $\sigma_a(x) = ax$ für $a \in E$ $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$-stetig ([1], S. 116) sind. $\mathcal{S}$ heisst *gleichgradig linksstetig*, wenn es zu $< \in \mathcal{S}$ ein von $a \in E$ unabhängiges $<_1 \in \mathcal{S}$ gibt mit $A < B \Rightarrow \sigma_a^{-1}(A) <_1 \sigma_a^{-1}(B)$. $\mathcal{S}$ heisst *linksinvariant*, wenn diese Bedingung mit $<_1 = <$ erfüllt ist. Die dualen Begriffe werden mit Hilfe der Rechts-Translationen $\delta_a(x) = xa$ erklärt. Zu beliebigem $\mathcal{S}$ gibt es unter den links- (rechts-) invarianten syntopogenen Strukturen, feineren ([1], S. 23) als $\mathcal{S}$, eine gröbste $\mathcal{S}^\sigma(\mathcal{S}^\delta)$; $\mathcal{S}$ ist genau dann gleichgradig links- (rechts-) stetig, wenn $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}^\sigma$ $(\mathcal{S} \sim \mathcal{S}^\delta)$. $\mathcal{S}^{\sigma\delta} = \mathcal{S}^{\delta\sigma}$ ist die gröbste unter den links- und rechtsinvarianten syntopogenen Strukturen feineren als $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}$ ist genau dann gleichgradig links- und rechtsstetig, wenn $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}^{\sigma\delta}$.

Am wichtigsten ist freilich der Fall, wo $\pi(x, y) = xy$ als Funktion beider Veränderlichen stetig ist. Die Bedingung der $(\mathcal{S} \times \mathcal{S}, \mathcal{S})$-Stetigkeit ([1], S. 129) wäre zu streng, sie würde z. B. im Fall einer topologischen Gruppe nicht immer erfüllt. Deshalb nennen wir $\mathcal{S}$ ^{a}-stetig, wobei ^{a} eine elementare Operation ([1], S. 80) bezeichnet, wenn $\mathcal{S} = \mathcal{S}^a$ und π $((\mathcal{S} \times \mathcal{S})^a, \mathcal{S})$-stetig ist. Trifft diese Bedingung für eine Operation ^{a} zu, so ist $\mathcal{S}$ gleichgradig links- und rechtsstetig. Einfache Überlegungen zeigen, dass nur die Fälle $^a = {}^i$ ([1], S. 80) und $^a = {}^p$ ([1], S. 41) von Bedeutung sind.

Ist nun $\mathcal{S}$ ^{i}- oder ^{p}-stetig, so definieren wir für $< \in \mathcal{S}$ den Filter $\mathfrak{V}(<) = \{V : e < V\}$. Das System $\Xi = \Xi(\mathcal{S}) = \{\mathfrak{V}(<) : < \in \mathcal{S}\}$ ist ein System von Filtern auf E mit folgenden Eigenschaften: (X_1) $V \in \mathfrak{V} \in \Xi \Rightarrow e \in V$; (X_2) Zu $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2 \in \Xi$ gibt es einen Filter $\mathfrak{V}_3 \in \Xi$ mit $\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2 \subset \mathfrak{V}_3$; (X_3) Zu $\mathfrak{V} \in \Xi$ gehört ein $\mathfrak{V}_1 \in \Xi$ mit der Eigenschaft, dass aus $V \in \mathfrak{V}$ die Existenz von $V_1 \in \mathfrak{V}_1$ folgt mit $V_1^2 \subset V$. Ist umgekehrt Ξ ein den Bedingungen (X_1), (X_2), (X_3) genügendes Filtersystem, so erklärt man eine linksinvariante syntopogene Struktur

$\mathscr{S}_\Xi = \{<_\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \in \Xi\}$, wobei $A < B$ genau dann gilt, wenn $AV \subset B$ mit geeignetem $V \in \mathfrak{B}$ besteht. Setzt man noch $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\Xi) = \bigcup\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \in \Xi\}$, so erhält man einen Filter $\mathfrak{U}$ mit den Eigenschaften: (U_1) $U \in \mathfrak{U} \Rightarrow e \in U$; (U_2) $U \in \mathfrak{U} \Rightarrow U_1^2 \subset U$ mit geeignetem $U_1 \in \mathfrak{U}$. Mit Hilfe eines solchen Filters $\mathfrak{U}$ erhält man eine biperfekte ([1], S. 72) linksinvariante syntopogene Struktur $\mathscr{S}_\mathfrak{U} = \{<_U : U \in \mathfrak{U}\}$, wobei $A <_U B \Leftrightarrow \Leftrightarrow AU \subset B$. Es gilt $\mathscr{S}_{\mathfrak{U}(\Xi)} < \mathscr{S}_\Xi < \mathscr{S}^t_{\mathfrak{U}(\Xi)}$ ([1], S. 83).

Es sei nun insbesondere E eine Gruppe. $\mathscr{S} = \mathscr{S}^p$ ist genau dann ^{p}-stetig, wenn $\mathscr{S} \sim \mathscr{S}^p_\Xi$, wobei Ξ $(\mathrm{X}_1), (\mathrm{X}_2), (\mathrm{X}_3)$ und (X_4) erfüllt. Hier bedeutet (X_4): Zu $\mathfrak{B} \in \Xi$ gehört $\mathfrak{B}_1 \in \Xi$ mit $xVx^{-1} \in \mathfrak{B}$ für $V \in \mathfrak{B}_1$, $x \in E$. $\mathscr{S} = \mathscr{S}^b$ ist genau dann ^{p}-stetig, wenn $\mathscr{S} \sim \mathscr{S}_\mathfrak{U}$, wobei der Filter $\mathfrak{U}$ neben (U_1) und (U_2) noch (U_3) genügt. Hier bedeutet (U_3): Zu $U \in \mathfrak{U}$ gehört $U_1 \in \mathfrak{U}$ mit $U_1 \subset xUx^{-1}$ für jedes $x \in E$. Eine Topologie $\mathscr{T}$ ist genau dann ^{p}-stetig, wenn $\mathscr{T} = \mathscr{S}^{tp}_\mathfrak{U}$, wobei der Filter $\mathfrak{U}$ den Bedingungen $(\mathrm{U}_1), (\mathrm{U}_2)$ und (U_4) genügt. Die Bedingung (U_4) bedeutet: $U \in \mathfrak{U}$, $x \in E \Rightarrow xUx^{-1} \in \in \mathfrak{U}$. Endlich ist $\mathscr{S}$ genau dann ^{i}-stetig, wenn $\mathscr{S} \sim \mathscr{S}_\Xi$, wobei Ξ neben $(\mathrm{X}_1), (\mathrm{X}_2), (\mathrm{X}_3)$ noch (X_5) genügt, und wenn noch $\mathscr{S}_{\mathfrak{U}(\Xi)}$ total beschränkt ([1], S. 330) ist. Hier bedeutet (X_5): Zu $\mathfrak{B} \in \Xi$ gehört $\mathfrak{B}_1 \in \Xi$ so, dass aus $V \in \mathfrak{B}$ die Existenz von $V_1 \in \mathfrak{B}_1$ folgt mit $V_1 \subset xVx^{-1}$ für jedes $x \in E$.

Literatur

[1] *Á. Császár:* Grundlagen der allgemeinen Topologie. Budapest und Leipzig 1963.

[2] *Á. Császár:* Complétion et compactification d'espaces syntopogènes. General Topology, Proc. of the Symp. Prague 1961, Praha 1962, 133—137.