C. Silva Rehermann

Sur une généralisation de la propriété de Darboux

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 330--331.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700821

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA PROPRIÉTÉ DE DARBOUX

C. SILVA REHERMANN

La Habana

Une manière d'exprimer qu'une application de R dans R a la propriété de Darboux dans un intervalle $[a, b]$ est la suivante:

Quels que soient $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$, l'image de l'intervalle $[x_1, x_2]$ est un ensemble *connexe* de R.

Cette formulation suggère la généralisation suivante: Nous dirons que l'application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est une *application darbouxienne* si quel que soit le sous-ensemble *connexe* et *fermé* $S \subset X$, son image $f(S)$ est un sous-ensemble *connexe* de Y.

Si $f: X \to Y$ n'est pas darbouxienne, il existe une partie S *fermée* et *connexe* telle que $f(S)$ ne soit pas *connexe*, c'est-à-dire qu'il existe une partition de $f(S)$ en deux ouverts C et D.

Soient $A = S \cap f^{-1}(C)$, $B = S \cap f^{-1}(D)$, et $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ (ce dernier ensemble n'est pas *vide*, car S est fermé, $\bar{A} \cup \bar{B} = S$ et S est connexe). Comme x appartient à l'un des ensembles A et B et qu'il est adhérent à l'autre, c'est un point de *discontinuité* de f. Si chaque point $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ est adhérent au sous-ensemble composé des points que nous allons appeler points de „*classe distincte de celle de* x" (ce sont les points de B si $x \in A$, et vice versa), alors f sera *totalement discontinue* dans l'ensemble fermé $\bar{A} \cap \bar{B}$.

De cela on peut déduire une condition suffisante pour qu'une fonction soit darbouxienne:

Théorème. *Soit f une application qui n'est totalement discontinue dans aucun fermé d'un espace topologique régulier X (Ax. O_{III} de Bourbaki), transformant X dans un espace topologique Y. Pour que f soit darbouxienne, il suffit qu'elle vérifie la condition suivante*:

Quel que soit le sous-ensemble connexe et fermé $S \subset X$, si C est un ouvert du sous-espace induit sur $f(S)$, $B = S - f^{-1}(C)$ et U un ouvert de S contenu dans B, alors on a aussi $\bar{U} \subset B$.

Démonstration. Soit f une application *non-darbouxienne*, il existe donc un $S \subset X$, fermé et connexe, tel que $f(S)$ peut se décomposer en deux *ouverts* C et D. Soient $A = S \cap f^{-1}(C)$, $B = S \cap f^{-1}(D)$. Or, si la condition du théorème était vérifiée, f serait *totalement discontinue* dans un ensemble *fermé*, car tout $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ serait adhérent au sous-ensemble des points de $\bar{A} \cap \bar{B}$ de classe distincte de celle de x.

En effet, quel que soit le voisinage $V(x)$ (dans la topologie induite sur S, et à laquelle se réfèrent toutes nos considérations suivantes) et $V_1(x)$ un voisinage tel que $\overline{V_1(x)} \subset V(x)$, il y a dans $V_1(x)$ un point z de classe distincte de celle de x: Si ce z n'appartient pas à $\bar{A} \cap \bar{B}$, il existe un voisinage ouvert $W(z)$ contenu dans $V_1(x)$ et qui ne contient pas de points de la classe de x. Considérons la réunion U de tous les ouverts qui jouissent des propriétés de $W(x)$ énoncées. Comme S est connexe et contient des points de U (p. ex. $z \in S$) mais aussi des points de $\complement U$ (p. ex. $x \in S$), il contient aussi un point x' de la *frontière* de U, qui, en vertu de nos hypothèses, est de la même classe que z, mais n'appartient pas à U, car U est *ouvert*. Ce point x' appartient donc à $\bar{A} \cap \bar{B}$, parce qu'il n'est intérieur ni à A ni à B, et il appartient certainement aussi à $V(x)$.

Remarque. Si $Y = R$, on voit sans peine que, au lieu d'exiger la condition donnée pour tout *ouvert* C du sous-espace $f(S)$, il suffit de prendre seulement les intersections de $f(S)$ avec les *demi-droites ouvertes* de R.

Corollaire 1. *Est darbouxienne toute fonction qui n'est totalement discontinue dans aucun fermé et qui vérifie cette condition-ci (plus maniable que la condition donnée ci-dessus et qu'elle implique d'ailleurs):*

Quel que soit le sous-ensemble connexe et fermé $S \subset X$, si x est adhérent à un ouvert U du sous-espace S, il existe une suite $\{x_n\}$ d'éléments de U telle que $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.

Corollaire 2. *Si X est métrique complet et Y métrique borné (ou bien $Y = R^n$), les conditions précitées restent en vigueur lorsqu'on remplace partout la „fonction qui n'est pas totalement discontinue“ par „fonction de la classe* 1“.

En effet, nous avons prouvé (voir [2], Théorème 7) que pour de tels espaces X et Y, la *discontinuité ponctuelle* dans tous les fermés est *nécessaire* pour que f soit de la *classe* 1 de *Baire*.

Corollaire 3. *Pour $X = Y = R$, on obtient comme cas très particulier:*

1) *La proposition classique de W. H. Young* [3]: *Pour que f de la classe* 1 *soit darbouxienne, il suffit que chaque $f(x)$ soit limite de valeurs de f à gauche et de valeurs de f à droite.*

2) *Compte tenu de la remarque faite ci-dessus, la proposition formellement plus générale énoncée par H. K. Sen* [1]: *Est darbouxienne tout f de la classe* 1 *qui vérifie*

$$l(x-0) \leqq f(x) \leqq L(x-0) \quad et \quad l(x+0) \leqq f(x) \leqq L(x+0)\,.$$

Références

[1] *H. K. Sen:* Darboux's property and its applications. Proc. Benares Math. Soc. (N.S.) *2* (1940), 17—23.

[2] *C. Silva Rehermann:* Una generalizacion de teoremas sobre funciones de la clase 1 de Baire. Memorias de la Facultad de Ciencias, Universidad de La Habana *1* (1963), 1—14.

[3] *W. H. Young:* A theorem in the theory of functions of real variable. Rend. Circ. Mat. Palermo XXIV (1907), 187—192.