Jan Mařík

Les fonctionnelles sur l'ensemble des fonctions continues bornées, définies dans un espace topologique

Studia Math. 16 (1957), 86–94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/502105

Les fonctionnelles sur l'ensemble des fonctions continues bornées, définies dans un espace topologique

par

Jan MAŘÍK (Praha)

Nous allons étudier les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble de toutes les fonctions continues bornées (muni d'une topologie spéciale), définies dans un espace topologique arbitraire. Nous verrons que chaque fonctionnelle de la classe considérée peut être représentée par une intégrale. Nous démontrons d'abord un lemme concernant la mesure (qui est une fonction non négative et σ-additive) sur une σ-algèbre arbitraire.

Lemme 1. *Soient $\mathfrak{L}$ une σ-algèbre sur l'ensemble A et ν une mesure finie sur $\mathfrak{L}$. Si*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\text{[1]},$$

on peut trouver des nombres positifs $a_1, a_2, \ldots$ tels que $a_n \to \infty$ et que la relation

$$\Big| \int_A f d\nu \Big| < 1 \tag{1}$$

soit vérifiée pour chaque fonction f $\mathfrak{L}$-mesurable, satisfaisant aux conditions

$$x \in A_n \Rightarrow |f(x)| < a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Démonstration. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ posons

$$\alpha_n = \inf \nu(B), \qquad \text{où} \qquad B \in \mathfrak{L},\, B \supset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

(on a donc $\alpha_0 = 0$). Il est facile de voir que $\alpha_n \to \nu(A)$; il existe donc des nombres $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ tels que $a_n \to \infty$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\nu(A) - \alpha_{n-1}) < 1 .$$

[1]) Nous ne supposons pas que $A_n \in \mathfrak{L}$.

Si f est une fonction $\mathfrak{L}$-mesurable satisfaisant aux conditions (2), posons

$$B_n = E[x; a_{n-1} \leqslant |f(x)| < a_n] \quad (n = 1, 2, \ldots.$$

On a $|f(x)| < a_{n-1}$ pour chaque

$$x \in \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j;$$

on en conclut

$$B_n \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\Big) = \Phi,$$

$$A - B_n \supset \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j,$$

$$\nu(A) - \nu(B_n) = \nu(A - B_n) \geqslant a_{n-1}, \quad \nu(B_n) \leqslant \nu(A) - a_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

d'où

$$\int_A |f| d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} |f| d\nu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \nu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\nu(A) - a_{n-1}) < 1.$$

On voit que l'intégrale $\int_A f d\nu$ existe et vérifie la relation (1).

Notation. Dans ce mémoire, P désigne un espace topologique, Y l'ensemble de toutes les fonctions réelles, finies et continues sur P, Z l'ensemble de toutes les fonctions bornées appartenant à Y. $\mathfrak{F}^*$ (resp. $\mathfrak{G}^*$, est la famille de tous les ensembles $E[x; f(x) = 0]$ (resp. $E[x; f(x) > 0]$), où $f \in Y$; enfin $\mathfrak{L}^*$ est la plus petite σ-algèbre qui contient $\mathfrak{F}^*$.

Si J est une fonction réelle finie dans un espace linéaire $L \subset Y$ et si l'on a $J(af + \beta g) = aJ(f) + \beta J(g)$ (où a, β sont des nombres réels, $f, g \in L$), nous dirons que J est une *fonctionnelle* (sur L). Si, de plus, $J(f) \geqslant 0$ pour chaque fonction non négative $f \in L$, la fonctionnelle J est dite *non négative*.

Nous dirons que l'ensemble $A \subset P$ est *compact* (resp. *dénombrablement compact*), si tout recouvrement de A par des ensembles ouverts (resp. tout recouvrement de A par une famille dénombrable d'ensembles ouverts) contient un sous-recouvrement fini. Nous dirons que l'ensemble $A \subset P$ est *relativement pseudocompact*, si chaque fonction $f \in Y$ est bornée sur A.

Si $A_n \subset P$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, soit $U(A_1, A_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f \in Z$, pour lesquelles les relations

$$x \in A_n \Rightarrow |f(x)| < a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

sont valables.

Si N est un nombre naturel, $A_n \subset P$, $a_n > 0$ $(n = 1, \ldots, N)$, on définit d'une manière analogue l'ensemble $U(A_1, \ldots, A_N, a_1, \ldots, a_N)$.

Si $\mathfrak{A}$ est une famille non vide de sous-ensembles de P, soit $\mathfrak{V}_\infty(\mathfrak{A})$ le système de tous les ensembles $U(A_1, A_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots)$, où $A_n \in \mathfrak{A}$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a_n \to \infty$; soit $\mathfrak{V}(\mathfrak{A})$ le système de tous ensembles $U(A_1, \ldots, A_N, a_1, \ldots, a_N)$, où N est un nombre naturel, $A_n \in \mathfrak{A}$, $a_n > 0$ $(n = 1, \ldots, N)$. Nous pouvons définir sur Z une topologie en considérant les éléments de $\mathfrak{V}_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathfrak{V}(\mathfrak{A})$) comme des entourages de zéro; nous désignons cette topologie par $T_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $T(\mathfrak{A})$).

Remarque. Si $\bigcup \mathfrak{A}$ est dense dans P, l'ensemble Z, muni de la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $T(\mathfrak{A})$), est un espace topologique linéaire au sens habituel, et la relation

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$$

par rapport à la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$ entraîne que la suite $f_1, f_2, \ldots$ est bornée (au sens classique, c'est-à-dire qu'il existe une constante finie C telle que l'on ait $|f_n(x)| < C$ pour tout n et tout x).

Lemme 2. *Soit A relativement pseudocompact. Si $f_n \in Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \searrow 0$[2]), la convergence $f_n(x) \to 0$ est uniforme sur A.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - \varepsilon)^{+}\,[3]).$$

On voit facilement (cf. [2], § 23, p. 478) que $g \in Y$. Il existe alors un nombre $C > 0$ tel que $g(x) < C$ pour chaque $x \in A$. Si $f_p(x) \geqslant 2\varepsilon$, nous obtenons

$$g(x) \geqslant \sum_{n=1}^{p} (f_n(x) - \varepsilon)^+ = \sum_{n=1}^{p} (f_n(x) - \varepsilon) \geqslant p\varepsilon;$$

on en déduit que $f_p(x) < 2\varepsilon$ pour chaque $x \in A$ et chaque $p > C/\varepsilon$, ce qui prouve le lemme.

Théorème 1. *Soit $\mathfrak{A}$ une famille non vide de sous-ensembles relativement pseudocompacts de P. Si la fonctionnelle J est continue sur l'espace Z muni de la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$, il existe exactement une fonction φ, σ-additive sur $\mathfrak{L}^*$, telle que l'on ait*

$$J(f) = \int_P f \, d\varphi \tag{3}$$

pour chaque $f \in Z$. Si la fonctionnelle J est non négative, φ est une mesure.

Démonstration. Supposons que $f_n \in Z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \searrow 0$; nous verrons que $J(f_n) \to 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre $C > 0$

[2]) C'est-à-dire que $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \ldots$, $f_n(x) \to 0$ pour chaque $x \in P$.

[3]) $a^+ = \max(a, 0)$.

tel que $f_1 \leqslant C$; on a donc $f_n \leqslant C$ pour chaque n. On peut choisir des ensembles $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ et des nombres positifs $a_1, a_2, \ldots$ $(a_n \to \infty)$ tels que $|J(f)| < \varepsilon$ pour chaque fonction $f \in U(A_1, A_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots)$. Si l'indice p est assez grand, on a $a_n > C$ pour chaque $n > p$. D'après le lemme 2, il existe un nombre q tel que $|f_n(x)| < \min(a_1, \ldots, a_p)$ pour chaque $x \in \bigcup_{j=1}^{p} A_j$ et chaque $n > q$. Si $n > q$, nous avons $f_n \in U(A_1, A_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots)$, d'où $|J(f_n)| < \varepsilon$, ce qui prouve que $J(f_n) \to 0$. Le théorème est maintenant une conséquence immédiate de [2], § 12, p. 473-474.

Lemme 3. *Si $\mathfrak{A}$ est une famille non vide arbitraire de sous-ensembles de P, chaque fonctionnelle continue sur l'espace Z muni de la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $T(\mathfrak{A})$) peut être représentée comme une différence de deux fonctionnelles non négatives, continues par rapport à la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $T(\mathfrak{A})$).*

Démonstration. Si $f \in Z$, $f \geqslant 0$, posons

$$J_1(f) = \sup J(g), \quad \text{où} \quad g \in Z,\ 0 \leqq g \leqq f.$$

Il existe un $U \in \mathfrak{B}_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$) tel que $J(f) < 1$ pour tout $f \in U$. Soit maintenant $f \in Z$, $f \geqslant 0$. Il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $\delta f \in U$. Pour tout $g \in Z$, où $0 \leqslant g \leqslant f$, on a alors $\delta g \in U$, $J(g) < \delta^{-1}$, d'où $J_1(f) \leqslant \delta^{-1} < \infty$. On prouve sans peine (cf. [3], §§ 26, 27, 46, p. 11-12, 18-19) qu'il existe exactement une fonctionnelle J_+ (sur Z) telle que l'on ait $J_+(f) = J_1(f)$ pour chaque fonction non négative $f \in Z$; la fonctionnelle J_+ est continue par rapport à la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $T(\mathfrak{A})$). En posant $J_- = J_+ - J$, on obtient la représentation désirée $J = J_+ - J_-$.

Remarque. Nous pouvons naturellement munir l'ensemble Z d'une topologie T à l'aide de la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in P} |f(x)|.$$

(La topologie T est identique avec la topologie $T(\mathfrak{A})$, où $\mathfrak{A}$ contient exactement un élément P). On sait (cf. [2], § 24, p. 479) que toute fonctionnelle non négative sur Y peut être représentée par une intégrale par rapport à une mesure sur $\mathfrak{L}^*$. Si maintenant $Z = Y$, chaque fonctionnelle J continue sur l'espace Z, muni de la topologie T, est de la forme (3). Si au contraire $Z \neq Y$, il existe une suite $f_1, f_2, \ldots \in Z$ et une fonctionnelle J non négative sur Z telle que l'on ait $f_n \searrow 0$, mais

$$J(f_n) \geqslant 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(cf. [2], § 16, p. 475). Cette fonctionnelle est naturellement continue par rapport à la topologie T, mais elle ne peut pas être représentée comme une intégrale.

Lemme 4. *Soit μ une mesure finie sur $\mathfrak{L}^*$. Soit $B \in \mathfrak{L}^*$. On a alors*

$$\mu(B) = \sup \mu(F), \quad où \quad F \in \mathfrak{F}^*, F \subset B.$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{L}_0$ la famille de tous les ensembles $B \subset P$, jouissant de la propriété suivante: Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles $F \in \mathfrak{F}^*$, $G \in \mathfrak{G}^*$ tels que l'on ait $F \subset B \subset G$, $\mu(G-F) < \varepsilon$. Il est facile de voir (cf. [4], § 5, p. 436) que $\mathfrak{L}_0$ est une σ-algèbre qui contient $\mathfrak{F}^*$; on en déduit que $\mathfrak{L}_0 \supset \mathfrak{L}^*$, ce qui prouve le lemme.

Lemme 5. *Soit μ une mesure finie sur $\mathfrak{L}^*$; soit $A \subset P$. Si l'implication*

$$F \in \mathfrak{F}^*, \quad F \cap A = \Phi \Rightarrow \mu(F) = 0 \tag{4}$$

est valable, il existe une σ-algèbre $\mathfrak{L}^A$ et une mesure ν sur $\mathfrak{L}^A$ qui possèdent les propriétés suivantes:

1° $\mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{L}^A$, $A \in \mathfrak{L}^A$,

2° $\nu(A) = \nu(P)$,

3° $\nu(B) = \mu(B)$ *pour chaque* $B \in \mathfrak{L}^*$ [4]).

Démonstration. Soit $\mathfrak{L}^A$ la famille de tous les ensembles $C \subset P$, pour lesquels il existe un $B \in \mathfrak{L}^*$ tel que $B \cap A = C \cap A$. $\mathfrak{L}^A$ est une σ-algèbre avec la propriété 1°. Soit maintenant $B_1, B_2 \in \mathfrak{L}^*$, $B_1 \cap A = B_2 \cap A$. Posons $B_3 = B_1 \cap B_2$. On a évidemment $B_3 \cap A = B_i \cap A$, et par conséquent $(B_i - B_3) \cap A = \Phi$ $(i = 1, 2)$. D'après le lemme 4, l'implication (4) entraîne $\mu(B_i - B_3) = 0$, d'où $\mu(B_1) = \mu(B_3) = \mu(B_2)$.

Posons maintenant, pour chaque $C \in \mathfrak{L}^A$, $\nu(C) = \mu(B)$, où B est un ensemble arbitraire de $\mathfrak{L}^*$ tel que $B \cap A = C \cap A$. Si $C_n \in \mathfrak{L}^A$, $C_p \cap C_q = \Phi$ $(n = 1, 2, \ldots; p \neq q)$, il existe des ensembles $B_n \in \mathfrak{L}^*$ qui satisfont aux conditions $B_n \cap A = C_n \cap A$ $(n = 1, 2, \ldots)$; on peut encore supposer $B_p \cap B_q = \Phi$ pour $p \neq q$. On a alors $\sum \nu(C_n) = \sum \mu(B_n) = \mu(\bigcup B_n)$, $A \cap (\bigcup B_n) = A \cap (\bigcup C_n)$, d'où $\sum \nu(C_n) = \mu(\bigcup B_n) = \nu(\bigcup C_n)$.

Nous voyons que la fonction ν est σ-additive; les relations 2°, 3° sont évidentes.

Théorème 2. *Soit $\mathfrak{A}$ une famille non vide de sous-ensembles relativement pseudocompacts de P. Supposons que $\mathfrak{A}$ ait la propriété suivante: si $A \in \mathfrak{A}$, $F \in \mathfrak{F}^*$, $A \cap F = \Phi$, il existe une fonction $f \in Y$ telle que $f(x) = 0$ pour chaque $x \in A$ et $f(x) = 1$ pour chaque $x \in F$* [5]). *Si la fonctionnelle J est continue sur l'espace Z muni de la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $T(\mathfrak{A})$), il existe des ensembles $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ (resp. un nombre naturel N et des ensembles $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{A}$) et une fonction φ σ-additive sur la σ-algèbre $A\mathfrak{L}^*$* [6]), *où*

---

[4]) Ce lemme est une conséquence facile du théorème 4 de [1].

[5]) Par exemple, la famille de tous les ensembles A dénombrablement compacts $(A \subset P)$ jouit de cette propriété.

[6]) $A\mathfrak{L}^*$ est la famille de tous les ensembles $A \cap B$, où $B \in \mathfrak{L}^*$.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \left(resp.\ A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right),$$

tels que la formule

$$J(f) = \int_A f d\varphi \tag{5}$$

soit vérifiée pour chaque $f \epsilon Z$.

Si, réciproquement,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (resp.\ A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n),$$

où $A_n \epsilon \mathfrak{A}$, et si φ est une fonction σ-additive finie sur $A\mathfrak{L}^*$, la fonctionnelle J, définie par la relation (5), *est continue par rapport à la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$ (resp. $T(\mathfrak{A})$).*

Démonstration. Soit J une fonctionnelle non négative, continue sur l'espace Z, muni de la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$. D'après le théorème 1, il existe une mesure μ sur $\mathfrak{L}^*$ vérifiant l'égalité

$$J(f) = \int_P f d\mu$$

pour chaque $f \epsilon Z$; de plus, il existe encore des ensembles $A_1, A_2, \ldots \epsilon \mathfrak{A}$ et des nombres positifs $a_1, a_2, \ldots$ ($a_n \to \infty$) tels que la relation $J(f) < 1$ soit valable pour chaque $f \epsilon U = U(A_1, A_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots)$. Soit

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

et F un ensemble arbitraire de la famille $\mathfrak{F}^*$ tel que $F \frown A = \Phi$.

La supposition $\mu(F) > 0$ mène à une contradiction. En effet, il existe un indice p tel que $a_r > \left(\mu(F)\right)^{-1}$ pour chaque $r > p$; ensuite, nous pouvons trouver une fonction $f \epsilon Y$ qui satisfait aux conditions $f(x) = 0$ pour chaque

$$x \epsilon \bigcup_{n=1}^{p} A_n$$

et $f(x) = 1$ pour chaque $x \epsilon F$. Nous pouvons supposer $0 \leqslant f \leqslant 1$. Si $g = f\left(\mu(F)\right)^{-1}$, on a évidemment

$$J(g) = \int_P g d\mu \geqslant \int_F g d\mu = 1;$$

or le choix de l'ensemble U entraîne l'inégalité $J(g) < 1$. Cette contradiction montre que $\mu(F) = 0$ pour chaque ensemble $F \epsilon \mathfrak{F}^*$, où $F \frown A = \Phi$.

Soit maintenant J une fonctionnelle arbitraire continue sur l'espace Z muni de la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$. D'après le lemme 3, on a $J = J_+ - J_-$, où

J_+, J_- sont des fonctionnelles non négatives, continues par raport à la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$. Il existe alors des mesures μ_+, μ_- sur $\mathfrak{L}^*$ vérifiant les relations

$$J_+(f) = \int_P f d\mu_+, \quad J_-(f) = \int_P f d\mu_-$$

pour chaque $f \in Z$; il existe encore des ensembles $A_n^+, A_n^- \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, \dots)$ tels que $\mu_+(F) = 0$ pour chaque $F \in \mathfrak{F}^*$, où

$$F \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^+\right) = \Phi,$$

et $\mu_-(F) = 0$ pour chaque $F \in \mathfrak{F}^*$ où

$$F \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^-\right) = \Phi.$$

Posons $A = A_1^+ \cup A_1^- \cup A_2^+ \cup A_2^- \cup \dots$ Si $F \in \mathfrak{F}^*$, $F \cup A = \Phi$, on a évidemment $\mu_+(F) = 0$, $\mu_-(F) = 0$. D'après le lemme 5, il existe des mesures ν_+, ν_- sur la σ-algèbre $\mathfrak{L}^A$ telles que $\nu_+(B) = \mu_+(B)$, $\nu_-(B) = \mu_-(B)$ pour chaque $B \in \mathfrak{L}^*$ et $\nu_+(P-A) = \nu_-(P-A) = 0$. On obtient ainsi

$$J_+(f) = \int_P f d\mu_+ = \int_P f d\nu_+ = \int_A f d\nu_+, \quad J_-(f) = \int_A f d\nu_-$$

pour chaque $f \in Z$. En posant $\varphi(C) = \nu_+(C) - \nu_-(C)$ $(C \in A\mathfrak{L}^* \subset A\mathfrak{L}^A)$, nous avons

$$J(f) = J_+(f) - J_-(f) = \int_A f d\varphi \quad (f \in Z).$$

Le lemme 1 entraîne, réciproquement, que chaque fonctionnelle de cette forme est continue sur l'espace Z muni de la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$. Le théorème est ainsi démontré pour la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$; la démonstration pour la topologie $T(\mathfrak{A})$ est analoque.

Théorème 3. *Soit P un espace topologique localement compact de Hausdorff, qui est la réunion d'une famille dénombrable de sous-ensembles compacts. Supposons que la fonctionnelle J (sur Z) ait la propriété suivante: si $f_n \in Z$ $(n = 1, 2, \dots)$ et si $f_n(x) \to 0$ uniformément sur chaque ensemble relativement pseudocompact, on a $J(f_n) \to 0$. Dans ce cas, il existe un ensemble compact $K \in \mathfrak{F}^*$ et une fonction φ σ-additive sur $\mathfrak{L}^*$ telle que l'on ait*

$$J(f) = \int_K f d\varphi \quad \textit{pour chaque} \quad f \in Z.$$

Démonstration. Soit

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

où les ensembles K_n sont compactes. Chaque espace localement compact de Hausdorff est complétement régulier; on en déduit facilement qu'il existe des fonctions $f_n \epsilon Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ telles que $f_n(x) > 0$ pour chaque $x \epsilon K_n$ et que les fermetures des ensembles $H_n = E[x; f_n(x) > 0]$ soient compactes. Ensuite, nous pouvons suppposer $0 \leqslant f_n \leqslant 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Si l'on pose

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

on a $f(x) > 0$ pour chaque $x \epsilon P$ et $f(x) \leqslant 2^{-n}$ pour

$$x \epsilon P - \bigcup_{k=1}^{n} H_n.$$

La fonction $g = 1/f$ appartient à Y et satisfait aux conditions

$$g(x) \geqslant 2^n, \qquad (x \epsilon P - \bigcup_{k=1}^{n} H_n, \; n = 1, 2, \ldots).$$

Soit $B_n = E\,[x; g(x) \leqslant n]$. La relation

$$B_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} H_k$$

entraîne que B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ est compact. Soit $\mathfrak{A}$ la famille de tous les sous-ensembles relativement pseudocompactes de P.

Si $U = U(A_1, \ldots, A_N, a_1, \ldots, a_N) \epsilon \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, il existe un indice n tel que $g(x) < n$ pour chaque

$$x \epsilon \bigcup_{k=1}^{N} A_k$$

et que $1/n < a_k$ pour $k = 1, \ldots, N$; on a alors $U \supset U(B_n, 1/n)$. On en conclut que les ensembles $U(B_n, 1/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ forment une base de voisinages de zéro par rapport à la topologie $T(\mathfrak{A})$. Chaque fonctionnelle J qui jouit de la propriété énoncée dans le théorème est donc continue sur l'espace Z muni de la topologie $T(\mathfrak{A})$. Nous voyons en même temps que $T(\mathfrak{A}) = T(\mathfrak{L})$, où $\mathfrak{L} = \{B_1, B_2, \ldots\}$.

Le théorème 3 est maintenant une conséquence facile du théorème 2.

Remarque 1. Si nous supprimions l'hypothèse que l'espace P est la réunion d'une famille dénombrable de sous-ensembles compacts, le théorème 3 deviendrait faux, comme le montre l'exemple suivant: Soit P l'espace de tous les nombres ordinaux dénombrables. Si f est une fonction continue sur P, il existe un nombre réel c et un nombre ordinal $a \epsilon P$ tels que $f(x) = c$ pour chaque $x > a$. À chaque fonction f correspond ainsi un nombre c. On peut définir maintenant une fonctionnelle J sur l'ensemble Z (dans ce cas, on a naturellement $Z = Y$) par la formule $J(f) = c$. Si $f_n \in Z$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et si $f_n(x) \to 0$ pour chaque $x \in P$, il existe un point $a \in P$ et des nombres c_n tels que $f_n(x) = c_n$ pour chaque $x \geqslant a$, d'où $J(f_n) = c_n = f_n(a) \to 0$; pourtant on ne peut pas représenter la fonctionnelle J comme une intégrale sur un sous-ensemble compact de P.

Remarque 2. Ce mémoire a été écrit à l'instigation de M. W. Orlicz. Les théorèmes que je viens de démontrer sont une certaine généralisation du théorème 1 de [5] (où P est un intervalle ouvert).

Travaux cités

[1] J. Łoś and E. Marczewski, *Extensions of measure*, Fundamenta Mathematicae 36 (1949), p. 267-276.

[2] Ян Маржик, *Представление функционала в виде интеграла*, Чехословацкий математический журнал 5 (80) (1955), p. 467-487.

[3] J. Mařík, *Vrcholy jednotkové koule v prostoru funkcionál na daném polouspořádaném prostoru*, Časopis pro pěstování matematiky 79 (1954), p. 3-40.

[4] — *Baireova a Borelova míra*, Časopis pro pěstování matematiky 81 (1956), p. 431-450.

[5] J. Musielak and W. Orlicz, *Linear functionals over the space of functions continuous in an open interval*, Studia Mathematica 15 (1956), p. 216-224.

Reçu par la Rédaction le 23. 1. 1956