Enrico Magenes

Problèmes de frontière libre lies à certaines questions d'hydraulique

In: Miloš Ráb and Jaromír Vosmanský (eds.): Proceedings of Equadiff III, 3rd Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications. Brno, Czechoslovakia, August 28 - September 1, 1972. Univ. J. E. Purkyně - Přírodovědecká fakulta, Brno, 1973. Folia Facultatis Scientiarum Naturalium Universitatis Purkynianae Brunensis. Seria Monographia, Tomus I. pp. 51--58.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700070

PROBLÈMES DE FRONTIÈRE LIBRE LIÉS A CERTAINES QUESTIONS D'HYDRAULIQUE

by E. MAGENES

N. 1. — INTRODUCTION. Le but de cette conférence est celui de faire connaître certains résultats obtenus récemment à Pavia par le Laboratoire d'Analyse Numérique du C. N. R. et les Départements de Mathématique et d'Hydraulique de l'Université, sur une classe de problèmes à frontière libre pour des équations linéaires elliptiques, qui se posent dans l'étude du filtrage de liquides à travers des milieux poreux; il s'agit de problèmes bien connus et étudiés depuis longtemps par le ingénieurs hydrauliques (cf. par ex. [1], [6], [9], [15], [17], [20] et la bibliographie de ces ouvrages). La méthode utilisée a été introduite par mon collègue C. BAIOCCHI [2] dans un cas particulier et ensuite développée de façon systématique par lui même et tout un group de chercheurs (cf. [3], [4], [5]); elle a l'avantage d'être non seulement parfaitement rigoureuse du point de vue mathématique mais aussi très efficace du point de vue de l'approximation numérique. Faute de temps je renvoie à [3], [4] pour un cadre de tous les problèmes qui peuvent être résolus par cette méthode et je développe ici un cas concret qui néanmoins permet de mettre en évidence les points essentiels de la méthode et les difficultés techniques que l'on doit surmonter. Soient donnés sur une base horizontale impérméable deux bassins d'eau, de niveau y_1 et y_2 $(0 \leqq y_2 < y_1)$, divisés par une digue en matériel poreux homogène d'hauteur $b \geqq y_1$, à parois verticales planes et parallèles, d' épaisseur a, la prémière parois étant impermeabilisée de l'hauteur c $(0 < c < y_1)$ jusqu'à l'hauteur b; le problème physique (cf. [13]) est celui de determiner la "surface libre" de l'eau dans la digue. On pourrait même supposer $c = y_1$; on trouverait alors le cas étudié dans [2] par Baiocchi et la méthode serait encore applicable et même avec beaucoup de simplifications (cf. les remarques après [16]). Grâce à la loi de Darcy et à l'incompressibilité du fluide on aboutit au problème mathématique suivant, formulé encore de façon formelle:

Pr. A: *on cherche une fonction* $x \to \varphi(x)$ *de* $[0, a]$ *dans* R *avec*

$$\varphi \quad \text{„suffisamment régulière"}; \tag{1}$$

$$\varphi \quad \text{strictement décroissante}; \tag{2}$$

$$0 < \varphi(x) \leqq y_1\,; \quad \varphi(0) \geqq c; \quad \varphi(a) \geqq y_2\,; \tag{3}$$

et telle que, si l'on considère l'ouvert

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < a, \;\; 0 < y < \varphi(x)\} \tag{4}$$

il existe une fonction: $(x, y) \to u(x, y)$ *de* $\bar{\Omega}$ *dans* R *avec*

$$u \text{ „suffisamment régulière"}; \tag{5}$$

$$\Delta u = 0 \quad dans\ \Omega; \tag{6}$$

$$u(0, y) = y_1, \ 0 \leqq y \leqq c; \ u(a, y) = y_2, \ 0 \leqq y \leqq y_2; \ u(a, y) = y, \ y_2 \leqq y \leqq \varphi(a); \tag{7}$$

$$u_y(x, 0) = 0, \ \ 0 < x < a; \ \ u_x(0, y) = 0, \ \ c < y < \varphi(0); \tag{8}$$

$$u = y \quad sur\ \Gamma_\varphi; \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ sur\ \Gamma_\varphi \ (n \ normale \text{ „extérieure“ } à\ \Gamma_\varphi) \tag{10}$$

ou Γ_φ *est la courbe d'équation* $y = \varphi(x)$, $0 < x < a$.
Du point de vue mathématique il faut préciser le problème en choisissant des espaces convenables pour les inconnues φ et u de façon que le problème soit bien posé. Nous donnerons la définition suivante de solution faible du Pr. A, en prenant comme inconnue $\{\varphi, \Omega, u\}$, pour simplifier l'exposé, et en désignant par D le rectangle $D =]0, a[\times] \ 0, b[$:

Déf. 1: $\{\varphi, \Omega, u\}$ *est une solution faible du* **Pr.** A *si*

$$\varphi \in C^0([0, a])^{1)} \text{ et vérifie (2), (3); } \Omega \text{ est donnée par (4);} \tag{11}$$

$$u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})^{1)} \text{ et vérifie (7), (9) au sens de } C^0(\bar{\Omega}); \tag{12}$$

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \,.\, \operatorname{grad} \psi \, dx \, dy = 0 \ \ \forall \, \psi \in C^1(\bar{D}) \text{ avec } \psi = 0 \ \text{ dans un voisinage}$$
$$\text{de } \{x = 0, 0 \leqq y \leqq c\} \cup \{x = a, 0 \leqq y \leqq b\}; \tag{13}$$

Remarque 1. – (13) traduit au sens faible usuel (6), (8), (10); (11) et la première de (7) entrainent que $c < \varphi(0)$.
Nous montrerons, dans les lignes essentielles sans donner les détails pour lesquels nous renvoyons à [3], qu'il existe une et une seule solution „faible“ du **Pr.** A et qu'elle est aussi „forte“, au sens qu'elle vérifie toutes les propriétés que le ingénieurs exigent de la solution du problème physique.

N. 2. – THÉORÈME D'UNICITÉ. Soit d'abord $\{\varphi, \Omega, u\}$ une solution faible du **Pr.** A. Une conséquence immédiate des résultats bien connus sur les problèmes aux limites elliptiques est que

$$u \text{ est analytique dans } \Omega \cup \{x = 0, 0 < y < c\} \cup \{x = 0, c < y < \varphi(0)\} \cup$$
$$\cup \{0 < x < a, y = 0\} \cup \{x = a, 0 < y < y_2\} \cup \{x = a, y_2 < y < \varphi(a)\} \tag{14}$$

et donc (6) et (8) sont vérifiées au sens classique.
Du principe de maximum on obtient encore que

$$u(x, y) > y \ dans\ \Omega. \tag{15}$$

1) Nous utiliserons les notations habituelles pour les espaces des fonctions k-fois continuement différentiables et les espaces de Sobolev d'ordre s réel: par ex. $C^1(\bar{D})$, $W^{s,p}(\Omega)$, s réel, $1 < p < +\infty$, $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ (cf. par ex. [11], [12], [14]).

Une autre importante propriété, qui traduit le fait physique que le „débit" est constant dans chaque section verticale de la digue, est la suivante

$$l'intégrale \int_0^{\varphi(x)} u_x(x, y)\, dy \text{ existe p. p dans }]0, a[\text{ et elle est p. p. constante.} \tag{16}$$

Pour la démonstration de (16) il suffit de noter que $u \in H^1(\Omega)$ et de vérifier, en utilisant (13), que la dérivée au sens des distributions de la fonction dans (16) est nulle. Désignons cette constante par $-q$ et notons qu'elle n'est pas connue „a priori"; ici il y a une différence essentielle en comparaison de plusieurs autres problèmes du même type (par ex. le problème étudié dans [2] auquel se réduit notre problème si $c = y_1$; dans ce cas on peut en effet calculer aisément q par utilisation de la formule de Green et l'on trouve $q = (y_1^2 - y_2^2)(2a)^{-1}$). Changeons maintenant la fonction inconnue u en posant

$$\tilde{u}(x, y) = u(x, y) \text{ dans } \bar{\Omega}, \quad \tilde{u}(x, y) = y \text{ dans } \bar{D} - \bar{\Omega}\,; \tag{17}$$

$$w(x, y) = \int_y^b \{\tilde{u}(x, t) - t\}\, dt \text{ dans } \bar{D}. \tag{18}$$

Posons $\Gamma_N = \{x = 0,\ c < y < b\}$, $\Gamma_D = \partial D - \bar{\Gamma}_N$ et définissons sur $\bar{\Gamma}_D$ g_q par

$$\left.\begin{aligned} &g_q(a, y) = \frac{(y_2 - y)^2}{2}, \quad 0 \leqq y \leqq y_2\,; \quad g_q(x, 0) = \frac{y_2^2}{2} + q(a - x), \ 0 \leqq x \leqq a\,; \\ &g_q(o, y) = aq + \frac{y_2^2 + y^2}{2} - y_1 y, \quad 0 \leqq y \leqq c, \quad g_q(x, y) = 0 \text{ dans tout autre} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{point de } \Gamma_D\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Les deux Théorèmes suivants donnent les propriétés fondamentales de la fonction w.

Théorème 1: *La fonction w vérifie:*

$$w \in H^{2+\sigma}(D) \qquad \sigma \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \tag{20}$$

(d'ou, grâce aux inégalités de Sobolev, $w \in W^{2,p}(D)$ $\forall\, p \in [2, 4[$ et $w \in C^1(\bar{D})$);

$$w = g_q \text{ sur } \bar{\Gamma}_D\,; \tag{21}$$

$$w_x = 0 \text{ sur } \Gamma_N\,; \tag{22}$$

$$w > 0 \text{ dans } \Omega, \quad w = 0 \text{ dans } D - \Omega\,; \tag{23}$$

$$\Delta w = \chi_\Omega \text{ dans } D\ (\chi_\Omega = \text{fonction charactéristique de } \Omega). \tag{24}$$

Démonstration. On montre d'abord aisément que $w \in H^1(D) \cap C^0(\bar{D})$ et que vérifie (21); (23) est une conséquence immédiate de (18) et de (15). Grâce à (13) on montre ensuite que $\Delta\tilde{u} = -D_y\chi_\Omega$ dans D au sens des distributions, d'où, grâce aussi à la deuxième de (23), on obtient (24). On en déduit alors que

$$w \in H^2(D) \tag{25}$$

car $w_{yy} = -1 - \tilde{u}_y \in L^2(D)$, $w_{xy} = -\tilde{u}_x \in L^2(D)$, $w_{xx} = \chi_\Omega - w_{yy} \in L^2(D)$. Donc w_x a un sens sur ∂D et grâce alors à la deuxième de (8) (cf. aussi (14), (17) et (18)) on vérifie (22) au sens de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$. Pour montrer (20) notons d'abord que $\chi_\Omega \in H^\sigma(D)$ $\forall\, \sigma \in [0, 1/2[$; on peut alors utiliser les résultats connus sur la régularité des solutions du problème mêlé (21), (22), (24) (cf. [16] et, pour la régularité dans le voisinage de (0, 0), $(a, 0)$, (a, b) cf. [8]) pour montrer que le problème est à indice et que, grâce aussi à (25), son indice est égal à 1 dans les espaces $H^{2+\sigma}(D)$, pour tout $\sigma \in [0, 1/2[$, avec la même condition de compatibilité; donc, vue la régularité des donnés χ_Ω et g_q, on en déduit (20).

Théorème 2: *Soient* $K_q = \{v \in H^1(D);\ v|_{\Gamma_D} = g_q\}$ *et* $K_q^+ = \{v \in H^1(D);\ v|_{\Gamma_D} = g_q,\ v \geqq 0$ *p. p dans* $D\}$; *alors* w *vérifie les inéquations variationelles suivantes* $\left(\textit{où } v^+ = \dfrac{|v| + v}{2}\right)$

$$w \in K_q^+;\ \int_D \operatorname{grad} w \,.\, \operatorname{grad}(v - w)\, dx\, dy + \int_D (v - w)\, dx\, dy \geqq 0 \quad \forall\, v \in K_q^+; \tag{26}$$

$$w \in K_q;\ \int_D \operatorname{grad} w \,.\, \operatorname{grad}(v - w)\, dx\, dy + \int_D (v^+ - w^+)\, dx\, dy \geqq 0 \quad \forall\, v \in K_q. \tag{27}$$

La démonstration suit de façon immédiate en utilisant le Th. 1.

Remarque 2: Il est bien connu que (26) est équivalente au problème de minimiser la fonctionelle quadratique $J(v) = 1/2 \int_D |\operatorname{grad} v|^2\, dx\, dy + \int_D v\, dx\, dy$ dans le convexe K_q^+ (considérations analogues pour (27)). Mais nous préférons envisager (26) (et (27)) car en générale dans les problèmes que l'hydraulique présente et que l'on peut résoudre par la méthode de Baiocchi (cf. [3]), on rencontre des inéquations analogues à (26) dont le premier membre n'est pas une forme bilinéaire symétrique et donc on ne peut pas les réduire à des problèmes de minimum.
On peut maintenant démontrer le théoréme d'unicité:

Théorème 3: *Il existe au plus une solution faible du* Pr. A.

Démonstration. Notons d'abord que si $\{\varphi, \Omega, u\}$ est une solution, grâce au fait que $w \in C^1(\bar{D})$ (cf. (20)), on a

$$q = -\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^c \{\tilde{u}(x, t) - \tilde{u}(o, t)\}\, dt. \tag{28}$$

Alors, si $\{\varphi', \Omega', u'\}$ et $\{\varphi'', \Omega''; u''\}$ sont deux solutions et on désigne par q', q'' et $\tilde{u}'$, $\tilde{u}''$ et w', w'' les constantes q et les fonctions $\tilde{u}$ et w correspondantes et si $q' = q''$, on a $w' = w''$, grâce à l'unicité de la solution par ex. de (26), et donc aussi $\Omega' = \Omega''$ et $\varphi' = \varphi''$ et $u' = u''$. Si au contraire $q' < q''$, alors, en utilisant le principe du maximum, on déduit $w' \leqq w''$, d'où $\Omega' \subset \Omega''$, $\tilde{u}' \leqq \tilde{u}''$ et alors, grâce à (28) écrite pour q' et q'', on a $q'' \leqq q'$, ce qui est absurde.

N. 3. — THÉORÈME D'EXISTENCE. – Pour tout q réel nous pouvons considérer la fonction g_q et les convexes K_q^+ et K_q définis dans (19) et dans le Th. 2, et étudier les inéquations (26) et (27). Pour tout q réel (27) admet (cf. [21], [10]) une solution unique w_q, car K_q est un convexe fermé et non vide de $H^1(D)$; (26) admet une solution unique pour tout $q \geqq q_0 = cy_1a^{-1} - (c^2 + y_2^2)(2a)^{-1}$, car alors K_q^+ est aussi un convexe fermé et non vide de $H^1(D)$; et l'on montre aisément que cette solution coincide avec w_q. On peut donc se borner à étudier la famille des inéquations (27) lorsque q varie dans $\boldsymbol{R}$ (mais la considération de (26) est utile du point de vue numérique). Dès théorèmes précédents nous savons que, s'il existe une solution $\{\varphi, \Omega, u\}$, alors il existe une et une seule valeur q^* de q telle que $\{\varphi, \Omega, u\}$ soit liée à la solution w_q de (27) par les relations

$$\Omega = \{(x, y) \in D;\ w_{q^*}(x, y) > 0\}\ ; \tag{29}$$

$$\varphi(x) = \max\{y; (x, y) \in \bar{\Omega}\},\ \ 0 \leqq x \leqq a\ ; \tag{30}$$

$$u(x, y) = y - D_y w_{q^*}(x, y),\ \ (x, y) \in \bar{\Omega}. \tag{31}$$

Il faut donc essayer de montrer qu'il existe un tel q^*, en étudiant la famille des inéquations (27). D'abord on étudie la régularité de w_q valable pour tout q.

Théorème 4. $\forall\ q \in R$, (27) *admet une solution unique* w_q *telle que*

$$w_q \in W^{1,p}(D)\ \forall\, p \geqq 1,\ \ w_q \in H^{1+\sigma}(D)\ \forall\, \sigma \in [0, 1/2[\ ; \tag{32}$$

$$\Delta w_q \in L^\infty(D),\ \ 0 \leqq \Delta w_q \leqq 1\ \ p.\,p\ dans\ D; \tag{33}$$

$$D_x w_q|_{\Gamma_D} = 0\ dans\ un\ sens\ faible. \tag{34}$$

Démonstration : On démontre d'abord (33) et (34) (par ex. au sens de $(H_{0,0}^{1/2}(\Gamma_N))'$ cf. [11] pour cet espace), en écrivant (27) pour $v = w_q \pm \psi$ avec $\psi \in \{v \in H^1(D); v/\Gamma_D = 0\}$; ensuite on démontre (32) en utilisant essentiellement les résultats de [18] pour le problème mêlé

$$\Delta v = \Delta w_q \in L^\infty(D),\ \ v|_{\Gamma_D} = g_q,\ \ D_x v|_{\Gamma_N} = 0\,. \tag{35}$$

Mais nous savons que, s'il existe une solution $\{\varphi, \Omega, u\}$ du Pr. A, la fonction w correspondante doit vérifier aussi (20); on peut donc espérer de déterminer la „bonne" valeur de q en utilisant la „condition de compatibilité" pour que le problème (35) ait solution dans $W^{2,p}(D)$ (ou $H^{2+\sigma}(D)$, ou $C^1(\bar{D})$) comme une nouvelle équation dans l'inconnue q. En effet on a le

Théorème 5. *Il existe une fonction* $\mathscr{F}$ *de* $\boldsymbol{R}$ *dans* $\boldsymbol{R}$, *continue et borné, et deux constantes* α *et* β *telles que la solution* w_q *de* (27) *appartient à* $W^{2,p}(D)\ \forall\, p \in [2, 4[$ *si et seulement si q est racine de l'équation*

$$\mathscr{F}(q) + \alpha q + \beta = 0\,. \tag{36}$$

En outre (36) *admet une solution unique* q^* *telle que*

$$\tilde{q}_0 \leqq q^* \leqq q_1, \quad avec \quad \tilde{q}_0 = \max(0, q_0), \quad q_1 = (y_1^2 - y_2^2)(2a)^{-1}. \tag{37}$$

Démonstration: 1. On considére l'opérateur T: $v \to Tv = \{-\Delta v, \; v|_{\Gamma_D}, D_x v|_{\Gamma_N}\}$ dans les espaces $W^{2,p}(D)$, $p \; \forall \; [2, 4[$; grâce à [19] et [16] T est un opérateur à indice avec indice égale à 1; donc il y a une seule condition de compatibilité pour l'existence d'une solution dans $W^{2,p}(D)$ de (35) et l'on peut écrire cette condition sous la forme suivante (indépendante de p)

$$\int_D \mu \Delta w_q \, dx \, dy + \langle \psi, g_q \rangle = 0 \tag{38}$$

avec $\mu \in L^2(D)$ et ψ fonctionnelle linéaire continue dans un convenable espace (par ex. $(H^{3/2}(\Gamma_D))'$). Si l'on pose $\mathscr{F}(q) = \int_D \mu \Delta w_q \, dx \, dy$ et l'on rappelle que g_q dépend linéairement de q, on déduit de (38) l'équation (37) et l'on démontre aussi que $\mathscr{F}$ est continue et borné, en utilisant (33) et le fait que w_q (resp. Δw_q) dépend continument de q dans $H^{1+\sigma}(D)$ – faible (resp. $L^\infty(D)$ – faible-étoile). On peut voir aussi par un raisonnement par l'absurde que $\alpha \neq 0$. Donc (36) admet au moins une solution q^*.
2. On considère ensuite la fonction f de $\boldsymbol{R}$ dans $\bar{\boldsymbol{R}}$:

$$f(q) = \limsup_{x \to o^+} \frac{w_q(x, c) - w_q(0, c)}{x}$$

laquelle s'annulle pour $q = q^*$, grâce au fait $w_{q^*} \in C^1(\bar{D})$ et que $D_x w_{q^*} = 0$ sur Γ_N; et, en faisant usage plusieures fois du principe du maximum, on prouve que: $f(\tilde{q}_0) \geqq 0$, $f(q_1) \leqq 0$, $f(q) > 0 \; \forall \; q < \tilde{q}_0$, $f(q') \geqq f(q'')$ si $\tilde{q}_0 \leqq q' < q''$, avec $f(q') > f(q'')$ si $f(q')$ et $f(q'')$ sont finis; d'où on déduit que $f(q)$ s'annulle une seule fois et donc l'unicité de q^* et (37).
Le Théorème 5 a comme conséquence immédiate le

Théorème 6. *Il existe une et une seule* $q^* \in [\tilde{q}_0, q_1]$ *telle que* $w_{q^*} \in W^{2,p}(D) \; \forall \; p \in$ $\in [2, 4[$ (*et donc* $w_{q^*} \in C^1(\bar{D})$).
On peut maintenant démontrer le théoréme d'existence:

Théorème 7. *Si* φ, Ω, u *sont définis par* (29), (30), (31), *où* q^* *est donée par le Théorème* 6, *alors* $\{\varphi, \Omega, u\}$ *est une solution du* Pr. A.

Démonstration: 1. D'abord $D_x w_{q^*} \leqq 0$ et $D_y w_{q^*} \leqq 0$ dans $\bar{D}$ (toujours par utilisation convenable du principe du maximum); 2. si $P = (\xi, \eta)$ est un point de $\bar{D}$ et si $Q_p^+ = \{(x, y) \in D;\; x > \xi, y > \eta\}$, $Q_p^- = \{(x, y) \in D;\; x < \xi, y < \eta\}$, alors $\bar{Q}_p^+ \subset \bar{D} - \bar{\Omega} \; \forall \, p \in \bar{D} - \bar{\Omega}$ et $\bar{Q}_p^- \subset \bar{\Omega} \; \forall \, p \in \bar{D} \cap \partial\Omega$; 3. $\partial\Omega \cap D$ ne contient aucun segment ni vertical ni horizontal; 4. Ω est un ouvert du type (4) avec φ satisfaisant à (2), (3), (11); 5. $\Delta_{q^*} u = 1$ dans Ω, d'où on déduit que u satisfait à (12) et (13).

Remarque 3. Notons enfin que l'on peut aussi démontrer que: *φ est analytique dans* $]0, a[$, $\varphi(a) > y_2$, $\varphi(0) < y_1$, ce qui nous donne d'autres propriétés que l'on exige de la solution du problème physique.

N. 4 – APPROXIMATION NUMÉRIQUE – Du point de vue numérique la méthode est beaucoup utile. En effet dans les cas où le „débit" q est connu (et ceci est vrai dans beaucoup de cas concrets, par ex. si $c = y_1$ comme on a déjà vu), on doit résoudre numériquement l'inéquation variationelle (26) (ou le problème de minimum èquivalent, cf. Rémarque 2.) dans le convexe K_q^+ de $H^1(D)$; et cela peut être fait aisément, comme il est bien connu (cf. par ex. [7]) par plusieurs méthodes à la fois rigoureuses du point de vue mathématique et efficaces du point de vue du calcul par les ordinateurs. Par ex. on peut utiliser, comme nous avons fait dans [4] et [5] les „différences finies" pour discrétiser (26) et la méthode S. O. R. avec projection sur le convexe discretisé pour resoudre numériquement l'inéquation discretisée. On approche ainsi w_q d'où on déduit aisément une approximation de Ω, φ et u. Mais dans notre cas (et aussi dans d'autres cas analogues) on ne connait pas „a priori" le „débit"; on sait seulement qu'il est la solution q^* unique de l'équation (36). Evidemment une méthode rigoureuse serait celle d'approcher q^* en discrétisant aussi (36) et puis résoudre numériquement l'inéquation (26) pour la valeur approchée de q^*. Mais nous avons suivie une autre idée, qui semble donner des algorithmes plus simples. „Grosso modo" l'idée est la suivante. On considère (pour simplifier) un réseau de pas $h = \{h_1, h_2\}$ sur D qui passe par le point $(0, c)$ en utilisant les points $0 < x_1 < x_2 < \ldots < a$ sur l'axe des x et $0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < c < \ldots < b$ sur l'axe des y. Pour tout q fixé on discrétise (26) par les différences finies liées au réseau et on essaie d'imposer une „condition de compatibilité" à la solution $w_q^{(h)}$ de l'inéquation discrétisée, de façon à déterminer une valeur $q(h)$ de q, qui puisse être prise comme approximation „raisonnable" de q; alors $w_{q(h)}^{(h)}$ donnera l'approximation de w_q. En effect on peut montrer (cf. [4]) que une telle condition est la suivante: $f_h(q) = 0$, où $f_h(q) = w_q^{(h)}(x_1, c) - w_q^{(h)}(0, c)$, car on démontre que la fonction $q \to f_h(q)$ est pour $q \geqq q_0$ continue, strictement décroissante, convexe, et que $f_h(q_0) \geqq \geqq 0$ et $f_h(q_1) \leqq 0$. Numériquement on résout l'équation $f_h(q) = 0$ par ex. par la méthode des „sécantes". Les résultats sont très bons; en comparaison des autres méthodes numériques utilisées jusqu'à maintenant on gagne beaucoup en simplicité de programmation et en rapidité d'exécution des calculus (cf. [4] et [5]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Aravin—S. A. Numerov: *Theory of fluid flow in undeformable porous media.* Moscow, 1953 (English. transl.: Israel Program scient. transl., Jerusalem, 1965).

[2] C. Baiocchi: *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica.* Ann. Mat. pura e appl. (IV) 92 (1972), 107—127; C. R. Acad. Sc. Paris, 273 (1971), 1215—1217.

[3] C. Baiocchi—V. Comincioli—E. Magenes—G. A. Pozzi: *Free boundary problems in the*

theory of fluid flow through porous media: existence and uniqueness theorems. (A paraître aux Ann. Mat. pura e appl.).
[4] C. BAIOCCHI—V. COMINCIOLI—L. GUERRI—G. VOLPI: *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: numerical approach.* (A paraître à Calcolo).
[5] V. COMINCIOLI—L. GUERRI—G. VOLPI *Analisi numerica di un problema di frontiera libera conesso col moto di un fluido attraverso un mezzo poroso.* Public. del Labor. di Anal. Numer. C.N.R., Pavia, N. 17, (1971).
[6] C. W. CRYER: *On the approximate solution of free boundary problems using finite differences.* J. Assoc. Comput. Mach. 17 (1970), 379—411.
[7] R. GLOWINSKY—J. L. LIONS—R. TREMOLIÈRES: *Résolution numérique des inéquations de la Mécanique et de la Physique,* livre a paraître, Dunod, Paris.
[8] P. GRISVARD: *Equations différentielles abstraites.* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris (4) 2 (1969), 311—395.
[9] M. E. HARR: *Groundwater and seepage.* New York; Mc Graw-Hill 1962.
[10] J. L. LIONS: *Quelques méthodes de resolution de problémes aux limites non linéaires.* Dunod-Gauthier Villars; Paris, 1969.
[11] J. L. LIONS—E. MAGENES: *Prolèmes aux limites non homogénes et applications;* Dunod, Paris, 1968 (tr. anglaise; Springer, Berlin 1972; tr. russe; Mir, Moscou, 1971).
[12] E. MAGENES: *Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali;* Atti VII Congr. U. M. I., Roma, Cremonese, 1964, 134—197 (tr. russe: Uspehi Mat. Nauk, 2 (128), XXI (1966,) 169—218).
[13] U. MAIONE—S. FRANZETTI: *Unconfined flow downstream of an homogeneous earth dam with impervious sheetpiles.* Thirteenth Congress of the Intern. Assoc. for Hydraulic research Kyoto (1969), 191—204.
[14] J. NECAS: *Les méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques.* Prague, Academia, 1967.
[15] S. T. NEUMANN—P. A. WITHERSPOON: *Variational principles for confined and unconfined flow of groundwater.* Water Resources Research 6, N. 5, (1970) 1376—1387.
[16] J. PEETRE: *Mixed problems for higer order elliptic equations in two variables.* I, II; Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa, 15 (1961), 337—353; 17 (1963), 1—12.
[17] P. YA. POLUBARINOVA—KOCHINA: *The theory of groundwater movement.* Moscow 1952 (English transl.: Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962).
[18] E. SHAMIR: *Regularization of mixed second order elliptic problems.* Israel J. of Math., 6 (1958), 150—168.
[19] E. SHAMIR: *Mixed boundary value problems for elliptic equation in the plane, the L^p theory.* Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa, 17 (1963), 117—139.
[20] R. V. SOUTHWELL: *Relaxation methods in theoretical physics.* Oxford; Clarendon Press, 1946.
[21] G. STAMPACCHIA: *Variational inequalities,* Proc. Nato, Venice, (1968), 101—192.

L'adresse de l'auteur:
Enrico Magenes
L'Université de Pavia
Via Lanfranco 7, Pavia
Italie