Jan Mařík
Uneigentliche mehrfache Integrale

WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE REIHE · JG. X (1961) 3/4
WISS. Z. HUMBOLDT-UNIV. BERLIN, MATH.-NAT. R. X (1961)

Als Manuskript gedruckt

Uneigentliche mehrfache Integrale*

Von JAN MAŘÍK, Prag

Es sei A eine beschränkte meßbare Teilmenge des m-dimensionalen Euklidischen Raumes E_m, und es sei $\mathfrak{M}_A$ das System aller Vektoren $v = [v_1, \ldots, v_m]$ mit der folgenden Eigenschaft: v_j sind Polynome in m Veränderlichen und für jedes $x \in A$ besteht die Beziehung $\sum_{j=1}^{m} (v_j(x))^2 \leqq 1$. Wir setzen $\|A\| = \sup_{v \in \mathfrak{M}_A} \int_A \operatorname{div} v(x)\, dx$.

Es sei weiter $\mathfrak{B}_A$ das System aller Vektoren, die auf der Grenze $\dot{A}$ der Menge A stetig sind. Für jedes $v = [v_1, \ldots, v_m] \in \mathfrak{B}_A$ setzen wir $|v|_A = \max_{x \in \dot{A}} \left(\sum_{j=1}^{m} (v_j(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Die Menge aller A mit $\|A\| < \infty$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$.

In [1] ist bewiesen: Zu jeder Menge $A \in \mathfrak{A}$ existiert genau ein Funktional $P(A, v)$ $(v \in \mathfrak{B}_A)$, das in bezug auf die Norm $|v|_A$ stetig ist und das für jedes $v \in \mathfrak{M}_A$ die Beziehung $P(A, v) = \int_A \operatorname{div} v(x)\, dx$ erfüllt.

Es sei nun G eine offene Teilmenge von E_m; es sei v ein auf G stetiger Vektor und f eine solche Funktion, daß für jedes kompakte Intervall $I \subset G$ das LEBESGUEsche Integral $\int_I f(x)\, dx$ existiert und gleich $P(I, v)$ ist. Dann sagen wir, daß die Funktion f eine Integraldivergenz des Vektors v auf der Menge G ist.

Nach Satz 24 von [1] gilt die folgende Behauptung: Wenn f eine Integraldivergenz von v auf G ist, dann gilt die Beziehung

$$(*) \qquad P(A, v) = \int_A f(x)\, dx$$

für jedes $A \in \mathfrak{A}$ mit $\bar{A} \subset G$.

Jetzt möchte ich einige Resultate erwähnen, zu denen ich mit meinen Schülern K. KARTÁK und J. HOLEC gekommen bin.

Man kann verschiedene Bedingungen angeben, die hinreichend dafür sind, daß f eine Integraldivergenz von v ist. Es gilt z. B.:

Wenn die Funktionen $v_1, \ldots, v_m$ in jedem Punkte einer offenen Menge $G \subset E_m$ ein totales Differential haben und wenn die Funktion $\operatorname{div} v$ auf G lokal nach LEBESGUE integrabel ist, so ist $\operatorname{div} v$ eine Integraldivergenz von $v = [v_1, \ldots, v_m]$.

Es entsteht nun die Frage, ob die Beziehung (*) auch dann besteht, wenn v nur auf $\bar{A}$ stetig ist und wenn f auf $A - \dot{A}$ eine Integraldivergenz von v ist. Es zeigt sich, daß die Antwort unter gewissen Voraussetzungen über A bejahend ist, wenn wir unter dem Symbol $\int_A f(x)\, dx$ ein passendes uneigentliches Integral verstehen. Damit wir ein solches Integral definieren können, müssen wir einige Bezeichnungen einführen.

Es sei $\mathfrak{S}$ das System aller meßbaren Teilmengen von E_m. Für $S \in \mathfrak{S}$ sei $|S|$ das Maß von S. Auf $\mathfrak{S}$ definieren wir eine Konvergenz $\rightarrow$ folgendermaßen: Wenn $S, S_1, S_2, \ldots$ Elemente von $\mathfrak{S}$ sind, so werden wir mit $S_n \rightarrow S$ verstehen, daß $S_n \subset S$, $\sup_n \|S - S_n\| < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} |S - S_n| = 0$ ist. Es sei weiter F eine auf einem System $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}$ definierte Funktion. Wenn aus den Beziehungen $S, S_n \in \mathfrak{N}$, $S_n \rightarrow S$ immer $\lim_{n\to\infty} F(S_n) = F(S)$ folgt, dann nennen wir die Funktion F auf $\mathfrak{N}$ stetig. Ein System $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}$ heißt abgeschlossen, wenn aus $S_n \in \mathfrak{N}$, $S_n \rightarrow S$ die Relation $S \in \mathfrak{N}$ folgt. Für jedes $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}$ sei $\overline{\mathfrak{N}}$ das kleinste $\mathfrak{N}$ umfassende abgeschlossene Teilsystem von $\mathfrak{S}$.

Es sei nun f eine in E_m definierte Funktion. Das System aller $T \in \mathfrak{S}$, für die das LEBESGUEsche Integral $L(T, f) = \int_T f(x)\, dx$ konvergiert, bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(f)$ und setzen $\mathfrak{A}_0(f) = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}(f)$. Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ sei $\mathfrak{A}(A)$ das System aller $B \in \mathfrak{A}$ mit $B \subset A$.

Wir bilden jetzt das System $\mathfrak{A}_1(f)$ aller $A \in \overline{\mathfrak{A}_0(f)}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert eine auf $\mathfrak{A}(A)$ stetige Funktion F, welche für jedes $T \in \mathfrak{A}(A) \cap \mathfrak{F}(f)$ die Beziehung $F(T) = L(T, f)$ erfüllt. Man kann beweisen, daß die Funktion F dadurch eindeutig bestimmt ist. Wir können also auf dem System $\mathfrak{A}_1(f)$ ein Funktional $K(A, f)$ mittels der Vorschrift $K(A, f) = F(A)$ definieren, wobei F eine Funktion mit der erwähnten Eigenschaft ist.

Für das Funktional K gilt der folgende Transformationssatz:

Es sei φ eine schlichte reguläre Abbildung einer offenen Menge $G \subset E_m$ nach E_m; ψ sei die inverse Abbildung. Es sei f eine auf G definierte Funktion; für $t \in \varphi(G)$ setzen wir $g(t) = f(\psi(t)) \cdot |D_\psi(t)|$, wobei D_ψ die Funktionaldeterminante von ψ ist. Wenn $A \in \mathfrak{A}_1(f)$, $\bar{A} \subset G$ ist, so gelten für die Menge $B = \varphi(A)$ die Beziehungen $B \in \mathfrak{A}_1(g)$ und $K(A, f) = K(B, g)$.

Für jedes $B \subset E_m$ sei weiter $H(B)$ das $(m-1)$-dimensionale äußere HAUSDORFFsche Maß der Menge B. Das System aller kompakten $B \subset E_m$ mit $H(B) < \infty$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$; es sei $\mathfrak{H}_\sigma$ das System aller $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, wo $B_n \in \mathfrak{H}$ für jedes n ist. Jetzt kann man beweisen:

* Vortrag, gehalten während der Freundschaftswoche Moskau-Prag-Warschau-Berlin im Mai 1960.

Es sei A eine beschränkte Teilmenge von E_m; es sei G offen, $G \subset A$, $\dot{A} \in \mathfrak{H}$, $\bar{A} - G \in \mathfrak{H}_\sigma$. Es sei v ein auf $\bar{A}$ stetiger Vektor, und f sei eine Integraldivergenz von v auf G. Dann ist $A \in \mathfrak{A}_1(f)$, und es gilt $P(A, v) = K(A, f)$.

Daraus ergibt sich der folgende Satz:

Es seien G, U offene Teilmengen von E_m, $G \subset U$, $U - G \in \mathfrak{H}_\sigma$. Es sei v ein auf U stetiger Vektor und f eine Funktion, die auf U lokal integrabel und auf G eine Integraldivergenz von v ist. Dann ist f eine Integraldivergenz von v auf U.

Das Funktional $K(A, f)$ ist im allgemeinen keine Erweiterung von $L(A, f)$. Wir haben nämlich $\mathfrak{A}_1(f) \subset \overline{\mathfrak{A}_0(f)} \subset \mathfrak{A}$; dagegen gilt die Beziehung $\mathfrak{F}(f) \subset \mathfrak{A}$ nur in trivialen Fällen. Das Funktional $K(A, f)$ kann aber folgendermaßen erweitert werden: Es sei $\mathfrak{F}_1(f)$ der kleinste Mengenring, welcher $\mathfrak{A}_1(f)$ und $\mathfrak{F}(f)$ umfaßt. Zu jedem $T \in \mathfrak{F}_1(f)$ gibt es ein $A \in \mathfrak{A}_1(f)$ mit $(A - T) \cup (T - A) \in \mathfrak{F}(f)$. Man kann beweisen, daß die Zahl $K^*(T, f) = K(A, f) + L(T - A, f) - L(A - T, f)$ von der Wahl der Menge A unabhängig ist und daß das auf diese Weise definierte Funktional $K^*(T, f)$ bei festem f eine in der Veränderlichen T stetige Erweiterung von $L(T, f)$ ist.

LITERATUR

[1] J. Mařík, The surface integral, Czech. math. j., **6** (81), 1956, 522–558.

(Eingegangen: 30. 5. 1960)