Jan Mařík

Vyjádření funkcionály integrálem

Vyjádření funkcionály integrálem.

Jan Mařík.

Pracováno při aspirantuře v Matematickém ústavě Československé akademie věd za vedení prof. Miroslava Katětova jako školitele.

Vyjádření funkcionály integrálem.

1./ Je známo, že abstraktní integrál lze definovat nejen pomocí míry, nýbrž také - aspoň za jistých předpokladů - pomocí lineární funkcionály na nějakém prostoru, jehož prvky jsou funkce na příslušné množině. Otázka ekvivalence těchto definic úzce souvisí s otázkou, zda lze příslušnou funkcionálu vyjádřit integrálem, definovaným pomocí míry. V této práci jsou uvedeny podmínky, postačující k možnosti takového vyjádření, a je dokázána věta o unicitě příslušné míry (resp. σ-aditivní funkce). Tyto výsledky se dále aplikují zejména na prostory, které jsou částí množiny všech spojitých funkcí na daném topologickém prostoru.

2./ Budiž $\mathfrak{A}$ neprázdný systém množin. Řekneme, že $\mathfrak{A}$ je (množinové) těleso, jestliže s každými dvěma prvky systému $\mathfrak{A}$ patří do $\mathfrak{A}$ také jejich sjednocení a rozdíl. Je-li každý pravek tělesa $\mathfrak{A}$ částí jisté pevné množiny P a platí-li $P \in \mathfrak{A}$, řekneme, že $\mathfrak{A}$ je algebra (na množině P). Je-li $\mathfrak{M}$ libovolný systém množin, pak $\mathfrak{M}_\sigma$ (resp. $\mathfrak{M}_\delta$) značí systém všech $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ (resp. $\prod_{n=1}^{\infty} M_n$), kde $M_n \in \mathfrak{M}$ pro $n = 1, 2, \dots$. Je-li $\mathfrak{A}$ těleso a platí-li $\mathfrak{A}_\sigma \subset \mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{A}_\delta \subset \mathfrak{A}$), řekneme, že $\mathfrak{A}$ je σ-těleso (resp. δ-těleso). Je-li algebra $\mathfrak{A}$ σ-tělesem, řekneme, že je $\mathfrak{A}$ σ-algebra. Je známo, že každé σ-těleso je zároveň δ-tělesem; naopak je zřejmé, že není každé δ-těleso σ-tělesem. Je-li však množinová algebra δ-tělesem, je též σ-algebrou a tedy i σ-tělesem. Množinové těleso $\mathfrak{T}$ je δ-tělesem, právě když pro každé $T \in \mathfrak{T}$ platí, že systém všech $A \subset T$, kde $A \in \mathfrak{T}$, tvoří σ-algebru na množině T. Je-li $\mathfrak{T}$ δ-těleso, je systém $\mathfrak{T}_\sigma$ σ-těleso.

3./ Budiž $\mathfrak{M}$ systém množin, jehož prvky jsou části jisté množiny P. Znakem

$$\xi(\mathfrak{M})$$

budeme rozumět systém všech $A \subset P$, jejichž průnik s libovolným prvkem ze systému $\mathfrak{M}$ opět patří do $\mathfrak{M}$. Zřejmě vždy platí $P \in \xi(\mathfrak{M})$. Je-li $\mathfrak{M}$ těleso (δ-těleso), že $\xi(\mathfrak{M})$ algebra (σ-algebra), obsahující $\mathfrak{M}$.

4./ Řekneme, že funkce μ[1]) na množinovém tělese $\mathcal{T}$ je aditivní, jestliže součet $\mu(A) + \mu(B)$ má smysl a rovná se $\mu(A + B)$, kdykoli jsou A, B disjunktní prvky tělesa $\mathcal{T}$. Platí-li dokonce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

pro každou disjunktní posloupnost A_n prvků z $\mathcal{T}$, jejíž sjednocení patří také do $\mathcal{T}$, řekneme, že funkce μ je σ-aditivní. Nezáporné σ-aditivní funkci na množinovém tělese budeme říkat míra.

5./ Každou míru, definovanou na δ- tělese $\mathcal{T}$, můžeme zřejmě právě jedním způsobem rozšířit na σ-těleso $\mathcal{T}_\sigma$. Je-li μ míra na σ-tělese $\mathcal{T}$, můžeme vždy (někdy dokonce různými způsoby) rozšířit míru μ na nějakou σ-algebru. Na př. na σ-algebře $\mathfrak{S}(\mathcal{T})$ (viz 3.) můžeme definovat rozšíření míry μ předpisem $\mu(A) = \infty$ pro $A \in \mathfrak{S}(\mathcal{T}) - \mathcal{T}$. Vidíme, že míru, definovanou na δ-tělese, můžeme vždy rozšířit na nějakou σ-algebru.

6./ Při definici integrálu pomocí míry se zpravidla předpokládá, že je míra dána na nějaké σ-algebře. Budeme definovat integrál také pomocí míry, dané na δ-tělese; tímto zobecněním, které je pouhou formalitou, dosáhneme jednoduššího znění vět.

Buď $\mathcal{T}$ δ- těleso, jehož prvky jsou části množiny P. Řekneme, že funkce f na množině P je $\mathcal{T}$-měřitelná, je-li

$$\mathop{E}_{x}[f(x) > c] \in \mathcal{T} \qquad \text{pro každé } c > 0,$$

$$\mathop{E}_{x}[f(x) < c] \in \mathcal{T} \qquad \text{pro každé } c < 0.$$

Je-li nyní μ míra na $\mathcal{T}$ a je-li f $\mathcal{T}$-měřitelná funkce, můžeme definovat $\int_P f d\mu$ jako $\int_P f d\tilde{\mu}$, kde $\tilde{\mu}$ je libovolné rozšíření míry μ

1.) Budeme vždy předpokládat, že hodnoty funkcí jsou buď reálná čísla nebo $\pm\infty$; operace s těmito prvky definujeme obvyklým způsobem.

na libovolnou σ-algebru, která obsahuje $\mathfrak{T}$.[2] Je vidět, že nezáleží na tom, které rozšíření zvolíme, a že pro integrál, definovaný pro $\mathfrak{T}$-měřitelné funkce pomocí míry na δ-tělese $\mathfrak{T}$, platí tytéž základní věty jako pro integrál, definovaný pomocí míry na nějaké σ-algebře.[3]

7./ Budeme vycházet z těchto předpokladů :[4]

Buď P neprázdná množina; buď Z lineární prostor, jehož prvky jsou (konečné reálné) funkce na množině P. Nechť platí

$$1) \quad f \in Z \Longrightarrow |f| \in Z$$

$$2) \quad f \in Z \Longrightarrow \min (f,1) \in Z.$$

Z 1) plyne, že s každými dvěma funkcemi f,g patří do Z také funkce $\max (f,g)$, $\min (f,g)$.[5]

Buď J nezáporná funkcionála na Z. Nechť je splněna implikace

$$f_n \in Z, \quad f_n \searrow 0^{6)} \Longrightarrow J(f_n) \to 0.$$

Sestrojíme napřed pomocný systém R všech funkcí r na množině P, k nimž existují $f_n \in Z$ tak, že $f_n \nearrow r$. Pro $r \in R$ položme

$$J_1(r) = \sup J(f), \text{ kde } f \in Z, \quad f \leqq r.^{7)}$$

---

2) Jestliže $\int_P f d\tilde{\mu}$ neexistuje, řekneme ovšem, že $\int_P f d\mu$ neexistuje.

3) Nečinilo by ovšem žádné obtíže definovat přímo integrál $\int_P f d\mu$ bez přechodu k σ-algebře; uvedeného postupu jsme použili jen proto, abychom věc převedli na všeobecně známou theorii.

4) Tento odstavec je v podstatě obsahem Daniellovy práce [1]. Daniell však nepředpokládá platnost dále uvedeného vztahu 2); významu tohoto vztahu je věnována poznámka[5]. Důkazy všech tvrzení z odst. 7./ lze nalézt též ve článku [6], který byl psán bez znalosti Daniellovy práce.

5) Snadno se zjistí, že z 1) neplyne 2) ani naopak. Je-li ovšem funkce $f(x) = 1$ prvkem Z a platí-li 1), platí automaticky též 2).

6) Symboly $\nearrow$, $\searrow$ značí monotonní bodovou konvergenci.

7) Může být též $J_1(r) = +\infty$.

Snadno se zjistí, že ze vztahu $f_n \nearrow r$, kde $f_n \in Z$, plyne $J(f_n) \longrightarrow J_1(r)$; odtud je patrné, že pro $r \in Z$ je $J_1(r) = J(r)$, takže místo $J_1(r)$ můžeme psát opět $J(r)$. Pro libovolnou funkci f na množině P budiž nyní

$$\overline{J}(f) = \inf J(r), \text{ kde } r \in R,\ r \geqq f,[8]$$

$$\underline{J}(f) = -\overline{J}(-f).$$

Vždy je $\overline{J}(f) \geqq \underline{J}(f)$; systém těch funkcí f, pro něž je $\underline{J}(f) = \overline{J}(f) \neq \pm\infty$, označíme L. Je-li $f \in R$, je $J(f) = \overline{J}(f) = \underline{J}(f)$. Pro $f \in L$ můžeme tedy psát

$$J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

Dá se nyní ukázat, že funkcionála J na množině L má vlastnosti Lebesgueova integrálu; jsou-li na př. f, g konečné funkce z L, patří též funkce $f+g$ do L a platí $J(f+g) = J(f)+J(g)$. Jsou-li f_n prvky z L a platí-li $f_n \nearrow f$, je

$$J(f_n) \nearrow \overline{J}(f) = \underline{J}(f); \qquad (\alpha)$$

je-li tedy v tomto případě $\underline{J}(f) < \infty$, je též $f \in L$.

8./ Pro libovolnou část A množiny P můžeme nyní definovat

---

[8] Neexistuje-li k funkci f žádné $r \geqq f (r \in R)$, je $\overline{J}(f) = \inf \emptyset = +\infty$

horní a dolní míru $\overline{m}$ a $\underline{m}$ předpisem

$$\overline{m}(A) = \overline{J}(c_A), \quad \underline{m}(A) = \underline{J}(c_A),$$

kde c_A je charakteristická funkce množiny A.

Buď $\mathfrak{A}$ systém všech A, pro něž je $c_A \in L$, neboli $\underline{m}(A) = \overline{m}(A) < \infty$. Pro $A \in \mathfrak{A}$ pišme $m(A) = \overline{m}(A) = \underline{m}(A)$. $\mathfrak{A}$ je zřejmě δ-těleso a funkce m je na $\mathfrak{A}$ σ-aditivní.[9]

Z předpokladu 2) plyne, že pro každé $f \in L$ a každé $c > 0$ (resp. $c < 0$) je

$$\mathop{\mathrm{E}}_x [f(x) > c] \in \mathfrak{A} \quad (\text{resp. } \mathop{\mathrm{E}}_x [f(x) < c] \in \mathfrak{A});$$

je tedy každá funkce $f \in L$ $\mathfrak{A}$-měřitelná. (Viz [6], str.189) Je-li nyní f libovolná nezáporná funkce z L, můžeme sestrojit posloupnost nezáporných „schodovitých" $\mathfrak{A}$-měřitelných funkcí f_n tak, že $f_n \nearrow f$. Pro každé n je zřejmě $J(f_n) = \int_P f_n \, dm$; z (α) (odst.7) a ze známé věty o záměně limity a integrálu plyne dále

$$J(f) = \lim J(f_n) = \lim \int_P f_n \, dm = \int_P f \, dm.$$

Platí tedy

$$J(f) = \int_P f \, dm$$

pro každou funkci $f \in L$, jak se snadno zjistí rozkladem funkce f ~~na kladnou~~ a zápornou část. Tento vztah platí tedy tím spíše pro

9) To vše by platilo, i kdyby požadavek 2) nebyl splněn. Dále bychom se však nedostali; jestliže 2) neplatí, nemusí být funkce ze systému Z $\mathfrak{A}$-měřitelné a nemá pak smysl mluvit o jejich integrálu podle míry m. Jako příklad lze uvést systém Z všech funkcí daných v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ předpisem $f(x) = kx$ (k libovolné reálné), při čemž klademe na př. $J(f) = k$. Platí zde $L = Z$; systém $\mathfrak{A}$ obsahuje jen prázdnou množinu. Snadno se zjistí, že i v tomto případě lze funkcionálu J vyjádřit integrálem; je však $J(f) = \int_0^1 f \, d\mu$ pro libovolnou míru μ, která splňuje vztah $\int_0^1 x \, d\mu = 1$. Tímto vztahem zřejmě není míra μ určena jednoznačně. Bez požadavku 2) nelze tedy dokázat větu o unicitě míry, vytvářející funkcionálu. Je otázka, zda by nebylo možné dokázat bez požadavku 2) aspoň existenci takové míry.

každé $f \in Z$.

9./ Mějme nyní nějaké δ-těleso $\mathcal{T}$, které je částí $\mathfrak{A}$. Buď μ míra na $\mathcal{T}$ taková, aby pro každé $f \in Z$ platilo

$$J(f) = \int_P f d\mu . \qquad (\beta)$$

(Tím je zároveň vysloven předpoklad, že každá funkce $f \in Z$ je $\mathcal{T}$-měřitelná). Limitním přechodem zjistíme, že (β) platí také pro každé $f \in R$. Buď $A \in \mathcal{T}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice čísla $m(A) = J(c_A)$ existují $r_1, r_2 \in R$ tak, že je $c_A \leqq r_1$, $-c_A \leqq r_2$ a mimo to

$$J(r_1) < m(A) + \varepsilon , \quad J(r_2) < -m(A) + \varepsilon .$$

Odtud plyne

$$m(A) - \varepsilon < -J(r_2) = \int_P (-r_2)\, d\mu \leqq \int_P c_A d\mu = \mu(A) \leqq \int_P r_1 d\mu = J(r_1) < m(A) + \varepsilon ,$$

tedy

$$\mu(A) = m(A) .$$

Vidíme, že na δ-tělese $\mathcal{T}$ existuje právě jedna míra (totiž míra m)taková, aby pro každé $f \in Z$ platil vztah (β). Budiž nyní

$$\mathcal{T}_Z$$

nejmenší δ-těleso, obsahující všechny množiny tvaru $E_x[f(x) > 1]$, kde $f \in Z$. ($\mathcal{T}_Z$ je zřejmě nejmenší ze všech δ-těles $\mathcal{T}$ takových, že každá funkce $f \in Z$ je $\mathcal{T}$-měřitelná.) Klademe-li $\mu(A) = m(A)$ pro $A \in \mathcal{T}$, platí zřejmě vztah (β) pro každé $f \in Z$. Odtud plyne :

Na δ- tělese $\mathcal{T}_Z$ existuje právě jedna míra μ taková, aby pro každé $f \in Z$ platil vztah (β).[10)]

10./ Uvidíme, že podobnou větu lze dokázat i bez předpokladu, že funkcionála J je nezáporná; slovo „ míra " musíme však na-

---

10) V této větě je důležité, že δ-těleso $\mathcal{T}_Z$ závisí jen na systému Z a nikoli na funkcionále J (kdežto na př. $\mathfrak{A}$ závisí na J).

hradit slovy „σ-aditivní funkce". Příslušný integrál definujeme takto : Buď $\mathcal{T}$ σ-těleso, jehož prvky jsou části množiny P. Buď φ σ-aditivní funkce na $\mathcal{T}$; nechť $\varphi(\emptyset) = 0$.[11] Definujme na $\mathcal{T}$ funkce φ_+, φ_- předpisem

$$\varphi_+(T) = \sup \varphi(A), \text{ kde } A \subset T,\ A \in \mathcal{T},$$
$$\varphi_-(T) = \sup (-\varphi(A)), \text{ kde } A \subset T,\ A \in \mathcal{T}.$$

Potom jsou suprema, definující $\varphi_+(T)$ a $\varphi_-(T)$, dokonce maximy. Aspoň jedna z funkcí φ_+, φ_- je tedy konečná; je-li funkce φ konečná, jsou obě funkce φ_+, φ_- konečné. Funkce φ_+, φ_- jsou míry a platí $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$. Položíme nyní

$$\int_P f d\varphi = \int_P f d\varphi_+ - \int_P f d\varphi_-,$$

pokud má pravá strana smysl. (Nemá-li smysl, řekneme ovšem, že $\int_P f d\varphi$ neexistuje.)

11./ Dále budeme potřebovat tuto větu:

Buď P neprázdná množina. Buď Y lineární prostor, jehož prvky jsou funkce na P. Nechť s každou funkcí f patří do Y také funkce $|f|$. Buď J aditivní funkcionála na Y; nechť platí implikace

$$f_n \in Y, \quad f_n \searrow 0 \Longrightarrow J(f_n) \to 0.$$

Potom lze funkcionálu J vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných funkcionál, pro něž tato implikace také platí.

Důkaz : Je-li $f \geqq 0$, $f \in Y$, položme

$$J_+(f) = \sup J(g), \text{ kde } g \in Y,\ 0 \leqq g \leqq f.$$

Snadno se zjistí (viz na př. [4], str. 232-233), že J_+ je

---

11) Kdyby bylo $\varphi(\emptyset) \neq 0$, bylo by buď identicky $\varphi(A) = +\infty$ nebo identicky $\varphi(A) = -\infty$; tyto triviální případy můžeme zřejmě vyloučit.

aditivní na množině všech nezáporných prvků z Y ; ukážeme, že J_+ nabývá jen konečných hodnot. Předpokládejme tedy, že pro některé $f \in Y$, kde $f \geqq 0$, je $J_+(f) = \infty$. Pak existuje g_1 tak, že platí $0 \leqq g_1 \leqq f$, $J(g_1) \geqq 1 + |J(f)|$. Je-li $J_+(g_1) = \infty$, volíme $f_1 = g_1$; pak máme

$$J_+(f_1) = \infty \;, \quad |J(f_1)| \geqq 1, \qquad 0 \leqq f_1 \leqq f \;. \qquad (\gamma)$$

Je-li $J_+(g_1) < \infty$, volíme $f_1 = f - g_1$. Pak je $J_+(f_1) = \infty$, $0 \leqq f_1 \leqq f$; dále je $|J(f_1)| = |J(f) - J(g_1)| \geqq$

$$\geqq J(g_1) - |J(f)| \geqq 1 \text{, takže } (\gamma) \text{ opět platí.}$$

Tak sestrojíme posloupnost funkcí f_n, splňujících vztahy

$$J_+(f_n) = \infty \;, \quad |J(f_n)| \geqq n, \quad 0 \leqq f_n \leqq f_{n-1}$$

pro $n = 1, 2, \ldots$; klademe $f = f_0$.

Pak je $f = f_0 \geqq \frac{f_1}{1} \geqq \frac{f_2}{2} \geqq \ldots \geqq 0$, $0 \leqq \frac{f_n}{n} \leqq \frac{f}{n} \to 0$, tedy $\frac{f_n}{n} \searrow 0$, ale $J\left(\frac{f_n}{n}\right) = \frac{1}{n} J(f_n) \geqq 1$, což je spor.

Tím je dokázáno, že J_+ nabývá jen konečných hodnot. Funkcionálu J_+ lze zřejmě právě jedním způsobem rozšířit na celé Y ; položíme-li ještě $J_- = J_+ - J$, je J_- nezáporná funkcionála a platí $J = J_+ - J_-$.

Dokážeme nyní, že platí $J_+(f_n) \to 0$, kdykoli $f_n \in Y$, $f_n \searrow 0$. Předpokládejme tedy, že to pro některou posloupnost $f_n \searrow 0$ neplatí. Posloupnost $J_+(f_n)$ má pak kladnou limitu $\geqq \varepsilon$. Existují $g_n \in Y$ tak, že platí

$$J(g_n) > J_+(f_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \;, \quad 0 \leqq g_n \leqq f_n.$$

Buď $h_n = \min(g_1, \ldots, g_n)$. Dokážeme indukcí, že je

$$J(h_n) > J_+(f_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} \;. \qquad (*)$$

Tento vztah zřejmě platí pro $n=1$; nechť platí pro nějaké n.

Pak $h_{n+1} = \min(h_n, g_{n+1}) = g_{n+1} - k_n$, kde $k_n = \max(g_{n+1} - h_n, 0)$. Pak je $k_n \leqq f_n - h_n$, tedy $0 \leqq h_n + k_n \leqq f_n$, $J(h_n) + J(k_n) \leqq J_+(f_n)$, tedy

$$J(k_n) \leqq J_+(f_n) - J(h_n) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} .$$

Dále platí

$$J(h_{n+1}) = J(g_{n+1}) - J(k_n) > J_+(f_{n+1}) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} =$$

$$= J_+(f_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varepsilon}{2^i} .$$

Tím je proveden indukční krok a je dokázána platnost vztahu (*) pro každé n. Odtud plyne limitním přechodem

$$\lim J(h_n) \geqq \lim J_+(f_n) - \varepsilon = \varepsilon ,$$

což není možné, protože $0 \leqq h_n \leqq g_n \leqq f_n$, $f_n \searrow 0$, $h_{n+1} \leqq h_n$, tedy $h_n \searrow 0$. Ze vztahu $f_n \in Y$, $f_n \searrow 0$ tedy plyne $J_+(f_n) \to 0$ a tedy i $J_-(f_n) \to 0$. Tím je věta dokázána.

12./ Větu z konce odst. 9./ můžeme nyní zobecnit takto : Buď P neprázdná množina ; buď Z lineární prostor, jehož prvky jsou reálné funkce na množině P. Nechť platí

$$|f| \in Z , \quad \min(f,1) \in Z$$

pro každé $f \in Z$. Buď J aditivní funkcionála na Z, která splňuje vztah

$$f_n \in Z,\ f_n \searrow 0 \implies J(f_n) \to 0 .$$

Buď T_Z nejmenší δ-těleso, obsahující všechny množiny $E_x[f(x) > 1]$, kde $f \in Z$. Potom existuje na T_Z právě jedna σ-aditivní funkce φ taková, že pro každé $f \in Z$ platí

$$J(f) = \int_P f \, d\varphi ;$$

funkce φ je konečná.

Důkaz : Podle předešlých vět existují na $\tilde{\mathcal{V}}_Z$ konečné míry μ, ν takové, že pro každé $f \in Z$ platí

$$J(f) = \int_P f d\mu - \int_P f d\nu .$$

Klademe-li $\varphi = \mu - \nu$, je tedy

$$J(f) = \int_P f d\varphi$$

pro každé $f \in Z$. Buď nyní ψ taková σ - aditivní funkce na $\tilde{\mathcal{V}}_Z$, že pro každé $f \in Z$ platí

$$J(f) = \int_P f d\psi .$$

Pak pro každé $f \in Z$ platí také

$$\int_P f d\varphi_+ - \int_P f d\varphi_- = \int_P f d\psi_+ - \int_P f d\psi_-$$

neboli

$$\int_P f d(\varphi_+ + \psi_-) = \int_P f d(\psi_+ + \varphi_-) .$$

Vidíme, že míry $\varphi_+ + \psi_-$, $\psi_+ + \varphi_-$ definují na Z touž funkcionálu. Odtud podle odst. 9. plyne $\varphi_+ + \psi_- = \psi_+ + \varphi_-$ a tedy $\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \psi_+ - \psi_- = \psi$.

Poznámka : Snadno se zjistí, že k funkcionále J_+ patří míra φ_+.

13./ V konkrétních případech nás zpravidla zajímá otázka representace na př. všech funkcionál, které jsou na daném lineárním prostoru spojité v určité topologii. Je však známo, že za dosti obecných předpokladů lze každou spojitou funkcionálu vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných funkcionál. (Viz na př. [7] , str. 18 - 19) . Omezíme se proto v dalším na vyšetřování nezáporných funkcionál. Pro stručnější vyjadřování zavedeme tuto definici :

14./ Buď P neprázdná množina. Buď Z lineární prostor, jehož prvky jsou funkce na množině P. Nechť platí $|f| \in Z$, $\min(f,1) \in Z$ pro každou funkci $f \in Z$. Dále předpokládejme, že pro každou nezápornou funkcionálu J na Z platí implikace

$$f_n \in Z \, , \; f_n \searrow 0 \Longrightarrow J(f_n) \to 0 \, .$$

Pak řekneme, že prostor Z má vlastnost (J).

15./ Viděli jsme, že každou nezápornou funkcionálu na prostoru, který má vlastnost (J), lze vyjádřit integrálem. Budeme se tedy snažit najít nějakou podmínku, postačující k tomu, aby nějaký prostor měl vlastnost (J). Napřed však dokážeme jednu větu negativního rázu.

16./ Buď Y lineární prostor, jehož prvky jsou omezené funkce na dané neprázdné množině P. Nechť s každou funkcí f patří do Y také funkce $|f|$. Nechť existují funkce $f_n \in Y$ tak, že platí $f_n \searrow 0$, ale že konvergence není stejnoměrná. Pak Y nemá vlastnost (J).

Důkaz : Definujme na prostoru Y normu předpisem $\| f \| = \sup_{x \in P} |f(x)|$. Je známo (viz [3]), že prostor Y můžeme representovat jako prostor Y^*, jehož prvky jsou spojité funkce na jakémsi kompaktním prostoru Q. Je-li $f_n \searrow 0$ $(f_n \in Y)$ a odpovídá-li funkci f_n funkce $f_n^* \in Y^*$, je ovšem $f_1^* \geq f_2^* \geq \ldots \geq 0$. Platí-li však $f_n^*(t) \searrow 0$ pro každé $t \in Q$, je konvergence funkcí f_n^* a tedy i konvergence funkcí f_n stejnoměrná. Není-li tedy konvergence funkcí f_n stejnoměrná, existuje takové $t_0 \in Q$, že $\lim f_n^*(t_0) > 0$. Položme

$$J(f) = f^*(t_0)$$

pro každé $f \in Y$. Pak je J nezáporná funkcionála, ale není $J(f_n) \to 0$; prostor Y tedy nemá vlastnost (J).

17./ Negativní ráz uvedené věty je způsoben tím, že předpokládáme omezenost funkcí prostoru Y. Odstraníme-li tento předpoklad, je situace zcela jiná. Základ příslušného vyšetřování tvoří následující věta :

18./ Buď Y lineární prostor, jehož prvky jsou funkce na neprázdné množině P. Nechť každé posloupnosti prvků $f_n \in Y$, kde $f_n \searrow 0$, lze přiřadit posloupnost indexů $i_1 < i_2 < \ldots$ a funkci $g \in Y$ tak, aby ke každému $\varepsilon > 0$ existovala funkce $h \in Y$, splňující vztahy

$$\sum_{n=1}^{N} (f_{i_n} - \varepsilon g) \leq h \qquad (N = 1, 2, \ldots) \, .$$

Pak pro každou nezápornou funkcionálu J na prostoru Y platí

$$J(f_n) \to 0 ,$$

kdykoli $f_n \in Y$, $f_n \searrow 0$.

Důkaz : Buď J nezáporná funkcionála, $f_n \in Y$, $f_n \searrow 0$; nechť není $J(f_n) \to 0$. Buď $\lim J(f_n) = 2\eta > 0$. Nechť k posloupnosti f_n patří podle předpokladů věty funkce $g \in Y$ a indexy $i_1 < i_2 < \dots$. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak malé, aby platilo $\varepsilon J(g) \leqq \eta$; k tomuto ε určeme funkci $h \in Y$. Protože $J(f_{i_n} - \varepsilon g) = J(f_{i_n}) - \varepsilon J(g) \geqq 2\eta - \eta = \eta$, platí pro každé N

$$N\eta \leqq \sum_{n=1}^{N} J(f_{i_n} - \varepsilon g) = J\Big(\sum_{n=1}^{N} (f_{i_n} - \varepsilon g)\Big) \leqq J(h) ;$$

to je zřejmý spor.

19./ Abychom mohli další věty přehledně vyslovit, zavedeme ještě některá označení. Je-li f funkce, buď

$$N_f = \mathop{E}_{x} \left[f(x) \neq 0 \right] .$$

Jsou-li $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ nějaké systémy funkcí na množině P, je-li $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ a platí-li implikace

$$f \in \mathfrak{M},\ g \in \mathfrak{N},\ N_f \subset N_g \Longrightarrow f \in \mathfrak{N} ,$$

řekneme, že $\mathfrak{N}$ je normální část $\mathfrak{M}$. (Je-li na příklad $\mathfrak{M}$ systém všech spojitých funkcí na topologickém prostoru P a je-li $\mathfrak{N}$ systém všech spojitých funkcí, pro něž je $\overline{N_f}$ kompaktní, je $\mathfrak{N}$ normální část $\mathfrak{M}$) . Dále píšeme $f_+ = \max(f, 0)$.

20./ Budiž $\mathfrak{A}$ σ-algebra na množině P. Budiž lineární prostor Z normální částí množiny všech konečných $\mathfrak{A}$-měřitelných funkcí. Potom má Z vlastnost (J).

Důkaz : Prostor Z zřejmě obsahuje s každou funkcí f též funkci $|f|$ a $\min(f, 1)$. Nechť nyní $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$. Zvolme ve větě 18 $i_n = n$, $g = f_1$, $h = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - \varepsilon f_1)_+$. Funkce h je zřejmě $\mathfrak{A}$-měřitelná. Je-li pro dané x $f_1(x) = 0$, je též

$f_2(x) = f_3(x) = \dots = 0$, tedy též $h(x) = 0$. Je-li $f_1(x) > 0$, je pro velká n $f_n(x) < \mathcal{E} f_1(x)$, takže řada definující $h(x)$ obsahuje jen konečný počet nenulových členů. Funkce h je tedy konečná. Protože $N_h \subset N_{f_1}$, je $h \in Z$. Pro každé N je zřejmě $\sum_{n=1}^{N} (f_n - \mathcal{E} f_1) \leqq h$. Podle 18. má tedy Z vlastnost (J).

21./ Volíme-li v předešlé větě za systém Z množinu všech konečných $\mathcal{U}$-měřitelných funkcí, vidíme, že ke každé nezáporné funkcionále J na Z existuje na algebře $\mathcal{U}$ právě jedna míra μ (protože zřejmě $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{V}}_Z$) tak, aby pro každé $f \in Z$ platilo $J(f) = \int_P f d\mu$. Podle míry je pak integrovatelná každá konečná $\mathcal{U}$-měřitelná funkce. Vyšetříme nyní takovouto míru podrobně.

Kdyby existovala disjunktní posloupnost $B_1, B_2, \dots$ prvků z $\mathcal{U}$, pro něž by platilo $\mu(B_n) > 0$, snadno bychom sestrojili konečnou nezápornou $\mathcal{U}$-měřitelnou funkci f tak, aby $\int_P f d\mu = \infty$. Taková posloupnost $B_1, B_2, \dots$ tedy neexistuje; odtud plyne snadno, že množinu P (pokud má kladnou míru) lze rozdělit na konečný počet disjunktních množin $A_1, \dots, A_n$, které sice mají kladnou míru, ale žádná z nich již neobsahuje množinu s menší kladnou mírou. Klademe-li ještě $\mu_i(A) = \mu(AA_i)$ pro libovolné $A \in \mathcal{U}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) , vidíme, že míru μ můžeme vyjádřit jako součet dvouhodnotových měr.

Je-li naopak μ součtem konečného počtu konečných dvouhodnotových měr, je každá konečná $\mathcal{U}$-měřitelná funkce μ-integrovatelná.

Pro případ, že $\mathcal{U}$ je systém všech částí dané množiny, uvádí tvrzení tohoto odstavce G.W.Mackey v [5] .

22./ Mějme opět σ-algebru $\mathcal{U}$ na množině P. Předpokládejme, že je na $\mathcal{U}$ dána míra ν ; zvolme ještě $p > 0$ a utvořme systém Z_p všech konečných $\mathcal{U}$-měřitelných funkcí f [12] , pro něž $\int_P |f|^p d\nu < \infty$. Platí pak tato věta :

Buď lineární prostor Z normální částí Z_p. Potom má Z vlastnost (J).

Důkaz : Je-li $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$, je též $f_n^p \searrow 0$, tedy $\int_P f_n^p d\nu \to 0$.

---

12) Mluvíme skutečně o funkcích , nikoli o třídách funkcí.

Zvolme indexy $i_1 < i_2 < \ldots$ tak, aby platilo $\sum_{n=1}^{\infty} \int_P f_{i_n}^p \, d\nu < \infty$ v případě $p < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_P f_{i_n}^p \, d\nu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ v případě $p \geqq 1$. Každému $\varepsilon > 0$ přiřaďme nyní funkci $h = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{i_n} - \varepsilon f_1)_+$. Snadno se zjistí, že $h \in Z$. Z věty 18 (kde ovšem klademe $g = f_1$) plyne, že má Z vlastnost (J).

23./ Předpokládejme nyní, že P je topologický prostor. Uvidíme, že platí i pro tento případ věta, obdobná větě z předešlého odstavce :

Buď lineární prostor Z normální částí množiny všech spojitých funkcí na prostoru P. Potom má Z vlastnost (J).

Důkaz : Nechť $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$. Buď $g = \sqrt{f_1}$. Každému $\varepsilon > 0$ přiřaďme funkci $h = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - \varepsilon g)_+$. Je-li $g(x) > 0$, je pro některé N $f_N(x) < \varepsilon g(x)$. V důsledku spojitosti platí tento vztah i v jistém okolí U bodu x. Je-li $n > N$, $y \in U$, platí tím spíše $f_n(y) < \varepsilon g(y)$. Na množině U je tedy funkce h dána součtem $\sum_{n=1}^{N-1} (f_n - \varepsilon g)_+$ a je tedy spojitá v bodě x. Je-li však $g(x) = 0$, můžeme zvolit takové okolí U bodu x, aby pro $y \in U$ bylo $g(y) \leqq \varepsilon$. Potom platí pro každé n a pro každé $y \in U$

$$f_n(y) \leqq f_1(y) = g^2(y) \leqq \varepsilon g(y) ,$$

takže je $h(y) = 0$ pro $y \in U$. Funkce h je tedy všude spojitá, protože $N_h \subset N_g = N_{f_1}$, je $h \in Z$, $g \in Z$. Ostatní plyne snadno z věty 18.

24./ Větu z předešlého odstavce můžeme vyslovit též v poněkud jiné formě. K tomu připomeneme tuto definici : Je-li $\mathfrak{M}$ systém množin, buď $\delta(\mathfrak{M})$ nejmenší δ-těleso, obsahující $\mathfrak{M}$. Je-li P topologický prostor, buď $\mathcal{G}^*$ systém všech množin tvaru $E_x\left[f(x) > 0\right]$, kde f je spojitá funkce na P. Buď $\mathcal{L} = \delta(\mathcal{G}^*)$. ($\mathcal{L}$ je tedy nejmenší σ-algebra, vzhledem k níž jsou všechny spojité funkce měřitelné). Prvky systému $\mathcal{L}$ nazveme Baireovými množinami ; míru, definovanou na $\mathcal{L}$, nazveme Baireovou měrou. Nyní platí :

Buď lineární prostor Z normální částí systému Y všech spojitých funkcí na topologickém prostoru P. Buď J nezáporná funkcionála na Z. Pak existuje Baireova míra μ tak, že pro každé $f \in Z$ platí

$$J(f) = \int_P f\,d\mu ;$$

hodnoty míry μ na $\mathfrak{T}_Z$ [13] jsou určeny funkcionálou J jednoznačně.

Důkaz : Víme, že na $\mathfrak{T}_Z$ existuje právě jedna taková míra μ a že je možné (viz 5.) tuto míru rozšířit na σ-algebru $\xi(\mathfrak{T}_Z)$. Stačí tedy dokázat, že systém $\xi(\mathfrak{T}_Z)$ obsahuje všechny Baireovy množiny. Máme tedy dokázat, že je $TB \in \mathfrak{T}_Z$ pro každé $T \in \mathfrak{T}_Z$ a každé $B \in \mathcal{B}$. Buď $\mathfrak{V}$ systém všech množin tvaru $\underset{x}{E}\,[f(x) > 1]$, kde $f \in Z$. Dokážeme napřed, že je $VG \in \mathfrak{V}$, kdykoli $V \in \mathfrak{V}$, $G \in \mathcal{G}^*$. V tomto případě totiž existují $f \in Z$ a $g \in Y$ tak, že je $g \geqq 0$ a

$$V = \underset{x}{E}\,[f(x) > 1]\,, \quad G = \underset{x}{E}\,[g(x) > 1]\,;$$

máme potom

$$VG = \underset{x}{E}\,[h(x) > 1]\,,$$

kde $h = \min(f,g)$. Protože Z je normální částí Y, je $h \in Z$, tedy $VG \in \mathfrak{V}$.

Zavedeme ještě toto označení : Je-li A množina a $\mathfrak{M}$ systém množin, pak $A\mathfrak{M}$ bude znamenat systém všech AM, kde $M \in \mathfrak{M}$. Dokážeme vztah

$$A\,\delta(\mathfrak{M}) = \delta(A\mathfrak{M}). \qquad (**)$$

$A\,\delta(\mathfrak{M})$ je zřejmě δ-těleso, obsahující $A\mathfrak{M}$; je tedy

$$A\,\delta(\mathfrak{M}) \supset \delta(A\mathfrak{M}).$$

Buď naopak $\mathfrak{T}$ systém všech $T \subset P$ [14], pro něž $AT \in \delta(A\mathfrak{M})$.

---

13) Definici $\mathfrak{T}_Z$ viz v odst. 9.

14) Předpokládáme, že množina A i všechny prvky $\mathfrak{M}$ jsou části množiny P.

Je zřejmé, že $\mathcal{T}$ je δ-těleso, obsahující $\mathfrak{M}$, a že $A\mathcal{T} = \delta(A\mathfrak{M})$. Odtud plyne $\delta(\mathfrak{M}) \subset \mathcal{T}$, tedy

$$A\,\delta(\mathfrak{M}) \subset A\mathcal{T} = \delta(A\mathfrak{M}).$$

Tím je vztah $(\overset{*}{*})$ dokázán.

Dokázali jsme již, že $V\,\mathcal{G}^* \subset \mathcal{T}_Z$ pro každé $V \in \mathcal{W}$. Je tedy též

$$V\mathcal{L} = V\,\delta(\mathcal{G}^*) = \delta(V\mathcal{G}^*) \subset \mathcal{T}_Z$$

pro každé $V \in \mathcal{W}$ neboli

$$B\,\mathcal{W} \subset \mathcal{T}_Z$$

pro každé $B \in \mathcal{L}$. Odtud plyne

$$B\,\mathcal{T}_Z = B\,\delta(\mathcal{W}) = \delta(B\mathcal{W}) \subset \mathcal{T}_Z$$

pro každé $B \in \mathcal{L}$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka : Pro případ, že Z je systém všech spojitých funkcí na daném prostoru, uvádí tuto větu E. Hewitt v [2].

25./ Větu z odstavce 23. lze takto zobecnit :

Buď ν Baireova míra na P; buď $p > 0$. Budiž dále Y_p množina všech spojitých funkcí f na prostoru P, pro něž je $\int_P |f|^p \, d\nu < \infty$. Buď Z normální částí Y_p. Potom má Z vlastnost (J).

Důkaz : Nechť $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$. Volme indexy $i_1 < i_2 < \dots$ tak, aby platilo $\sum_{n=1}^{\infty} \int_P f_{i_n}^p \, d\nu < \infty$ v případě $p < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_P f_{i_n}^p \, d\nu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ v případě $p \geqq 1$. Potom je $\int_P \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{i_n} \right)^p d\nu < \infty$. (Funkce $\sum_{n=1}^{\infty} f_{i_n}$ nemusí ovšem být spojitá)

Buď dále $A_1 = \underset{x}{E}\left[f_1(x) > 1 \right]$, $A_n = \underset{x}{E}\left[\frac{1}{n-1} \geqq f_1(x) > \frac{1}{n} \right]$ pro $n > 1$. Je $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_1^p \, d\nu = \int_P f_1^p \, d\nu < \infty$. Existují proto konečná

kladná čísla c_n tak, že je $c_n \nearrow \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{A_n} f^p \, d\nu < \infty$.
Položme $b_n = c_n^{\frac{1}{p}}$ a definujme v intervalu $\langle 0, \infty)$ funkci φ_0 předpisem

$$\varphi_0(0) = 0 , \quad \varphi_0\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{b_n} ,$$

φ_0 je lineární v každém intervalu $\left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right\rangle$,

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{b_1} \quad \text{pro } t \geqq 1 .$$

Dále buď pro $t \geqq 0$

$$\varphi(t) = \max\left(\varphi_0(t), \sqrt{t}\right).$$

Funkce φ je tedy spojitá neklesající v $\langle 0, \infty)$, platí $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(t) \geqq \frac{1}{b_n}$ pro $t \geqq \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) . Budiž ještě

$$\psi(0) = 0,$$

$$\psi(t) = \frac{t}{\varphi(t)} \quad \text{pro } t > 0.$$

Protože pro $t > 0$ je $\psi(t) \leqq \frac{t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}$, je funkce ψ spojitá v $\langle 0, \infty)$ a platí v tomto intervalu

$$t = \varphi(t) \cdot \psi(t) .$$

Buďte g, k funkce na prostoru P, definované vztahy

$$g(x) = \psi(f_1(x)), \qquad k(x) = \varphi(f_1(x)).$$

Funkce g, k jsou spojité a platí $f_1 = gk$. Dále je pro $x \in A_n$

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{\varphi(f_1(x))} \leqq b_n f_1(x) , \text{ tedy}$$

$$\int_P g^p \, d\nu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} b_n^p f_1^p \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{A_n} f_1^p \, d\nu < \infty .$$

Protože $N_g = N_{f_1}$, je $g \in Z$. Zvolme nyní $\varepsilon > 0$ a utvořme funkci

$h = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{1_n} - \varepsilon g)_+$. Je-li $f_1(x) > 0$, je též $g(x) > 0$

a stejně jako v odst. 23 zjistíme, že funkce h je spojitá v bodě x. Je-li $f_1(x) = 0$, je též $k(x) = 0$ a v jistém okolí U bodu x je $k(y) < \varepsilon$; pro každé $y \in U$ a každé n je pak

$$f_{i_n}(y) \leqq f_1(y) = g(y)\,k(y) \leqq \varepsilon g(y) .$$

Funkce h je tedy spojitá a splňuje vztah $h \leqq \sum_{n=1}^{\infty} f_{i_n}$. Další postup je zřejmý.

26./ Jako příklad normální části systému všech spojitých funkcí na daném topologickém prostoru P jsme uvedli systém Z všech funkcí f, pro něž je uzávěr množiny N_f kompaktní. Z věty v odstavci 23./ plyne tedy, že Z má vlastnost (J). Můžeme však dokázat obecnější větu. K tomu zavedeme tuto definici : Řekneme, že množina $A \subset P$ je relativně pseudokompaktní, jestliže každá funkce f, která je spojitá na P, je na A omezená.

Nyní platí :

Buď P topologický prostor. Buď Z lineární prostor, jehož prvky jsou spojité funkce na P. Nechť množina N_f je relativně pseudokompaktní pro každé $f \in Z$. Nechť s každou funkcí f patří do Z také funkce $|f|$ a $\min(f,1)$. Nechť ke každému $f \in Z$, kde $f \geqq 0$, existují spojité nezáporné funkce g, k tak, že $g \in Z$, $N_k = N_f$ a že $f \leqq gk$.[15] Potom má Z vlastnost (J).

Důkaz : Nechť $f_n \searrow 0$. Sestrojme takovéto funkce g, k k funkci $f = f_1$. Zvolme $\varepsilon > 0$; buď $h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - \varepsilon g)_+$. Buď $F = \mathop{E}_x [k(x) \geqq \varepsilon]$. Jako v odstavci 25 zjistíme, že funkce h_0 je spojitá a že na $P - F$ nabývá jen nulových hodnot. Utvořme nyní pomocnou funkci $k' = \min(k, \varepsilon)$. Funkce $\varepsilon - k'$ je nezáporná a pro $x \in P - F$ kladná. Funkce g je na F kladná, protože $N_k = N_{f_1}$. Funkce $g + \varepsilon - k'$ je tedy všudo kladná, takže funkce

---

15) Patří-li na př. s každou funkcí $f \geqq 0$ do Z též funkce $\sqrt{f}$, můžeme volit $g = k = \sqrt{f_1}$; je-li $1 \in Z$, lze položit $g = 1$, $k = f$.

$g' = \dfrac{1}{g + \varepsilon - k}$ je spojitá na P a tudíž omezená na $F \subset N_{f_1}$.
Avšak pro $x \in F$ je $g'(x) = \dfrac{1}{g(x)}$; existuje proto $\delta > 0$ tak, že pro $x \in F$ je $g(x) \geqq \delta$.
Je-li na F $h_o(x) \leqq D$, je $h_o \leqq \dfrac{D}{\delta} g$. Ve větě 18 můžeme proto volit $h = \dfrac{D}{\delta} g$.

Poznámka : Jednoduchým příkladem prostoru, který má mnoho „dobrých" vlastností a který nemá vlastnost (J), je množina Z všech spojitých funkcí f v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, pro něž je $f(o) = 0$ a pro něž existuje derivace zprava v bodě 0. Lze však snadno ukázat, že množina Z_o všech funkcí ze systému Z, pro něž je derivace zprava v bodě 0 rovna nule, opět má vlastnost (J).

27./ V odstavci 20. jsme se zabývali prostorem Z všech konečných $\mathfrak{A}$-měřitelných funkcí, kde $\mathfrak{A}$ je nějaká σ-algebra. Nyní budeme předpokládat, že je na $\mathfrak{A}$ předem dána míra ν a budeme zkoumat prostor Z/Z_o, kde Z_o je množina těch $f \in Z$, které se rovnají nule skoro všude vzhledem k míře ν.

Buď tedy $\mathfrak{A}$ σ-algebra na množině P; buď ν míra na $\mathfrak{A}$. Množina $A \in \mathfrak{A}$ nazveme ν-atomem, je-li $\nu(A) > 0$ a je-li pro každé $B \in \mathfrak{A}$, kde $B \subset A$, buď $\nu(B) = \nu(A)$ nebo $\nu(B) = 0$.

Je-li $B \in \mathfrak{A}$, nechť

$$\nu_B$$

značí míru, definovanou vztahem $\nu_B(A) = \nu(AB)$ $(A \in \mathfrak{A})$.

Je-li celý prostor P sjednocením posloupnosti množin s konečnou měrou, řekneme, že míra je σ-konečná.

Nyní můžeme dokázat tuto větu :

Buď ν σ-konečná míra na σ-algebře $\mathfrak{A}$. Buď Y množina všech konečných $\mathfrak{A}$-měřitelných funkcí ; buď Y_o množina všech funkcí z Y, které jsou rovny nule skoro všude (vzhledem k ν). Buď J nezáporná funkcionála na $Z = Y/Y_o$. Potom existuje míra μ o těchto vlastnostech :

1.) Míra μ je nezápornou lineární kombinací [16] měr tvaru ν_A, kde A je ν-atom;

2.) $J(f) = \int_P f \, d\mu$ pro každé $f \in Z$.

---

16) Musíme ovšem připustit též prázdný součet.

Naopak každá míra μ s vlastností 1.) definuje na Z nezápornou funkcionálu.

Důkaz : Buď J nezáporná funkcionála na Z. Zřejmě můžeme pokládat J za nezápornou funkcionálu na Y ; je pak ovšem $J(f) = 0$ pro každé $f \in Y_0$. Podle odst. 21 existují na $\mathfrak{A}$ dvouhodnotové míry $\mu_1, \dots, \mu_n$ ($n \geqq 0$) tak, že $J(f) = \int_P f \, d\mu$ pro každé $f \in Y$, při čemž $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Je-li $\nu(A) = 0$ a je-li f charakteristická funkce množiny A, je ovšem $f \in Y_0$, tedy $0 = J(f) = \int_P f \, d\mu = \mu(A)$. Tím spíše platí implikace $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu_i(A) = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Odtud plyne, že existují $g_i \in Y$ tak, že míry μ_i mají tvar $\mu_i(A) = \int_A g_i \, d\nu$. Množina $A_i = E_x [g_i(x) \neq 0]$ je zřejmě ν-atom; míra ν_{A_i} je tedy dvouhodnotová a je konečná, protože je σ-konečná. Je-li $\nu_{A_i}(A) = 0$, je též $\mu_i(A) = 0$; je-li $\nu_{A_i}(A) \neq 0$, je $\nu_{A_i}(P-A) = 0$, tedy $\mu_i(P-A) = 0$, $\mu(A) \neq 0$, takže míra μ_i je násobkem ν_{A_i}.

Poznámka : Podobně lze vyšetřit na př. prostory L_p, kde $p > 1$ (při σ-konečné míře) a dokázat, že mezi prostory L_p a L_q, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, platí vztah duality.

L i t e r a t u r a .

[1] P.J. Daniell : A general form of integral, Annals of Mathematics, 19 (1917-18), str. 279-294.

[2] E. Hewitt : Linear functionals on spaces of continuous functions, Fundamenta Mathematicae, 37 (1950), str. 161-189.

[3] S. Kakutani : Concrete representation of abstract (M) -spaces, Annals of Mathematics, 42(1941), str. 994-1024.

[4] Л.В. Канторович, Б.З. Вулих, А.Г. Пинскер: Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва - Ленинград 1950.

[5] G.W. Mackey : Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattieces, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50 (1944), str. 719 -722.

[6] J. Mařík : Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Časopis pro pěstování matematiky , 76 (1951), str. 175-194.

[7] J. Mařík : Vrcholy jednotkové koule v prostoru funkcionál na daném pouspořádaném prostoru, Časopis pro pěstování matematiky ~~a fysiky~~, 79(1954), str.3-40.