B. Levshenko; Jurij Michailov Smirnov

Об одном свойстве нульмерных метрическх ространств

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 241--242.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700830

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НУЛЬМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Б. ЛЕВШЕНКО и Ю. М. СМИРНОВ

Москва

Вот оно:

Т 1. *Всякое нульмерное*[1]) *метрическое пространство можно ретрагировать на любое свое непустое замкнутое подмножество.*

Для пространств со счетной базой это, видимо, известно.

Докажем следующее более общее предложение:

Т 0. *Всякое метрическое пространство можно ретрагировать на любое свое непустое замкнутое подмножество, дополнение к которому нульмерно.*

Отметим следующие следствия:

С 0. *Непустое метрическое пространство нульмерно тогда и только тогда, когда его можно ретрагировать на любое непустое замкнутое подмножество.*

С 1. *Любое непустое замкнутое множество A n-мерного метрического пространства X является ретрактом такого его подмножества B, что* $\operatorname{Ind}(X \setminus B) \leqq n - 1$.

С 2. *Открытое непустое множество Γ метрического пространства X нульмерно тогда и только тогда, когда X можно ретрагировать на любое свое непустое замкнутое подмножество, содержащее разность $X \setminus \Gamma$.*

Обратное утверждение этого следствия основывается на следующей лемме:

Л. *Если открытое множество Γ регулярного пространства X паракомпактно и если X можно ретрагировать на любое непустое замкнутое подмножество, содержащее $X \setminus \Gamma$, то* $\operatorname{Ind} \Gamma = 0$.

Доказательство теоремы Т 0. Пусть $\bar{B} = B$ и $\operatorname{Ind}(X \setminus B) = 0$. Для любого натурального числа n имеем: $\overline{O_{1/n}B} \subseteq O_{1/(n-1)}B$ и $B = \bigcap\limits_n O_{1/n}B$. Существуют

[1]) Имеется ввиду большая индуктивная размерность Ind или, что в рассматриваемых случаях эквивалентно, размерность dim (с помощью покрытий).

такие открыто-замкнутые множества O_n, что $O_{1/n}B \subseteq O_n \subseteq O_{1/(n-1)}B$ и $O_1 = X$. Множества $H_n = O_n \setminus O_{n+1}$ открыто-замкнуты и $X \setminus B = \bigcup_n H_n$. Так как $\dim H_n = \operatorname{Ind} H_n = 0$, то существуют такие открыто-замкнутые множества H_{n_α}, что $\operatorname{diam} H_{n_\alpha} \leqq 1/n$ для каждого α и n и, кроме того, $H_n = \bigcup_\alpha H_{n_\alpha}$ при каждом n. Пусть $x_{n_\alpha} \in H_{n_\alpha}$. Тогда $\varrho(x_{n_\alpha}, B) > 0$. Значит, $\varrho(x_{n_\alpha}, B) < 2\varrho(x_{n_\alpha}, B)$ и поэтому найдется такая точка y_{n_α} в B, что $\varrho(x_{n_\alpha}, y_{n_\alpha}) < 2\varrho(x_{n_\alpha}, B)$. Определим искомую ретракцию $f: X \to B$ следующим образом: если $x \in B$, то $fx = x$; если же $x \in H_{n_\alpha}$, то $fx = y_{n_\alpha}$. Нетрудно доказать, что отображение f на множестве B даже равномерно-непрерывно, а в остальных точках — непрерывно. Все доказано.

Отсюда непосредственно следует прямое утверждение теоремы 1. Обратное верно в любом случае (для размерности dim надо потребовать нормальности).

Утверждение С 1 следует из того, что в метрическом случае X можно разложить в сумму $(n-1)$-мерного и нульмерного множества, если $\operatorname{Ind} X = n$.

Докажем лемму. В условиях леммы существует у каждой точки x множества Γ такая окрестность O_x, что $\bar{O}_x \subseteq \Gamma$ (регулярность). Даже существует локально-конечное покрытие $\{H_\alpha\}$, вписанное в систему $\{O_x\}$ (паракомпактность множества Γ). Каждое $\bar{H}_\alpha$ лежит в некотором $\bar{O}_x$. По теореме суммы (система $\{\bar{H}_\alpha\}$ — локально-конечна) достаточно доказать, что $\operatorname{Ind} \bar{H}_\alpha = 0$ для всех α (это эквивалентно равенству $\dim \bar{H}_\alpha = 0$). Пусть A замкнуто в $\bar{H}_\alpha$ (значит, и в X). Пусть OA — открытая окрестность множества A в $\bar{H}_\alpha$. Тогда $\bar{H}_\alpha \setminus OA$ замкнуто в X, множество $B = (\bar{H}_\alpha \setminus OA) \cup (X \setminus \Gamma)$ также замкнуто в X, $A \cap B = \emptyset$. Ретрагируем все X на $A \cup B: f: X \to A \cup B$. Тогда $B \subseteq f^{-1}B$, $A \subseteq f^{-1}A \subseteq X \setminus f^{-1}B$, а $\bar{H}_\alpha \cap f^{-1}A \subseteq \bar{H}_\alpha \setminus f^{-1}B \subseteq OA$, где $f^{-1}A$ и $f^{-1}B$ — открыто-замкнуты. Итак, A отделимо от $\bar{H}_\alpha \setminus OA$ открыто-замкнутою окрестностью (при любых A и OA). Значит, $\operatorname{Ind} \bar{H}_\alpha = 0$ при любом α. Этим все доказано.

Замечание. *Для неметризуемых пространств теорема* Т 1 (*а, значит, и* Т 0) *не верна:*

Чеховское расширение βD множества D, состоящего из всех натуральных чисел, нельзя ретрагировать на нарост $\beta D - D$, хотя $\operatorname{Ind} \beta D = \dim \beta D = 0$.