Frieder Kuhnert

Über ein Konvergenzprinzip bei Spektralzerlegungen

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 229--234.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700844

ÜBER EIN KONVERGENZPRINZIP BEI SPEKTRALZERLEGUNGEN

F. KUHNERT

Karl-Marx-Stadt

1. Einleitung

Viele Verfahren[1]) zur Ermittlung der Einheitszerlegung $E_0(t)$ eines in einem separablen Hilbertraum H definierten selbstadjungierten Operators A_0 können schematisch im folgenden Sinne zusammengefaßt werden:

Ausgehend vom Operator A_0 wird eine Folge selbstadjungierter Operatoren A_n konstruiert, deren Einheitszerlegungen $E_n(t)$ bekannt sind bzw. deren Berechnung keine prinzipiellen Schwierigkeiten bereitet. Dann wird gezeigt, daß die Folge der Einheitszerlegungen $\{E_n(t)\}$ in diesem oder jenem Sinne für einige (oder auch für alle) Werte t gegen den Grenzwert $E_0(t)$ konvergiert, so daß man von einer *lokalen* Konvergenz der Folge von Einheitszerlegungen $\{E_n(t)\}$ gegen eine gegebene Einheitszerlegung $E_0(t)$ sprechen kann.

Bei vielen numerischen Fragen spielen allerdings *globale* Abstandskriterien für Einheitszerlegungen eine nicht unwichtige Rolle, deshalb soll im vorliegenden Vortrag der Versuch unternommen werden, in der Menge der Einheitszerlegungen einen Abstandsbegriff zu definieren. Zu diesem Zweck wird die Differenz der quadratischen Formen zweier Einheitszerlegungen betrachtet, die man zu einer vollständig additiven Mengenfunktion der reellen Zahlenachse erweitern kann. Für derartige Funktionen kann die sog. Kantorovič-Rubinstein-Norm (man sehe [2–5]) ermittelt werden, die wir als den gesuchten Abstand zwischen den betrachteten Einheitszerlegungen ansehen wollen. Auf dieser Grundlage kann in der Menge der Einheitszerlegungen neben einer starken Topologie auch noch eine gleichmäßige Topologie definiert werden. Im Vortrag soll über den Zusammenhang zwischen der Konvergenz der Einheitszerlegungen im Sinne der eben angegebenen Topologien und der Konvergenz der dazugehörenden selbstadjungierten Operatoren berichtet werden.

2. Die Kantorovič-Rubinstein-Norm vollständig additiver Funktionen[2])

Gegeben sei ein metrisches Kompaktum R mit der Metrik ϱ. Mit $\Phi(R)$ werde die Gesamtheit der vollständig additiven Funktionen φ bezeichnet, deren Definitions-

[1]) Hierzu sind etwa die Verfahren von Ritz, Galerkin, das Differenzenverfahren u.a. zu zählen.

[2]) Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind der Arbeit [5] entnommen.

gebiet der σ-Ring B_R aller Borelschen Mengen e des Raumes R ist. Jede Funktion $\varphi \in \Phi(R)$ ist in die Differenz zweier nichtnegativer Anteile φ^+ und φ^- zerlegbar (man sehe [1]):

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^- .$$

Die Funktionen φ^+ und φ^- können wie folgt definiert werden:

$$\varphi^+(e) = \sup_{e' \in B_R} \varphi(e \cap e') ,$$
$$\varphi^-(e) = - \inf_{e' \in B_R} \varphi(e \cap e')$$

(e ist ein beliebiges Element aus B_R). Die Menge $\Phi(R)$ wird mit der Norm

$$\|\varphi\|_v = \varphi^+(R) + \varphi^-(R)$$

zu einem normierten Raum, der allerdings für viele Untersuchungen nicht ausreichend ist. In Anlehung an einige Optimierungsaufgaben wurde deshalb von Kantorovič und Rubinstein [2–5] ein anderer Weg beschritten:

In der Mengen $\Phi(R)$ wird die Untermenge $\Phi_0(R)$ ausgewählt, die alle Elemente $\varphi_0 \in \Phi(R)$ enthält, für die die Gleichung $\varphi_0(R) = 0$ gilt. Jeder Funktion $\varphi_0 \in \Phi_0(R)$ wird eine nichtleere Menge Ψ_{φ_0} von Funktionen $\psi(e, e')$ zugeordnet, die nachfolgenden Bedingungen unterworfen sind:

1) Die Funktionen $\psi(e, e')$ sind auf dem direkten Produkt $B_R \times B_R$ definiert, nicht negativ und vollständig additiv bezüglich beider Argumente.

2) Für jede Funktion $\psi \in \Psi_{\varphi_0}$ gilt die Gleichung

$$\psi(e, R) - \psi(R, e) = \varphi_0(e) , \quad e \in B_R .$$

Die Menge $\Phi_0(R)$ wird nun durch Einführung der Norm

$$\|\varphi\|_{KR} = \inf_{\psi \in \Psi_\varphi} \int_R \int_R \varrho(t, t')\, \psi(\mathrm{d}e, \mathrm{d}e') \tag{1}$$

in einen normierten nichtvollständigen Raum verwandelt, den wir mit $\Phi_0(R, \varrho)$ bezeichnen.

3. Die KR-Topologie in der Menge der Einheitszerlegungen

Im separablen Hilbertraum H werden zwei selbstadjungierte Operatoren A und B mit den von rechts stetigen Einheitszerlegungen $E(t)$ bzw. $F(t)$ betrachtet. Mit $R = [a, b]$ wird ein abgeschlossenes Intervall bezeichnet, das die Spektren dieser beiden Operatoren enthält (für nichtbeschränkte Operatoren ist wenigstens eine der Intervallgrenzen a bzw. b unendlich). In der Menge R sei weiterhin eine Metrik ϱ definiert derart, daß R zum metrischen Kompaktum R_ϱ wird.

Mit $\Delta = (\lambda, \mu]$ bezeichnen wir ein halboffenes Intervall der Menge R $(a \leqq \lambda < < \mu \leqq b)$ und betrachten für jedes Element $x \in H$ die Intervallfunktionen

$$\tau(\Delta; x) = (E(\Delta)\, x, x) = (E(\mu)\, x, x) - (E(\lambda)\, x, x)\,,$$
$$v(\Delta; x) = (F(\Delta)\, x, x) = (F(\mu)\, x, x) - (F(\lambda)\, x, x)\,.$$

Die Funktionen τ und v sind nichtnegativ, additiv und gestatten deshalb eine Fortsetzung auf den σ-Ring B_R aller Borelschen Mengen des Intervalls R [3]), so daß die Funktionen τ und v Elemente der Menge $\Phi(R)$ sind. Die Differenz $\varphi = \tau - v$ genügt für jedes Element $x \in H$ der Gleichung

$$\varphi(R; x) = \tau(R; x) - v(R; x) = 0\,, \tag{2}$$

d. h. aber $\varphi(.\,; x) \in \Phi_0(R)$. Für jedes Element $x \in H$ kann demnach die Kantorovič-Rubinstein-Norm des Elements $\varphi(.\,; x) \in \Phi_0(R)$ nach Formel (1) errechnet werden.

Auf dieser Grundlage kann man nun folgende Topologien definieren:

Es sei $E(t)$ eine Einheitszerlegung und R ein abgeschlossenes Intervall der Zahlengeraden, für das die Gleichung $E(R) = I$ [4]) gilt. Die starke Umgebung der Einheitszerlegung $E(t)$ umfaßt bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ alle Einheitszerlegungen $F(t)$ mit $F(R) = I$, für die mit den Bezeichnungen der Formel (2) die Ungleichungen

$$\|\varphi(.\,; x)\|_{KR} < \varepsilon$$

($x \in H$ beliebig) gelten. Entsprechend wird die gleichmäßige Umgebung der Einheitszerlegung $E(t)$ als die Gesamtheit der Funktion $F(t)$ definiert, für die die Ungleichung

$$\sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| = 1}} \|\varphi(.\,; x)\|_{KR} < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Vorgegeben seien selbstadjungierte Operatoren A_k $(k = 0, 1, \ldots)$ mit den Einheitszerlegungen E_k $(k = 0, 1, \ldots)$ und es sei

$$\|A_k\| \leqq M = \text{const} < \infty\,, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Das Intervall R kann dann in der Form $[-M, M]$ gewählt werden. Wir bezeichnen

$$\tau_k(\Delta; x) = (E_k(\Delta)\, x, x)\,, \quad \Delta = (\lambda, \mu] \subset R\,, \quad x \in H$$

und

$$\varphi_n(e; x) = \tau_n(e; x) - \tau_0(e; x)\,, \quad e \in B_R\,, \quad x \in H\,.$$

Die Einheitszerlegung $E_0(t)$ heißt dann der KR-starke Grenzwert der Folge $\{E_n(t)\}$, wenn gilt

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n(.\,; x)\|_{KR} = 0$$

[3]) Man sehe hierzu z. B. [9], Kap. 2, §1.

[4]) I ist der identische Operator.

für jedes Element $x \in H$. Wenn die letzte Grenzgleichung gleichmäßig in $x \in H$ $(\|x\| = 1)$ erfüllt ist,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| = 1}} \|\varphi_n(.\,; x)\|_{KR} = 0\,,$$

so heißt die Einheitszerlegung $E_0(t)$ der KR-gleichmäßige Grenzwert der Folge $\{E_n(t)\}$.

Satz 1. *Die Folge von Einheitszerlegungen $\{E_n(t)\}$ konvergiert dann und nur dann KR-stark (KR-gleichmäßig) gegen die Einheitszerlegung $E_0(t)$, wenn die Folge der selbstadjungierten Operatoren $A_n = \int_{-M}^{M} t \, \mathrm{d}E_n(t)$ stark (gleichmäßig) gegen den Operator $A_0 = \int_{-M}^{M} t \, \mathrm{d}E_0(t)$ konvergiert. Hierbei kann die Metrik ϱ des Intervalls $R = [-M, M]$ beliebig gewählt werden.*

Im folgenden lassen wir auch unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren A_k zu. Das Intervall R, in dem die Spektren dieser Operatoren gelegen sind, wird dann im allgemeinen das Intervall $[-\infty, \infty]$ sein. Mit ϱ werde wieder eine Metrik in R bezeichnet, mit der R ein Kompaktum R_ϱ wird. Der Satz 1 wird für diese Operatoren im allgemeinen nicht mehr richtig bleiben, allerdings gilt der

Satz 2. *Die Folge von Einheitszerlegungen $\{E_n(t)\}$ konvergiert dann und nur dann KR-stark gegen die Einheitszerlegung $E_0(t)$, wenn für beliebiges nichtreelles λ die Folge der Resolventen*

$$R_\lambda^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - \lambda} \, \mathrm{d}E_n(t)$$

stark gegen den Operator

$$R_\lambda^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - \lambda} \, \mathrm{d}E_0(t)$$

konvergiert. Die Metrik ϱ des Intervalls $[-\infty, \infty]$ ist beliebig.

Es sei $v(t)$ eine auf $R = [-\infty, \infty]$ definierte, beschränkte, stetige und monoton wachsende Funktion, mit deren Hilfe die Metrik

$$\varrho(t, t') = |v(t) - v(t')|\,, \quad t, t' \in R\,, \tag{3}$$

gegeben wird. Dann gilt

Satz 3. *In der Menge $R = [-\infty, \infty]$ werde eine Metrik durch die Formel (3) definiert. Die Folge der Einheitszerlegungen $\{E_n(t)\}$ konvergiert dann und nur dann KR-stark (KR-gleichmäßig) gegen die Einheitszerlegung $E_0(t)$, wenn die Folge $\{v(A_n)\}$ stark (gleichmäßig) gegen den Operator $v(A_0)$ konvergiert.*

Da die Kantorovič-Rubinstein-Norm nur selten unmittelbar errechnet werden kann, erlangen hinreichende Kriterien für diese oder jene KR-Konvergenz eine gewisse Bedeutung, in die die Ausgangsoperatoren A_k eingehen. Zur Illustration seien folgende Kriterien genannt:

1) Die Operatoren A_k seien nach unten beschränkt:

$$A_k \geqq \gamma > -\infty\,, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Wenn für wenigstens ein nichreelles λ die Folge der Resolventen $\{R_\lambda^{(n)}\}$ gleichmäßig gegen die Resolvente $R_\lambda^{(0)}$ konvergiert, so konvergiert bei Vorgabe der Metrik

$$\varrho(t, t') = \left| \frac{t^2 \operatorname{sgn} t}{1 + t^2} - \frac{t'^2 \operatorname{sgn} t'}{1 + t'^2} \right|, \quad t, t' \in [\gamma, \infty]$$

die Folge $\{E_n(t)\}$ KR-gleichmäßig gegen die Einheitszerlegung $E_0(t)$.

2) Die soeben gemachte Aussage bleibt richtig, wenn die Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} \|R_\lambda^{(n)} - R_\lambda^{(0)}\| = 0$$

durch die Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n(A_n - \lambda I)^{-1} - A_0(A_0 - \lambda I)^{-1}\| = 0$$

ersetzt wird.

3) Der selbstadjungierte Operator A_0 heißt der relativ gleichmäßige Grenzwert der Folge selbstadjungierter Operatoren A_n, wenn folgendes gilt[5]):

Für jedes $k = 0, 1, \ldots$ gibt es wenigstens ein λ_k und eine lineare Menge $D_k \subset$ $\subset D(A_k)$ [6]), so daß die Menge $(A_k - \lambda_k I)\, D_k$ dicht in H liegt und der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{x \in D_0 \\ y \in D_n}} \frac{|(A_0 x, y) - (x, A_n y)|}{(\|A_0 x\| + \|x\|)(\|A_n y\| + \|y\|)} = 0$$

erfüllt ist.

Wenn die Operatoren A_k $(k = 0, 1, \ldots)$ halbbeschränkt sind und die Folge $\{A_n\}$ relativ gleichmäßig gegen den Operator A_0 konvergiert, so konvergiert die Folge $\{E_n(t)\}$ bei vorgegebener Metrik

$$\varrho(t, t') = \left| \frac{t^2 \operatorname{sgn} t}{1 + t^2} - \frac{t'^2 \operatorname{sgn} t'}{1 + t'^2} \right|, \quad t, t' \in [\gamma, \infty]$$

KR-gleichmäßig gegen die Einheitszerlegung $E_0(t)$.

Eine genaue Beweisführung der hier gemachten Behauptungen und weitere Hinweise finden sich in den Arbeiten [6–8] des Autors.

---

[5]) Über die relativ gleichmäßige Konvergenz soll an anderer Stelle im Zusammenhang mit der Konvergenz konkreter Verfahren zur Eigenwertbestimmung berichtet werden.

[6]) Mit $D(A)$ bezeichnen wir das Definitionsgebiet des Operators A.

Literatur

[1] *P. R. Halmos:* Measure theory. N.Y. 1950.

[2] *Л. В. Канторович:* О перемещении масс. ДАН СССР *37* (1942), № 7/8, 227—229.

[3] *Л. В. Канторович:* Об однои проблеме Монжа. Усп. Матем. н. *3* (1948), вып. 2, 225—226.

[4] *Л. В. Канторович и Г. Ш. Рубинштейн:* Об одном функциональном и некоторых экстремальных задагах. ДАН СССР *115* (1957), № 6, 1058—1061.

[5] *Л. В. Канторович и Г. Ш. Рубинштейн:* Об одном пространстве вполне аддитивных функцйи. Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астр., *7* (1958), вып. 2, 52—59.

[6] *Ф. Кунерт:* Метрика Канторовича-Рубинштейна и сходимость самосопряженных операторов I. Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астр., *13* (1965), вып. 3, 35—49.

[7] *Ф. Кунерт:* Об одном обобщении пространства Канторовича-Рубинштейна. Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астр., *1* (1966), вып. 1, 26—37.

[8] *Ф. Кунерт:* Метрика Канторовича-Рубинштейна и сходимость самосопряженных операторов II. Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астр. *13* (1966), вып. 3, 30—39.

[9] *W. I. Smirnow:* Lehrgang der Höheren Mathematik. Berlin 1965.